# 3) ♬ ♬ ♬ RIASSUNTO "PRATICO" DELLE IDEE FONDAMENTALI ESEMPI SVOLTI ED ESERCIZI

IN GENERALE

Supponiamo di voler determinare
le caratteristiche e il grafico di una funzione,
data la sua equazione $y = f(x)$.

Cosa occorrerà fare?

**0)**
**Può darsi che il grafico della funzione *f* da studiare si possa ricavare con "manipolazioni"**
a partire dal grafico
(già noto o comunque molto più facile da tracciare)
di una funzione più semplice $g$.
Ad esempio, ciò avviene se $f$ è della forma

$$g(x)+k,\ k\cdot g(x),\ g(x+k),\ g(kx),$$
$$a\cdot g(x)+b,\ g(ax+b),\ \frac{1}{g(x)},\ |g(x)|,$$
$$\sqrt[n]{g(x)},\ [g(x)]^n,\ a^{g(x)},\ \log_a g(x),\ ecc.$$

Bisogna comunque valutare *se valga la pena*
di impostare un lavoro di questo tipo,
tenendo conto della difficoltà delle manipolazioni;
a volte, questo approccio "dà subito un'idea" - utilissima -
dell'andamento della *f*, ricavato da quello della *g*,
ma per la determinazione dei massimi, minimi ecc.
sarà poi necessario ricorrere alle tecniche
esposte ai punti successivi
[Approfondimento 1, pag. 53]

**1)**
**Determinare il dominio *D* della funzione**

**2)**
**Chiedersi se la funzione**
**è pari**: $f(-x) = f(x)$
e quindi ha grafico simmetrico rispetto all'asse $y$
**dispari**: $f(-x) = -f(x)$
e quindi ha grafico simmetrico rispetto all' origine
**oppure non è né pari né dispari**.

Nel caso la funzione sia pari o dispari,
nelle varie fasi dello studio potremo e dovremo
tenere presente la simmetria riscontrata;
potremmo addirittura decidere di studiare la funzione
solo per $x \ge 0$ e poi completarne il grafico per simmetria
(la convenienza di procedere in questo modo
dipende dalle nostre preferenze,
e dalla particolare funzione di volta in volta considerata).

**Chiedersi se la funzione è periodica**;
in caso affermativo, basterà studiarla
su di un intervallo di ampiezza T
(essendo T il periodo).
[Approfondimento 2, pag. 53]

AD ESEMPIO …

$$\boxed{y = \frac{x^2-3x+2}{x^2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}}$$

Nel nostro esempio,
la costruzione del grafico
"per manipolazione di una funzione-base"
non è, evidentemente, realizzabile

$x \ne 0 \qquad D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

La funzione del nostro esempio

- non è pari perché $f(-x) \ne f(x)$
- non è dispari perché $f(-x) \ne -f(x)$
- e non è periodica.

### 3) Determinare le intersezioni con gli assi

Per l'eventuale intersezione con l'asse **verticale**
**si porrà** $x=0$
(se, beninteso, l'ascissa 0 appartiene al dominio!)
**e si ricaverà il corrispondente valore di** $y$

Per le eventuali intersezioni con l'asse **orizzontale**
**si dovrà porre** $y=0$**, ossia**
**risolvere l'equazione** $f(x)=0$.

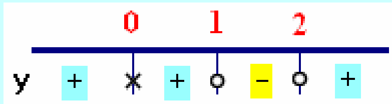
Nel nostro esempio,
il grafico della funzione
non interseca l'asse verticale:
essendo $D=\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$
non si può infatti porre $x=0$

$$y=0 \text{ quando } \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}=0$$
$$x=1 \vee x=2$$
$$(1,0) \quad (2,0)$$

### 4) Studiare il segno della funzione

mediante la disequazione $f(x)>0$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}>0$$
$$x<1 \; ma \; x\neq 0, \; x>2$$




### 5) Calcolare i limiti ai confini del dominio

Così facendo si troveranno anche,
se esistono,
gli asintoti verticali ed orizzontali

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x+2}{x^2}=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2}=1$$

Abbiamo dunque riconosciuto
che la nostra funzione
ha un asintoto orizzontale bilaterale
(la retta $y=1$)
e ha un asintoto verticale
(la retta di equazione $x=0$, ossia l'asse $y$)

### 6) Ricercare gli eventuali asintoti obliqui

Osserviamo che, evidentemente,
avrà senso ricercare un eventuale asintoto obliquo
per una funzione $y=f(x)$
soltanto se si è constatato che la funzione
tende a infinito quando $x$ tende a infinito.

Ricordiamo il Teorema sul quale si basa il procedimento
di ricerca degli eventuali asintoti obliqui.

Teorema:

la retta obliqua $y=mx+q$ è asintoto obliquo
per la funzione $y=f(x)$ se e solo se

a) esiste finito e diverso da zero il $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m$

b) esiste finito il $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=q$

[Approfondimento 3, pag. 53]

La funzione del nostro esempio
non ha asintoti obliqui
(ha invece, come abbiamo visto,
un asintoto orizzontale bilaterale).

**Ricercare**
**le eventuali intersezioni del grafico**
**con gli asintoti**.

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2}=1 \;\to\; x=\frac{2}{3}$$

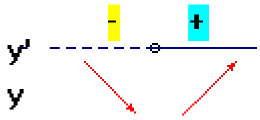
$f(x)$ interseca
il suo asintoto orizzontale $y=1$
nel punto $(2/3,1)$

**7)**
**Calcolare la derivata prima $y' = f'(x)$.**

**Risolvere l'equazione $f'(x) = 0$**
**per trovare i cosiddetti "punti stazionari"**
( = punti in cui il grafico ha retta tangente orizzontale).

**Studiare il segno della derivata prima**
con la disequazione $f'(x) > 0$
stabilendo così gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente

$y' > 0 \rightarrow$ *retta tang. in salita* $\rightarrow$ *funz. crescente*
$y' < 0 \rightarrow$ *retta tang. in discesa* $\rightarrow$ *funz. decrescente*




e **determinando i punti di massimo relativo e minimo relativo interni al dominio, nonché i punti di flesso orizzontale** (ascendente o discendente).

Teniamo presente che
**per l'analisi dei punti stazionari esiste anche la risorsa del "metodo della derivata seconda o delle derivate successive".**

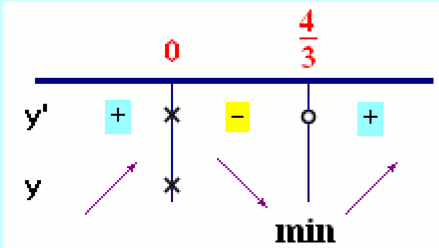
$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

$$y' = \frac{(2x-3)\cdot x^2 - (x^2 - 3x + 2)\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{3x^2 - 4x}{x^4} = \frac{3x-4}{x^3}$$

$$y' = 0 \leftrightarrow \frac{3x-4}{x^3} = 0 \quad x = \frac{4}{3}$$

$$y' > 0 \leftrightarrow \frac{3x-4}{x^3} > 0 \quad x < 0 \vee x > \frac{4}{3}$$




$$x = \frac{4}{3} \rightarrow y = \ldots = -\frac{1}{8} \quad \min\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{8}\right)$$

**8)**
**Calcolare la derivata seconda $y'' = f''(x)$.**

**Risolvere l'equazione $f''(x) = 0$.**
**Quest'ultima fornisce, in generale, le ascisse dei punti di flesso**;
ricordiamo però che
**non tutti i punti in cui si annulla la $y''$ risultano poi di flesso;**
e, d'altra parte
(*caso non frequentissimo, ma possibile: basti pensare ai flessi verticali*),
si possono avere pure dei flessi in cui la $y''$ non si annulla.

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

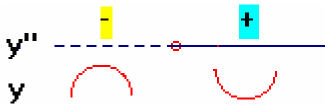
$$y' = \frac{3x-4}{x^3}$$

$$y'' = \frac{3\cdot x^3 - (3x-4)\cdot 3x^2}{x^6} =$$

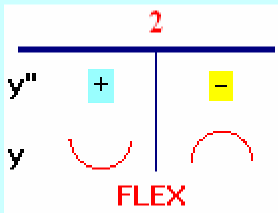
$$= \frac{-6x^3 + 12x^2}{x^6} = \frac{-6x + 12}{x^4}$$

**Studiare il segno della derivata seconda**,
mediante la disequazione $f''(x) > 0$.
Tale studio permetterà di stabilire gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa:

$y'' > 0 \rightarrow y'$ *crescente* $\rightarrow$ *funzione convessa*
$y'' < 0 \rightarrow y'$ *decrescente* $\rightarrow$ *funzione concava*




$$\frac{-6x + 12}{x^4} > 0 \qquad x < 2$$



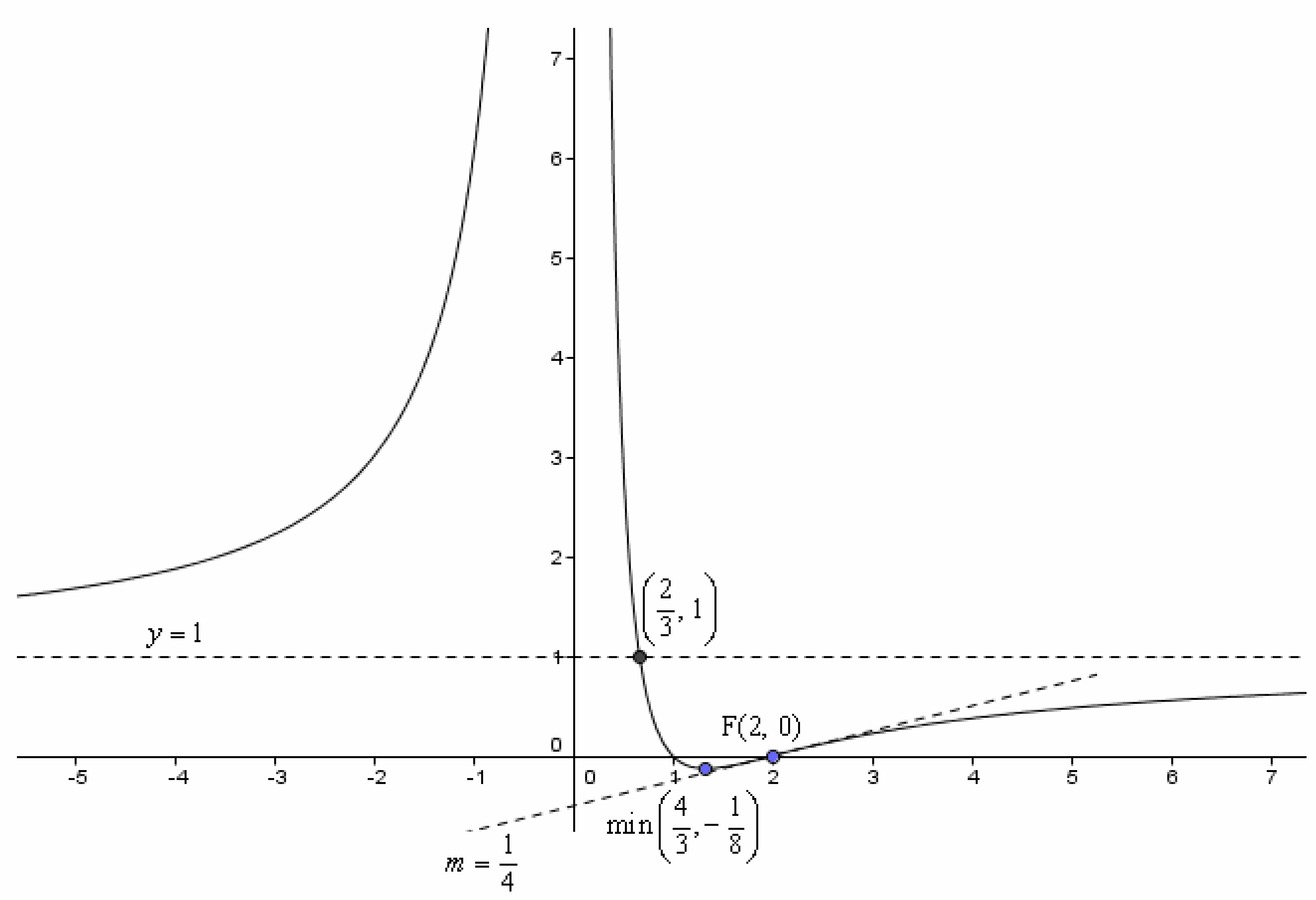

$$x = 2 \rightarrow y = 0 \quad \mathrm{F}(2,\, 0)$$

Può talvolta essere conveniente,
per la ricerca dei flessi non orizzontali,
il **"metodo delle derivate successive"**.

In corrispondenza dei punti di flesso a tangente non orizzontale,
converrà calcolare il valore della derivata prima,
per avere il coefficiente angolare della tangente di flesso,
e **disegnare nel grafico "un pezzetto" di** tale **tangente di flesso**, con l'inclinazione esatta,
**segnando accanto ad essa il valore del suo coefficiente angolare *m***.

$$y'(2) = \left[\frac{3x-4}{x^3}\right]_{x=2} = \frac{6-4}{8} = \frac{1}{4}$$

Ed ecco il grafico!!!




Approfondimento 1

*Sono facilmente costruibili per "manipolazione" i grafici di funzioni come le seguenti:*

$$y = 2\ln(x-5)\,; \quad y = \sqrt{sen(3x)}\,; \quad y = \frac{1}{x^2-4}\,; \ \ldots$$

Approfondimento 2

*Una funzione goniometrica è periodica.*
*Tieni presente che, se ad esempio si lavora sull'intervallo* $[0;\,2\pi]$,
*sarà sempre conveniente, nei vari schemi,*
*andare anche "leggermente a sinistra di 0" e "leggermente a destra di* $2\pi$ *"*

Approfondimento 3

*Un esempio di funzione dotata di asintoto obliquo:*

$$y = g(x) = \frac{x^2}{x-4}$$

*Infatti si ha*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4x} = 1 = m$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[g(x)-mx\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-4} - 1\cdot x\right] = 4 = q$$

*La retta* $y = x+4$ *è asintoto obliquo bilaterale per questa funzione*