2.13 ASINTOTI

Un "asintoto", per una funzione $y = f(x)$, è una retta alla quale il grafico della funzione "si avvicina indefinitamente", "si avvicina di tanto quanto noi vogliamo", nel senso precisato dalle tre definizioni che seguono.

Distinguiamo fra *tre* tipi di asintoti: verticali, orizzontali, obliqui.

Asintoti verticali

La retta verticale $x = x_0$ è "asintoto verticale" per la funzione $y = f(x)$ se e solo se **la f tende all'infinito quando x tende a x_0,** ossia

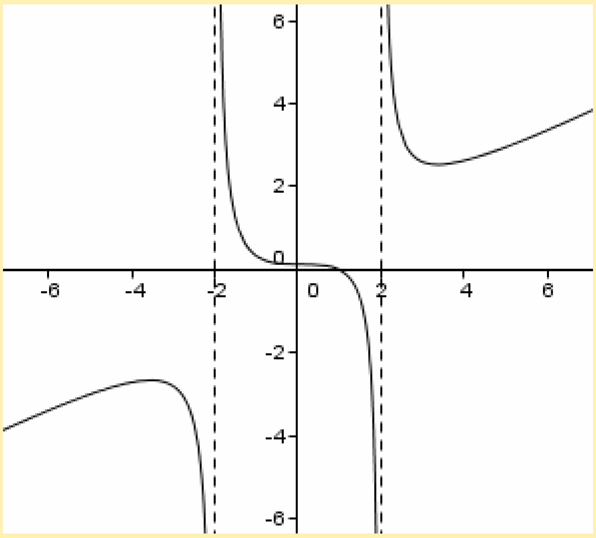
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Nella figura, è rappresentata la funzione

$$y = \frac{x^3 - 1}{2x^2 - 8}$$

coi suoi due asintoti verticali: le rette $x = -2$ e $x = 2$

fig. 20a



Può accadere che sia infinito solo il limite sinistro, o solo il limite destro, nel qual caso si parla di **"asintoto verticale sinistro" o "destro", rispettivamente.**

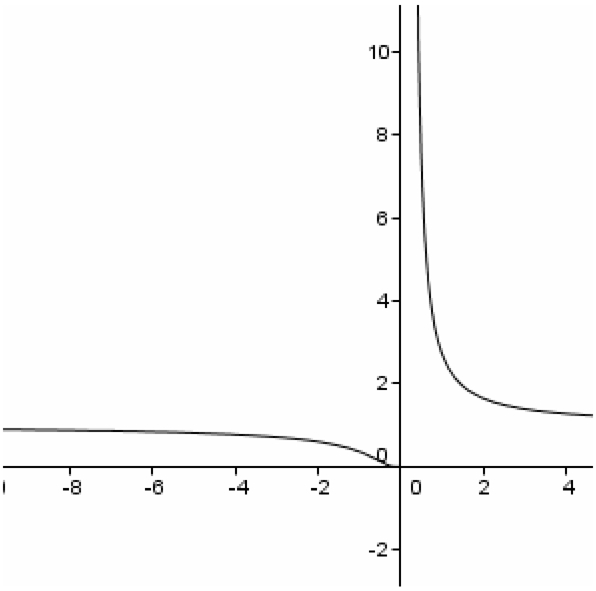
Nella figura è rappresentata la funzione

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

per la quale la retta $x = 0$ è **asintoto verticale unilaterale** (precisamente: destro) in quanto

$$\lim_{x \to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0^+ \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

fig. 20b



INDICAZIONI PER LA RICERCA DEGLI ASINTOTI VERTICALI

Andiamo a considerare (se ve ne sono) le ascisse che costituiscono "interruzioni" del dominio, o (caso poco frequente) le ascisse nelle quali la funzione, pur essendo definita, presenta una discontinuità. Calcoliamo quindi il limite della nostra funzione, al tendere di x a ciascuna di tali ascisse. Quando il limite (bilaterale o unilaterale) è infinito, ecco che avremo individuato un asintoto verticale.

Asintoti orizzontali

La retta orizzontale $y = k$ è "asintoto orizzontale"
per la funzione $y = f(x)$
se $f(x)$ tende a k quando x tende all'infinito,
ossia

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$$

Nella figura, è rappresentata la funzione

$$y = \frac{x^2 - 5}{x^2 + 1}$$

col suo asintoto orizzontale "bilaterale" $y = 1$.

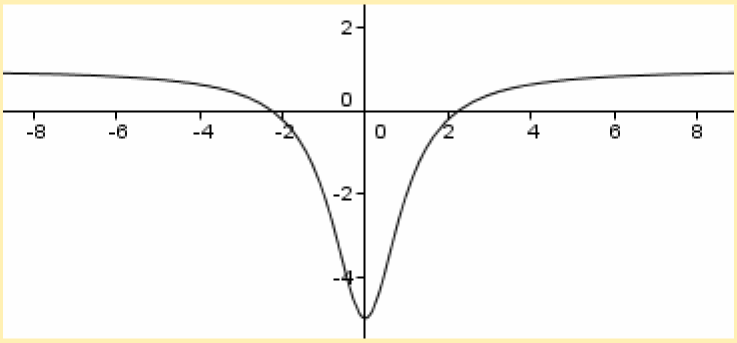


fig. 21

Si possono anche avere
asintoti orizzontali "unilaterali".

Ad esempio, la funzione rappresentata in figura 21b è

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}$$

e poiché risulta

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -2/3$$

possiamo dire che per questa funzione la retta $y = 0$ fa da asintoto orizzontale "destro", e la retta $y = -2/3$ fa da asintoto orizzontale "sinistro".

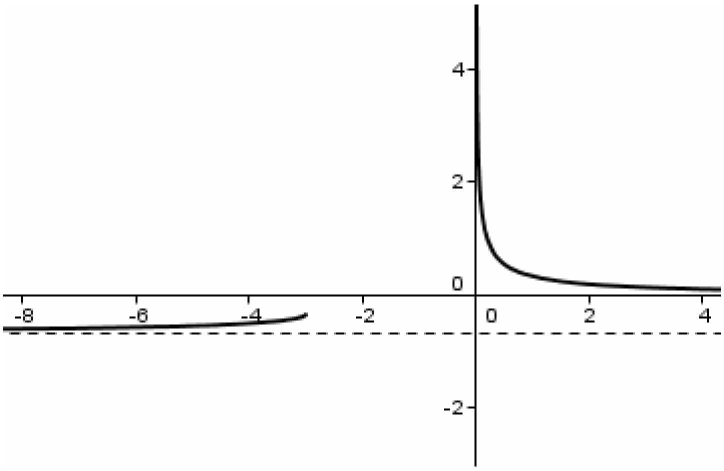


fig. 21b

La figura 21c qui a fianco mostra la funzione

$$y = xe^x$$

che presenta soltanto un asintoto orizzontale sinistro: la retta $y = 0$.

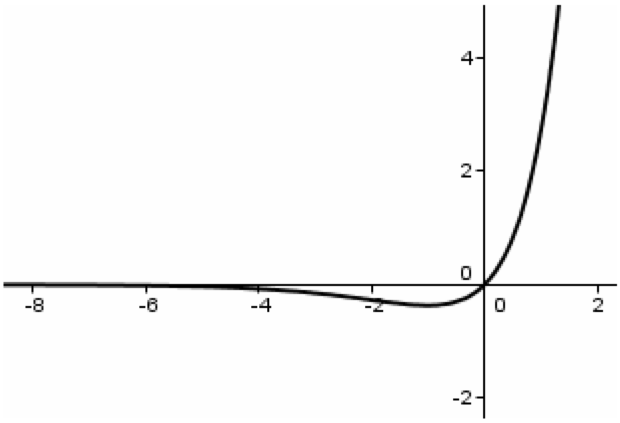


fig. 21c

INDICAZIONI PER LA RICERCA DEGLI ASINTOTI ORIZZONTALI

Calcoliamo il limite della funzione data, per x che tende a $-\infty$ e per x che tende a $+\infty$ (ovviamente, ciò ha senso soltanto se il dominio della funzione è illimitato verso sinistra, o, rispettivamente, verso destra).
Se il limite che si trova è finito, ecco individuato un asintoto orizzontale.
Se invece tale limite non esiste oppure è infinito, niente asintoto orizzontale; tuttavia, in caso di limite infinito, potrà eventualmente esserci un asintoto obliquo.

Asintoti obliqui

La retta obliqua $y = mx + q$ è
"asintoto obliquo"
per la funzione $y = f(x)$
se e solo se la differenza
$f(x) - [mx + q]$
(ossia la differenza fra le ordinate dei due punti, sul grafico della funzione e sulla retta, aventi la stessa ascissa x),
tende a zero quando x tende all'infinito:
$$\lim_{x \to \infty} BA = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx - q] = 0$$
Un asintoto obliquo
può eventualmente anche essere "unilaterale"
(= soltanto "sinistro" o soltanto "destro")

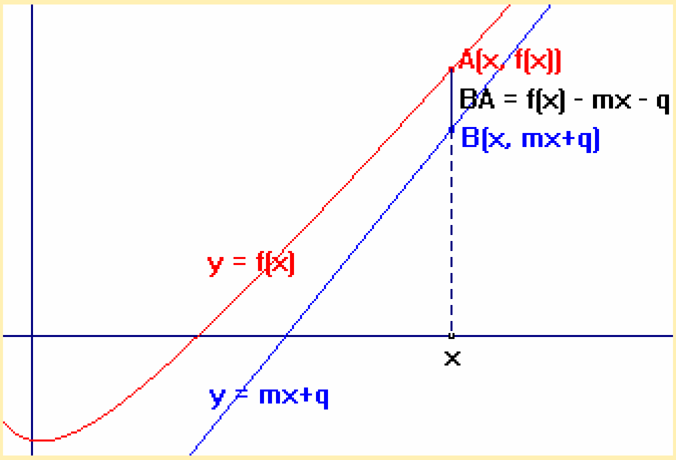


fig. 22a

Nella figura 22b è rappresentata la funzione
$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$$
che ammette come asintoto obliquo (bilaterale)
la retta $y = x - 4$
Infatti
$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} - (x - 4) \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{5}{x + 2} = 0$$

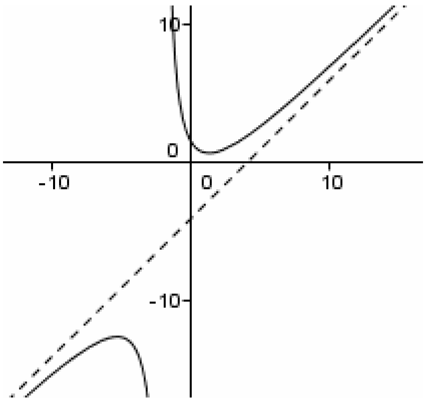


fig. 22b

INDICAZIONI PER LA RICERCA DEGLI ASINTOTI OBLIQUI

Innanzitutto, avrà senso ricercare un eventuale asintoto obliquo bilaterale/destro/sinistro per la funzione $y = f(x)$
soltanto se si è constatato che la funzione tende a infinito quando x tende a $\infty / +\infty / -\infty$
Dopodiché, si ricorre al seguente

Teorema 11
La retta obliqua $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la funzione $y = f(x)$ se e solo se

a) esiste finito e diverso da zero il $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$

b) esiste finito il $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx] = q$ (dove m è il valore al quale si riferisce il punto a)

Pertanto per la ricerca si procede come segue:

1. si calcola il $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$;
   se si trova che tale limite non esiste oppure è infinito oppure è nullo, allora l'asintoto obliquo non c'è;
   se invece tale limite è finito e diverso da zero, lo si indica con m …
2. … e poi si va a calcolare il $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]$;
   se si trova che tale limite non esiste oppure è infinito, allora l'asintoto obliquo non c'è;
   se invece tale limite è finito, lo si indica con q …
3. … e a questo punto resta stabilito che la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la $f(x)$.

ESEMPIO

$$\boxed{y = f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x}$$

Abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

per cui la f ammette come ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO la retta y=1.

Invece

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$$

per cui

$\boxed{\text{la } f \text{ POTREBBE avere un asintoto obliquo sinistro}}$.

Calcoliamo il

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

e constatiamo che

$\boxed{\text{tale limite vale } -2}$.

Poiché

$\boxed{\text{tale limite è finito e diverso da } 0}$,

ha senso continuare.

Poniamo dunque

$$\boxed{m = -2}$$

e calcoliamo il

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx]} = \lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2x} - x - (-2x)\right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2x} + x\right] = \ldots \boxed{= -1}$$

Avendo trovato che

$\boxed{\text{tale limite esiste finito}}$,

possiamo porre

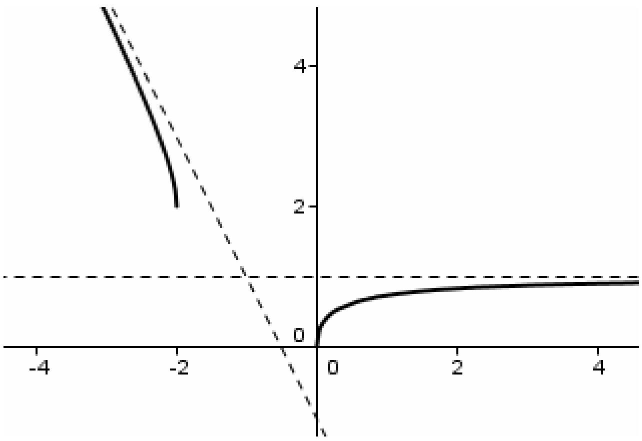
$$\boxed{q = -1}$$

e affermare che la retta

$\boxed{\text{la retta } y = -2x - 1 \text{ è ASINTOTO OBLIQUO SINISTRO}}$

per la nostra funzione.

Ed ecco il grafico!!! **Fig. 22c**



OSSERVAZIONE 1

nell'esporre il Teorema 11 e le successive indicazioni per la ricerca degli asintoti obliqui,
abbiamo fatto tendere *x* a "infinito";
se si pensa di far tendere invece *x* a "più infinito"
o, rispettivamente, "meno infinito",
tutto il discorso rimane valido
e l'asintoto eventualmente trovato, invece di essere "bilaterale", è soltanto "unilaterale".
A dire il vero, abbiamo già dato tutto ciò per acquisito quando abbiamo svolto l'esempio precedente.

OSSERVAZIONE 2

Per il calcolo del $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$,

che, poiché la f(x) tende a infinito, si presenterà come forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$,

si potrà utilizzare, volendo, il **Teorema di De l'Hospital.**

Tale teorema assicura che
$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to\infty} f'(x)$ (*ammesso che* esista il $\lim_{x\to\infty} f'(x)$)
e tutto ciò ha un preciso riscontro geometrico:

se esiste il limite, per *x* che tende all'infinito, della derivata prima $f'(x)$, ciò significa che la "pendenza" della *f*, quando *x* tende all'infinito, tende ad un determinato valore; ora è del tutto evidente che, se la funzione ammette un asintoto obliquo, il valore al quale si avvicina la pendenza della $f(x)$ debba coincidere con la pendenza che è propria dell'asintoto, ossia col coefficiente angolare m dell'asintoto stesso.

OSSERVAZIONE 3

Per certe funzioni, accade che si verifichi la prima delle due condizioni a), b), ma non la seconda.
In questi casi, dunque, esiste finito e diverso da zero il $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$
ma non esiste, oppure è infinito, il $\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$

Si parla allora di una "**direzione asintotica" *m*, senza che ci sia asintoto**.

- Esempio:
  la funzione $y = x + \ln x$ ammette, per $x \to +\infty$, la direzione asintotica $m = 1$, perché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right) = 1$$

  ma non ammette asintoto obliquo, in quanto

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} [x + \ln x - 1\cdot x] = \lim_{x\to+\infty} (\ln x) = +\infty$$

Dimostrazione del teorema 11

PRIMA PARTE

Facciamo vedere che se la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la $f(x)$,allora risulta

I. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$

II. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - mx \right] = q$

Supponiamo dunque che la retta $y = mx + q$ sia asintoto obliquo per la funzione $y = f(x)$.

Allora, per definizione di asintoto obliquo, si avrà

$$\lim_{x\to\infty} \left[f(x) - mx - q \right] = 0$$

e dunque, a maggior ragione,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} = 0$$

da cui:

$$0 = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{mx}{x} - \frac{q}{x} \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - m - \lim_{x\to\infty} \frac{q}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - m \quad \left(il \lim_{x\to\infty} \frac{q}{x} \text{ è } 0 \right)$$

Ma da

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - m$$

si ricava appunto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \,.$$

Essendo poi

$$\lim_{x\to\infty} \left[f(x) - mx - q \right] = 0$$

sarà anche

$$\lim_{x\to\infty} \left[f(x) - mx \right] = q$$

La dimostrazione di questa PRIMA PARTE è così completata.

SECONDA PARTE

Supponiamo che esistano finiti i due limiti

I. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$

II. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - mx \right] = q$

Vogliamo dimostrare che, considerata la retta $y = mx + q$, risulta

$$\lim_{x\to\infty} \left[f(x) - mx - q \right] = 0$$

e ciò significherà che la $y = mx + q$ fa da asintoto obliquo per la $f(x)$

In effetti, molto facilmente:

$$\lim_{x\to\infty} \left[f(x) - mx - q \right] = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - mx \right] - q = q - q = 0$$

e con ciò la dimostrazione è davvero completata.