# Studio di funzione - Esempi svolti

$$\boxed{y = \frac{3}{10}x^5 - x^4 = f(x)}$$

- **Dominio** $= (-\infty, +\infty)$
- **Né pari né dispari**
- **Intersezioni con l' asse *y*:** $x = 0 \to y = 0$

**Intersezioni con l'asse *x***

$$y = 0 \quad \frac{3}{10}x^5 - x^4 = 0; \quad 3x^5 - 10x^4 = 0; \quad x^4(3x-10) = 0; \quad x = 0 \vee x = \frac{10}{3}$$

- **Segno della funzione**

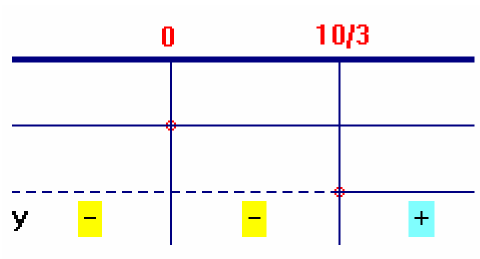
$$y > 0$$

$$\frac{3}{10}x^5 - x^4 > 0; \quad 3x^5 - 10x^4 > 0;$$

$$x^4(3x-10) > 0;$$

$$x^4 > 0 \quad con \quad x \neq 0$$

$$3x - 10 > 0 \quad con \quad x > \frac{10}{3}$$




- **Limiti ai confini del dominio:** $\lim_{x \to \pm\infty} \left( \frac{3}{10}x^5 - x^4 \right) = \pm\infty$
- **Asintoti obliqui:** non ce ne sono. Infatti $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$
- **Derivata prima**

$$y = \frac{3}{10}x^5 - x^4 \to y' = \frac{3}{10} \cdot 5x^4 - 4x^3 = \frac{3}{2}x^4 - 4x^3$$

$$\boxed{y' = \frac{3}{2}x^4 - 4x^3}$$

$$y' = 0 \quad \frac{3}{2}x^4 - 4x^3 = 0; \quad 3x^4 - 8x^3 = 0; \quad x^3(3x-8) = 0; \quad x = 0 \vee x = \frac{8}{3}$$

$$x = 0 \to y = 0$$

$$x = \frac{8}{3} \to y = \frac{3}{10}\left(\frac{8}{3}\right)^5 - \left(\frac{8}{3}\right)^4 = \left(\frac{8}{3}\right)^4 \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{8}{3} - 1\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^4 \left(\frac{4}{5} - 1\right) = -\frac{1}{5}\left(\frac{8}{3}\right)^4 \approx -10{,}11$$

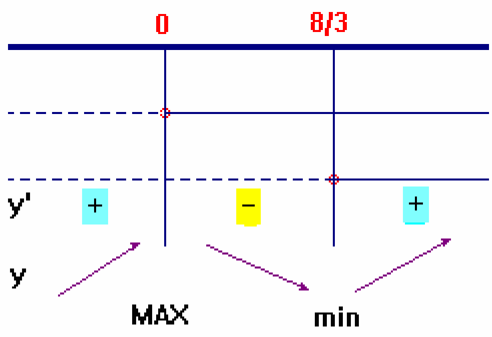
$$y' > 0$$

$$\frac{3}{2}x^4 - 4x^3 > 0; \quad 3x^4 - 8x^3 > 0;$$

$$x^3(3x-8) > 0;$$

$$x^3 > 0 \quad con \quad x > 0$$

$$3x - 8 > 0 \quad con \quad x > \frac{8}{3}$$




$MAX(0,0) \qquad \min(8/3, -10{,}1...)$

❑ **Derivata seconda** $y=\frac{3}{10}x^5-x^4 \qquad y'=\frac{3}{2}x^4-4x^3$

$y''=\frac{3}{2}\cdot 4x^3-12x^2=6x^3-12x^2$

$\boxed{y''=6x^3-12x^2=6x^2(x-2)}$

$y''=0 \qquad 6x^2(x-2)=0 \qquad x=0 \vee x=2$

$x=0 \rightarrow y=0$

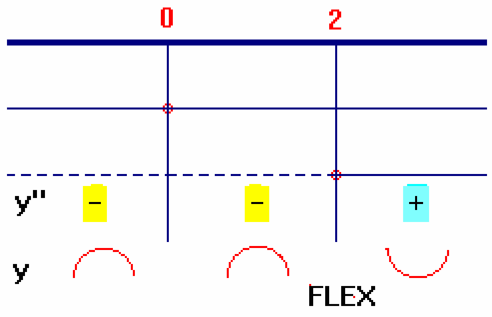
$x=2 \rightarrow y=\frac{3}{10}\cdot 32-16=\frac{48}{5}-16=-\frac{32}{5}=-6,4$

$y''>0$

$6x^2(x-2)>0$

$x^2>0 \quad con \quad x\neq 0$

$x-2>0 \quad con \quad x>2$




$F\left(2,-\frac{32}{5}\right)$

$y'(2)=-8$

$x=0$ è un punto di **concavità**, perché, sebbene sia $y''(0)=0$, la $y''$ NON cambia di segno, ma al contrario si mantiene negativa, nell'attraversamento dell'ascissa 0.
Invece il punto di ascissa 2 segna il passaggio dalla concavità alla convessità ed è perciò un **flesso ascendente**
("ascendente" perché la curva passa dal di sotto al di sopra, rispetto alla retta tangente nel punto di ascissa 2).

Il **coeff. angolare della tangente inflessionale** è $m=y'(2)=\frac{3}{2}\cdot 16-4\cdot 8=24-32=-8$.

La tangente inflessionale è perciò in discesa piuttosto ripida. La sua equazione è:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0); \qquad y+\frac{32}{5}=-8\cdot(x-2); \qquad y=-8x+\frac{48}{5}$

*Ed ecco il grafico della funzione!!!*

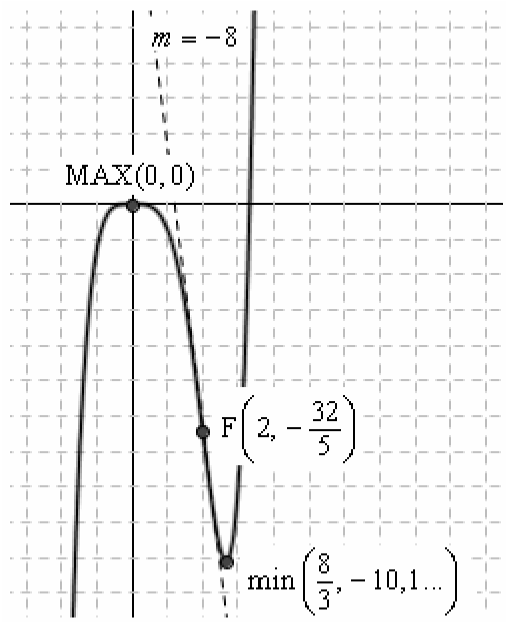
$\boxed{y=\frac{3}{10}x^5-x^4=f(x)}$

$MAX(0,0)$

$\min\left(\frac{8}{3},-10,1...\right)$

$F\left(2,-\frac{32}{5}\right)$

$y'(2)=-8$



$$\boxed{y=\frac{3}{10}x^5-x^3=f(x)}$$

- **Dominio** = $(-\infty,+\infty)$
- **La funzione è dispari:** $f(-x)=-f(x)$
- **Intersezioni con l' asse *y*** $x=0 \to y=0$

  **Intersezioni con l'asse *x*** $y=0$ $\frac{3}{10}x^5-x^3=0;$ $3x^5-10x^3=0;$ $x^3(3x^2-10)=0;$

  $$x=0 \vee x=\pm\sqrt{\frac{10}{3}}\approx\pm1{,}83$$

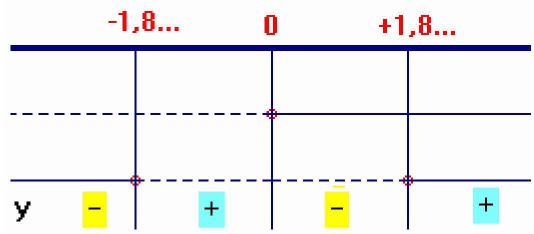
- **Segno della funzione**

  $y>0$ $\frac{3}{10}x^5-x^3>0;$ $3x^5-10x^3>0;$

  $x^3(3x^2-10)>0;$

  $x^3>0$ *con* $x>0$

  $3x^2-10>0$ *con* $x<-\sqrt{\frac{10}{3}} \vee x>\sqrt{\frac{10}{3}}$




- **Limiti ai confini del dominio** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{10}x^5-x^3\right)=\pm\infty$

- **Asintoti obliqui:** Non ce ne sono. Infatti $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$

- **Derivata prima**

  $y=\frac{3}{10}x^5-x^3 \;\to\; y'=\frac{3}{10}\cdot5x^4-3x^2=\frac{3}{2}x^4-3x^2$

  $$\boxed{y'=\frac{3}{2}x^4-3x^2}$$

  $y'=0$ $\frac{3}{2}x^4-3x^2=0;$ $3x^4-6x^2=0;$ $3x^2(x^2-2)=0;$ $x=0 \vee x=\pm\sqrt{2}$

  $x=0 \to y=0$

  $x=\sqrt{2} \to y=\frac{3}{10}\left(\sqrt{2}\right)^5-\left(\sqrt{2}\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)^3\left(\frac{3}{5}-1\right)=-\frac{2}{5}\left(\sqrt{2}\right)^3=-\frac{4}{5}\sqrt{2}\approx-1{,}13$

  $x=-\sqrt{2} \to y=\frac{4}{5}\sqrt{2}$

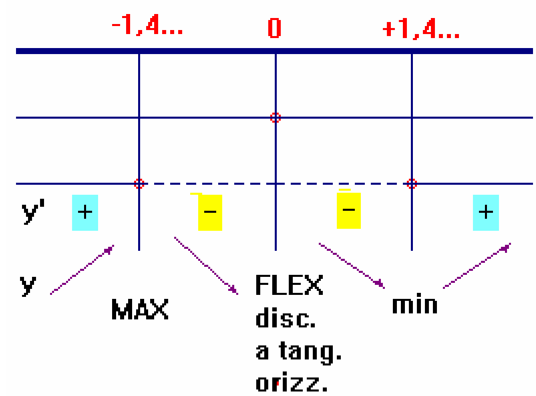
  $y'>0$

  $\frac{3}{2}x^4-3x^2>0;$ $3x^4-6x^2>0;$

  $3x^2(x^2-2)>0;$

  $x^2>0$ *con* $x\neq0$

  $x^2-2>0$ *con* $x<-\sqrt{2} \vee x>\sqrt{2}$




$\mathrm{MAX}\left(-\sqrt{2},\frac{4}{5}\sqrt{2}\right)$ $\mathrm{F}(0,0)$ $\min\left(\sqrt{2},-\frac{4}{5}\sqrt{2}\right)$

- **Derivata seconda**

$$y=\frac{3}{10}x^5-x^3$$

$$y'=\frac{3}{2}x^4-3x^2$$

$$y''=\frac{3}{2}\cdot 4x^3-6x=6x^3-6x$$

$$\boxed{y''=6x^3-6x=6x(x^2-1)}$$

$y''=0 \qquad 6x(x^2-1)=0 \qquad x=0\vee x=-1\vee x=1$

$x=0\rightarrow y=0$

$x=1\rightarrow y=\frac{3}{10}-1=-\frac{7}{10}$

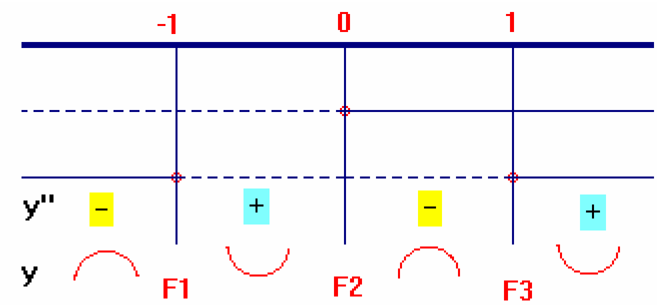
$x=-1\rightarrow y=\frac{7}{10}$

$y''>0$

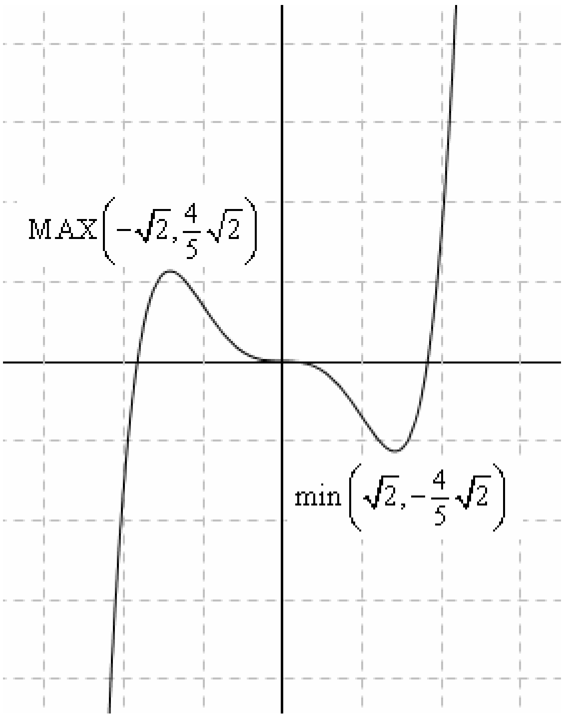
$6x(x^2-1)>0$

$6x>0 \quad con \quad x>0$

$x^2-1>0 \quad con \quad x<-1\vee x>1$




$F_1\left(-1,\frac{7}{10}\right) \qquad y'(1)=-\frac{3}{2} \qquad F_2\,(0,0) \qquad y'(0)=0 \qquad F_3\left(1,\frac{7}{10}\right) \qquad y'(1)=-\frac{3}{2}$




Ed ecco il grafico!!!

$$\boxed{y=\frac{3}{10}x^5-x^3=f(x)}$$

$MAX\left(-\sqrt{2},\frac{4}{5}\sqrt{2}\right)$

$min\left(\sqrt{2},-\frac{4}{5}\sqrt{2}\right)$

$F_1\left(-1,\frac{7}{10}\right) \qquad y'(1)=-\frac{3}{2}$

$F_2\,(0,0) \qquad y'(0)=0$

$F_3\left(1,\frac{7}{10}\right) \qquad y'(1)=-\frac{3}{2}$

$$\boxed{y = \frac{(x+1)(x+3)}{x} = f(x)}$$

- **Dominio** = $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

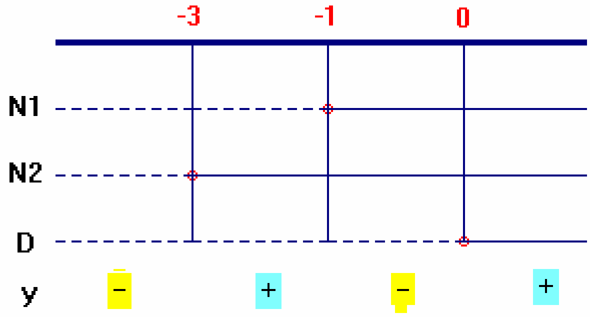
- **La funzione non è né pari, né dispari**

- **Intersezioni con l' asse** ***y***: non ce ne sono (con $x = 0$ la funzione non è definita)
  **Intersezioni con l'asse** ***x*** $\quad y = 0 \quad x = -1 \vee x = -3$

- **Segno della funzione**

$$y > 0 \qquad \frac{\overbrace{(x+1)}^{N1}\overbrace{(x+3)}^{N2}}{\underbrace{x}_{D}} > 0$$

N1 > 0 $\quad$ *con* $x > -1$
N2 > 0 $\quad$ *con* $x > -3$
D > 0 $\quad$ *con* $x > 0$




- **Limiti ai confini del dominio**

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)(x+3)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+4x+3}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{(x+1)(x+3)}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{x^2+4x+3}{x} = \pm\infty$$

- **Eventuali asintoti obliqui**

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)(x+3)}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+4x+3}{x^2} = 1 = m$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[ f(x) - mx \right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left( \frac{x^2+4x+3}{x} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x+3}{x} = 4 = q$$

La retta $y = x + 4$ è perciò asintoto obliquo bilaterale.

Si può verificare che la curva non ha NESSUNA INTERSEZIONE CON L'ASINTOTO:
l'equazione $\frac{x^2+4x+3}{x} = x + 4$ è infatti impossibile.

- **Derivata prima**

$$y' = \frac{d}{dx} \frac{x^2+4x+3}{x} = \frac{(2x+4)\cdot x - (x^2+4x+3)\cdot 1}{x^2} = \frac{x^2-3}{x^2}$$

$$\boxed{y' = \frac{x^2-3}{x^2}}$$

$$y' = 0 \qquad x = \pm\sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3} \to y = \frac{3+4\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}} = \frac{6+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}+12}{3} = 2\sqrt{3} + 4 \approx 7{,}47$$

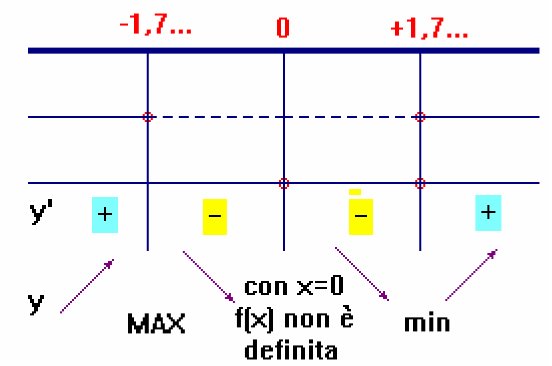
$$x = -\sqrt{3} \to y = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0{,}54$$

$y' > 0$

$\frac{x^2-3}{x^2} > 0$

$\text{N} > 0 \quad con \quad x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$

$\text{D} > 0 \quad con \quad x \neq 0$




$$\text{MAX}\left(-\sqrt{3},\ \underbrace{4-2\sqrt{3}}_{\approx 0,54}\right) \qquad \min\left(\sqrt{3},\ \underbrace{4+2\sqrt{3}}_{\approx 7,47}\right)$$

- **Derivata seconda**

$$y = \frac{(x+1)(x+3)}{x} \qquad y' = \frac{x^2-3}{x^2} \qquad y'' = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-3)\cdot 2x}{x^4} = \frac{6x}{x^4} = \frac{6}{x^3}$$

$$\boxed{y'' = \frac{6}{x^3}}$$

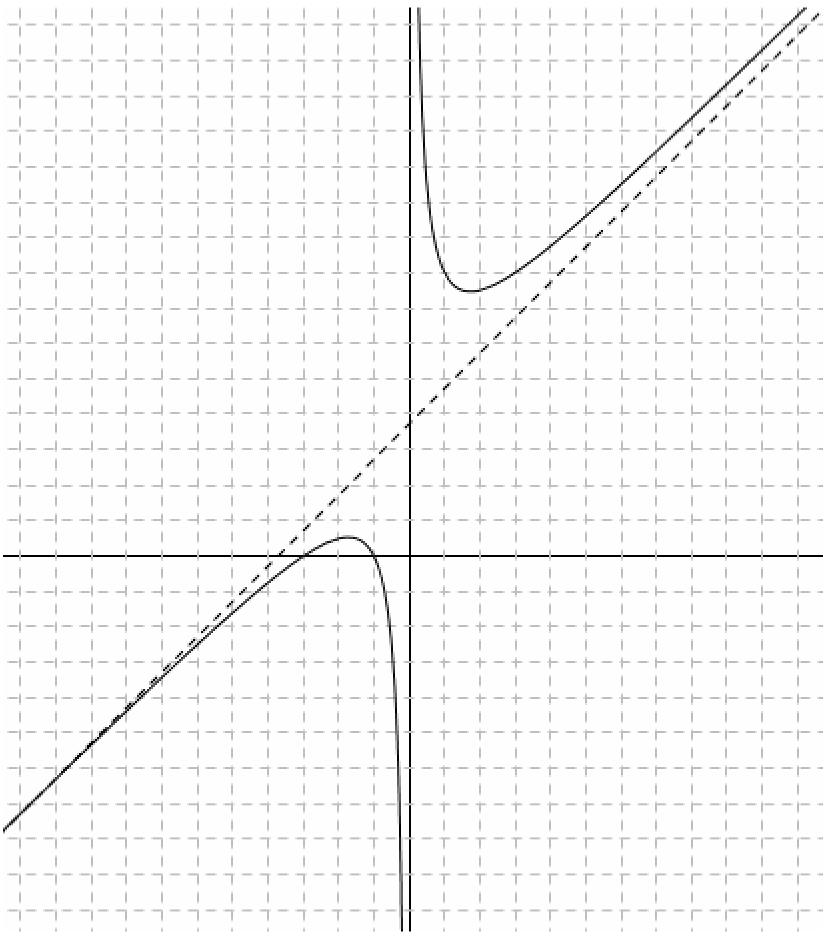
Dunque la $y''$

- non può mai annullarsi;
- è negativa con $x$ negativo, positiva con $x$ positivo.

Quindi la funzione è
concava con $x$ negativo, convessa con $x$ positivo.

Non si hanno flessi.

Ed ecco il grafico!!!



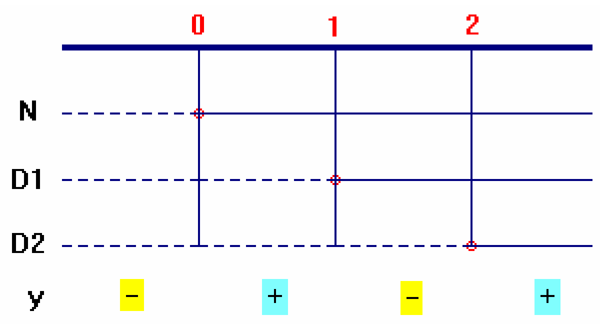
Osserviamo che
la curva di equazione
$$y = \frac{(x+1)(x+3)}{x}$$
è un'**iperbole**.
Infatti
$$y = \frac{(x+1)(x+3)}{x} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow y = \frac{x^2+4x+3}{x} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x^2 - xy + 4x + 3 = 0$$
… e quest'ultima equazione
è della forma
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$
quindi rappresenta una conica.
Essendo poi
$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 0 = +1 > 0,$$
la conica è di tipo iperbolico.

$$\boxed{y = \frac{x}{\underbrace{x^2 - 3x + 2}_{(x-1)(x-2)}} = f(x)}$$

- **Dominio:** $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \qquad (x-1)(x-2) \neq 0 \qquad x \neq 1 \wedge x \neq 2$
  $D = (-\infty,\ 1) \cup (1,\ 2) \cup (2,\ +\infty)$
- **La funzione non è né pari, né dispari**
- **Intersezioni con l' asse *y*** $\quad x = 0 \to y = 0$
  **Intersezioni con l'asse *x*** $\quad y = 0 \text{ con } x = 0$
  Perciò, in definitiva, l'unica intersezione con gli assi è l'origine.
- **Segno della funzione**

$$y > 0 \qquad \frac{\overbrace{x}^{N}}{\underbrace{(x-1)}_{D1}\underbrace{(x-2)}_{D2}} > 0$$

$N > 0 \text{ con } x > 0$
$D_1 > 0 \text{ con } x > 1$
$D_2 > 0 \text{ con } x > 2$




- **Limiti ai confini del dominio**

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = 0 \qquad \lim_{x \to 1\pm} \frac{\overset{1}{\overset{\uparrow}{x}}}{\underbrace{(x-1)}_{\substack{\downarrow \\ 0\pm}}\underbrace{(x-2)}_{\substack{\downarrow \\ -1}}} = \mp\infty \qquad \lim_{x \to 2\pm} \frac{\overset{2}{\overset{\uparrow}{x}}}{\underbrace{(x-1)}_{\substack{\downarrow \\ 1}}\underbrace{(x-2)}_{\substack{\downarrow \\ 0\pm}}} = \pm\infty$$

- **Derivata prima**

$$y' = \frac{d}{dx}\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1 \cdot (x^2 - 3x + 2) - x \cdot (2x - 3)}{\left(x^2 - 3x + 2\right)^2} = \frac{-x^2 + 2}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$\boxed{y' = \frac{2 - x^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{2 - x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}} \qquad y' = 0 \quad con \quad x = \pm\sqrt{2}$$

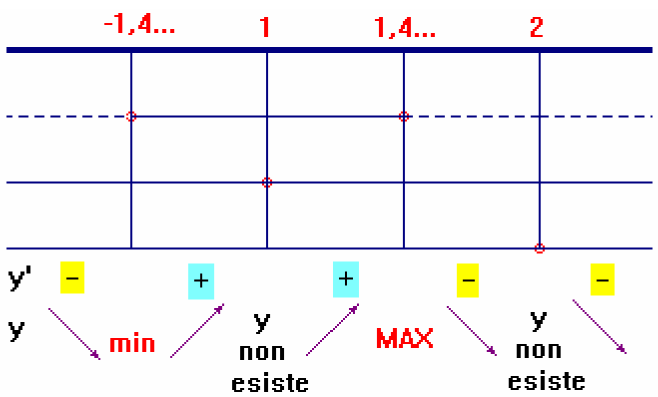
$$x = \sqrt{2} \to y = \frac{\sqrt{2}}{2 - 3\sqrt{2} + 2} = \frac{\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} \cdot \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} + 6}{16 - 18} = -\left(2\sqrt{2} + 3\right) \approx -5{,}83$$

$$x = -\sqrt{2} \to y = \ldots = 2\sqrt{2} - 3 \approx -0{,}17$$

$y' > 0$

$$\frac{\overbrace{2 - x^2}^{N}}{\underbrace{(x-1)^2}_{D1}\underbrace{(x-2)^2}_{D2}} > 0$$

$N > 0 \text{ con } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$
$D_1 > 0 \text{ con } x \neq 1$
$D_2 > 0 \text{ con } x \neq 2$




$$\min\left(-\sqrt{2},\ \underbrace{2\sqrt{2} - 3}_{-0{,}17}\right) \qquad \text{MAX}\left(\sqrt{2},\ \underbrace{-\left(2\sqrt{2} + 3\right)}_{-5{,}83}\right)$$

**Derivata seconda**

$$y=\frac{x}{x^2-3x+2} \qquad y'=\frac{-x^2+2}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$y''=\frac{-2x\cdot(x^2-3x+2)^2-(-x^2+2)\cdot 2(x^2-3x+2)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^4}=$$

$$=\frac{(x^2-3x+2)\left[-2x(x^2-3x+2)-2(2-x^2)(2x-3)\right]}{(x^2-3x+2)^4}=$$

$$=\frac{-2x^3+6x^2-4x-8x+12+4x^3-6x^2}{(x^2-3x+2)^3}=\frac{2x^3-12x+12}{(x^2-3x+2)^3}=\frac{2(x^3-6x+6)}{(x-1)^3(x-2)^3}$$

$$\boxed{y''=\frac{2(x^3-6x+6)}{(x-1)^3(x-2)^3}}$$

Dunque $y''=0 \Leftrightarrow x^3-6x+6=0$.
L'equazione $x^3-6x+6=0$ è un'equazione algebrica di terzo grado.
Ogni tentativo di risolverla per scomposizione in fattori col metodo di Ruffini fallisce in quanto, fra i divisori del termine noto +6, nessuno risulta essere uno zero del polinomio a primo membro.
Ciò significa che **l'equazione in questione non ha soluzioni razionali**;
potrebbe però averne di irrazionali (anzi, che ne abbia almeno una è certo,
perché **qualsiasi equazione algebrica di grado dispari a coefficienti reali ammette sempre almeno una soluzione reale**).

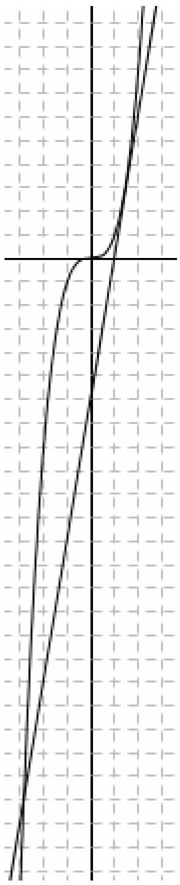
E' noto che **esistono formule risolutive per le equazioni algebriche fino al 4° grado** (invece, come dimostrò il norvegese Abel nel 1824, **per le equazioni algebriche di grado maggiore o uguale a 5 non può esistere alcuna formula risolutiva**).
Se, tuttavia, non abbiamo a disposizione la formula risolutiva per le equazioni di terzo grado, o, comunque, se vogliamo farne a meno, potremo pur sempre approssimare le soluzioni dell'equazione considerata, utilizzando il **metodo grafico**.

A tale scopo, scriviamo
$x^3-6x+6=0$
sotto la forma equivalente
$x^3=6x-6$.

Tracciamo poi
su di uno stesso riferimento cartesiano
i grafici delle due funzioni
$g_1(x)=x^3$ e $g_2(x)=6x-6$,
con l'obiettivo di localizzare
**le ascisse dei loro punti di intersezione**.

Si ha senz'altro una intersezione
nell'intervallo $(-3,-2)$.

Le due curve, però,
appaiono molto vicine
anche fra l'ascissa 1 e l'ascissa 2;
si intersecheranno anche in quell'intervallo
oppure no?



Ovviamente, utilizzando un computer,
basterebbe fare uno "zoom" del grafico nella zona considerata.
E se invece avessimo a disposizione solo carta e matita …?
… In questo caso, potremmo procedere nel modo seguente.

Determiniamo l'equazione della retta $t$, che è tangente al grafico della curva
$\lambda: \ y = x^3$
in un punto di ascissa positiva, ed è parallela alla nostra retta $r: \ y = 6x - 6$.
L'equazione di t sarà della forma: $y = 6x + q$.
L'obiettivo sarà di stabilire come è disposta tale tangente $t$, rispetto alla $r$.

- Se $t$ sta al di sopra di $r$ ($q > -6$),
  allora non si ha nessuna intersezione di ascissa positiva fra $r$ e la curva $\lambda$.
- Se $t$ coincide con $r$ ($q = -6$),
  allora $r$ è tangente a $\lambda$: una, e una sola, intersezione di ascissa positiva.
- Se $t$ sta al di sotto di $r$ ($q < -6$),
  due intersezioni di ascissa positiva fra r e $\lambda$.

La derivata della funzione $y = x^3$ è $y' = 3x^2$.
Tale derivata vale 6 se e solo se $3x^2 = 6$ ossia con $x = \pm\sqrt{2}$.
Il punto di tangenza che ci interessa è $\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

La retta tangente cercata è dunque
$t: \ y - 2\sqrt{2} = 6\left(x - \sqrt{2}\right); \quad y = 6x \underbrace{-4\sqrt{2}}_{q}$.

Essendo ora $q = -4\sqrt{2} = -5{,}656854... > -6$,
la tangente $t$ sta al di sopra della retta $r$:
nessuna intersezione, dunque, fra $r$ e $\lambda$.

Un altro modo di risolvere la questione se la curva $\lambda: y = x^3$
intersecasse o meno la retta $r: \ y = 6x - 6$ in un punto di ascissa $x > 0$
avrebbe potuto essere il seguente.
La figura che riporta i grafici approssimativi delle due funzioni
$g_1(x) = x^3$ e $g_2(x) = 6x - 6$, mostra che la funzione differenza
$g(x) = x^3 - 6x + 6 = 0$ deve toccare un minimo relativo in un punto di ascissa positiva.
Bene:

- se tale minimo relativo è <0,
  allora vuol dire che i grafici di $g_1$ e $g_2$ si intersecano, con $x > 0$, in due punti;
- se invece il minimo relativo in questione è nullo,
  allora le due curve si toccano, con $x > 0$, in un punto solo;
- se, infine, tale minimo relativo è >0,
  allora le due curve non si intersecano affatto con $x > 0$.

Si tratta perciò di effettuare un brevissimo studio della funzione $g(x) = x^3 - 6x + 6 = 0$,
per determinare il segno dell'ordinata del punto di ascissa positiva, in cui essa tocca un minimo relativo.
Ora, è:

$$g'(x) = 3x^2 - 6\,;$$
$$g'(x) = 0 \text{ con } x = \pm\sqrt{2}\,;$$
$$g\left(+\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^3 - 6\sqrt{2} + 6 = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 6 = 6 - 4\sqrt{2}.$$

Ma è $6 - 4\sqrt{2} \approx 6 - 5{,}656854... > 0$. Nessuna intersezione di ascissa positiva, dunque!

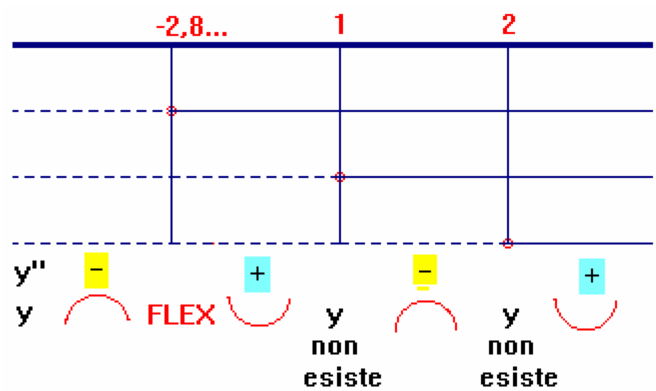
Ormai siamo certi che l'equazione $x^3-6x+6=0$
ha una sola soluzione, compresa fra –3 e –2.
Tale soluzione potrebbe essere approssimata con la precisione desiderata,
utilizzando un "metodo numerico", ad esempio il metodo di bisezione.
Si troverebbe così, accontentandosi di 2 cifre decimali esatte, il valore approssimato –2,84.

Torniamo allo studio della nostra funzione. Ricapitoliamo i risultati acquisiti.

$$y=\frac{x}{(x-1)(x-2)} \qquad y'=\frac{2-x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} \qquad y''=\frac{2(x^3-6x+6)}{(x-1)^3(x-2)^3} \qquad y''=0 \text{ con } x=\bar{x}\approx -2{,}84 .$$

Gli elementi già a nostra conoscenza (segno, limiti, $y'$)
sono ampiamente sufficienti per consentirci di dedurre che in $\bar{x}\approx -2{,}84$ si ha un flesso ascendente.
Tuttavia, solo ed esclusivamente per esercizio, andremo a studiare anche il segno della $y''$.
Tale studio comporta l'analisi del segno del polinomio di terzo grado $x^3-6x+6$,
che può essere effettuata semplicemente osservando la figura nella quale sono state tracciate,
in uno stesso riferimento cartesiano, le due funzioni $y=x^3$ e $y=6x-6$.
La prima funzione sta al di sopra della seconda a destra dell'ascissa $\bar{x}\approx -2{,}84$;
quindi la differenza $x^3-6x+6$ è positiva con $x>\bar{x}$. Dunque avremo:

$$y''=\frac{2(x^3-6x+6)}{(x-1)^3(x-2)^3}>0$$



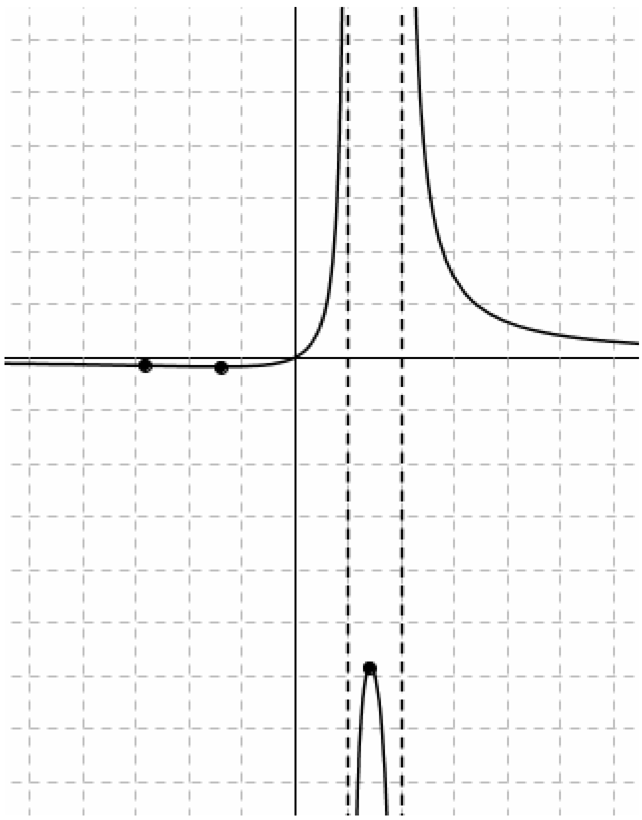

Ed ecco,
finalmente,
il grafico!!!

$$\boxed{y=\frac{x}{\underbrace{x^2-3x+2}_{(x-1)(x-2)}}=f(x)}$$

$$\min\left(-\sqrt{2},\ \underbrace{2\sqrt{2}-3}_{\approx -0{,}17}\right)$$

$$\text{MAX}\left(\sqrt{2},\ \underbrace{-\left(2\sqrt{2}+3\right)}_{\approx -5{,}83}\right)$$

$$x_F\approx -2{,}84$$



$$\boxed{y = \frac{x}{x^3-1} = f(x)}$$

- **Dominio:** $x^3-1 \neq 0 \quad x^3 \neq 1 \quad x \neq 1$

  $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

- **La funzione non è né pari, né dispari**

- **Intersezioni con l' asse *y*:** $x = 0 \rightarrow y = 0$

  **Intersezioni con l'asse *x*:** $y = 0 \;\; con \;\; x = 0$

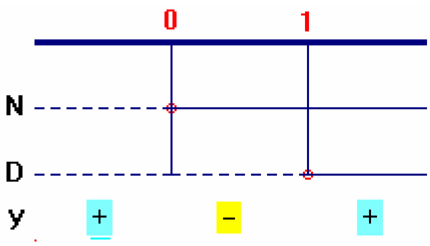
  Perciò, in definitiva, l'unica intersezione con gli assi è l'origine.

- **Segno della funzione**

$$y > 0 \qquad \frac{\overbrace{x}^{N}}{\underbrace{x^3-1}_{D}} > 0$$

$N > 0 \;\; con \;\; x > 0$

$D > 0 \;\; con \;\; x > 1$




- **Limiti ai confini del dominio**

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^3-1} = 0 \qquad \lim_{x\to 1\pm} \frac{\overbrace{x}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{x^3-1}_{\substack{\downarrow \\ 0\pm}}} = \pm\infty$$

- **Derivata prima**

$$y' = \frac{d}{dx}\frac{x}{x^3-1} = \frac{1\cdot(x^3-1) - x\cdot 3x^2}{\left(x^3-1\right)^2} = \frac{-2x^3-1}{(x^3-1)^2} = -\frac{2x^3+1}{(x^3-1)^2}$$

$$\boxed{y' = -\frac{2x^3+1}{(x^3-1)^2}} \qquad y' = 0 \;\; con \;\; x^3 = -\frac{1}{2}; \;\; x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx -0{,}79$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}} \approx 0{,}53$$

$y' > 0$

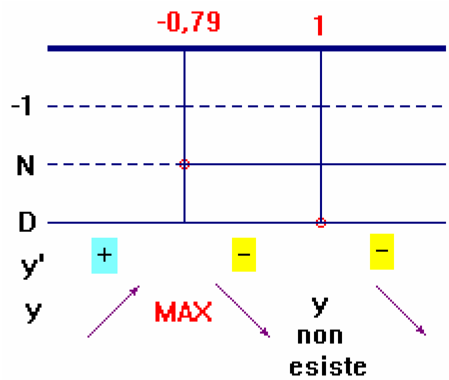
$$-\frac{2x^3+1}{(x^3-1)^2} > 0$$

Occorre tener conto
del segno – che precede la frazione
(equivalente ad un fattore –1).

Poi:

$N > 0 \quad x^3 > -\frac{1}{2}; \;\; x > -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$D > 0 \quad (x^3-1)^2 > 0; \;\; x^3-1 \neq 0; \;\; x \neq 1$




$$\text{MAX}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}\right)$$

- **Derivata seconda**

$$y=\frac{x}{x^3-1}$$

$$y'=-\frac{2x^3+1}{(x^3-1)^2}$$

$$y''=-\frac{6x^2(x^3-1)^2-(2x^3+1)\cdot 2(x^3-1)\cdot 3x^2}{(x^3-1)^4}=-\frac{6x^2(x^3-1)\left[x^3-1-2x^3-1\right]}{(x^3-1)^4}=$$

$$=-\frac{6x^2(-x^3-2)}{(x^3-1)^3}=\frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}$$

$$\boxed{y''=\frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}}$$

$y''=0$ *con* $x=0 \vee x=-\sqrt[3]{2}\approx -1,26$

$f(0)=0;$ $\quad f(-\sqrt[3]{2})=\frac{-\sqrt[3]{2}}{-2-1}=\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\approx 0,42$

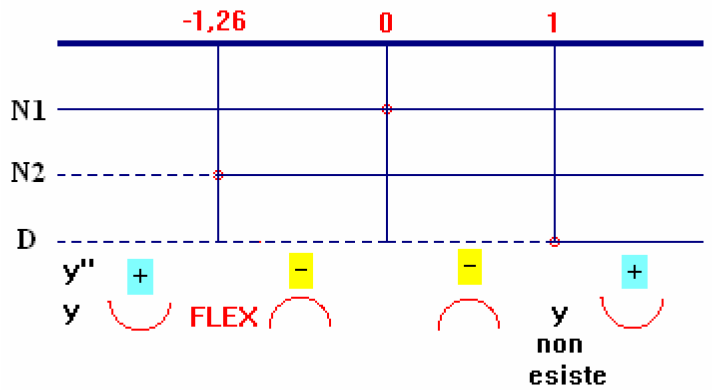
$y''>0$

$\frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}>0$

$\mathrm{N1}>0 \quad x\neq 0$

$\mathrm{N2}>0 \quad x>-\sqrt[3]{2}$

$\mathrm{D}>0 \quad x>1$




Il punto $x=-\sqrt[3]{2}\approx -1,26$ segna il passaggio dalla convessità alla concavità ed è perciò un flesso discendente.
Diciamo “discendente”, per il fatto che si passa
dal di sopra al di sotto, rispetto alla retta tangente nel punto.

Questa ha coefficiente angolare $m=y'\left(-\sqrt[3]{2}\right)=-\frac{2\cdot(-2)+1}{(-2-1)^2}=-\frac{-3}{9}=\frac{1}{3}$.

Diversa è la situazione nel punto $x=0$.
In esso la derivata seconda si annulla;
tuttavia, nell’attraversamento dell’ascissa $x=0$
la $y''$ non cambia di segno, ma al contrario si mantiene negativa.

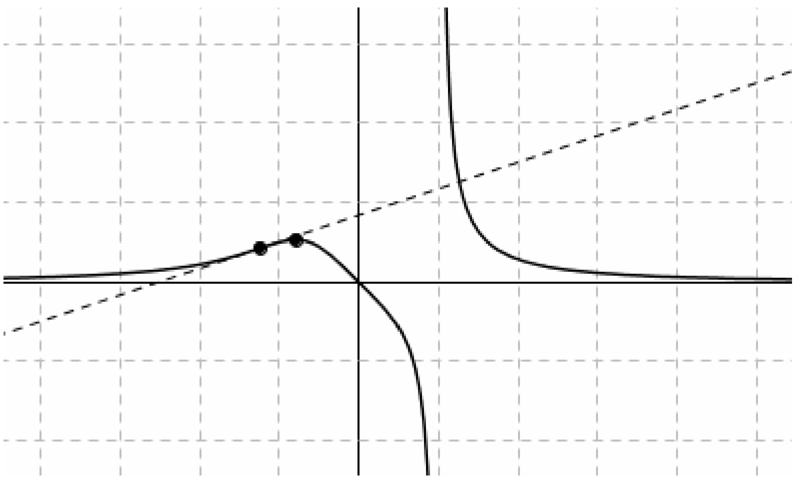
Pertanto il punto $x=0$ non è un flesso, bensì un punto in cui la funzione è concava.
Il coefficiente angolare della retta tangente, nel punto di ascissa 0, è $m=y'(0)=-1$

Ed ecco il grafico!!!

$$y=\frac{x}{x^3-1}=f(x)$$

$$\mathrm{MAX}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}\right)$$

$$\mathrm{F}\left(-\sqrt[3]{2},\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)$$

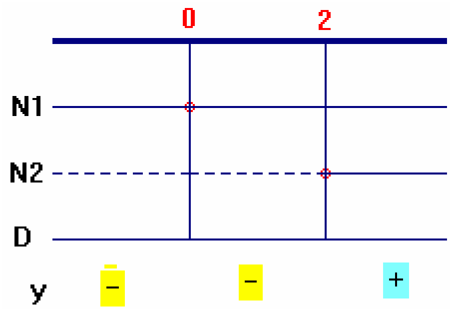


$$\boxed{y=\frac{\overbrace{x^3-2x^2}^{x^2(x-2)}}{x^2+x+1}=f(x)}$$

- **Dominio:** $x^2+x+1\neq 0$ *condizione verificata* $\forall x\in\mathbb{R}$ (*perché* $\Delta<0$). $D=(-\infty,+\infty)$
- **La funzione non è né pari, né dispari**
- **Intersezioni con l' asse *y*:** $x=0\to y=0$
  **Intersezioni con l'asse *x*:** $y=0$ *con* $x=0\vee x=2$
- **Segno della funzione**

$$y>0 \quad \frac{\overbrace{x^2}^{N1}\overbrace{(x-2)}^{N2}}{\underbrace{x^2+x+1}_{D}}>0$$

$N_1>0$ *con* $x\neq 0$
$N_2>0$ *con* $x>2$
$D>0 \quad \forall x\in R$




- **Limiti ai confini del dominio** $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2}{x^2+x+1}=\pm\infty$
- **Eventuali asintoti obliqui**

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2}{x^2+x+1}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2}{x^3+x^2+x}=1=m$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x^2}{x^2+x+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^2-x}{x^2+x+1}=-3=q$$

La retta $y=x-3$ è perciò asintoto obliquo bilaterale.

**Intersezioni con l'asintoto**: $\begin{cases}y=\frac{x^3-2x^2}{x^2+x+1}\\ y=x-3\end{cases}$ $\frac{x^3-2x^2}{x^2+x+1}=x-3;$ ... $x=-\frac{3}{2}$ $\left(-\frac{3}{2},-\frac{9}{2}\right)$

- **Derivata prima**

$$y'=\frac{d}{dx}\frac{x^3-2x^2}{x^2+x+1}=\frac{(3x^2-4x)\cdot(x^2+x+1)-(x^3-2x^2)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{3x^4+3x^3+3x^2-4x^3-4x^2-4x-2x^4-x^3+4x^3+2x^2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{x^4+2x^3+x^2-4x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$y'=\frac{x^4+2x^3+x^2-4x}{(x^2+x+1)^2}=\frac{x(x^3+2x^2+x-4)}{(x^2+x+1)^2}\underset{RUFFINI}{=}\frac{x(x-1)(x^2+3x+4)}{(x^2+x+1)^2}$$

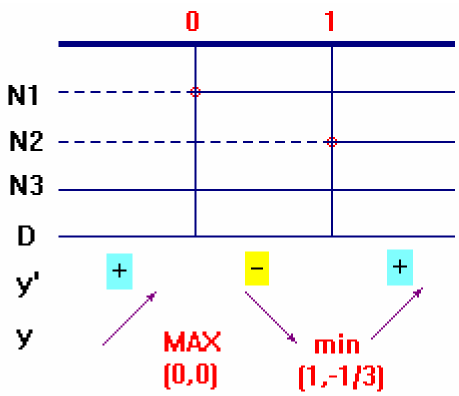
$y'=0$ *con* $x=0,\ x=1$ $\quad f(0)=0,\ f(1)=-1/3$

$y'>0$

$$\frac{\overbrace{x}^{N1}\ \overbrace{(x-1)}^{N2}\overbrace{(x^2+3x+4)}^{N3}}{\underbrace{(x^2+x+1)^2}_{D}}>0$$

$N1>0 \quad x>0$
$N2>0 \quad x>1$

I due trinomi N3, D
sono sempre strettamente positivi, $\forall x\in\mathbb{R}$,
perché il loro discriminante $(\Delta)$ è negativo.



- **Derivata seconda** $\quad y=\dfrac{x^3-2x^2}{x^2+x+1} \quad y'=\dfrac{x^4+2x^3+x^2-4x}{(x^2+x+1)^2}$

$$y''=\frac{(4x^3+6x^2+2x-4)(x^2+x+1)^2-(x^4+2x^3+x^2-4x)\cdot 2(x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^4}=$$

$$=\frac{2(x^2+x+1)\left[(2x^3+3x^2+x-2)(x^2+x+1)-(x^4+2x^3+x^2-4x)(2x+1)\right]}{(x^2+x+1)^4}=$$

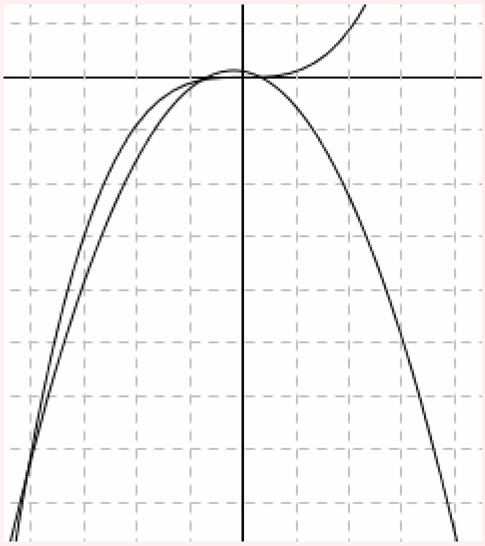
$$=\frac{2\left[2x^5+3x^4+x^3-2x^2+2x^4+3x^3+x^2-2x+2x^3+3x^2+x-2-2x^5-4x^4-2x^3+8x^2-x^4-2x^3-x^2+4x\right]}{(x^2+x+1)^3}=$$

$$=\frac{2(2x^3+9x^2+3x-2)}{(x^2+x+1)^3}$$

$y''$ si annulla quando si annulla il quadrinomio di terzo grado $2x^3+9x^2+3x-2$.
Non avendo questo quadrinomio zeri razionali,
non riusciamo a scomporlo col metodo di Ruffini;
approssimeremo allora le soluzioni dell'equazione $2x^3+9x^2+3x-2=0$ col metodo grafico,
dopo averla portata sotto la forma equivalente $2x^3=-9x^2-3x+2$; anzi, per evitare
di dover operare con ordinate troppo grandi, divideremo ambo i membri per 18 ottenendo

$$\frac{x^3}{9}=-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{6}+\frac{1}{9}.$$

Dalla figura qui a fianco riportata si vede
che l'equazione considerata ha 3 soluzioni,
$-5<\alpha<-4,\quad -1<\beta<0,\quad 0<\gamma<1$
Il polinomio di terzo grado
$2x^3+9x^2+3x-2$
ammette perciò $\alpha, \beta, \gamma$ come zeri
e potrebbe quindi essere scomposto in
$2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.
Il segno del polinomio determina il segno
della derivata seconda, che pertanto si annulla
con $x=\alpha,\ x=\beta,\ x=\gamma$
e cambia di segno ogniqualvolta si attraversa
una delle tre ascisse $\alpha, \beta, \gamma$.
Tutto ciò ci garantisce che $\alpha, \beta, \gamma$ sono
ascisse di flesso per la funzione considerata.
Rinunciamo al calcolo delle rispettive ordinate.



Ed ecco il grafico!!!

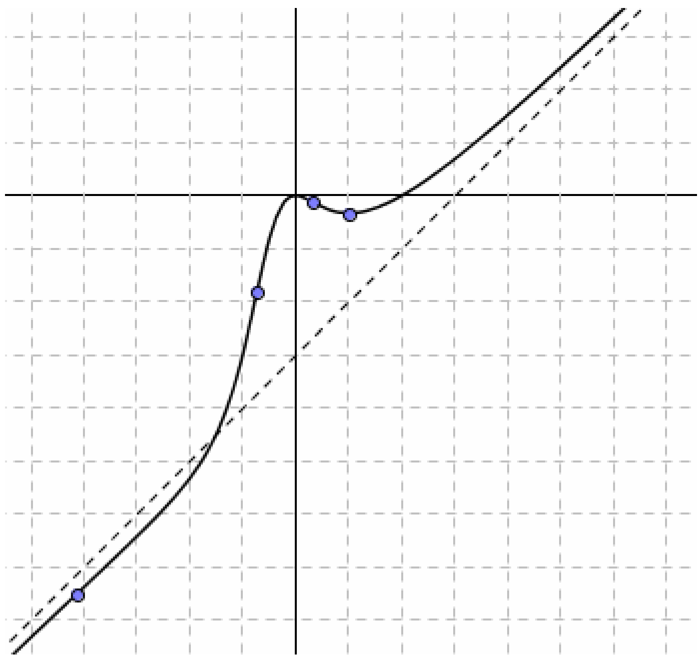
$$\boxed{y=\frac{\overbrace{x^3-2x^2}^{x^2(x-2)}}{x^2+x+1}=f(x)}$$

MAX(0,0)

$\min\left(1,-\dfrac{1}{3}\right)$

*Tre flessi*:
$-5<\alpha<-4$
$-1<\beta<0$
$0<\gamma<1$

*Asintoto obliquo*:
$y=x-3$



$$\boxed{y=\sqrt{x+5}-x-3=f(x)}$$

- **Dominio** = $[-5,+\infty)$
- **Né pari né dispari**
- **Intersezioni con gli assi.**

Con l'asse $y$**:** $x=0 \rightarrow y=\sqrt{5}-3 \approx 2,236-3=-0,764$

Intersezioni con l'asse $x$

$$y=0$$

$$\sqrt{x+5}-x-3=0;$$

$$\sqrt{x+5}=x+3;$$

$$\begin{cases} x+5=(x+3)^2 \\ x\ge -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+5=x^2+6x+9 \\ x\ge -3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2+5x+4=0 \\ x\ge -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} \underset{NON\ ACC.}{x=-4} \vee x=-1 \\ x\ge -3 \end{cases}$$

$$(-1,0)$$

**FINESTRA SULLA TEORIA**

**Un'equazione irrazionale della forma**

$$\sqrt{\mathbf{A}(x)}=\mathbf{B}(x)$$

**è equivalente al sistema**

$$\begin{cases} \mathbf{A}(x)=[\mathbf{B}(x)]^2 \\ \mathbf{B}(x)\ge 0 \end{cases}$$

- **Segno della funzione**

$$y>0$$

$$\sqrt{x+5}-x-3>0;$$

$$\sqrt{x+5}>x+3;$$

$$\begin{cases} x+3<0 \\ x+5\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+3\ge 0 \\ x+5>(x+3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-3 \\ x\ge -5 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge -3 \\ x^2+5x+4<0; \quad -4<x<-1 \end{cases}$$

$$-5\le x<-3 \quad \vee \quad -3\le x<-1$$

ossia: $-5\le x<-1$

**FINESTRA SULLA TEORIA**

**Una disequazione irrazionale della forma**

$$\sqrt{\mathbf{A}(x)}>\mathbf{B}(x)$$

**è equivalente a:**

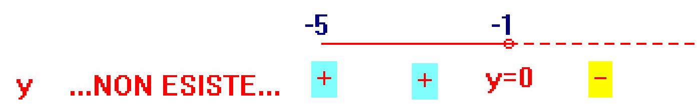
$$\begin{cases} \mathbf{B}(x)<0 \\ \mathbf{A}(x)\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \mathbf{B}(x)\ge 0 \\ \mathbf{A}(x)>[\mathbf{B}(x)]^2 \end{cases}$$

**I due sistemi sono legati da un VEL $(\vee)$ logico:**
**perciò, trovati gli insiemi delle soluzioni di ciascuno, occorrerà farne l' unione insiemistica $(\cup)$**

Ricapitolando: $y>0$ con $-5\le x<-1$
e la situazione del segno della funzione
è quella illustrata nello **schema** seguente.

Importante osservare che **le categorie sono 4**:

**1. positività**
**2. negatività**
**3. annullamento**
**4. NON ESISTENZA**




**Simbologia in uno schema di analisi del segno:**

Linea continua —— indica POSITIVITA' per l'espressione considerata

Linea tratteggiata - - - - - indica NEGATIVITA' per l'espressione considerata

Pallino vuoto ∘ indica ANNULLAMENTO per l'espressione considerata

- **Limiti ai confini del dominio:**

Hai per caso scritto $\lim_{x\to -5^+} f(x) = 5-3=2$ ? Sììììì?

Beh, non hai sbagliato, ma, più semplicemente, avresti potuto scrivere $f(-5)=2$ in quanto, per $x=-5$, la funzione ESISTE! (ed è CONTINUA VERSO DESTRA, quindi il valore del limite coincide sicuramente col valore della funzione).

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-x-3\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sqrt{x+5}}{x}-1-\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{\downarrow \atop +\infty}\cdot\left(\underbrace{\sqrt{\frac{x+5}{x^2}}}_{\downarrow \atop 0}-1-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\downarrow \atop 0}\right)=-\infty$$

Osserviamo che troppo spesso,
di fronte a Forme di Indecisione che coinvolgono radicali,
si è portati "per istinto" a razionalizzare:
spesso, invece, non è assolutamente necessario,
come mostra, appunto, il limite precedente.

- **Eventuale asintoto obliquo destro:**

Ricerca di m $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+5}-x-3}{x}$.

Per risolvere questo limite non è necessario razionalizzare il numeratore.
Basta invece spezzare la frazione:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+5}-x-3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x+5}}{x}-1-\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{\frac{x+5}{x^2}}}_{\downarrow \atop 0}-1-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\downarrow \atop 0}\right)=-1=m$$

Ricerca di q $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+5}-x-3+x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+5}-3\right]=+\infty$

Quindi, per $x\to+\infty$, non si ha un asintoto ma solo la "direzione asintotica" $m=-1$.

- **Derivata prima** $\quad y=\sqrt{x+5}-x-3 \rightarrow \boxed{y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}-1=\dfrac{1-2\sqrt{x+5}}{2\sqrt{x+5}}}$

$$y'=0 \qquad \begin{aligned}&1-2\sqrt{x+5}=0;\\ &2\sqrt{x+5}=1;\\ &4x+20=1 \text{ (qui il secondo membro è positivo indipendentemente da } x\text{)}\\ &x=-19/4\\ &x=-19/4 \rightarrow y=\sqrt{-\frac{19}{4}+5}+\frac{19}{4}-3=\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{7}{4}=\frac{1}{2}+\frac{7}{4}=\frac{9}{4} \qquad \left(-\frac{19}{4},\frac{9}{4}\right)\end{aligned}$$

**Il dominio D' della $f'(x)$ è più ristretto del dominio D della $f(x)$:**
poiché, con la derivazione, l'espressione $\sqrt{x+5}$ è passata a denominatore,
per $x=-5$ la funzione esiste, ma non è derivabile: $D'=(-5,+\infty)\subset D=[-5,+\infty)$

Calcoliamo allora il $\lim\limits_{x\to-5+} y'=\lim\limits_{x\to-5+}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}-1\right)=+\infty$ .

Ma allora (vedi anche il paragrafo sul "Criterio di Derivabilità") ,
**la funzione "parte dal punto di ascissa –5 verticalmente, con salita infinita".**

$$y'>0$$
$$\frac{1-2\sqrt{x+5}}{2\sqrt{x+5}}>0$$
$$N>0 \qquad 1-2\sqrt{x+5}>0;$$
$$2\sqrt{x+5}<1$$
$$\begin{cases}4x+20<1\\ x+5\geq 0\end{cases}$$
$$\begin{cases}x<-19/4\\ x\geq -5\end{cases}$$
$$-5\leq x<-19/4$$
$$D>0 \qquad 2\sqrt{x+5}>0 \quad x>-5$$

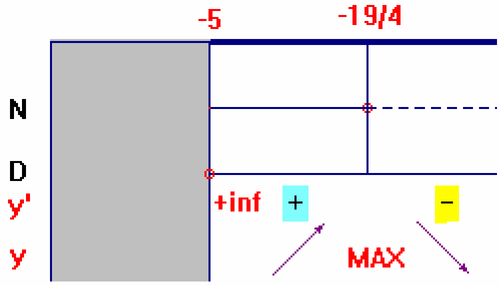
**FINESTRA SULLA TEORIA**

**Una disequazione irrazionale della forma**

$$\sqrt{\mathbf{A}(x)}<\mathbf{B}(x)$$

**è equivalente a:**

$$\begin{cases}\mathbf{A}(x)\geq 0\\ \mathbf{B}(x)>0\\ \mathbf{A}(x)<[\mathbf{B}(x)]^2\end{cases}$$




$\mathrm{MAX}\left(-\frac{19}{4},\frac{9}{4}\right)$

**Derivata seconda**

$$y=\sqrt{x+5}-x-3 \qquad y'=\frac{1}{2\sqrt{x+5}}-1=\frac{1-2\sqrt{x+5}}{2\sqrt{x+5}}$$

$$y''=D\left(\frac{1}{2\sqrt{x+5}}-1\right)\overset{\text{NOTA}}{=}$$

$$=-\frac{D\left(2\sqrt{x+5}\right)}{\left(2\sqrt{x+5}\right)^2}=-\frac{2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+5}}}{4(x+5)}=-\frac{1}{4(x+5)\sqrt{x+5}}$$

$$\boxed{y''=-\frac{1}{4(x+5)\sqrt{x+5}}}$$

NOTA
Applichiamo qui la formula
per la derivazione
del reciproco di una funzione:

$$D\left(\frac{1}{f(x)}\right)=-\frac{Df(x)}{[f(x)]^2}$$

o, se si preferisce, $\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f\,'}{f^2}$

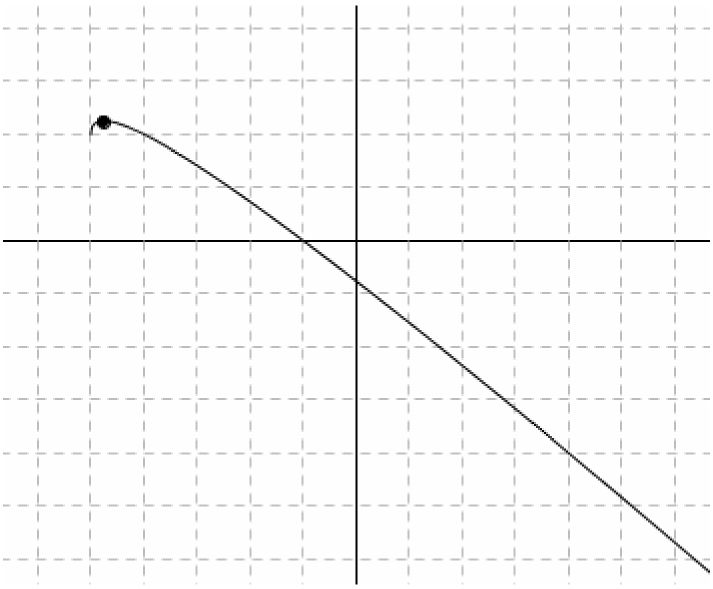
Dunque la derivata seconda non può mai annullarsi,
e anzi, laddove esiste $(x>-5)$ è sempre strettamente negativa.
Pertanto la funzione è concava su tutto il suo dominio.

Ed ecco
il grafico!!!

$y=\sqrt{x+5}-x-3$

$\text{MAX}\left(-\frac{19}{4},\frac{9}{4}\right)$

"Direzione asintotica" $m=-1$.



$$\boxed{y = 2x - \sqrt{x^2 + x}}$$

- **Dominio:** $x^2 + x \geq 0;\quad x(x+1) \geq 0;\quad x \leq -1 \vee x \geq 0 \qquad D = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$
- **Né pari né dispari**
- **Intersezioni con gli assi**

Con l'asse $y$: $x = 0 \rightarrow y = 0$

Intersezioni con l'asse $x$

$$y = 0$$

$$2x - \sqrt{x^2 + x} = 0;$$

$$\sqrt{x^2 + x} = 2x;$$

$$\begin{cases} x^2 + x = 4x^2 \\ 2x \geq 0 \end{cases};\qquad \begin{cases} 3x^2 - x = 0 \\ x \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \vee \quad x = 1/3 \quad \textit{entrambe accettabili} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

**FINESTRA SULLA TEORIA**

**Un'equazione irrazionale della forma**

$$\sqrt{\mathbf{A}(x)} = \mathbf{B}(x)$$

**è equivalente al sistema**

$$\begin{cases} \mathbf{A}(x) = [\mathbf{B}(x)]^2 \\ \mathbf{B}(x) \geq 0 \end{cases}$$

$(0; 0) \quad (1/3; 0)$

- **Segno della funzione**

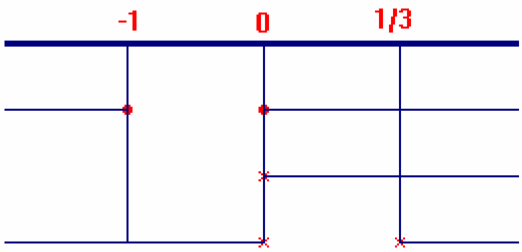
$$y > 0$$

$$2x - \sqrt{x^2 + x} > 0$$

$$\sqrt{x^2 + x} < 2x$$

$$\begin{cases} x^2 + x \geq 0 \\ 2x > 0 \\ x^2 + x < 4x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 0 \\ x > 0 \\ \underbrace{3x^2 - x}_{x(3x-1)} > 0; \qquad x < 0 \vee x > 1/3 \end{cases}$$




OK

Simbologia in uno schema di sistema:

| Condizione verificata | Condizione NON verificata |
|---|---|
| Linea continua | Nessuna linea |
| oppure pallino pieno • | oppure crocetta di esclusione × |

**FINESTRA SULLA TEORIA**

**Una disequazione irrazionale della forma**

$$\sqrt{\mathbf{A}(x)} < \mathbf{B}(x)$$

**è equivalente a:**

$$\begin{cases} \mathbf{A}(x) \geq 0 \\ \mathbf{B}(x) > 0 \\ \mathbf{A}(x) < [\mathbf{B}(x)]^2 \end{cases}$$

**Invece una disequazione irrazionale della forma**

$$\sqrt{\mathbf{A}(x)} > \mathbf{B}(x)$$

**è equivalente a:**

$$\begin{cases} \mathbf{B}(x) < 0 \\ \mathbf{A}(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \mathbf{B}(x) \geq 0 \\ \mathbf{A}(x) > [\mathbf{B}(x)]^2 \end{cases}$$

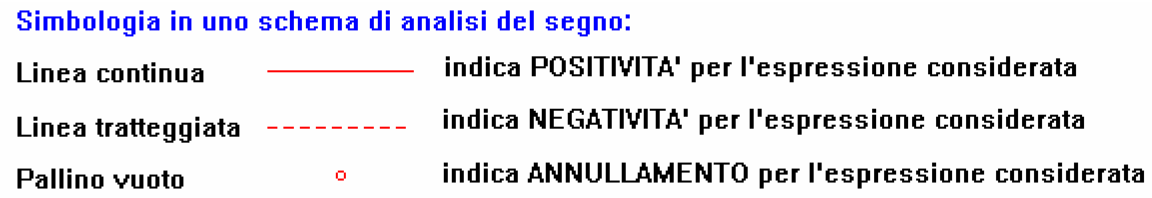
**I due sistemi sono legati da un VEL $(\vee)$ logico: perciò, trovati gli insiemi delle soluzioni di ciascuno, occorrerà farne l' unione insiemistica $(\cup)$**

Ricapitolando: $y > 0$ con $x > 1/3$

e la situazione del segno della funzione è quella illustrata nello **schema** seguente.

Importante osservare che **le categorie sono 4**:

**1. positività 2. negatività 3. annullamento 4. NON ESISTENZA**


- ❑ **Limiti ai confini del dominio:**

Hai per caso scritto $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -2$ ?

Sìììì?

Beh, non hai sbagliato, ma, più semplicemente, avresti potuto scrivere

$f(-1) = -2$

in quanto, per x = -1, la funzione ESISTE! (ed è CONTINUA VERSO SINISTRA, quindi il valore del limite coincide sicuramente col valore della funzione)

Analogamente si ha $f(0) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2 + x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left[2x - \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left(2x - x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}} \left(\underbrace{2 - \overbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}^{\substack{1 \\ \uparrow}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}\right) = +\infty$$

Osserviamo che troppo spesso,
di fronte a Forme di Indecisione che coinvolgono radicali,
si è portati “per istinto” a razionalizzare:
spesso, invece, non è assolutamente necessario,
come mostra, appunto, il limite precedente.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\underbrace{2x}_{\substack{\downarrow \\ -\infty}} \underbrace{-\sqrt{x^2 + x}}_{\substack{\downarrow \\ -\infty}}\right) = -\infty$$

Il limite appena calcolato era di risoluzione IMMEDIATA:
non si trattava, infatti, di una Forma di Indecisione.

- **Eventuali asintoti obliqui**

**VERSO DESTRA**

**Ricerca di *m***

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2+x}}{x}$$

Per risolvere questo limite non è necessario razionalizzare il numeratore.
E' sufficiente spezzare la frazione:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x}-\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\underbrace{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}}_{\substack{\downarrow\\1}}\right)=1=m\,.$$

**Ricerca di *q***

Ora andiamo a calcolare il

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-\sqrt{x^2+x}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{x^2+x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\cdot\left(\underbrace{1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}_{\substack{\downarrow\\0}}\right)=\left[\infty\cdot 0\right]\quad \textit{PURTROPPO}!$$


Questa volta il raccoglimento
non ha consentito di sciogliere l'indecisione.
Procediamo dunque per razionalizzazione del numeratore.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{x^2+x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x+\sqrt{x^2+x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\underbrace{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}_{\substack{\downarrow\\2}}}=-\frac{1}{2}=q$$

Abbiamo così stabilito che

**la retta $y=x-\frac{1}{2}$ è asintoto obliquo destro per la nostra funzione.**

**Eventuale asintoto obliquo VERSO SINISTRA.**

**Ricerca di *m***

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2+x}}{x}$$

Per risolvere questo limite non è necessario razionalizzare il numeratore:
basterà spezzare la frazione.
Ci sarà però, nei passaggi, una difficoltà, dovuta alla negatività di $x$.
Teniamo presente che
**un fattore esterno si può portare sotto il segno di radice quadrata**
(elevandolo, ovviamente, al quadrato)
**soltanto se è positivo**!
Vediamo allora come procedere:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x}-\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{\sqrt{x^2+x}}{-|x|}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{\sqrt{x^2+x}}{|x|}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2+\sqrt{\frac{x^2+x}{|x|^2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2+\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}\right)=3=m$$

**Ricerca di *q***

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[2x-\sqrt{x^2+x}-3x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-x-\sqrt{x^2+x}\right]=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x\right]\underset{NOTA\ 1}{=}\lim_{x\to-\infty}\left[|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x\right]=$$

$$\underset{NOTA\ 2}{=}\lim_{x\to-\infty}\left[-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{x}_{\to-\infty}\cdot\left(\underbrace{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}_{\to 0}\right)=[\infty\cdot 0]\quad SIGH!!!$$

**NOTA 1** Importantissimo tenere presente che identità come

$\sqrt{x^2}=x,\quad \sqrt{x^2y}=x\sqrt{y}$

valgono SOLTANTO A CONDIZIONE CHE $x$ SIA POSITIVO!!!
Se $x$ è negativo, oppure se il segno di $x$ non è noto o è variabile,
bisognerà invece far comparire un valore assoluto, scrivendo

$\sqrt{x^2}=|x|\quad,\quad \sqrt{x^2y}=|x|\sqrt{y}$

**NOTA 2** Poiché nel nostro caso $x$ tende a $-\infty$, quindi è negativo, avremo $|x|=-x$.

Infatti $|x|=\left\langle\begin{array}{l}x\ \ se\ \ x\ge 0\\ -x\ \ se\ \ x\le 0\end{array}\right.$

Comunque, anche in questo caso il procedere per raccoglimenti
non ci ha permesso di sciogliere l'indecisione. Razionalizziamo, dunque, ottenendo:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=-\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)=-\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{\sqrt{x^2+x}-x}=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=+\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}_{\to 2}}=\frac{1}{2}$$

Resta stabilito che **la retta $y=3x+\frac{1}{2}$ è asintoto obliquo sinistro per la nostra funzione**.

- **Derivata prima**

$y = 2x - \sqrt{x^2+x} \;\to\; \boxed{y' = 2 - \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{4\sqrt{x^2+x} - 2x - 1}{2\sqrt{x^2+x}}}$

**Il dominio D' della $f'(x)$ è più ristretto del dominio D della $f(x)$:**

la derivazione ha fatto passare a denominatore l'espressione $\sqrt{x^2+x}$,
cosicché nei punti in cui tale espressione si annulla ( $x=-1,\ x=0$ ),
la funzione esiste, ma non è derivabile.

Calcoliamo allora il $\lim\limits_{x\to -1^-} y' = \lim\limits_{x\to -1^-}\left(2 - \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\right) = +\infty$

Perciò **la funzione "arriva al punto di ascissa $-1$ verticalmente, con salita infinita".**

Si ha poi: $\lim\limits_{x\to 0+} y' = \lim\limits_{x\to 0+}\left(2 - \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\right) = -\infty$

e ciò significa che **la funzione "parte dal punto di ascissa 0 con discesa infinita".**

$y' = 0 \quad \dfrac{4\sqrt{x^2+x} - 2x - 1}{2\sqrt{x^2+x}}$

$4\sqrt{x^2+x} = 2x+1 \ (x \ne 0,\ x \ne -1)$

$\begin{cases} 16x^2 + 16x = 4x^2 + 4x + 1 \\ 2x+1 \ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 12x^2 + 12x - 1 = 0 \\ x \ge -1/2 \end{cases}$

$x = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-6+4\sqrt{3}}{12} \approx 0{,}077 \\ \dfrac{-6-4\sqrt{3}}{12} \approx -1{,}077 \ \ NON\ \ ACC. \end{array} \right.$

$x = \dfrac{-6+4\sqrt{3}}{12} \approx 0{,}077 \to y = \ldots \approx -0{,}134$

$y' > 0 \quad \dfrac{4\sqrt{x^2+x} - 2x - 1}{2\sqrt{x^2+x}} > 0$

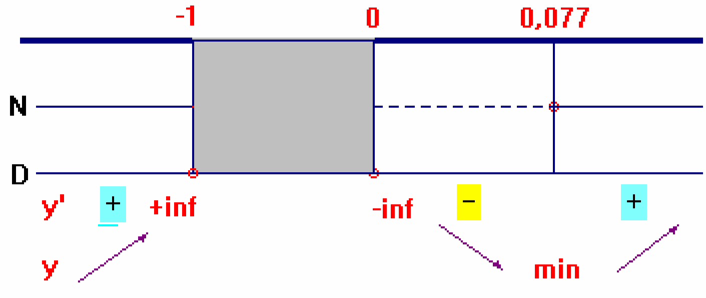
Essendo il denominatore positivo
su tutto il dominio $D' = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ della derivata prima,
basterà chiedersi quali sono i valori di $x$ che rendono positivo il numeratore.
Dunque:

$4\sqrt{x^2+x} - 2x - 1 > 0; \qquad 4\sqrt{x^2+x} > 2x+1$

$\begin{cases} 2x+1 < 0 \\ x^2 + x \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ 16x^2 + 16x > 4x^2 + 4x + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x < -1/2 \\ x \le -1 \vee x \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge -1/2 \\ x < \dfrac{-6-4\sqrt{3}}{12} \vee x > \dfrac{-6+4\sqrt{3}}{12} \end{cases}$

$x \le -1 \quad \vee \quad x > \dfrac{-6+4\sqrt{3}}{12} \approx 0{,}077$




- **Derivata seconda**

$$y = 2x - \sqrt{x^2 + x}; \quad y' = 2 - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{4\sqrt{x^2+x} - 2x - 1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

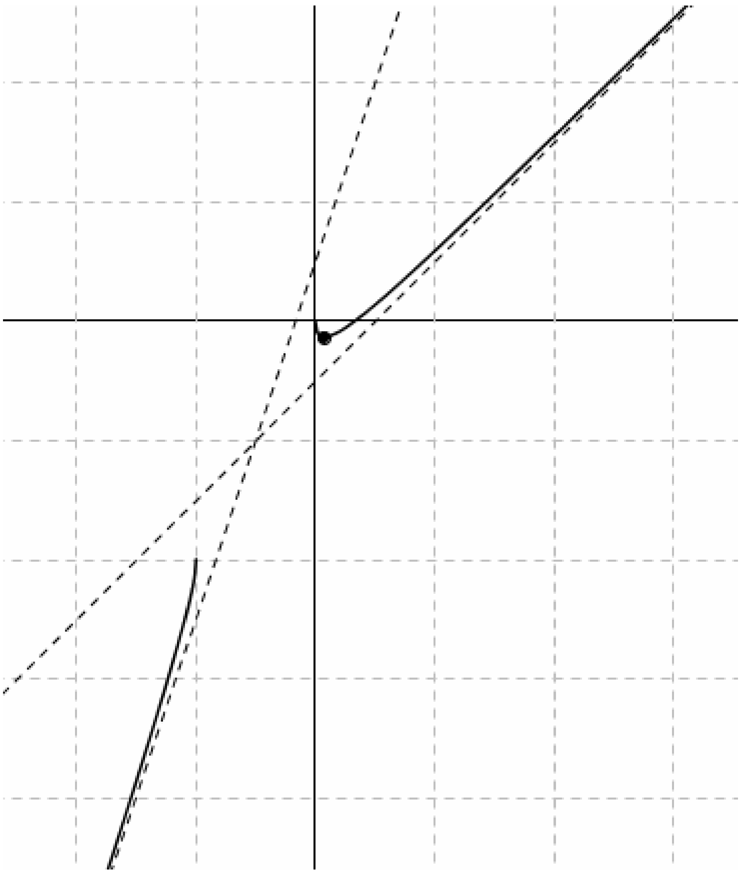
$$y'' = D\left(2 - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\right) = -\frac{2 \cdot 2\sqrt{x^2+x} - (2x+1) \cdot 2 \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}}{4(x^2+x)} =$$

$$= -\frac{4(x^2+x) - (2x+1)^2}{4(x^2+x)\sqrt{x^2+x}} = \ldots = \frac{1}{4(x^2+x)\sqrt{x^2+x}}$$

Dunque la derivata seconda non può mai annullarsi;
essa, laddove esiste $(x < -1 \vee x > 0)$ è sempre >0.
Pertanto la funzione è convessa su tutto il suo dominio.

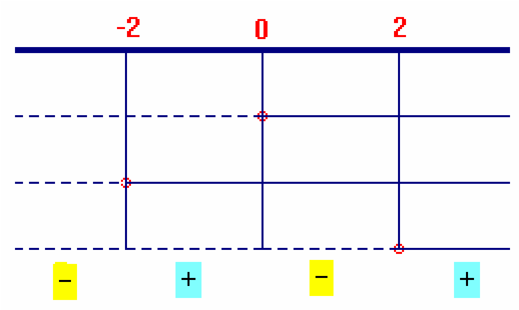
Ed ecco il grafico !!! $\boxed{y = 2x - \sqrt{x^2 + x}}$

Asintoto obl. destro: $y = x - \frac{1}{2}$. Asintoto obl. sinistro: $y = 3x + \frac{1}{2}$. $\min\left(\frac{-6+4\sqrt{3}}{12}; \approx -0{,}134\right)$



$$\boxed{y = \sqrt{x^3 - 4x} = f(x)}$$

- **Dominio:** $x^3 - 4x \geq 0; \quad x(x+2)(x-2) \geq 0;$




$D = [-2, 0] \cup [2, +\infty)$

- $f(x)$ **non è né pari, né dispari**

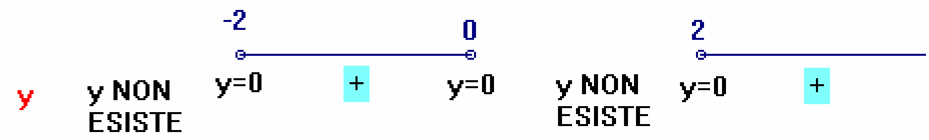
- **Intersezioni con gli assi**

  Con l'asse $y$: $x = 0 \rightarrow y = 0$ Con l'asse $x$: $y = 0 \leftrightarrow x = 0, \quad x = \pm 2$

- **Segno della funzione**

  La $y$ è espressa da una radice quadrata;
  e **il risultato di un'estrazione di radice quadrata, quando esiste, è sempre** $\geq 0$**.**
  Ricordiamo che, **ad esempio, il simbolo** $\sqrt{9}$
  **NON sta ad indicare**
  **"uno qualsiasi fra i numeri che elevati al quadrato danno 9" ($-3$ e $+3$),**
  **bensì indica quel numero NON NEGATIVO il cui quadrato DA' 9**
  **(ossia, il +3)**

  Perciò la nostra funzione, laddove esiste, è sempre positiva (o nulla), e avremo:




- **Limiti e valori ai confini del dominio:**

  $f(-2) = 0 \qquad f(0) = 0 \qquad f(2) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 - 4x} = +\infty$

  Tu avevi per caso scritto $\lim\limits_{x \to -2+} f(x) = 0$ ?
  Beh, questo non è affatto sbagliato,
  ma è molto più "logico" scrivere semplicemente $f(-2) = 0$
  in quanto, per $x = -2$, la funzione ESISTE, ed è CONTINUA VERSO DESTRA,
  quindi il valore del limite coincide sicuramente col valore della funzione.
  E' quindi preferibile pensare ad un VALORE, piuttosto che ad un LIMITE
  (il limite, qualora venisse calcolato, coinciderebbe col valore).

  Il discorso è analogo, evidentemente, per gli altri confini finiti del dominio.

- **Non si hanno asintoti obliqui, perché**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - 4x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3 - 4x}{x^2}} = +\infty$$

- **Derivata prima** $\quad y = \sqrt{x^3 - 4x} \rightarrow \boxed{y' = \dfrac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x}}}$

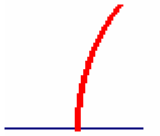
Il dominio $D'$ della $f'(x)$ è più ristretto del dominio D della $f(x)$:
la derivazione ha fatto passare A DENOMINATORE l'espressione $\sqrt{x^3-4x}$,
cosicché nei punti in cui tale espressione si annulla ( $x=0,\quad x=\pm 2$)
la funzione ESISTE, MA NON È DERIVABILE.

$D' = D - \{-2, 0, 2\}$ essendo $D = \textit{dominio di } f;\ D' = \textit{dominio di } f'$

Sarà allora opportuno andare a vedere qual è il comportamento della $y'$,
quando $x$ si avvicina a queste particolari ascisse $x=-2,\ x=0,\ x=2$.

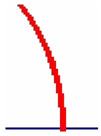
$$\lim_{x\to -2+} y' = \lim_{x\to -2+} \frac{\overbrace{3x^2-4}^{\overset{8}{\uparrow}}}{\underbrace{2\sqrt{x^3-4x}}_{\underset{0+}{\downarrow}}} = +\infty$$

… quindi la curva grafico della funzione
"parte dal punto di ascissa –2
con salita infinita"



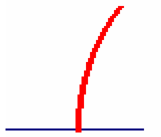
$$\lim_{x\to 0-} y' = \lim_{x\to 0-} \frac{\overbrace{3x^2-4}^{\overset{-4}{\uparrow}}}{\underbrace{2\sqrt{x^3-4x}}_{\underset{0+}{\downarrow}}} = -\infty$$

… quindi la curva grafico della funzione
"arriva al punto di ascissa 0
in discesa infinita"



$$\lim_{x\to 2+} y' = \lim_{x\to 2+} \frac{\overbrace{3x^2-4}^{\overset{8}{\uparrow}}}{\underbrace{2\sqrt{x^3-4x}}_{\underset{0+}{\downarrow}}} = +\infty$$

… quindi la curva grafico della funzione
"parte dal punto di ascissa 2
con salita infinita"



$$y'=0 \qquad \frac{3x^2-4}{2\sqrt{x^3-4x}} = 0 \quad 3x^2-4=0 \ \ (\textit{sempre con } -2<x<0 \vee x>2)$$

$$x^2 = \frac{4}{3} \qquad x = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{4}{3}} \quad \textit{non} \quad \textit{accettabile} \\ -\sqrt{\dfrac{4}{3}} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \approx -1{,}15 \end{cases}$$

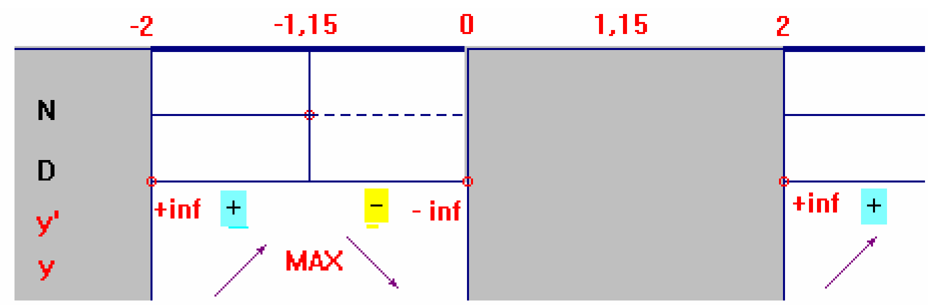
$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \left[\sqrt{x^3-4x}\right]_{x=\ -2\sqrt{3}/3} =$$

$$= \sqrt{-\frac{8\cdot 3\sqrt{3}}{27} + 4\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{-\frac{8\sqrt{3}}{9}+\frac{8\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{\frac{16\sqrt{3}}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{3} \approx 1{,}75$$

$$y'>0 \qquad \frac{\overbrace{3x^2-4}^{N}}{\underbrace{2\sqrt{x^3-4x}}_{D}} > 0$$

$N>0 \quad x<-2/\sqrt{3} \vee x>2/\sqrt{3}$

$D>0 \quad x^3-4x>0 \ \ \textit{quindi} \ -2<x<0 \vee x>2$




$$MAX\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\ \frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\right)$$

- **Derivata seconda**

$y=\sqrt{x^3-4x};$

$$y'=\frac{3x^2-4}{2\sqrt{x^3-4x}}$$

$$y''=\mathrm{D}\left(\frac{3x^2-4}{2\sqrt{x^3-4x}}\right)=\frac{6x\cdot 2\sqrt{x^3-4x}-(3x^2-4)\cdot 2\cdot\frac{3x^2-4}{2\sqrt{x^3-4x}}}{4(x^3-4x)}=$$

$$=\frac{12x\sqrt{x^3-4x}-\frac{(3x^2-4)^2}{\sqrt{x^3-4x}}}{4(x^3-4x)}=\frac{12x(x^3-4x)-(3x^2-4)^2}{4(x^3-4x)\sqrt{x^3-4x}}=$$

$$=\frac{12x^4-48x^2-9x^4+24x^2-16}{4(x^3-4x)\sqrt{x^3-4x}}=\frac{3x^4-24x^2-16}{4(x^3-4x)\sqrt{x^3-4x}}$$

Dunque è $y''=\dfrac{3x^4-24x^2-16}{4(x^3-4x)\sqrt{x^3-4x}}$

$$y''=0\leftrightarrow\begin{cases}3x^4-24x^2-16=0\\ x^3-4x>0\quad(-2<x<0\quad\vee\quad x>2)\end{cases}$$

Risolvendo la biquadratica $3x^4-24x^2-16=0$ si trova:

$$\left(x^2\right)_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144+48}}{3}=\frac{12\pm\sqrt{192}}{3}=\frac{12\pm 8\sqrt{3}}{3}=\frac{4\left(3\pm 2\sqrt{3}\right)}{3}\approx\left\langle\begin{array}{l}-0{,}618<0,\quad \textit{non}\quad \textit{acc.}\\ 8{,}6188\end{array}\right.$$

$$x^2=\frac{4(3+2\sqrt{3})}{3}\approx 8{,}6188\rightarrow x\approx\pm\sqrt{8{,}6188}\approx\pm 2{,}936\left\langle\begin{array}{l}-2{,}936\quad \textit{non}\quad \textit{accettabile}\\ 2{,}936\end{array}\right.$$

In definitiva, l'unico valore per cui si annulla $y''$ è $x=+\sqrt{\dfrac{4(3+2\sqrt{3})}{3}}\approx 2{,}936$.

Questa ascissa $x=\sqrt{\dfrac{4(3+2\sqrt{3})}{3}}\approx 2{,}936$ non si può classificare "tout-court" come un flesso;
per trarre, eventualmente, questa conclusione, occorrerà accertarsi
che nell'attraversamento dell'ascissa in esame, la $y''$ cambi di segno.

In effetti così accade, perché il trinomio biquadratico $3x^4-24x^2-16$ può scomporsi in

$$3\left[x^2-\underbrace{\frac{4(3-2\sqrt{3})}{3}}_{<0}\right]\left[x^2-\frac{4(3+2\sqrt{3})}{3}\right]$$

Il primo fattore è sempre positivo;

il fattore $\left[x^2-\dfrac{4(3+2\sqrt{3})}{3}\right]$ è invece scomponibile nel prodotto

$$\left(x+\sqrt{\frac{4(3+2\sqrt{3})}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{4(3+2\sqrt{3})}{3}}\right).$$

Pertanto, se andiamo a porre l'espressione analitica della $y''$ sotto una forma che presenti esclusivamente fattori di 1° grado, uno e un solo di questi fattori risulterà cambiare di segno nell'attraversamento dell'ascissa $x=\sqrt{\dfrac{4(3+2\sqrt{3})}{3}}\approx 2{,}936$

e ciò comporta che la $y''$ cambi di segno nel passaggio dalla sinistra alla destra di tale ascissa.

Questa, dunque, è effettivamente di flesso per la $f(x)$.

$F(\approx 2{,}936;\ \approx 3{,}683),\ m_F \approx 2{,}968$

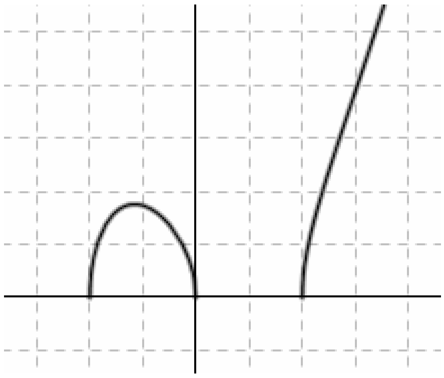
Ed ecco il grafico della funzione!!!

$y = \sqrt{x^3 - 4x} = f(x)$

$MAX\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{4}{3}\sqrt[4]{3}\right)$

$F(\approx 2{,}936; \approx 3{,}683)$

$m_F \approx 2{,}968$



Nell'affrontare lo studio di questa funzione
$y = \sqrt{x^3 - 4x} = f(x)$
avremmo anche potuto procedere tracciando prima il grafico di $y = g(x) = x^3 - 4x$
e poi "manipolandolo" in modo da ottenere un abbozzo della curva $y = f(x)$.

In questo modo, avremmo già potuto ottenere un grafico "provvisorio" della $f$, abbastanza soddisfacente.

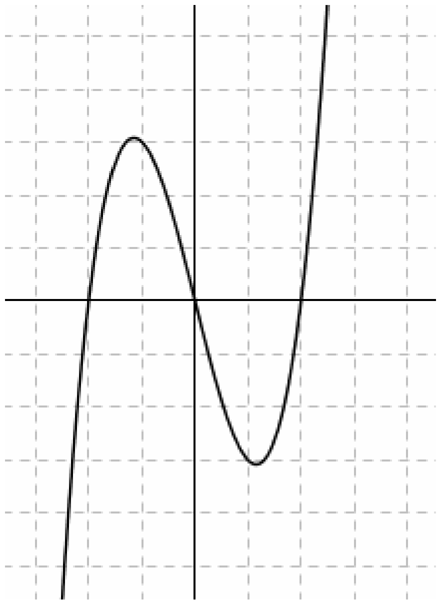
Dopodiché, il calcolo di $f'(x)$ e $f''(x)$ ci avrebbe consentito di determinare con precisione il massimo relativo e il "probabile" flesso, di cui il grafico "provvisorio" rivela (nel caso del massimo) o suggerisce (nel caso del flesso), la presenza.

Osserviamo che nel passaggio dalla funzione "madre" $g(x)$ alla "figlia" $f(x) = \sqrt{g(x)}$,

- i punti con $y = 1$ e con $y = 0$ vengono "riconfermati";
- ogni punto con $y > 1$ "genera" un punto "figlio", avente la stessa ascissa ma ordinata inferiore;
- ogni punto con $0 < y < 1$ "genera" un punto "figlio", avente la stessa ascissa ma ordinata leggermente superiore (ancora compresa, però, fra 0 e 1);
- ogni punto $(x, y)$ con $y < 0$ rimane "sterile", nel senso che la curva "figlia" non avrà nessun punto con QUELL'ascissa $x$.

La figura qui a fianco rappresenta la curva di equazione $y = g(x) = x^3 - 4x$.

Per esercizio, puoi ricavare da questa un grafico approssimativo della $y = \sqrt{x^3 - 4x} = f(x)$, constatandone la buona aderenza al grafico preciso, riportato sopra.



$$\boxed{y = f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2 + x}}$$

Osserviamo subito che l'espressione analitica della $f(x)$ si può portare sotto diverse forme alternative:

$$y = f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2 + x} = x \cdot \sqrt[3]{x(x+1)} = \sqrt[3]{x^4(x+1)} = \sqrt[3]{x^5 + x^4} = \left(x^5 + x^4\right)^{1/3}$$

Di volta in volta ci serviremo, a seconda dell'opportunità,
dell'una o dell'altra fra queste espressioni equivalenti.

- **Dominio** = $(-\infty,\ +\infty)$ (un radicale con indice DISPARI esiste qualunque sia il segno del radicando)

- $f(-x) = -x \cdot \sqrt[3]{x^2 - x}$ $\left\langle \begin{array}{l} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{array} \right.$ per cui f non è **né pari, né dispari**

- **Intersezioni con l'asse *y***: $x = 0 \to y = 0$ quindi $O(0,0)$

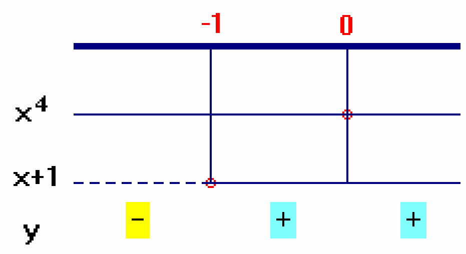
  **Intersezioni con l'asse *x***: $y = 0 \leftrightarrow x \cdot \sqrt[3]{x(x+1)} = 0 \leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$ $\quad O(0,0);\ A(-1,0)$

- **Segno della funzione**:

  $$y > 0 \leftrightarrow \sqrt[3]{x^4(x+1)} > 0 \leftrightarrow x^4(x+1) > 0$$

  $x^4 > 0$ *con* $x \neq 0$

  $x + 1 > 0$ *con* $x > -1$




- **Limiti ai confini del dominio**: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x^5 + x^4} = \pm\infty$

- **La funzione non possiede asintoti obliqui**: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

- **Derivata prima**:

$$\boxed{y'} = \frac{d}{dx}(x^5 + x^4)^{1/3} = \frac{1}{3}(x^5 + x^4)^{-2/3}(5x^4 + 4x^3) =$$

$$= \frac{5x^4 + 4x^3}{3\sqrt[3]{(x^5 + x^4)^2}} = \frac{x^3(5x+4)}{3\sqrt[3]{x^8(x+1)^2}} = \frac{x^3(5x+4)}{3x^2\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} = \boxed{\frac{x(5x+4)}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}} \quad (x \neq 0)$$

La condizione $x \neq 0$ posta all'atto di semplificare per $x^2$ ci potrebbe indurre a ritenere
che la derivata prima non esista con $x = 0$.
Andiamo tuttavia a determinare il limite della $f'(x)$, quando $x$ tende a 0: ci attende una sorpresa.

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x(5x+4)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^3(5x+4)^3}{x^2(x+1)^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}} = 0$$

Il teorema che abbiamo chiamato "Criterio di Derivabilità" ci assicura perciò che: $\exists\ f'(0) = 0$

In effetti, calcolando direttamente la derivata in 0 come limite del rapporto incrementale, si avrebbe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h^5 + h^4}}{h} \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot \sqrt[3]{h^2 + h}}{h} = \lim_{h \to 0} \sqrt[3]{h^2 + h} = 0$$

.

Tutto ciò è particolarmente interessante.
Dall'espressione generale della $y'$ sembrava che la $y'(0)$ non esistesse,
invece abbiamo poi scoperto che esiste (e vale 0).
Come mai, allora, l'espressione della $y'$ aveva un denominatore che si annullava con $x = 0$,
così da far ritenere in un primo tempo che $y'(0)$ non fosse definita?

La spiegazione sta nel fatto che la formula di derivazione per la funzione $t^{1/3}$, vale a dire:

$D\left(t^{1/3}\right)=\frac{1}{3}t^{-2/3}$,

è applicabile soltanto a condizione che sia $t\neq 0$ .

Pertanto, data una funzione della forma $\left[g(x)\right]^{1/3}$,

non possiamo pretendere di poter utilizzare tale formula anche nei punti in cui $t=g(x)$ si annulla.

Ma la non applicabilità della formula di derivazione $D\left(t^{1/3}\right)=\frac{1}{3}t^{-2/3}$

non comporta necessariamente la non derivabilità della funzione $y=\left[g(x)\right]^{1/3}$ nei punti in cui $g(x)=0$:

la questione se la $y$ sia derivabile o meno in tali punti, resta aperta.

L'espressione analitica $y'=\dfrac{x(5x+4)}{3\ \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}$

che abbiamo trovato per la derivata prima, perde inoltre significato con $x=-1$.

Calcolando il $\lim\limits_{x\to\ -1} f\,'(x)$ avremo:

$$\lim_{x\to\ -1} f\,'(x)=\lim_{x\to\ -1}\frac{x(5x+4)}{3\cdot\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}=\ldots=\lim_{x\to\ -1}\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}}=+\infty$$

Perciò, per il Criterio di Derivabilità, $f\,'(-1)=+\infty$,

nel senso che il rapporto incrementale centrato nell'ascissa $-1$ tende, al tendere a zero dell'incremento, all'infinito positivo (= il grafico della funzione attraversa l'ascissa $-1$ "in salita verticale").

Andiamo a controllare ulteriormente la correttezza di questo risultato,
determinando la derivata in $-1$ come limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(-1+h)^5+(-1+h)^4}-\sqrt[3]{-1+1}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(-1+h)^4(-1+h+1)}}{h}=\lim_{h\to 0}\sqrt[3]{\frac{h(-1+h)^4}{h^3}}=\lim_{h\to 0}\sqrt[3]{\frac{(h-1)^4}{h^2}}=+\infty$$

**Ora possiamo ricapitolare e proseguire:**

$$y=f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x^2+x}=x\cdot\sqrt[3]{x(x+1)}=\sqrt[3]{x^4(x+1)}=\sqrt[3]{x^5+x^4}=\left(x^5+x^4\right)^{1/3}$$

$$f\,'(x)=\frac{x(5x+4)}{3\cdot\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}}\quad(x\neq 0,\ x\neq -1)$$

$$f\,'(0)=0,\ \ f\,'(-1)=+\infty\quad \mathrm{D}'=\mathrm{D}-\{-1\}$$

$$y'=0\quad con\quad x=0\vee x=-\frac{4}{5}\ \ f(0)=0;\qquad f\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{4}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}-\frac{4}{5}}=-\frac{4}{5}\sqrt[3]{-\frac{4}{25}}\approx 0,43;\qquad f(-1)=0$$

$y'>0$

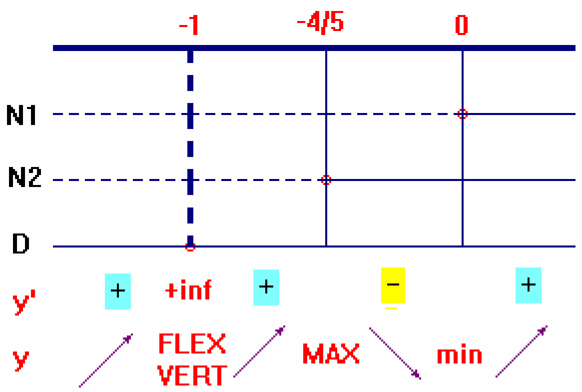
$$\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}}>0$$

$$\frac{\overset{\mathrm{N1}}{x}\ \overbrace{(5x+4)^3}^{\mathrm{N2}}}{\underbrace{(x+1)^2}_{\mathrm{D}}}>0$$

$\mathrm{N1}>0\quad x>0$

$\mathrm{N2}>0\quad x>-4/5$

$\mathrm{D}>0\quad x\neq -1$




F$(-1,0)$ *flesso verticale* MAX$(-4/5;\approx 0,43)$ min $(0,0)$

❑ **Derivata seconda**:

$$y''=D\left\{\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}}\right\}=D\left(\frac{1}{3}\left\{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}\right\}^{1/3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}\right\}^{-\frac{2}{3}}\cdot D\left[\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}\right]=\frac{1}{9}\cdot\frac{D\left[\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}\right]}{\sqrt[3]{\left\{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}\right\}^2}}$$

*Calcoliamo a parte il numeratore della frazione:*

$$D\left[\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}\right]=\frac{\left\{1\cdot(5x+4)^3+x\cdot 3(5x+4)^2\cdot 5\right\}\cdot(x+1)^2-x(5x+4)^3\cdot 2(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{\left\{(5x+4)^3+15x(5x+4)^2\right\}\cdot(x+1)^2-2x(5x+4)^3(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(5x+4)^2\overbrace{(5x+4+15x)}^{\substack{4(5x+1)\\20x+4}}(x+1)^2-2x(5x+4)^3(x+1)}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{2(5x+4)^2(x+1)\left\{2(5x+1)(x+1)-x(5x+4)\right\}}{(x+1)^4}=\frac{2(5x+4)^2(x+1)(10x^2+10x+2x+2-5x^2-4x)}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{2(5x+4)^2(x+1)(5x^2+8x+2)}{(x+1)^4}=\frac{2(5x+4)^2(5x^2+8x+2)}{(x+1)^3}$$

$$\boxed{y''}=\frac{1}{9}\frac{\frac{2(5x+4)^2(5x^2+8x+2)}{(x+1)^3}}{\sqrt[3]{\left\{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}\right\}^2}}=\frac{2(5x+4)^2(5x^2+8x+2)}{9(x+1)^3\cdot\sqrt[3]{\left\{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}\right\}^2}}=\frac{2(5x+4)^2(5x^2+8x+2)}{9\cdot\sqrt[3]{\frac{(x+1)^9\cdot x^2\cdot(5x+4)^6}{(x+1)^4}}}=$$

$$=\frac{2(5x+4)^2(5x^2+8x+2)}{9\cdot\sqrt[3]{(x+1)^5\cdot x^2\cdot(5x+4)^6}}=\frac{2(5x+4)^2(5x^2+8x+2)}{9(x+1)(5x+4)^2\cdot\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}=\boxed{\frac{2(5x^2+8x+2)}{9(x+1)\cdot\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}}\qquad\begin{matrix}x\neq 0\\x\neq -1\\x\neq -4/5\end{matrix}$$

$$\lim_{x\to 0} f''(x)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(5x^2+8x+2)}{9(x+1)\cdot\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}=+\infty$$

La natura del punto di ascissa 0
era già nota dalle considerazioni precedenti:
si tratta di un punto stazionario ( $y'(0)=0$ ), di minimo relativo.
Nell'intorno dell'ascissa 0 il grafico della funzione
sta tutto al di sopra della retta tangente in (0,0):
perciò si tratta di un punto di convessità per la funzione,
sebbene in tale punto non esista la $y''$ (che "diventa infinita").

$$\lim_{x\to -1\pm} f''(x)=$$

$$=\lim_{x\to -1\mp}\frac{\overbrace{2(5x^2+8x+2)}^{\substack{-1\\\uparrow}}}{\underbrace{9(x+1)}_{\substack{\downarrow\\0\pm}}\cdot\sqrt[3]{\underbrace{x^2}_{\substack{\downarrow\\1}}\underbrace{(x+1)^2}_{\substack{\downarrow\\0+}}}}=\mp\infty$$

La natura del punto di ascissa $-1$
era già nota dalle considerazioni precedenti:
$x=-1$ è punto di flesso verticale.
Nell'attraversamento dell'ascissa $-1$,
la $y''$ da positiva diventa negativa;
tuttavia, nell'ascissa $-1$ la $y''$ non esiste
(in $x=-1$ non esisteva neppure la $y'$ !).
Insomma, si tratta di un caso in cui la $y''$
cambia di segno senza annullarsi.

$$\lim_{x\to -4/5} f''(x)=\lim_{x\to -4/5}\frac{2(5x^2+8x+2)}{9(x+1)\cdot\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}=\ldots$$

$$=-\frac{10}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$$

e quindi, per il Criterio di Derivabilità
(applicato alla $y''$ vista come derivata della $y'$),

$$\exists f''\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{10}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$$

Nel punto $x=-4/5$,
la funzione ammette regolarmente
tanto la derivata prima
quanto la derivata seconda.
Essendo $y''(-4/5)<0$,
il punto in esame
è di concavità per la funzione.
Già sapevamo trattarsi di un massimo relativo.

Ricapitolando:

$$y = f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2 + x} = x \cdot \sqrt[3]{x(x+1)} = \sqrt[3]{x^4(x+1)} = \sqrt[3]{x^5 + x^4} = \left(x^5 + x^4\right)^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{x(5x+4)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x(5x+4)^3}{(x+1)^2}} \qquad (x \neq 0, \quad x \neq -1)$$

$$f'(0) = 0, \quad f'(-1) = +\infty \qquad D' = D - \{-1\}$$

$$f''(x) = \frac{2(5x^2 + 8x + 2)}{9(x+1) \cdot \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} \qquad x \neq 0, \quad x \neq -1, \quad x \neq 4/5$$

$$f''(0) = +\infty, \qquad f''\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{10}{3} \quad \sqrt[3]{\frac{5}{2}};$$

*in* $x = -1$ *non è definita la* $y'$ *quindi non ha senso parlare della* $y''$;

*tuttavia, si osserva che* $\lim\limits_{x \to -1^{\pm}} y'' = \mp\infty$

$$D'' = D' - \{0\}$$

$$f''(x) = 0 \leftrightarrow \frac{2(5x^2 + 8x + 2)}{9(x+1) \cdot \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} = 0$$

$$x = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-4-\sqrt{6}}{5} \approx -1,29 \\ \dfrac{-4+\sqrt{6}}{5} \approx -0,31 \end{array} \right.$$

Lo studio del segno della $y''$ è banale e dall'esito ampiamente prevedibile: le due ascisse appena trovate risultano essere di flesso.

Ed ecco il grafico!!!

$$\boxed{y = f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2 + x}}$$

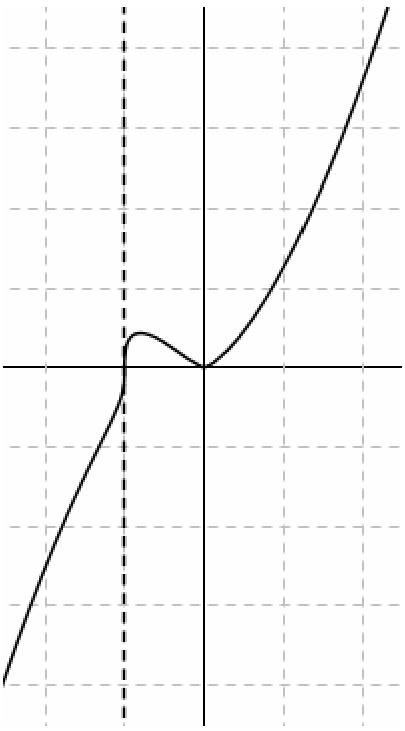
$F(-1, 0)$ *flesso verticale*

$MAX(-4/5; \approx 0,43)$

$\min(0,0)$

*Flessi obliqui nelle ascisse*:

$$x_{1,2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-4-\sqrt{6}}{5} \approx -1,29 \\ \dfrac{-4+\sqrt{6}}{5} \approx -0,31 \end{array} \right.$$



$$\boxed{y = x - \sqrt[5]{x^4} = f(x)}$$

- **Dominio** = $[-\infty, \ +\infty)$

- **Né pari né dispari**

- **Intersezioni con gli assi**

Con l' asse *y*: $x = 0 \to y = 0$

Con l'asse *x*:

$y = 0$

$$x = \sqrt[5]{x^4};$$
$$x^5 = x^4;$$
$$x^5 - x^4 = 0;$$
$$x^4(x-1) = 0;$$
$$x = 0 \vee x = 1$$

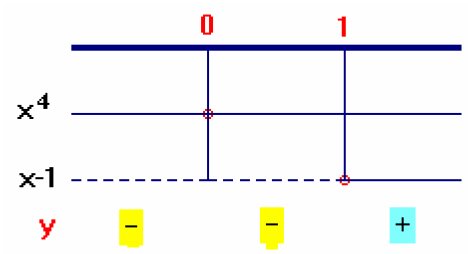
**FINESTRA SULLA TEORIA**

Le equazioni e le disequazioni irrazionali diventano di semplicissima risoluzione quando l'indice del radicale è dispari. Infatti l'elevamento ad esponente dispari di un'equazione o disequazione è sempre lecito senza che vada posta alcuna condizione complementare

- **Segno della funzione**

$y > 0$

$$x - \sqrt[5]{x^4} > 0;$$
$$x > \sqrt[5]{x^4};$$
$$x^5 > x^4;$$
$$x^5 - x^4 > 0;$$
$$x^4(x-1) > 0$$




- **Limiti ai confini del dominio**

$$\lim_{x \to -\infty} \left( \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{x} \underbrace{-\sqrt[5]{x^4}}_{-\infty} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x} \underbrace{-\sqrt[5]{x^4}}_{-\infty} \right) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\sqrt[5]{x^4}}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \sqrt[5]{\frac{x^4}{x^5}}\right) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \underbrace{\sqrt[5]{\frac{1}{x}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}\right) = +\infty$$

- **Eventuali asintoti obliqui**

Ricerca di *m* $\quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sqrt[5]{x^4}}{x} = \ldots = 1 = m.$

Ricerca di *q* $\quad \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt[5]{x^4} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\sqrt[5]{x^4}\right) = -\infty$

Quindi, per $x \to \pm\infty$,
non si hanno asintoti obliqui
ma solo la "direzione asintotica" $m = 1$.

- **Derivata prima**

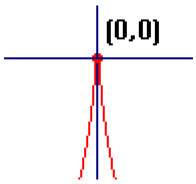
$$\boxed{y'} = \frac{d}{dx}\left(x - \sqrt[5]{x^4}\right) = \frac{d}{dx}\left(x - x^{4/5}\right) = 1 - \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = 1 - \frac{4}{5x^{\frac{1}{5}}} = 1 - \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} = \boxed{\frac{5\sqrt[5]{x} - 4}{5\sqrt[5]{x}}}$$

**Il dominio D' della $f'(x)$ è più ristretto del dominio D della $f(x)$ :**
con $x = 0$ la funzione esiste, ma non è derivabile.

Calcoliamo allora i due limiti della $y'$, per $x$ che tende a 0 da sinistra e da destra:

$$\lim_{x \to 0-} y' = \lim_{x \to 0-}\left(1 - \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}\right) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0+} y' = \lim_{x \to 0+}\left(1 - \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}\right) = -\infty$$

Si ha pertanto
$y'_{-}(0) = +\infty$
$y'_{+}(0) = -\infty$
e il punto $x = 0$
è una CUSPIDE




$$y' = 0 \qquad 5\sqrt[5]{x} - 4 = 0; \quad \sqrt[5]{x} = \frac{4}{5}; \quad x = \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 0,32768$$

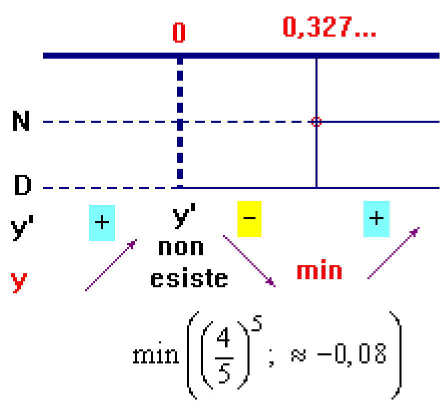
$$f\left(\left(\frac{4}{5}\right)^5\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^5 - \sqrt[5]{\left[\left(\frac{4}{5}\right)^5\right]^4} = \left(\frac{4}{5}\right)^5 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5} - 1\right) = -\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4 = -0,08192$$

$$y' > 0$$

$$\frac{5\sqrt[5]{x} - 4}{5\sqrt[5]{x}} > 0$$

$\mathrm{N} > 0 \quad 5\sqrt[5]{x} - 4 > 0; \quad \sqrt[5]{x} > \frac{4}{5}; \quad x > \left(\frac{4}{5}\right)^5$

$\mathrm{D} > 0 \quad 5\sqrt[5]{x} > 0; \quad x > 0$




- **Derivata seconda**

$$\boxed{y''} = \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}\right) = -\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)x^{-\frac{6}{5}} = \frac{4}{25}x^{-\frac{6}{5}} = \frac{4}{25\sqrt[5]{x^6}} = \boxed{\frac{4}{25x\cdot\sqrt[5]{x}}}$$

Dunque $y''$ non può mai annullarsi, e anzi è sempre positiva, $\forall x \neq 0$.
Con $x = 0$, naturalmente, $y''$ non esiste (non esisteva neppure la derivata prima!).
La nostra funzione è sempre convessa.

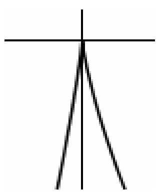
Ed ecco il grafico !!!

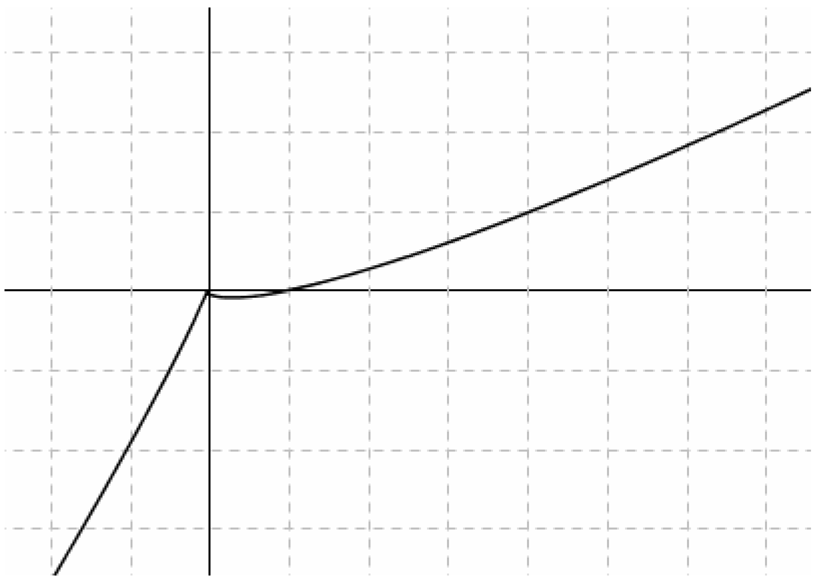
$y = x - \sqrt[5]{x^4} = f(x)$

*cuspide in* $(0,0)$

$\min\left(\left(\frac{4}{5}\right)^5 \approx 0,33; \ \approx -0,08\right)$

Qui sotto è rappresentata (con GeoGebra) la cuspide





$$\boxed{y = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = f(x)}$$

- **Dominio:** $x \neq 0$ $\quad D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

- **Né pari né dispari**

- **Intersezioni con gli assi**
  - Poiché la funzione non è definita con $x = 0$, non si hanno intersezioni con l'asse $y$.
  - Ricerchiamo ora le eventuali intersezioni con l'asse $x$.

    $y = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$ se e solo se $e^{-\frac{1}{x}} = 0$. Ma quest'ultima equazione è impossibile! Infatti…

**… IMPORTANTISSIMO!**
Un'**esponenziale**, ossia una funzione della forma $a^t$, con $a > 0$,
non si annulla mai, per nessun valore dell'esponente *t*,
anzi: è **STRETTAMENTE POSITIVA per ogni valore dell'esponente**.
In altre parole, elevando una costante positiva ad un qualsivoglia esponente
(positivo, negativo o nullo; intero, razionale o irrazionale),
il risultato che si ottiene è sempre strettamente positivo.

Quindi, in definitiva, LA CURVA GRAFICO DELLA NOSTRA FUNZIONE
NON HA NESSUNA INTERSEZIONE CON GLI ASSI.

- **Segno della funzione**

$y > 0 \qquad \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} > 0$

Abbiamo già osservato che il numeratore è >0 per ogni *x* (diverso da 0, ovviamente);

perciò si ha:
$$\begin{array}{l} f(x) > 0 \quad con \quad x > 0 \\ f(x) < 0 \quad con \quad x < 0 \\ f(x) = 0 \quad mai \end{array}$$

- **Limiti ai confini del dominio**

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{e^{\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\to 0}}}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to -\infty}} = 0^- \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{e^{\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\to 0}}}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to +\infty}} = 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\overbrace{e^{\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\to +\infty}}}^{\to +\infty}}{\underbrace{x}_{\to 0-}} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0+} \frac{\overbrace{e^{\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\to -\infty}}}^{\to 0+}}{\underbrace{x}_{\to 0+}} = F.I.$$

L'ultimo fra i quattro limiti presenta una Forma di Indecisione,
che tenteremo di sciogliere con la regola di De l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(+\frac{1}{x^2}\right)}{1}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(+\frac{1}{x^2}\right)}{2x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3}=\ldots$$


Vediamo purtroppo che l'applicazione (reiterata) di De l'Hospital non scioglie l'indecisione, bensì la ripropone continuamente (con un denominatore, anzi, di grado via via sempre più elevato).

Ciò è dovuto al fatto che derivando l'esponenziale $e^{-\frac{1}{x}}$ si genera, per derivazione dell'esponente, il fattore $+\frac{1}{x^2}$, il quale va a vanificare l' "abbattimento di un grado", per derivazione, del monomio che si aveva a denominatore.
Un tentativo di superare l' impasse potrebbe consistere nell'effettuare una sostituzione che porti l'esponenziale ad assumere una forma più "addomesticata", tale che attraverso la derivazione si mantenga sostanzialmente "stabile".

Poniamo allora $\frac{1}{x}=t$. Avremo $x=\frac{1}{t}$ e con $x\to 0^+$ sarà $t\to +\infty$.

Il nostro limite diventerà: $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{t\to +\infty}\frac{e^{-t}}{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to +\infty}\frac{t}{e^t}\overset{H}{=}\lim\limits_{t\to +\infty}\frac{1}{e^t}=0^+$

Evviva!!! Possiamo finalmente concludere che $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=0^+$

NOTA
Avremmo anche potuto evitare di ricorrere ad una sostituzione, procedendo nel modo seguente:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to+\infty}}}_{\downarrow\atop+\infty}}=0^+$$

## ❑ **Derivata prima**

$$y=f(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$y'=\frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(+\frac{1}{x^2}\right)\cdot x-e^{-\frac{1}{x}}\cdot 1}{x^2}=\frac{e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x^2}=\frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-x}{x}}{x^2}=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-x}{x^3}$$

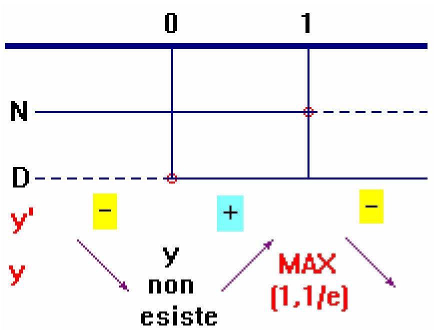
$\boxed{y'=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-x}{x^3}}$ $\quad y'=0\ \ con\ \ x=1.\quad y(1)=e^{-1}=\frac{1}{e}\approx\frac{1}{2{,}718}\approx 0{,}368$

$y'>0$

$$\underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{>0}\cdot\frac{\overbrace{1-x}^{N}}{\underbrace{x^3}_{D}}>0$$

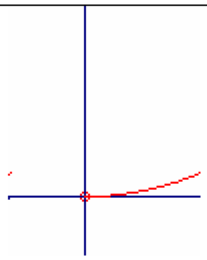
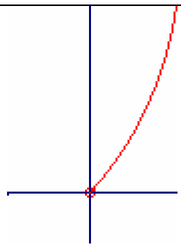
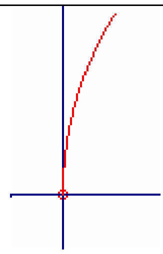
$N>0 \qquad x<1$

$D>0 \qquad x>0$



Prima di procedere col calcolo della derivata seconda,
dobbiamo "domandare ancora qualche cosa" alla $y'$.
La nostra funzione $f(x)$ ha un comportamento molto particolare in prossimità dell'ascissa 0:
infatti si ha $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0^+$

Dunque, quando $x \to 0^+$ , $y$ tende a 0:
ma CON QUALE PENDENZA la curva $y = f(x)$ si "tuffa", da destra, nel punto (0,0)?

| | | |
|---|---|---|
|  COSI'? … (secondo l'orizzontalità) |  … COSI'? … (secondo un determinato angolo diverso sia da 0° che da 90°) |  … O COSI'? (secondo la verticalità) |

Risponderemo calcolando il $\lim\limits_{x\to 0+} y' = \lim\limits_{x\to 0+} \underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{\substack{\downarrow\\ 0+}} \cdot \underbrace{\frac{1-x}{x^3}}_{\substack{\downarrow\\ +\infty}}$.

Anche questo limite è "brutto": presenta infatti una Forma di Indecisione $[0\cdot\infty]$.
Seppure l'esperienza induca a "scommettere" in favore dell'esponenziale
(e, quindi, a pronosticare che il limite valga 0),
sorge l'esigenza di sciogliere l'indecisione con un procedimento rigoroso.
Purtroppo portando la funzione sotto una delle due forme

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{x^3}{1-x}} \quad \text{o} \quad \frac{\frac{1-x}{x^3}}{e^{\frac{1}{x}}}$$

si va incontro, oltre che a calcoli pesanti, allo stesso fallimento
che abbiamo sperimentato con la Forma di Indecisione precedente.
Siamo allora portati a effettuare ancora la sostituzione

$\frac{1}{x} = t$ (da cui $x = \frac{1}{t}$)

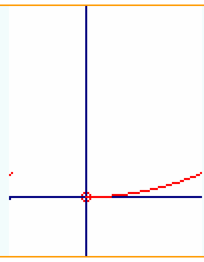
per ottenere

$$\lim_{x\to 0+} y' = \lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-x}{x^3} = \lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{\overbrace{t^3 - t^2}^{\substack{+\infty\\ \uparrow}}}{\underbrace{e^t}_{\substack{\downarrow\\ +\infty}}} =$$

$$\overset{H}{=} \lim_{t\to +\infty} \frac{3t^2 - 2t}{e^t} \overset{H}{=} \lim_{t\to +\infty} \frac{6t - 2}{e^t} \overset{H}{=} \lim_{t\to +\infty} \frac{6}{e^t} = 0^+$$

$$\lim_{x\to 0+} y' = 0^+$$

Pertanto la pendenza con la quale la $y = f(x)$
"entra" nell'origine da destra, tende all'orizzontalità
e, fra le tre alternative sopra prospettate,
quella corretta è la prima: $\rightarrow$



❑ **Derivata seconda** $y=\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ $\quad y'=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-x}{x^3}$

$$y''=\left[e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(+\frac{1}{x^2}\right)\right]\cdot\frac{1-x}{x^3}+e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1\cdot x^3-(1-x)\cdot 3x^2}{x^6}=$$

$$=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1-x}{x^5}+\frac{2x^3-3x^2}{x^6}\right)=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1-x}{x^5}+\frac{2x^2-3x}{x^5}\right)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{2x^2-4x+1}{x^5}$$

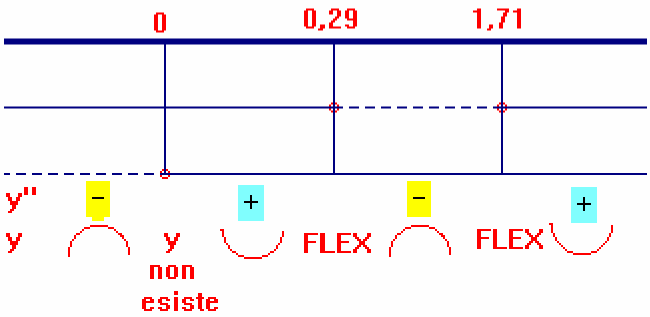
$$\boxed{y''=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{2x^2-4x+1}{x^5}}\qquad y''=0\quad con\quad 2x^2-4x+1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-2}}{2}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{2-\sqrt{2}}{2}\approx 0,29\\ \frac{2+\sqrt{2}}{2}\approx 1,71\end{array}\right.$$

$$y''>0\qquad \underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{>0}\cdot\frac{\overbrace{2x^2-4x+1}^{N}}{\underbrace{x^5}_{D}}>0$$

$N>0\quad x<\frac{2-\sqrt{2}}{2}\vee x>\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$D>0\quad x>0$




Con $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\approx 0,29$ si ha $\frac{1}{x}=\frac{2}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{2(2+\sqrt{2})}{4-2}=2+\sqrt{2}\approx 3,41$

Perciò

$$f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=\left[\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\right]_{x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot e^{-(2+\sqrt{2})}\approx 3,41\cdot e^{-3,41}\approx 0,11$$

$$f'\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=\left[e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-x}{x^3}\right]_{x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\ldots\approx 0,92\qquad F_1\left(\approx 0,29;\approx 0,11\right)\ \ m_1\approx 0,92$$

… mentre affidiamo al lettore volonteroso gli analoghi calcoli per quanto riguarda l'altro flesso. Si trova: $F_2\left(\approx 1,71;\approx 0,33\right)$, $m_2\approx -0,08$

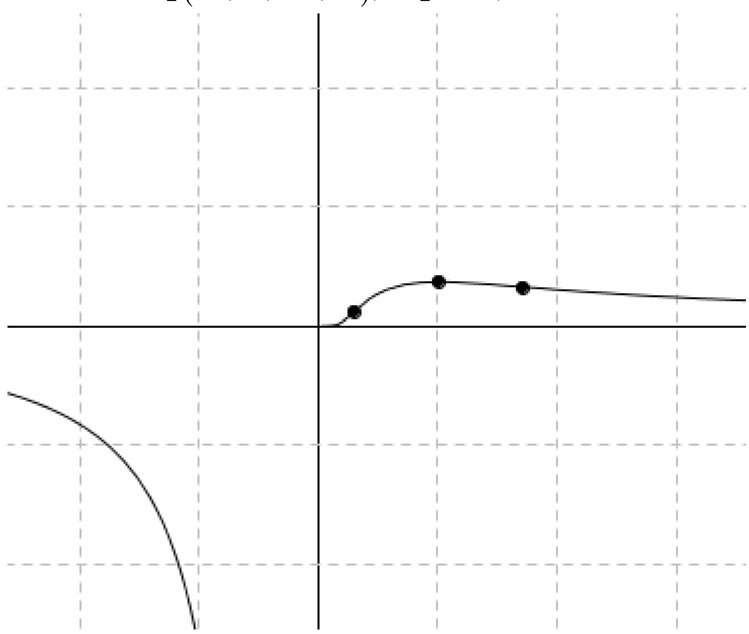
Ed ecco il grafico
della funzione!!!

$$y=\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=f(x)$$

$\mathrm{MAX}\left(1,\frac{1}{e}\right)$

$F_1\left(\approx 0,29;\ \approx 0,11\right)\ \ m_1\approx 0,92$

$F_2\left(\approx 1,71;\ \approx 0,33\right),\ \ m_2\approx -0,08$



$$\boxed{y = \frac{e^x - x^2}{x+1} = f(x)}$$

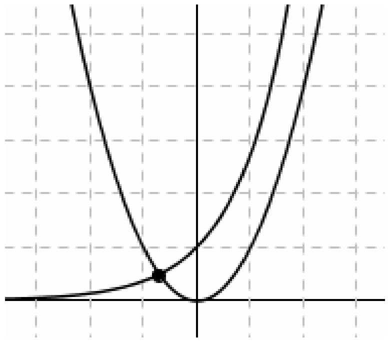
- **Dominio:** $x \neq -1$ $\qquad D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
- **Né pari né dispari**
- **Intersezioni con gli assi.**

Con l'asse $y$: $\quad x = 0 \to y = \frac{1-0}{0+1} = 1 \quad (0,1)$

Con l'asse $x$: $\quad \frac{e^x - x^2}{x+1} = 0 \qquad e^x = x^2 \qquad (x \neq -1)$

Dell'equazione $e^x = x^2$
si possono localizzare le soluzioni col metodo grafico,
poi, in un secondo tempo,
approssimarle meglio con una procedura numerica,
ad esempio il metodo di bisezione.

Si vede che l'equazione ha una sola radice,
compresa fra –1 e 0.
Una sua approssimazione ulteriore porterebbe a stabilire
che tale soluzione vale circa –0,70.

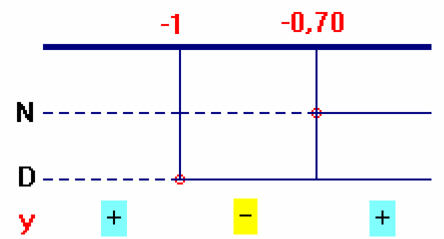


Quindi si ha una sola intersezione con l'asse $x$: $(\approx -0,70;\ 0)$

- **Segno della funzione**

$y > 0$

$$\frac{e^x - x^2}{x+1} > 0$$




- **Limiti ai confini del dominio:**

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{0} - \overbrace{x^2}^{-\infty}}{\underbrace{x+1}_{-\infty}} \overset{H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{0} - \overbrace{2x}^{+\infty}}{1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{\overbrace{e^x}^{1/e} - \overbrace{x^2}^{-1}}{\underbrace{x+1}_{0-}} = +\infty \qquad \lim_{x \to -1+} \frac{\overbrace{e^x}^{1/e} - \overbrace{x^2}^{-1}}{\underbrace{x+1}_{0+}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{+\infty} - \overbrace{x^2}^{-\infty}}{\underbrace{x+1}_{+\infty}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\underbrace{x}_{+\infty}\left(\overbrace{\frac{e^x}{x^2}}^{+\infty} - 1\right)}{\underbrace{1 + \frac{1}{x}}_{1}} = +\infty$$

Il rapporto $e^x / x^2$
tende a $+\infty$,
come dovrebbe essere noto
e come in ogni caso si può
facilissimamente dimostrare
applicando de l'Hospital.

Più in generale, si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \forall \alpha > 0$$

- **Eventuali asintoti obliqui.**
**Verso destra:**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - x^2}{x^2 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2} - 1}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

Quindi, non c'è asintoto obliquo verso destra.

**Verso sinistra:**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-x^2}{x^2+x}\overset{\text{NOTA 1}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-1\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\overset{\text{NOTA 2}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^x}{x^2}-1}{1+\frac{1}{x}}=-1=m$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-x^2}{x+1}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x}{x+1}\overset{H\ (NOTA\ 3)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{1}=1=q$$

NOTA 1. - Abbiamo scelto di procedere per raccoglimenti, ma in alternativa avremmo potuto benissimo anche applicare la regola di De l'Hospital

NOTA 2. - $\lim_{x\to-\infty} e^x/x^2=0$

NOTA 3. - Qui abbiamo applicato la regola di De l'Hospital, ma avremmo potuto benissimo sciogliere l'indecisione raccogliendo $x$ sia a numeratore che a denominatore.

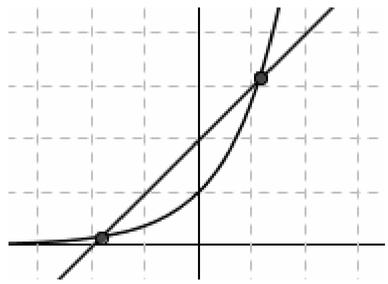
Perciò la retta $y=-x+1$ è asintoto obliquo sinistro per la nostra funzione.

- **Derivata prima** $\quad y=f(x)=\dfrac{e^x-x^2}{x+1}$

$$y'=\frac{(e^x-2x)(x+1)-(e^x-x^2)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{xe^x+e^x-2x^2-2x-e^x+x^2}{(x+1)^2}=\frac{xe^x-x^2-2x}{(x+1)^2}=\frac{x(e^x-x-2)}{(x+1)^2}$$

$$\boxed{y'=\frac{x(e^x-x-2)}{(x+1)^2}}\qquad y'=0\ \ con\ \ x=0\vee\ e^x-x-2=0$$

L'equazione $e^x-x-2=0$
può essere affrontata col metodo grafico
($e^x=x+2$)
per poi eventualmente
approssimare meglio le soluzioni
con una procedura numerica.



Si trovano due soluzioni,
$-2<\alpha<-1$ e $1<\beta<2$.

Approssimandole meglio,
ad es. con bisezione,
si vede che $\alpha\approx-1{,}84;\ \beta\approx1{,}15$

Poiché
$e^x>x+2$ con $x<\alpha\vee x>\beta$,
è anche
$e^x-x-2>0$ con $x<\alpha\vee x>\beta$.
Quindi avremo:

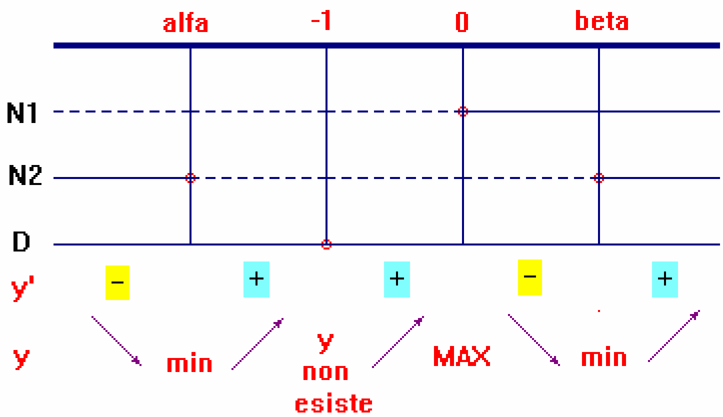
$y'>0$

$$\frac{\overbrace{x}^{N1}\,\overbrace{(e^x-x-2)}^{N2}}{\underbrace{(x+1)^2}_{D}}>0$$

min($\approx-1{,}84;\approx3{,}84$)

MAX(0; 1)

min($\approx1{,}15;\approx0{,}85$)



❑ **Derivata seconda** $y=\dfrac{e^x-x^2}{x+1}$ $\quad y'=\dfrac{x(e^x-x-2)}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^x-x^2-2x}{(x+1)^2}$

$$\boxed{y''}=\frac{\left[(e^x+xe^x)-2x-2\right](x+1)^2-(xe^x-x^2-2x)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{\left[e^x(x+1)-2(x+1)\right](x+1)^2-2(x+1)(xe^x-x^2-2x)}{(x+1)^4}=$$

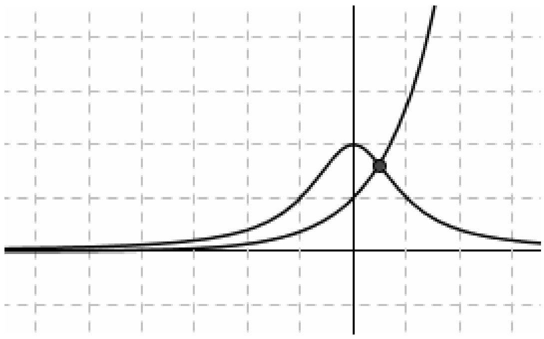
$$=\frac{(x+1)\left\{e^x(x+1)^2-2(x+1)^2-2(xe^x-x^2-2x)\right\}}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{(x+1)(x^2e^x+2xe^x+e^x-2x^2-4x-2-2xe^x+2x^2+4x)}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{x^2e^x+e^x-2}{(x+1)^3}=\boxed{\frac{(x^2+1)e^x-2}{(x+1)^3}}$$

$$y''=\frac{(x^2+1)e^x-2}{(x+1)^3}$$

$$y''=0 \quad \frac{(x^2+1)\cdot e^x-2}{(x+1)^3}=0 \quad e^x=\frac{2}{x^2+1}$$



Una sola soluzione $0<\gamma<1$:
con un metodo numerico si trova $\gamma\approx 0,48$
Semplici considerazioni complementari
assicurano che $y''$ cambia di segno
nell'attraversamento
di questa ascissa $\gamma\approx 0,48$.
Pertanto essa è punto di flesso per la $f(x)$.

$F(\approx 0,48;\approx 0,94)$; $m_F\approx -0,19$

Ed ecco il grafico !!!

$$\boxed{y = \frac{e^x - x^2}{x+1} = f(x)}$$

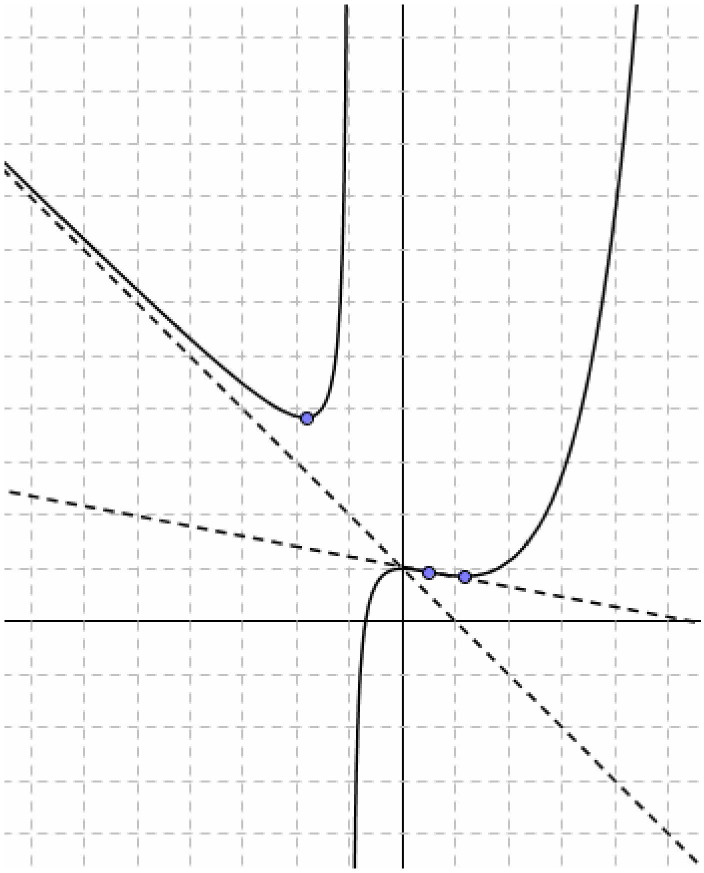
min($\approx -1{,}84$; $\approx 3{,}84$)

MAX(0; 1)

min($\approx 1{,}15$; $\approx 0{,}85$)

F($\approx 0{,}48$; $\approx 0{,}94$); $m_F \approx -0{,}19$

*Asintoto obliquo sinistro* $y = -x + 1$



$$\boxed{y = \frac{\ln^3 x}{9} - \ln x = f(x)}$$

Ricordiamo che $\ln^3 x$ è un modo compatto per scrivere $(\ln x)^3$

- **Dominio:** $x > 0$ (condizione di esistenza del logaritmo). $D = (0, +\infty)$
- **La funzione non è né pari né dispari**
- **Intersezioni con gli assi**
  - La funzione non è definita con $x = 0$. Quindi non si hanno intersezioni con l'asse *y*.
  - Ricerchiamo ora le eventuali intersezioni con l'asse *x*.

$$\frac{\ln^3 x}{9} - \ln x = 0; \quad \ln^3 x - 9\ln x = 0; \quad \ln x \cdot (\ln^2 x - 9) = 0; \quad \ln x = 0 \ \vee \ \ln x = \pm 3$$

$$x = 1 \ \vee \ x = e^{\pm 3} = \begin{cases} e^{-3} = \dfrac{1}{e^3} \approx \dfrac{1}{2{,}718^3} \approx \dfrac{1}{20{,}08} \approx 0{,}05 \\ e^3 \approx 20{,}08 \end{cases}$$

Perciò: $y = 0 \ \ con \ \ x = \dfrac{1}{e^3}, \ x = 1, \ x = e^3$

- **Segno della funzione**

$$y > 0 \qquad \frac{\ln^3 x}{9} - \ln x > 0 \quad \ln^3 x - 9\ln x > 0 \quad \ln x \cdot (\ln^2 x - 9) > 0$$

$$\ln x = t$$
$$t(t^2 - 9) > 0$$
$$-3 < t < 0 \ \vee \ t > 3$$
$$-3 < \ln x < 0 \ \vee \ \ln x > 3$$
$$\frac{1}{e^3} < x < 1 \ \vee \ x > e^3$$

- **Limiti ai confini del dominio:**

$$\lim_{x \to 0+} \left( \overbrace{\frac{\overbrace{\ln^3 x}^{\uparrow\, -\infty}}{9}} \overbrace{-\ln x}^{\uparrow\, +\infty} \right) = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln^3 x - 9\ln x}{9} = \lim_{x \to 0+} \frac{\overbrace{\ln x}^{\uparrow\, -\infty} \cdot \overbrace{(\ln^2 x - 9)}^{\uparrow\, +\infty}}{9} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{\overbrace{\ln^3 x}^{\uparrow\, +\infty}}{9} \overbrace{-\ln \ x}^{\uparrow\, -\infty} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{\ln x}^{\uparrow\, +\infty} \cdot \overbrace{(\ln^2 x - 9)}^{\uparrow\, +\infty}}{9} = +\infty$$

- **Asintoti obliqui**: non ce ne sono, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

- **Derivata prima** $\qquad y = f(x) = \dfrac{\ln^3 x}{9} - \ln x$

$$\boxed{y'} = D\left(\frac{1}{9}(\ln x)^3 - \ln x\right) = \frac{1}{9} \cdot 3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{\ln^2 x}{3x} - \frac{1}{x} = \boxed{\frac{\ln^2 x - 3}{3x}}$$

$$y' = 0 \ \ con \ \ \ln^2 x = 3; \ \ln x = \pm\sqrt{3}; \ \ x = e^{\pm\sqrt{3}} = \begin{cases} e^{-\sqrt{3}} \approx \dfrac{1}{(2{,}718)^{1{,}732}} \approx \dfrac{1}{5{,}651} \approx 0{,}177 \\ e^{\sqrt{3}} \approx 5{,}651 \end{cases}$$

$$x = e^{-\sqrt{3}} \to y = \frac{\left[\ln\left(e^{-\sqrt{3}}\right)\right]^3}{9} - \ln\left(e^{-\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{9} - \left(-\sqrt{3}\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{9} + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$y'=0 \;\; con \;\; \ln^2 x = 3; \;\; \ln x = \pm\sqrt{3}; \;\; y = e^{\pm\sqrt{3}} = \left\langle \begin{array}{l} e^{-\sqrt{3}} \approx \dfrac{1}{(2{,}718)^{1{,}732}} \approx \dfrac{1}{5{,}65} \approx 0{,}177 \\ e^{\sqrt{3}} \approx 5{,}65 \end{array} \right.$$

$$x = e^{-\sqrt{3}} \to y = \frac{\left[\ln\left(e^{-\sqrt{3}}\right)\right]^3}{9} - \ln\left(e^{-\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{9} - \left(-\sqrt{3}\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{9} + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$x = e^{\sqrt{3}} \to y = \frac{\left[\ln\left(e^{\sqrt{3}}\right)\right]^3}{9} - \ln\left(e^{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{9} - \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{9} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

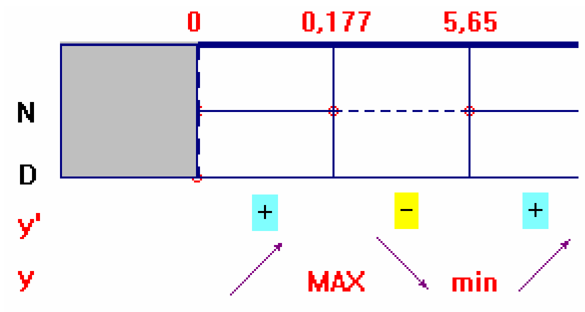
$y' > 0 \qquad \dfrac{\ln^2 x - 3}{3x} > 0$

$\mathrm{N} > 0 \quad \ln^2 x > 3; \quad \ln x < -\sqrt{3} \quad \vee \quad \ln x > \sqrt{3}$

$\qquad 0 < x < e^{-\sqrt{3}} \quad \vee \quad x > e^{\sqrt{3}}$

$\mathrm{D} > 0 \quad x > 0$

$\mathrm{MAX}\left(e^{-\sqrt{3}}, \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right); \quad \min\left(e^{\sqrt{3}}, -\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$




- **Derivata seconda** $\quad y = f(x) = \dfrac{\ln^3 x}{9} - \ln x \qquad y' = \dfrac{\ln^2 x - 3}{3x}$

$$\boxed{y''} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln^2 x - 3}{3x}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln^2 x - 3}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(2\ln x \cdot \frac{1}{x}\right)\cdot x - (\ln^2 x - 3)\cdot 1}{x^2} = \frac{2\ln x - \ln^2 x + 3}{3x^2} = \boxed{-\frac{\ln^2 x - 2\ln x - 3}{3x^2}}$$

$$y'' = 0 \;\; con \;\; \ln^2 x - 2\ln x - 3 = 0; \;\; (\ln x)_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2 = \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ 3 \end{array} \right.$$

$$\ln x = -1 \to x = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2{,}718} \approx 0{,}368; \qquad \ln x = 3 \to x = e^3 \approx 20{,}08$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = f(e^{-1}) = \frac{-1}{9} + 1 = \frac{8}{9}, \quad f'\left(\frac{1}{e}\right) = f'(e^{-1}) = \frac{+1-3}{3e^{-1}} = -\frac{2}{3}e \approx -1{,}812$$

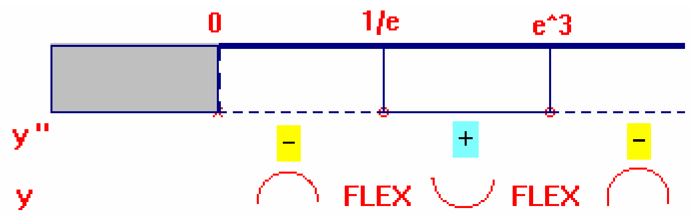
$$f(e^3) = \frac{27}{9} - 3 = 0, \qquad f'(e^3) = \frac{9-3}{3e^3} = \frac{6}{3e^3} = \frac{2}{e^3} \approx 0{,}1$$

$y'' > 0 \;\; quando$

$\ln^2 x - 2\ln\, x - 3 < 0;$

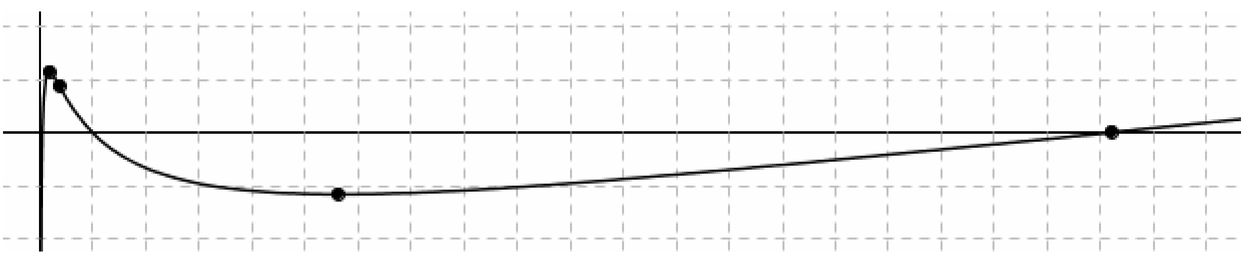
$-1 < \ln x < 3;$

$\dfrac{1}{e} < x < e^3$




*Ed ecco il grafico della funzione!!!* $\quad \boxed{y = \dfrac{\ln^3 x}{9} - \ln x = f(x)}$

$$\mathrm{MAX}\left(e^{-\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right); \quad \min\left(e^{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right); \quad F_1\left(\frac{1}{e}, \frac{8}{9}\right); \quad F_2\left(e^3, 0\right)$$



$$\boxed{y=\frac{x}{\ln x}+2x=f(x)}$$

- **Dominio:** $\begin{cases} x>0 \\ \ln x \neq 0;\ \ x\neq 1 \end{cases}$ $\quad \mathrm{D}=(0,1)\cup(1,+\infty)$
- **La funzione non è né pari né dispari**
- **Intersezioni con gli assi**
  - La funzione non è definita con $x=0$. Quindi il grafico non interseca l'asse $y$.
  - Cerchiamo le eventuali intersezioni con l'asse $x$.

$$\frac{x}{\ln x}+2x=0;\quad \frac{x+2x\ln x}{\ln x}=0;\quad \frac{x(1+2\ln x)}{\ln x}=0;\quad \ln x=-\frac{1}{2};\quad x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\approx\frac{1}{\sqrt{2{,}718}}\approx\frac{1}{1{,}65}\approx 0{,}6$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\,0\right)$$

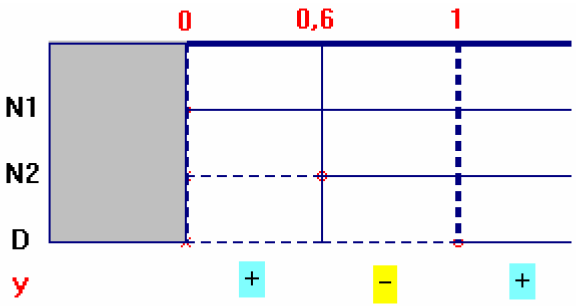
- **Segno della funzione**

$$y>0 \qquad \frac{x}{\ln x}+2x>0;\qquad \frac{\overbrace{x}^{\mathrm{N1}}\ \overbrace{(1+2\ln x)}^{\mathrm{N2}}}{\underbrace{\ln x}_{\mathrm{D}}}>0;$$

$\mathrm{N}_1>0 \quad x>0$

$\mathrm{N}_2>0 \quad \ln x>-\frac{1}{2};\quad x>e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

$\mathrm{D}>0 \quad \ln\,x>0;\ \ x>1$




- **Limiti ai confini del dominio:**

$$\lim_{x\to 0+}\left[\frac{x}{\ln(x)}+2x\right]=0$$

$$\lim_{x\to 1\mp}\left[\frac{x}{\ln(x)}+2x\right]=\mp\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\ln(x)}+2x\right]\overset{NOTA}{=}+\infty$$

**NOTA (IMPORTANTE)**

De l'Hospital consente
di dimostrare facilmente che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{\alpha}}=0,\quad \forall\alpha>0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{\ln(x)}=+\infty,\quad \forall\alpha>0$$

- **Eventuali asintoti obliqui**:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+2\ln x)}{x\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{1+2\ln x}^{+\infty}}{\underbrace{\ln x}_{+\infty}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\cdot\left(\frac{1}{\ln x}+2\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}+2\right)=2=m$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}+2x-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$$

Quindi non si ha nessun asintoto obliquo destro,
ma solo una "direzione asintotica" ($m=2$) verso destra.
In altre parole, la pendenza del grafico, al tendere di $x$ all'infinito positivo,
tende ad identificarsi con quella di una retta di coefficiente angolare 2,
senza però che ci sia un asintoto obliquo destro.

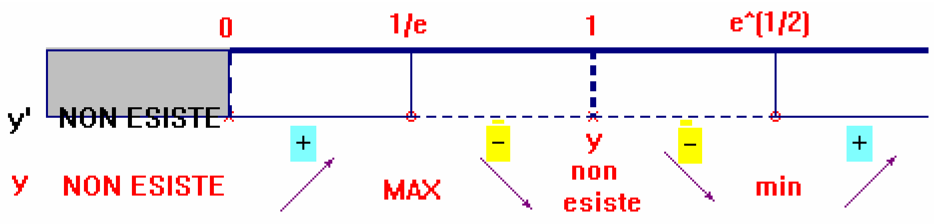
- **Derivata prima** $y'=\dfrac{1\cdot\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}+2=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}+2$ $\quad \boxed{y'=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}+2=\dfrac{2\ln^2 x+\ln x-1}{\ln^2 x}}$

$$y'=0 \;\; con \;\; \frac{2\ln^2 x+\ln x-1}{\ln^2 x}=0 \qquad (\ln x)_{1,2}=\begin{cases}-1 & \ln x=-1 \to x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}\approx\dfrac{1}{2{,}718}\approx 0{,}368\\ \dfrac{1}{2} & \ln x=\dfrac{1}{2}\to x=\sqrt{e}\approx 1{,}65\end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1/e}{\ln(1/e)}+2(1/e)=\frac{1/e}{-1}+\frac{2}{e}=\frac{1}{e}\approx 0{,}368; \quad f\left(\sqrt{e}\right)=\frac{\sqrt{e}}{\ln\sqrt{e}}+2\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}}{1/2}+2\sqrt{e}=4\sqrt{e}\approx 6{,}6$$

$$y'>0 \;\; con \;\; \frac{2\ln^2 x+\ln x-1}{\ln^2 x}>0. \;\; Poniamo \; \ln x=t: \; otteniamo \; \frac{2t^2+t-1}{t^2}>0, \;\; \frac{(2t-1)(t+1)}{t^2}>0,$$

$$t<-1 \vee t>1/2, \;\; ossia \;\; \ln x<-1 \,\vee\, \ln x>1/2, \quad 0<x<e^{-1}=\frac{1}{e} \,\vee\, x>e^{1/2}=\sqrt{e}$$




$$\mathrm{MAX}\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$$

$$\min\left(\sqrt{e},\,4\sqrt{e}\right)$$

$$\lim_{x\to 0+} y'=\lim_{x\to 0+}\frac{2\ln^2 x+\ln x-1}{\ln^2 x}=\lim_{x\to 0+}\left(2+\overset{0}{\overset{\uparrow}{\overbrace{\frac{1}{\ln x}}}}-\overset{0}{\overset{\uparrow}{\overbrace{\frac{1}{\ln^2 x}}}}\right)=2$$

❑ **Derivata seconda** $\quad y=f(x)=\dfrac{x}{\ln\;\; x}+2x \qquad y'=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}+2=\dfrac{2\;\;\ln^2 x+\ln\;\;\; x-1}{\ln^2 x}$

$$\boxed{y''}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}+2\right)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x-(\ln x-1)\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^4 x}=\frac{\ln^2 x-2\ln^2 x+2\ln x}{x\ln^4 x}=\frac{-\ln^2 x+2\ln x}{x\ln^4 x}=\boxed{\frac{2-\ln x}{x\ln^3 x}}$$

$$\boxed{y''=\frac{2-\ln x}{x\ln^3 x}}$$

$$y''=0 \;\; con \;\; 2-\ln x=0; \;\; \ln x=2; \;\; x=e^2\approx 7{,}4$$

$$f\left(e^2\right)=\frac{e^2}{\ln e^2}+2e^2=\frac{e^2}{2}+2e^2=\frac{5}{2}e^2\approx 18{,}5 \qquad f'\left(e^2\right)=\frac{2-1}{4}+2=\frac{9}{4}$$

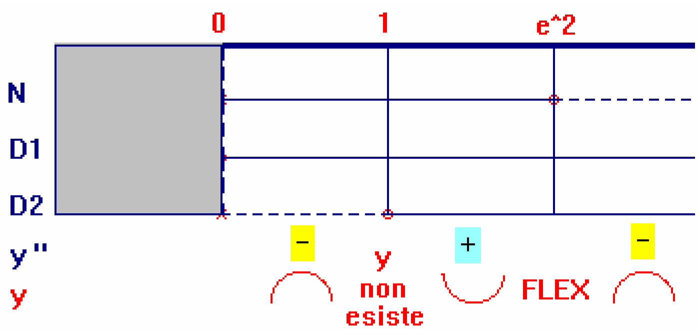
$y''>0 \;\; quando \;\; \dfrac{2-\ln x}{x\ln^3 x}>0;$

$N>0 \qquad 2-\ln x>0; \;\; \ln x<2; \;\; 0<x<e^2$

$D_1>0 \qquad x>0$

$D_2>0 \qquad \ln^3 x>0; \;\; \ln x>0; \;\; x>1$

$$\mathrm{F}\left(e^2,\frac{5}{2}e^2\right); \;\; m_{\mathrm{F}}=\frac{9}{4}$$



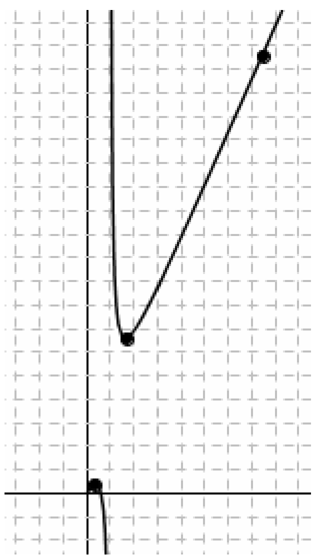

Ed ecco il grafico della funzione!!!

$$\boxed{y=\frac{x}{\ln x}+2x=f(x)}$$

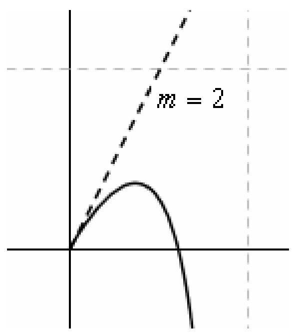
$$\mathrm{MAX}\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$$

$$\min\left(\sqrt{e},\,4\sqrt{e}\right)$$

$$\mathrm{F}\left(e^2,\frac{5}{2}e^2\right); \;\; m_{\mathrm{F}}=\frac{9}{4}$$



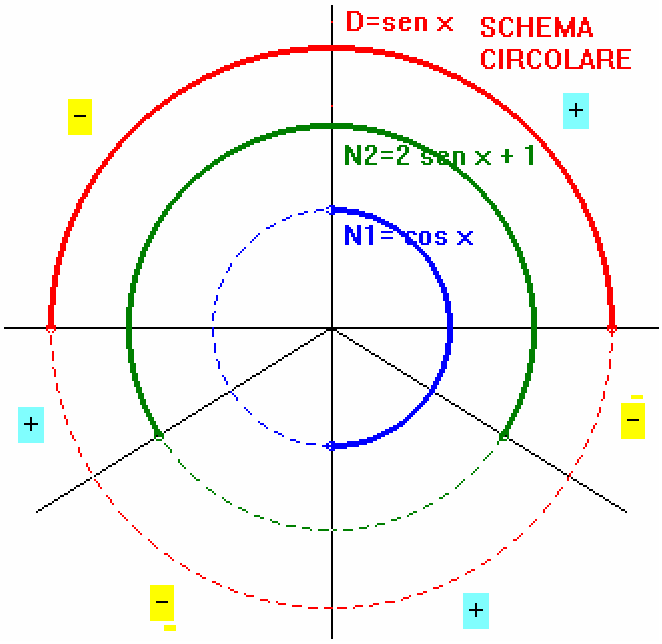
Particolare:



$$\boxed{y=\frac{\operatorname{sen}2x+\cos x}{\operatorname{sen}x}=f(x)}$$

Osserviamo innanzitutto che è $y=\dfrac{\operatorname{sen}2x+\cos x}{\operatorname{sen}x}=\dfrac{2\operatorname{sen}x\cos x+\cos x}{\operatorname{sen}x}=\dfrac{\cos x(2\operatorname{sen}x+1)}{\operatorname{sen}x}$

$f(x)$ è periodica di periodo $2\pi$;
la studieremo sull'intervallo $[0,\ 2\pi]$




- **Dominio**: $\operatorname{sen}x\neq 0$
  $x\neq 0,\ x\neq\pi,\ x\neq 2\pi$
- **La funzione non è né pari, né dispari**
- **Intersezioni con l' asse $y$**:
  non ce ne sono
  (con $x=0$ la funzione non è definita)

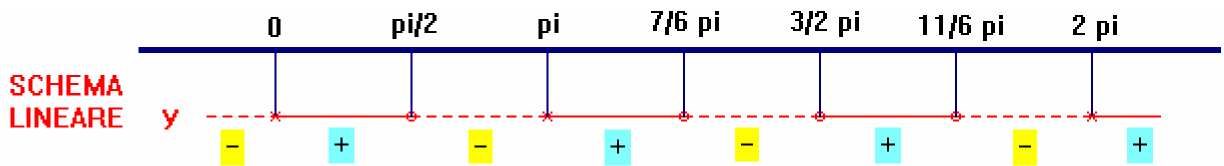
  **Intersezioni con l'asse $x$**

  $y=0$

  $\cos x=0\ \vee\ 2\operatorname{sen}x+1=0\ \ (\operatorname{sen}x=-1/2)$

  $x=\dfrac{\pi}{2}\vee x=\dfrac{3}{2}\pi\vee x=\dfrac{7}{6}\pi\vee x=\dfrac{11}{6}\pi$
- **Segno della funzione**

$$y>0\qquad \frac{\overbrace{\cos x}^{N1}\overbrace{(2\operatorname{sen}x+1)}^{N2}}{\underbrace{\operatorname{sen}x}_{D}}>0$$




- **Limiti ai confini del dominio**

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\overbrace{\cos x}^{\overset{1}{\uparrow}}\overbrace{(2\operatorname{sen}x+1)}^{\overset{1}{\uparrow}}}{\underbrace{\operatorname{sen}x}_{\underset{0+}{\downarrow}}}=+\infty\qquad \lim_{x\to\pi\mp}\frac{\overbrace{\cos x}^{\overset{-1}{\uparrow}}\overbrace{(2\operatorname{sen}x+1)}^{\overset{1}{\uparrow}}}{\underbrace{\operatorname{sen}x}_{\underset{0\pm}{\downarrow}}}=\mp\infty\qquad \lim_{x\to 2\pi-}\frac{\overbrace{\cos x}^{\overset{1}{\uparrow}}\overbrace{(2\operatorname{sen}x+1)}^{\overset{1}{\uparrow}}}{\underbrace{\operatorname{sen}x}_{\underset{0-}{\downarrow}}}=-\infty$$

- **Derivata prima** $\quad y=\dfrac{\operatorname{sen}2x+\cos x}{\operatorname{sen}x}=\dfrac{2\operatorname{sen}x\cos x+\cos x}{\operatorname{sen}x}=\dfrac{\cos x(2\operatorname{sen}x+1)}{\operatorname{sen}x}$

$$\boxed{y'}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen}2x+\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)=\frac{(2\cos 2x-\operatorname{sen}x)\cdot\operatorname{sen}x-(\operatorname{sen}2x+\cos x)\cdot\cos x}{\operatorname{sen}^2x}=$$

$$=\frac{2\cos 2x\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}2x\cos x-\cos^2x}{\operatorname{sen}^2x}=$$

$$=\frac{2\cdot(2\cos^2x-1)\operatorname{sen}x-2\operatorname{sen}x\cos x\cdot\cos x-(\operatorname{sen}^2x+\cos^2x)}{\operatorname{sen}^2x}=$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}x(2\cos^2x-1-\cos^2x)-1}{\operatorname{sen}^2x}=\frac{2\operatorname{sen}x(\cos^2x-1)-1}{\operatorname{sen}^2x}=\frac{2\operatorname{sen}x(-\operatorname{sen}^2x)-1}{\operatorname{sen}^2x}=\boxed{-\frac{2\operatorname{sen}^3x+1}{\operatorname{sen}^2x}}$$

$$y'=0\ \ con\ \operatorname{sen}x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\to$$

$$x=\begin{cases}2\pi-arc\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\approx 2\pi-arc\operatorname{sen}(0{,}79)\approx 6{,}283-0{,}917\approx 5{,}37\,radianti=\alpha\\ \pi+arc\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\approx 4{,}06\,radianti=\beta\end{cases}$$

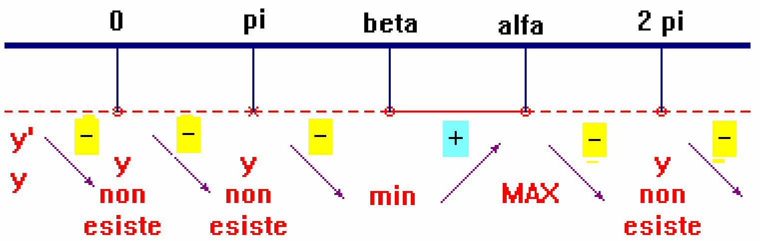
$$\operatorname{sen}\alpha=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\rightarrow\cos\alpha=\underset{\substack{\uparrow\\ \alpha\text{ è nel }4°\\ \text{quadrante}}}{+}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}$$

$$f(\alpha)=\frac{+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}\cdot\left(2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)+1\right)}{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=-\sqrt[3]{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}\cdot\left(-\sqrt[3]{4}+1\right)=$$

$$=\sqrt[3]{2}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{4}}}\cdot\left(\sqrt[3]{4}-1\right)=\sqrt{\sqrt[3]{4}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{4}}}\cdot\left(\sqrt[3]{4}-1\right)=\left(\sqrt[3]{4}-1\right)\sqrt{\left(\sqrt[3]{4}-1\right)}=\sqrt{\left(\sqrt[3]{4}-1\right)^3}\approx 0,45$$

$$\operatorname{sen}\beta=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\rightarrow\quad\cos\beta=\underset{\substack{\uparrow\\ 3°\\ \text{quadrante}}}{-}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}\rightarrow f(\beta)\approx-0,45$$

$$y'>0\ \leftrightarrow\ -\frac{2\operatorname{sen}^3x+1}{\operatorname{sen}^2x}>0\ \leftrightarrow\ \frac{2\operatorname{sen}^3x+1}{\operatorname{sen}^2x}<0\ \leftrightarrow\ \operatorname{sen}x<-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\ \leftrightarrow\ \beta<x<\alpha$$




$\min(\beta\approx 4,06;\approx -0,45)$
$\mathrm{MAX}(\alpha\approx 5,37;\approx 0,45)$

- **Derivata seconda**

$$\boxed{y''}=-\frac{\left(2\cdot 3\operatorname{sen}^2x\cos x\right)\cdot\operatorname{sen}^2x-\left(2\operatorname{sen}^3x+1\right)\cdot 2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}^4x}=-\frac{6\operatorname{sen}^4x\cos x-4\operatorname{sen}^4x\cos x-2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}^4x}=$$

$$=-\frac{2\operatorname{sen}^4x\cos x-2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}^4x}=-\frac{2\operatorname{sen}x\cos x\left(\operatorname{sen}^3x-1\right)}{\operatorname{sen}^4x}=\boxed{-\frac{2\cos x\left(\operatorname{sen}^3x-1\right)}{\operatorname{sen}^3x}}$$

$$y''=0\quad\cos x=0\ \left(x=\frac{\pi}{2}\vee x=\frac{3}{2}\pi\right);\ \operatorname{sen}x=1\ \left(x=\frac{\pi}{2}\right)$$

Poiché la $y''$ cambia di segno attraversando ciascuna delle due ascisse $\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$

(puoi verificarlo con uno schema circolare!), i punti $x=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{3}{2}\pi$ sono di flesso per $f(x)$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left[\frac{\cos x\,(2\operatorname{sen}x+1)}{\operatorname{sen}x}\right]_{x=\pi/2}=0,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left[-\frac{2\operatorname{sen}^3x+1}{\operatorname{sen}^2x}\right]_{x=\pi/2}=-\frac{2+1}{1}=-3$$

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\left[\frac{\cos x\,(2\operatorname{sen}x+1)}{\operatorname{sen}x}\right]_{x=3\pi/2}=0,$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\left[-\frac{2\operatorname{sen}^3x+1}{\operatorname{sen}^2x}\right]_{x=3\pi/2}=-\frac{-2+1}{1}=1$$

Ed ecco qui a destra il grafico!!! $\boxed{y=\frac{\operatorname{sen}2x+\cos x}{\operatorname{sen}x}=f(x)}$

$\min(\approx 4,06;\approx -0,45)$
$\mathrm{MAX}(\alpha\approx 5,37;\approx 0,45)$
$Flessi:\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{3}{2}\pi$

$$\boxed{y=\frac{sen\,x+cos\,x}{sen\,x+1}}$$

E' periodica di periodo $2\pi$ ; la studieremo sull'intervallo $[0,\,2\pi]$

- **Dominio** : $sen\,x \neq -1 \quad x \neq \frac{3}{2}\pi$
- **La funzione non è né pari, né dispari**
- **Intersezioni con l'asse *y*:** $x=0 \to y=1$

  **Intersezioni con l'asse *x***

$$y=0 \qquad \frac{sen\,x+cos\,x}{sen\,x+1}=0$$

$$sen\,x+cos\,x=0 \quad (sen\,x \neq -1)$$

$$\frac{sen\,x+cos\,x}{cos\,x}=0 \quad (cos\,x \neq 0,\ vedi\ NOTA)$$

$$tg\,x+1=0;\ tg\,x=-1$$

$$x=\frac{3}{4}\pi \vee x=\frac{7}{4}\pi$$

NOTA: la divisione per $cos\,x$
è possibile solo supponendo $cos\,x \neq 0$;
ciò significa escludere quei valori dell'arco $x$
che rendono nullo il coseno, ossia:
$\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$.
D'altra parte, tali valori di $x$
NON sono soluzioni dell'equazione $sen\,x+cos\,x=0$,
come è immediato verificare per sostituzione diretta.

- **Segno della funzione**

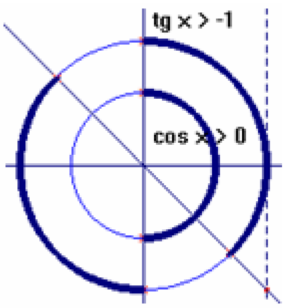
$$y>0 \qquad \frac{\overbrace{sen\,x+cos\,x}^{\mathrm{N}}}{\underbrace{sen\,x+1}_{\mathrm{D}}}>0$$

$\mathrm{N}>0$

$sen\,x+cos\,x>0;\ \ vedi\ NOTA$

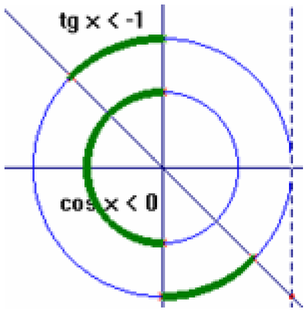
$$\underbrace{\begin{cases} cos\,x>0 \\ \dfrac{sen\,x+cos\,x}{cos\,x}>0, \quad tg\,x>-1 \end{cases}}_{SISTEMA\ 1} \vee \underbrace{\begin{cases} cos\,x<0 \\ \dfrac{sen\,x+cos\,x}{cos\,x}<0, \ tg\,x<-1 \end{cases}}_{SISTEMA\ 2} \vee \underbrace{\begin{cases} cos\,x=0 \\ sen\,x+cos\,x>0 \end{cases}}_{SISTEMA\ 3}$$

NOTA
La disequazione $sen\,x+cos\,x>0$ può essere risolta in diversi modi;
ad esempio, portandola sotto la forma $sen\,x>-cos\,x$ e tracciando i grafici
delle due funzioni $y=sen\,x,\ y=-cos\,x$ su di uno stesso riferimento cartesiano.
Se invece si desidera risolverla allo stesso modo dell'equazione, ossia tramite divisione per $cos\,x$,
qui si ha una difficoltà in più: infatti, in una DISequazione, non è lecito divedere ambo i membri
per una stessa quantità, se non a condizione che questa sia >0. Quando invece i due membri
vengono divisi per una stessa quantità negativa, occorre cambiare il verso della disequazione.
Dovremo perciò distinguere TRE casi: $cos\,x>0,\ \ cos\,x<0,\ \ cos\,x=0$. Da cui i tre sistemi.




Il primo sistema
è verificato con

$$0 \le x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{7}{4}\pi < x \le 2\pi$$




Il secondo sistema
è verificato con

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{4}\pi$$

$$\begin{cases} cos\,x=0 \\ sen\,x+cos\,x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2} \\ \underbrace{sen\dfrac{\pi}{2}+cos\dfrac{\pi}{2}>0}_{VERA} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{3}{2}\pi \\ \underbrace{sen\dfrac{3}{2}\pi+cos\dfrac{3}{2}\pi>0}_{FALSA} \end{cases}$$

Il terzo sistema
è verificato con

$$x=\frac{\pi}{2}$$

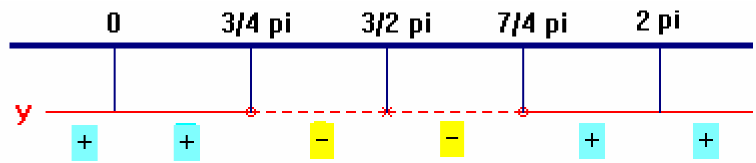
La disequazione $N>0 \quad (sen\,x+cos\,x>0)$, equivalente alla disgiunzione logica dei tre sistemi,

è pertanto verificata con $0 \le x < \frac{3}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x \le 2\pi$

D > 0 $\quad sen\,x+1>0;\ sen\,x>-1;\ x\neq\frac{3}{2}\pi$

Ricapitoliamo: $N>0\ \ con\ \ 0\le x<\frac{3}{4}\pi\vee\frac{7}{4}\pi<x\le 2\pi$, $D>0\ \ con\ \ x\neq\frac{3}{2}\pi$

… e il seguente schema lineare descrive il segno della frazione $f(x)=N/D$:




- **Limiti ai confini del dominio:**

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi\pm}\frac{\overbrace{sen\ \ x+\cos\ \ x}^{\substack{-1\\ \uparrow}}}{\underbrace{sen\ \ x+1}_{\substack{\downarrow\\ 0+}}}=-\infty$$

- **Derivata prima** $\qquad y=\dfrac{sen\ \ x+\cos\ \ x}{sen\ \ x+1}$

$$\boxed{y'}=\frac{(cos\,x-sen\,x)\cdot(sen\,x+1)-(sen\,x+cos\,x)\cdot cos\,x}{(sen\,x+1)^2}=$$

$$=\frac{sen\,x\,cos\,x+cos\,x-sen^2x-sen\,x-sen\,x\,cos\,x-cos^2x}{(sen\,x+1)^2}=$$

$$=\frac{cos\,x-sen\,x-(sen^2x+cos^2x)}{(sen\,x+1)^2}=\boxed{\frac{cos\,x-sen\,x-1}{(sen\,x+1)^2}}$$

$$y'=0\quad cos\,x-sen\,x-1=0\ \left(sen\,x+1\neq 0,\ x\neq\frac{3}{2}\pi\right)$$

Si tratta di un'equazione lineare in seno e coseno,
per la quale esistono diversi metodi di risoluzione:

- il metodo delle equazioni parametriche
- il metodo del sistema con la Prima Relazione Fondamentale
- il metodo dell'angolo ausiliario
- il metodo grafico "classico"
- il metodo grafico circonferenza-retta

Utilizzando, ad esempio, le formule parametriche $sen\,x=\frac{2t}{1+t^2}$, $cos\,x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $essendo\ t=tg\frac{x}{2}$,

avremo:

$$cos\,x-sen\,x-1=0\ \left(sen\,x+1\neq 0,\ x\neq\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}-1=0;\ \ 1-t^2-2t-1-t^2=0;\ \ -2t^2-2t=0;\ \ t(t+1)=0;\ \ t=0\vee t=-1$$

$$t=0;\ \ tg\frac{x}{2}=0;\ \ \frac{x}{2}=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,...);\ \ x=2k\pi\ e\ quindi,\ in\ [0;\ 2\pi],\ \ x=0\vee x=2\pi$$

$$t=-1;\ \ tg\frac{x}{2}=-1;\ \ \frac{x}{2}=\frac{3}{4}\pi+k\pi;\ \ x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi\ e\ quindi,\ in\ [0;\ 2\pi],\ x=\frac{3}{2}\pi\ NON\ ACC.$$

Abbiamo perciò trovato le soluzioni $x=0;\quad x=2\pi$.

C'è però da considerare che le formule parametriche,

di cui ci siamo serviti per il procedimento risolutivo, contengono $tg\frac{x}{2}$

e quindi non hanno significato per quei valori di *x*, per quali $tg\frac{x}{2}$ non esiste.

Utilizzare le formule parametriche comporta perciò di supporre

$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2 ...)$ cioè $x \neq \pi + 2k\pi \ \left( in\ [0,\ 2\pi],\ x \neq \pi \right)$

D'altra parte, l'arco $x = \pi$ POTREBBE BENISSIMO essere soluzione dell'equazione considerata: occorrerà perciò completare la risoluzione andando a controllare, per sostituzione diretta, se lo è oppure no.

Ci chiediamo dunque: l'uguaglianza $\cos x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$ è verificata con $x = \pi$ ?

La risposta è negativa: $\cos\pi - \operatorname{sen}\pi - 1 = -1 - 0 - 1 = -2 \neq 0$

Perciò $x = \pi$ non è soluzione; rimangono soltanto le soluzioni trovate prima, $x = 0;\ x = 2\pi$ .

$$y' > 0 \qquad \frac{\cos x - \operatorname{sen} x - 1}{(\operatorname{sen} x + 1)^2} > 0$$

Essendo il denominatore sempre positivo

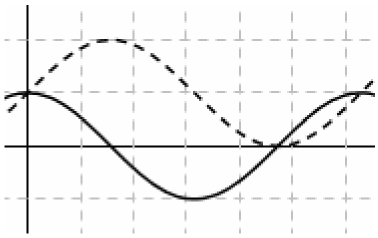
(tranne che con $x = \frac{3}{2}\pi$ , valore per cui si annulla, e l'espressione non esiste)

il segno della frazione è determinato dal segno del numeratore.

Sarà perciò $y' > 0 \ \leftrightarrow \ \cos x - \operatorname{sen} x - 1 > 0 \left( con\ x \neq \frac{3}{2}\pi \right)$.

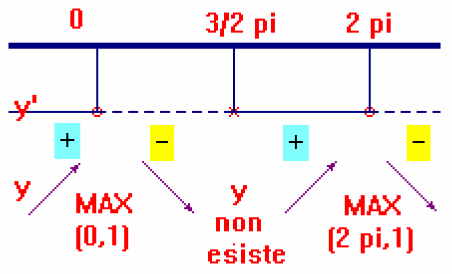
Per risolvere la disequazione $\cos x - \operatorname{sen} x - 1 > 0$ potremmo utilizzare diversi metodi, fra cui quello che sfrutta le formule parametriche;
in questo caso direi che il procedimento più comodo è senz'altro quello grafico "classico", consistente nel portare l'equazione sotto la forma equivalente $\cos x \ > \ \operatorname{sen} x + 1$
e nel rappresentare le due curve $y = \cos x,\ \ y = \operatorname{sen} x + 1$ su di uno stesso riferimento cartesiano, allo scopo di determinare per quali valori di x la prima curva sta al di sopra della seconda (osserviamo che, avendo noi già risolto l'equazione $\cos x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$ , equivalente a $\cos x = \operatorname{sen} x + 1$, sappiamo già quali sono le ascisse dei loro punti di intersezione).

Tracciare i grafici "a mano" è particolarmente semplice (anche se la figura riportata qui a fianco è stata realizzata col software GeoGebra): l'andamento della funzione $y = \cos x$ è ben noto, e la curva $y = \operatorname{sen} x + 1$ (tratteggiata, in figura) si può ottenere traslando verso l'alto di un'unità la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ .



Dai grafici sovrapposti emerge chiaramente che le soluzioni della disequazione $\cos x > \operatorname{sen} x + 1$ sono:
$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ .

Perciò:




Lo schema sopra riportato ci fornisce un'ottima occasione per ribadire un suggerimento importante.
In uno schema lineare relativo ad una funzione goniometrica, funzione che di norma viene studiata soltanto sull'intervallo $[0,\ 2\pi]$ per via della sua periodicità, è sempre opportuno andare anche "un pochettino a sinistra dello 0" e "un pochettino a destra di $2\pi$ ".

In questo modo, infatti, sarà molto più facile riconoscere alcune caratteristiche della funzione, la quale, sebbene venga analizzata su $[0,\ 2\pi]$, ha però poi un grafico che dev'essere pensato come frutto di un "copia e incolla" che replica su tutto R l'andamento che si aveva tra 0 e $2\pi$ .
Nel caso della funzione da noi considerata, questa estensione dello schema ci permette di riconoscere molto chiaramente le situazioni di massimo, che invece non sarebbero risultate altrettanto evidenti se lo schema fosse stato limitato rigorosamente alle sole ascisse tra 0 e $2\pi$ .

### ❑ Derivata seconda

$$y=\frac{sen\,x+cos\,x}{sen\,x+1} \qquad y'=\frac{cos\,x-sen\,x-1}{(sen\,x+1)^2}$$

$$y''=\frac{(-sen\,x-cos\,x)\cdot(sen\,x+1)^2-(cos\,x-sen\,x-1)\cdot 2(sen\,x+1)\cdot cos\,x}{(sen\,x+1)^4}=$$

$$=\frac{-(sen\,x+1)\left[(sen\,x+cos\,x)(sen\,x+1)+2cos\,x(cos\,x-sen\,x-1)\right]}{(sen\,x+1)^4}=$$

$$=-\frac{(sen\,x+1)(sen^2x+sen\,x+sen\,x\,cos\,x+cos\,x+2cos^2x-2sen\,x\,cos\,x-2cos\,x)}{(sen\,x+1)^4}=$$

$$=-\frac{sen^2x+2cos^2x-sen\,x\,cos\,x+sen\,x-cos\,x)}{(sen\,x+1)^3}=$$

$$=-\frac{sen^2x+cos^2x+cos^2x-sen\,x\,cos\,x+sen\,x-cos\,x}{(sen\,x+1)^3}=$$

$$=-\frac{1+cos^2x-sen\,x\,cos\,x+sen\,x-cos\,x}{(sen\,x+1)^3}=-\frac{1+sen\,x+cos^2x-sen\,x\,cos\,x-cos\,x}{(sen\,x+1)^3}=$$

$$=-\frac{(1+sen\,x)+(1-sen^2x)-cos\,x\cdot(sen\,x+1)}{(sen\,x+1)^3}=$$

$$=-\frac{(1+sen\,x)+(1+sen\,x)(1-sen\,x)-cos\,x(1+sen\,x)}{(sen\,x+1)^3}=$$

$$=-\frac{(1+sen\,x)(1+1-sen\,x-cos\,x)}{(sen\,x+1)^3}=-\frac{2-sen\,x-cos\,x)}{(1+sen\,x)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y''&=-\frac{2-sen\,x-cos\,x}{(1+sen\,x)^2}=\\ &=-\frac{2-(sen\,x+cos\,x)}{(1+sen\,x)^2}\end{aligned}}$$

Osserviamo che, per aversi $y''=0$,
dovrebbe essere $2-sen\,x-cos\,x=0$
cioè $sen\,x+cos\,x=2$,
equazione priva di soluzioni
in quanto, per ogni valore di *x*,
è sempre $sen\,x\le 1,\ cos\,x\le 1$,
quindi l'uguaglianza $sen\,x+cos\,x=2$
richiederebbe che, per uno stesso *x*,
sia contemporaneamente $\begin{cases} sen\,x=1\\ cos\,x=1\end{cases}$,
il che è palesemente impossibile.

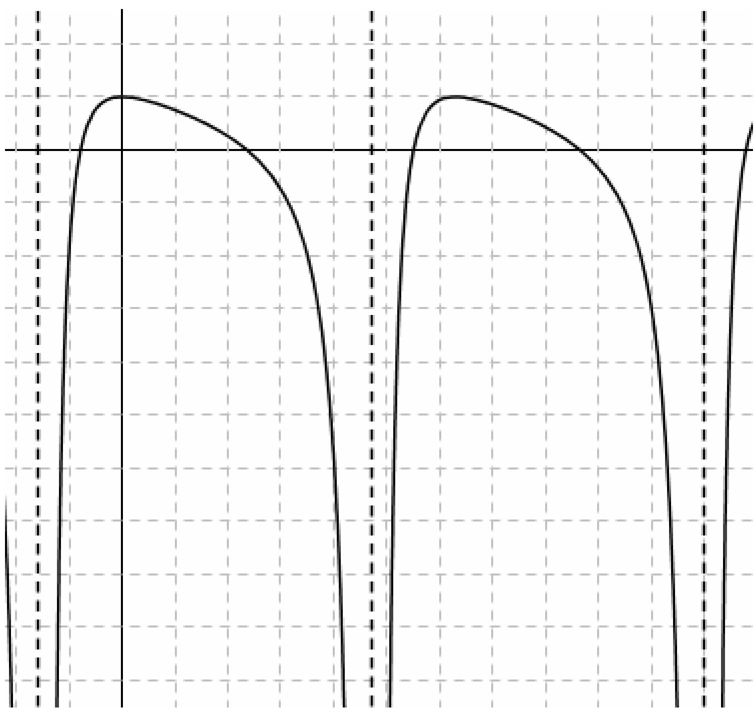
Perciò la $y''$ non può mai annullarsi.

Anzi, la $y''$
è, per ogni *x* del dominio,
strettamente negativa:

$$sen\,x+cos\,x<2\quad\forall x$$
$$\downarrow$$
$$2-(sen\,x+cos\,x)>0\quad\forall x$$
$$\downarrow$$
$$-\frac{2-(sen\,x+cos\,x)}{(1+sen\,x)^2}<0\quad\forall x\ne\frac{3}{2}\pi$$

**La funzione è perciò**
**priva di flessi, e sempre concava.**

Il grafico è riportato qui a fianco.



$$\boxed{y=\frac{sen\,x+cos\,x}{sen\,x+1}}$$

*massimi in*
$(0,1);\ (2\pi,1);$ *ecc. ecc.*

$$\boxed{y = x\left(|x-2|-1\right)^2 = f(x)}$$

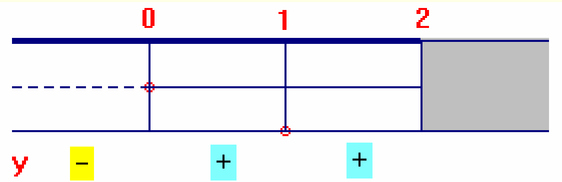
$$f(x) = \begin{cases} con\ \ x \le 2: \ \ x(2-x-1)^2 = x(1-x)^2 = x(x-1)^2 \\ con\ x \ge 2: \ \ x(x-2-1)^2 = x(x-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 2 \\ y = x(x-1)^2 \end{cases}$$

Dominio: $(-\infty, 2]$

$x = 0 \to y = 0$; $\quad y = 0\ \ con\ \ x = 0 \vee x = 1$

$y > 0$



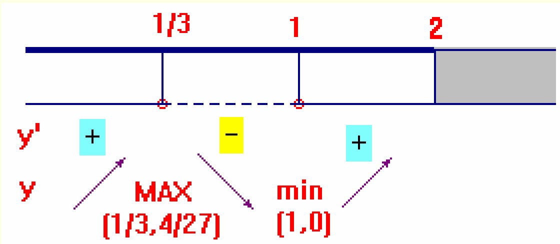

$\lim\limits_{x \to -\infty} x(x-1)^2 = -\infty$; $\quad f(2) = 2(2-1)^2 = 2$

$$y' = \frac{d}{dx}\left(x(x-1)^2\right) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 2x^2 + x\right) =$$
$$= 3x^2 - 4x + 1 = 3x^2 - 3x - x + 1 =$$
$$= 3x(x-1) - (x-1) = (3x-1)(x-1)$$

$y' = 0\ \ con\ \ x = 1/3\ \vee\ x = 1$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$; $\ f(1) = 0$

$y' > 0\ con\ \ x < 1/3 \vee x > 1\ (\wedge x \le 2)$




Derivata sinistra in $x = 2$: $y'_-(2) = \left[(3x-1)(x-1)\right]_{x=2} = 5$

$y'' = 6x - 4 \qquad y'' = 0\ \ con\ x = 2/3$

$y'' > 0\ \ con\ x > 2/3\ (f\ \ convessa)$

$mentre\ con\ \ x < 2/3\ \ f\ \ è\ concava$

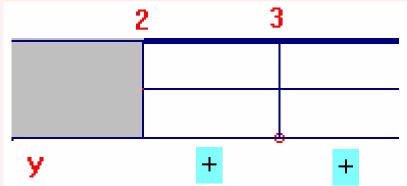
$$FLESSO\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\right);\ \ f'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x \ge 2 \\ y = x\ \ (x-3)^2 \end{cases}$$

Dominio: $[2, +\infty)$

$$y = 0\ \ con\ \begin{cases} x = 0\ \ NON\ \ ACCETTABILE \\ x = 3 \end{cases}$$

$y > 0$




$\lim\limits_{x \to +\infty} x(x-3)^2 = +\infty$; $\quad f(2) = 2\ \ (2-3)^2 = 2$

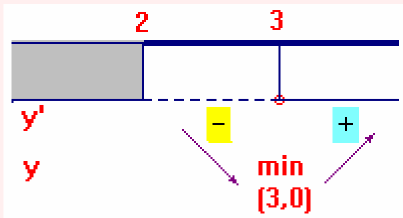
$$y' = \frac{d}{dx}\left(x(x-3)^2\right) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 6x^2 + 9x\right) =$$
$$= 3x^2 - 12x + 9 = \ldots = 3(x-1)(x-3)$$

$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3\ \ (x-1)(x-3)$

$$y' = 0\ \ con\ \begin{cases} x = 1\ \ NON\ \ ACCETTABILE \\ x = 3 \end{cases}$$

$f(3) = 0$

$y' > 0\ \ con\ \ x > 3$




Derivata destra in $x = 2$:

$y'_+(2) = \left[3(x-1)(x-3)\right]_{x=2} = -3$

$y'' = 6x - 12$

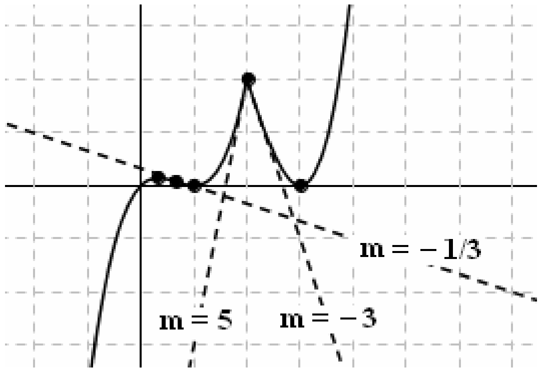
$y'' = 0\ \ con\ \ x = 2$

$y'' > 0\ \ con\ \ x > 2\ \ (f\ \ concava)$

Nel punto "di saldatura" $x = 2$
derivata sinistra e destra sono distinte:
$y'_-(2) = 5, \quad y'_+(2) = -3$
Si tratta perciò di un "punto angoloso"

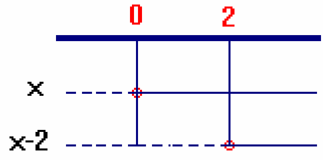
Ed ecco il grafico !!!

$$\boxed{y = x\left(|x-2|-1\right)^2 = f(x)}$$



$$\boxed{y=\frac{4x\cdot(|x|-2)}{|x-2|\cdot(x+2)^2}=f(x)}$$

Schema per la distinzione di casi:




**3 casi, dunque!**

$$f(x)=\begin{cases} con\ x\le 0: & \dfrac{4x(-x-2)}{(2-x)(x+2)^2}=\dfrac{4x(x+2)}{(x-2)(x+2)^2}=\dfrac{4x}{(x-2)(x+2)} \quad (x\ne -2) \\ con\ 0\le x\le 2: & \dfrac{4x(x-2)}{(2-x)(x+2)^2}=\dfrac{4x(x-2)}{-(x-2)(x+2)^2}=-\dfrac{4x}{(x+2)^2} \quad (x\ne 2) \\ con\ x\ge 2: & \dfrac{4x(x-2)}{(x-2)(x+2)^2}=\dfrac{4x}{(x+2)^2} \quad (x\ne 2)\end{cases}$$

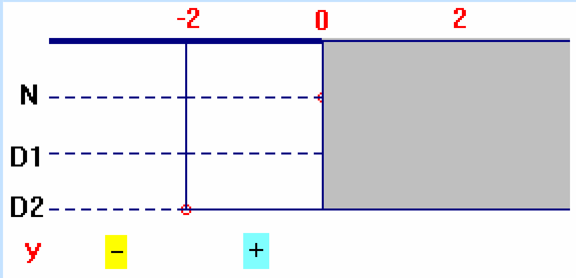
$$\begin{cases} x\le 0, \quad x\ne -2 \\ y=\dfrac{4x}{(x-2)(x+2)}\end{cases} \qquad \begin{cases} 0\le x<2 \\ y=-\dfrac{4x}{(x+2)^2}\end{cases} \qquad \begin{cases} x>2 \\ y=\dfrac{4x}{(x+2)^2}\end{cases}$$

**Primo intervallo**: $\begin{cases} x\le 0, \quad x\ne -2 \\ y=\dfrac{4x}{(x-2)(x+2)}\end{cases}$

Dominio: $(-\infty, 0]-\{-2\}=(-\infty,-2)\cup(-2, 0]$

$x=0\to y=0$

$y=0\ con\ x=0$




$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{(x-2)(x+2)}=0\,; \quad \lim_{x\to-2}\frac{4x}{(x-2)(x+2)}=\infty\,; \quad f(0)=0$$

$$\boxed{y'}=\frac{d}{dx}\left(\frac{4x}{(x-2)(x+2)}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{4x}{x^2-4}\right)=4\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2-4}\right)=4\cdot\frac{x^2-4-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=4\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}=\boxed{-4\cdot\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}}$$

Pertanto $y'$ non si annulla mai, anzi è sempre strettamente negativa su $(-\infty, 0]-\{-2\}$: la funzione, in questo intervallo, è decrescente.

$$y'_-(0)=\left[-4\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}\right]_{x=0}=-1$$

$$\boxed{y''}=\frac{d}{dx}\left(-4\cdot\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}\right)=-4\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}\right)=$$

$$=-4\cdot\frac{2x(x^2-4)^2-(x^2+4)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=$$

$$=-4\frac{2x(x^2-4)(x^2-4-2x^2-8)}{(x^2-4)^2}=$$

$$=-8\frac{x\cdot(-x^2-12)}{x^2-4}=\boxed{\frac{8x(x^2+12)}{x^2-4}}$$

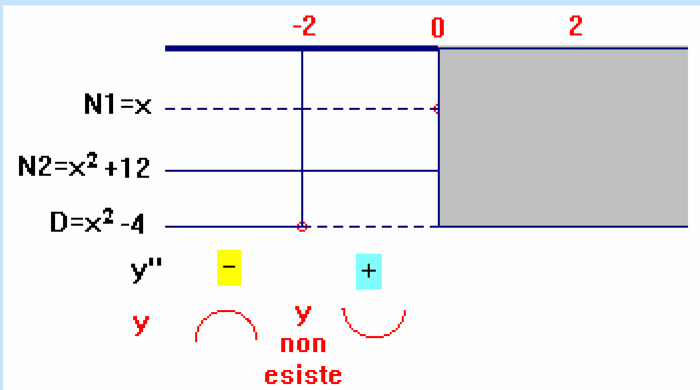
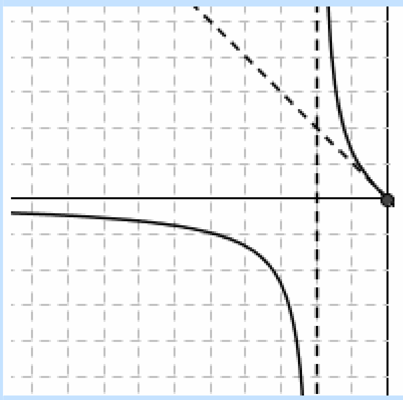


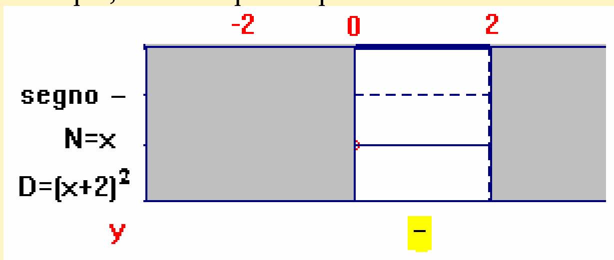

Grafico sull'intervallo $(-\infty, 0]$:



**Secondo intervallo**: $\begin{cases} 0 \le x < 2 \\ y = -\dfrac{4x}{(x+2)^2} \end{cases}$

Dominio: $[0,\, 2)$;
$x = 0 \to y = 0$;
$y = 0 \; con \; x = 0$.

Sull'intervallo $[0,\, 2)$ il segno dell'espressione $-\dfrac{4x}{(x+2)^2}$ è, evidentemente, sempre negativo;
per stabilire questo, basta osservare l'espressione e tener conto della positività di *x*,
non è necessario utilizzare uno schema! Lo schema, comunque, sarebbe quello qui sotto a destra.




$f(0) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 2-} \left[-\dfrac{4x}{(x+2)^2}\right] = -\dfrac{1}{2}$

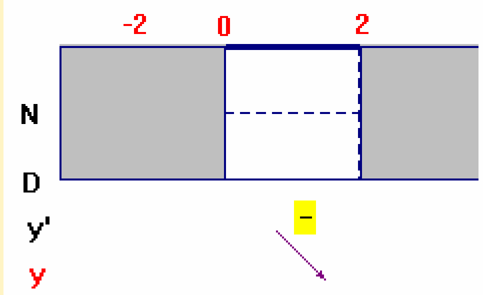
$\boxed{y'} = \dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{4x}{(x+2)^2}\right) = -4\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{(x+2)^2}\right) = \ldots$

$= -4 \cdot \dfrac{2-x}{(x+2)^3} = \boxed{4 \cdot \dfrac{x-2}{(x+2)^3}}$

$y'_+(0) = \left[4\dfrac{x-2}{(x+2)^3}\right]_{x=0} = -1$

$\lim\limits_{x \to 2-} y' = \lim\limits_{x \to 2-} 4\dfrac{x-2}{(x+2)^3} = 0$:

nel punto $x = 2$ la funzione non è definita,
ma al tendere di *x* a 2 da sinistra la pendenza
del grafico tende all'orizzontalità.

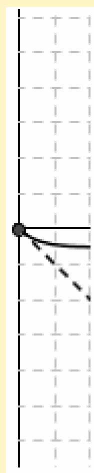



$\boxed{y''} = \dfrac{d}{dx}\left(4\dfrac{x-2}{(x+2)^3}\right) = 4\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-2}{(x+2)^3}\right) = 4 \cdot \dfrac{(x+2)^3 - (x-2) \cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6} = \ldots = 4\dfrac{8-2x}{(x+2)^4} = \boxed{-8\dfrac{x-4}{(x+2)^4}}$

L'espressione $-8\dfrac{x-4}{(x+2)^4}$ si annullerebbe con $x = 4$, ma tale valore non appartiene
all'intervallo di riferimento $[0,\, 2)$; pertanto, la $y''$ non si annulla mai in tale intervallo,
e anzi assume sempre, in esso, valori strettamente positivi
(il numeratore $x - 4$ è negativo, il denominatore è positivo, c'è il segno negativo davanti alla frazione).
Pertanto la funzione è sempre CONVESSA nell'intervallo $[0,\, 2)$.

E' **interessante** osservare il comportamento della funzione nel punto $x = 0$:
si ha, come abbiamo visto, $y'_-(0) = \left[-4\dfrac{x^2+4}{(x-4)^2}\right]_{x=0} = -1 \quad y'_+(0) = \left[4\dfrac{x-2}{(x+2)^3}\right]_{x=0} = -1$
per cui il punto in questione NON è angoloso; tuttavia,
*qualcosa cambia bruscamente nell'attraversamento dell'ascissa 0, ed è la CURVATURA del grafico.*

Infatti $y''_-(0) = \left[\dfrac{8x(x^2+12)}{x^2-4}\right]_{x=0} = 0$ mentre $y''_+(0) = \left[-8\dfrac{x-4}{(x+2)^4}\right]_{x=0} = 2$



Quando il grafico "arriva al punto di ascissa 0, dalla sinistra", la derivata seconda,
che esprime la velocità di variazione della derivata prima, è prossima a 0, per cui
l'inclinazione del grafico è prossima alla stabilità, la curvatura del grafico è pressoché nulla.
Quando invece il grafico "riparte dal punto di ascissa 0, verso destra", la derivata seconda,
cioè la rapidità di variazione della derivata prima, è prossima a 2.
L'inclinazione si evolve con una certa rapidità, la curvatura è più accentuata.

Lo studio del segno della derivata seconda $y'' = -8\dfrac{x-4}{(x+2)^4}$ è molto semplice
e per effettuarlo non è indispensabile uno schema:
nell'intervallo che stiamo considerando, ossia l'intervallo $[0,\, 2)$,
$y''$ è sempre positiva e la funzione è perciò sempre convessa.

Il grafico sull'intervallo $[0,\, 2)$ è in definitiva quello della figura qui a fianco.

**Terzo intervallo**: $\begin{cases} x > 2 \\ y = \dfrac{4x}{(x+2)^2} \end{cases}$

Dominio: $(2, +\infty)$; $y = 0$ *MAI VERIFICATA IN* $(2, +\infty)$

Sull'intervallo $(2, +\infty)$ il segno dell'espressione $\dfrac{4x}{(x+2)^2}$ è, evidentemente, sempre POSITIVO.

Si ha $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} \left[-\dfrac{4x}{(x+2)^2}\right] = +\dfrac{1}{2}$.

Era invece $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} \left[-\dfrac{4x}{(x+2)^2}\right] = -\dfrac{1}{2}$;

quindi, nell'attraversamento dell'ascissa $x = 2$ (ascissa nella quale la funzione non è definita),
si ha un "**salto**" ovvero una "**discontinuità di prima specie**".

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{4x}{(x+2)^2}\right] = 0$$

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{4x}{(x+2)^2}\right) = \ldots = -4\cdot\frac{x-2}{(x+2)^3}$$

Nell'intervallo di riferimento $(2, +\infty)$ la $y'$ è sempre negativa, quindi la funzione è sempre decrescente.

$\lim\limits_{x\to 2+} y' = \lim\limits_{x\to 2-} \left(-4\dfrac{x-2}{(x+2)^3}\right) = 0$: nel punto $x = 2$ la funzione non è definita,
ma al tendere di $x$ a 2 da destra la pendenza del grafico tende all'orizzontalità
(così come abbiamo visto avvenire anche da sinistra).
L'andamento del grafico in prossimità dell'ascissa 2 è, in definitiva, il seguente:

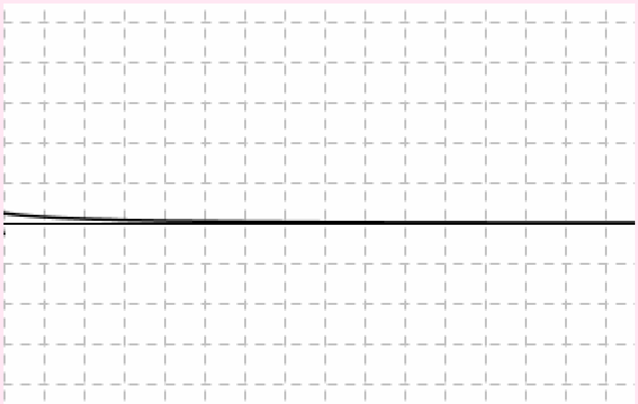
$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-4\frac{x-2}{(x+2)^3}\right) = 8\frac{x-4}{(x+2)^4}$$

L'espressione $8\dfrac{x-4}{(x+2)^4}$ si annulla con $x = 4$.

Tale valore appartiene all'intervallo di riferimento $(2, +\infty)$. Inoltre nell'attraversamento dell'ascissa $x = 4$ la $y''$ cambia di segno, passando dalla negatività alla positività: pertanto la nostra funzione passa dalla concavità alla convessità, e il punto $x = 4$ è di flesso. Si ha

$$f(4) = \left[\frac{4x}{(x+2)^2}\right]_{x=4} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}; \quad f'(4) = \left[-4\frac{x-2}{(x+2)^3}\right]_{x=4} = -4\cdot\frac{2}{216} = -\frac{1}{27}$$

Grafico sull'intervallo $(2, +\infty)$
(non è stata tracciata la tangente inflessionale
nel punto di ascissa 4,
perché data la quasi rettilinearità del grafico,
essa si sarebbe confusa con la curva):



**Ed ecco il grafico della nostra funzione**

$$\boxed{y = \frac{4x \cdot \left(|x| - 2\right)}{|x-2| \cdot (x+2)^2} = f(x)}$$

ottenuto facendo un “**collage**” dei tre “pezzi”!!!!