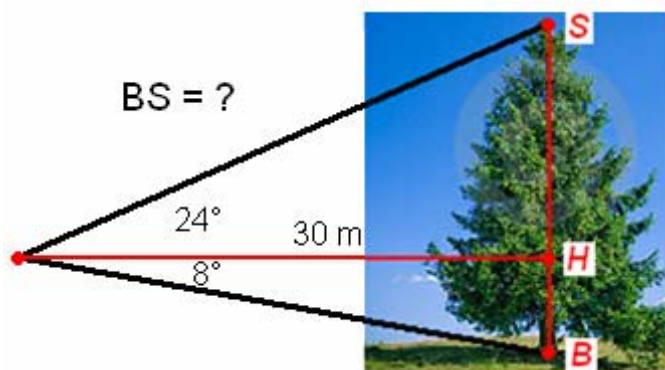


TRIGONOMETRIA

1. Misura di un arco di circonferenza in radianti pag. 2
2. Circonferenza goniometrica 5
3. Seno e coseno di un angolo nella circonferenza goniometrica 5
4. Tangente di un angolo nella circonferenza goniometrica 8
5. Cotangente di un angolo 10
6. Periodicità delle funzioni goniometriche 12
7. Calcolatrici e funzioni goniometriche 13
8. Alcune formule utili 14
9. Teoremi sui triangoli rettangoli 17
10. Teoremi sui triangoli qualsiasi 18
11. Esercizi sui triangoli 19
12. E' possibile, nota una delle quattro funzioni goniometriche di un angolo, determinare le altre? 28
13. I grafici delle funzioni goniometriche: il seno 30
14. I grafici delle funzioni goniometriche: il coseno 31
15. I grafici delle funzioni goniometriche: tangente e cotangente 32
16. Nota una funzione goniometrica, risalire all'arco 33
17. Le equazioni goniometriche elementari 34
18. Archi associati 38
19. Archi complementari 39
20. Archi che differiscono di 90° o di 270° 40
21. Riduzione al primo quadrante e poi, eventualmente, al primo ottante 40
22. La "madre di tutte le formule" in trigonometria 41
23. Le formule di addizione e sottrazione 42
24. Le formule di duplicazione 44
25. Le formule di bisezione 45
26. Le funzioni goniometriche degli archi di $22^\circ 30'$ e di 18° 46
27. Una tabella riassuntiva: le funzioni goniometriche di alcuni "archi notevoli" 47
28. Le formule parametriche 48
29. Identità goniometriche 49
30. Equazioni goniometriche 52
31. Equazioni goniometriche lineari in seno e coseno 56
32. Equazioni omogenee in seno e coseno (o riconducibili a questa tipologia) 60
33. Formule di prostaferesi 62
34. Formule di Werner 63
35. Esercizi sulle equazioni goniometriche 64
36. Disequazioni goniometriche 66

"Trigonometria", di Giancarlo Zilio,
 è distribuito con licenza
 Creative Commons
 Attribuzione -
[- Non commerciale -](#)
[- Non opere derivate](#)
[4.0 Internazionale](#)

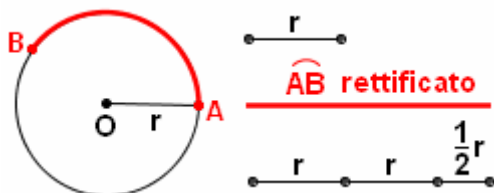


1. MISURA DI UN ARCO DI CIRCONFERENZA IN RADIANTI

Si dice che un arco di circonferenza è misurato in radianti quando lo si misura assumendo come unità di misura il raggio della circonferenza stessa.

Vale a dire: per misurare un arco di circonferenza in radianti, **si immagina di rettificare questo arco, poi si misura il segmento così ottenuto, prendendo come unità di misura il raggio.**

Ad esempio, la lunghezza di un certo arco in radianti è 2.5 (= un certo arco misura 2.5 radianti) se rettificando quell'arco si ottiene un segmento lungo esattamente 2.5 volte il raggio (vedi figura sottostante). Un arco misura quindi UN radiante quando la lunghezza di quell'arco, supposto rettificato, è uguale alla lunghezza del raggio della circonferenza.



In questa figura, l'arco $\widehat{AB}$ misura 2.5 radianti: infatti è esattamente due volte e mezza il raggio.

NOTA - “Misurare” un segmento s rispetto ad un altro segmento u (unità di misura) vuol dire stabilire “quante volte” il segmento u che fa da unità di misura è contenuto in s : e a tale scopo, qualora si conoscano le misure di s e di u rispetto ad **un'altra** unità di misura u' , basterà fare il quoziente fra tali due misure per conoscere la misura di s rispetto a u (Teorema del Rapporto). Per questo, misurare un arco in radianti equivale a calcolare il quoziente, il rapporto, fra la lunghezza dell'arco e la lunghezza del raggio della circonferenza, determinate entrambe rispetto a una medesima unità di misura.

In pratica, il Teorema del Rapporto può essere illustrato con l'esempio seguente.

Supponiamo che un pensionato sia abituato a utilizzare il suo bastone per calcolare le lunghezze, e abbia constatato che la misura del campo da bocce, quando l'unità di misura è il bastone, vale 8.5 (perché “il bastone ci sta esattamente 8 volte e mezzo nel campo da bocce”).

Bene! Allora quel pensionato, qualora andasse a misurare sia il campo da bocce che il bastone in metri, e facesse poi la divisione fra le due misure in metri ottenute, troverebbe come quoziente proprio 8.5.

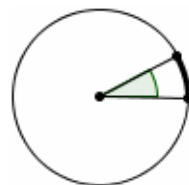
UN ARCO SI PUO' MISURARE SIA IN RADIANTI CHE IN GRADI E UN ANGOLO SI PUO' MISURARE SIA IN GRADI CHE IN RADIANTI

In una data circonferenza la lunghezza di un arco dipende in modo univoco dall'ampiezza dell'angolo al centro corrispondente, e viceversa. Perciò

- UN ARCO DI CIRCONFERENZA SI PUO' MISURARE SIA IN RADIANTI CHE IN GRADI;
 - E UN ANGOLO, SIA IN GRADI CHE IN RADIANTI
- [Evidentemente, per “misura in radianti di un angolo α ” si intenderà la misura in radianti dell'arco che α stacca su di una qualsiasi circonferenza avente il centro nel vertice di α (NOTA)]

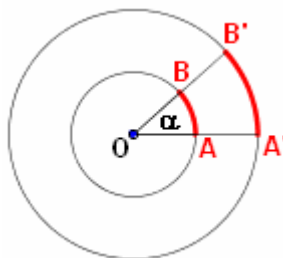
Dell'arco in figura, posso dire indifferentemente che misura

- **0.5 radianti** (perché è lungo la metà del raggio)
- **OPPURE $28^\circ 39'$ (circa)**, perché tale è l'ampiezza dell'angolo al centro corrispondente.



NOTA

E' intuitivo – e, volendo, dimostrabile – che la misura ottenuta è del tutto indipendente dal raggio della circonferenza che viene tracciata, perché – ad esempio – raddoppiando il raggio raddoppia anche la lunghezza dell'arco e allora il rapporto *arco/raggio* rimane costante.



$$\frac{\widehat{AB}}{OA} = \frac{\widehat{A'B'}}{OA'} =$$

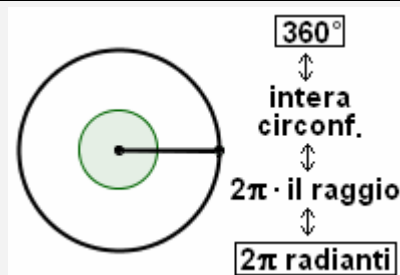
= misura in radianti di :

$$\widehat{AB}, \widehat{A'B'}, \alpha$$

Se il raggio di una circonferenza è r , l'intera circonferenza misura $2\pi r$: cioè, 2π moltiplicato il raggio (= circa 6.28 volte il raggio). Perciò, **se come unità di misura si sceglie proprio il raggio, la lunghezza dell'intera circonferenza risulta uguale a 2π .**

Di conseguenza,

la misura in radianti dell'intera circonferenza, ossia dell'arco che corrisponde ad un angolo al centro di 360° , è 2π (circa 6.28): come misura di angolo o di arco, 360° EQUIVALE A 2π RADIANTI.



Dunque avremo:

Gradi	360°	180° = $\frac{1}{2} \cdot 360^\circ$	90° = $\frac{1}{4} \cdot 360^\circ = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ$
Radiani	2π	π	π / 2

Possiamo ora proseguire, ricavando ad esempio

$45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$
 NOTA: il simbolo “=” non è qui del tutto rigoroso; ci concediamo una licenza!
 Non si tratta, infatti, di una vera uguaglianza, ma piuttosto di una **corrispondenza** fra due misure che sono numericamente diverse perché completamente diverse sono le unità di misura utilizzate: il grado (ampiezza) a 1° membro, e il radiante (lunghezza) a 2° membro.

$30^\circ = \frac{1}{3} \cdot 90^\circ = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$
 $60^\circ = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = \frac{1}{3} \cdot \pi = \frac{\pi}{3}$ (oppure $60^\circ = 2 \cdot 30^\circ = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$)

$120^\circ = 2 \cdot 60^\circ = 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \pi$ $135^\circ = 3 \cdot 45^\circ = 3 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \pi$

$40^\circ = 2 \cdot 20^\circ = 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 180^\circ = 2 \cdot \frac{1}{9} \pi = \frac{2}{9} \pi$ $75^\circ = \frac{1}{2} \cdot 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 30^\circ = \frac{5}{2} \cdot 30^\circ = \frac{5}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5}{12} \pi$

$1^\circ = \frac{1}{180} \cdot 180^\circ = \frac{1}{180} \pi = \frac{\pi}{180}$

$111^\circ = 111 \cdot 1^\circ = 111 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{111}{180} \pi$

Negli esercizi (e in talune applicazioni) compaiono con particolare frequenza gli **angoli multipli di 30° e di 45°**. Ecco la **tabella dei corrispondenti valori in radianti**:

Gradi	Rad.	Gradi	Rad.	Gradi	Rad.	Gradi	Rad.	Gradi	Rad.
0°	0	90°	$\frac{\pi}{2}$	180°	π	270°	$\frac{3}{2} \pi$	360°	2π
30°	$\frac{\pi}{6}$	120°	$\frac{2}{3} \pi$	210°	$\frac{7}{6} \pi$	300°	$\frac{5}{3} \pi$	390°	$\frac{13}{6} \pi$
45°	$\frac{\pi}{4}$	135°	$\frac{3}{4} \pi$	225°	$\frac{5}{4} \pi$	315°	$\frac{7}{4} \pi$	405°	$\frac{9}{4} \pi$
60°	$\frac{\pi}{3}$	150°	$\frac{5}{6} \pi$	240°	$\frac{4}{3} \pi$	330°	$\frac{11}{6} \pi$	420°	$\frac{7}{3} \pi$

Gli angoli che superano i 360° sono quelli che “vanno oltre il giro completo”. Si fa un giro (360°), poi si prosegue.

Più avanti parleremo pure di angoli negativi.

D'ora in poi, data la stretta corrispondenza fra “angolo” (pensato come “angolo al centro di una circonferenza”) e “arco”, **parleremo indifferente di “angolo” e di “arco”, trattando questi due concetti come “equivalenti” ed “intercambiabili”**.

Di norma, quando si ragiona in “radianti” si preferisce dire “arco”, quando si usano i “gradi”, “angolo”.

Abbiamo visto sopra che l'angolo di 1 grado misura, in radianti, $\pi/180$ ossia circa 0.01745.

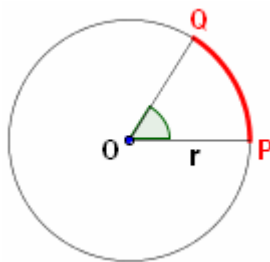
Quanto misurerà, in gradi, l'arco di 1 radiante?

Possiamo rispondere mediante la proporzione

$1 : \pi = x^\circ : 180^\circ$ da cui

misura in gradi dell'arco di 1 radiante =

$= \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3.14159...} \approx 57.3^\circ = 57^\circ 18'$



La misura trovata, poco più di 57°, è del tutto “convincente” dato che l'arco di 1 radiante è poi l'arco il quale, se rettificato, darebbe luogo a un segmento uguale al raggio (vedi figura qui a fianco, nella quale è appunto $\widehat{PQ} = 1$ radiante).

E COME SI PASSA, IN GENERALE, DAI GRADI AI RADIANI E VICEVERSA?

DAI GRADI AI RADIANI

$x_{rad} : \pi = x^\circ : 180^\circ \rightarrow x_{rad} = \frac{\pi \cdot x^\circ}{180^\circ} = \frac{x^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$

Si prende dunque la misura, es. $72^\circ 32'$, la si trasforma in “gradi virgola ...”: $72^\circ 32' = 72.533333...^\circ$ poi si divide per 180 e si moltiplica per π :

$72^\circ 32' = 72.533333...^\circ = \frac{72.533333...}{180} \cdot \pi \text{ rad} = 1.2659... \text{ rad}$

La sigla *rad* viene di norma omessa.

DAI RADIANI AI GRADI

$x_{rad} : \pi = x^\circ : 180^\circ \rightarrow x^\circ = \frac{x_{rad} \cdot 180^\circ}{\pi} = \frac{x_{rad}}{\pi} \cdot 180^\circ$

Si prende la misura in radianti, es. 2.493 la si divide per π e si moltiplica per 180:

$2.493 \text{ radianti} \rightarrow \frac{2.493}{\pi} \cdot 180^\circ = 142.838...^\circ$

Naturalmente, volendo, questi “gradi virgola ...” possono poi essere trasformati in gradi, primi e secondi.

ESERCIZI

1) a) A partire dal punto W disegna:

- ♪ in senso antiorario, un arco di 3 radianti
 ♪ e in senso orario, uno di 0.8 radianti.



b) Quanti radianti misura l'intera circonferenza? Perché?

c) E 1/16 di circonferenza, quanti radianti misura?

2) Ricordando che π corrisponde a 180° (perché? ...)

I) trova le misure in gradi dei seguenti angoli espressi in radianti:

- a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5}{6}\pi$ c) $\frac{3}{4}\pi$ d) $\frac{1}{90}\pi$ e) $\frac{3}{2}\pi$ f) $\frac{5}{3}\pi$ g) $\frac{6}{5}\pi$ h) 3 radianti i) 2.2 rad l) 0.8 rad

II) trova le misure in radianti di un angolo di:

- a) 50° b) 36° c) 210° d) 225° e) 20° f) 330° g) 140°

3) π radianti $\leftrightarrow 180^\circ$ da cui la proporzione fondamentale $x_{rad} : \pi = x^\circ : 180^\circ$.

I) Completa ora le formule: $x_{rad} = \frac{\dots}{\dots} \cdot \pi$; $x^\circ = \frac{\dots}{\dots} \cdot 180^\circ$

II) Trasforma da gradi-primi-secondi a radianti (approssimando a 2 cifre decimali), e viceversa:

- a) $141^\circ = \dots rad$ b) $1.2 rad = \dots^\circ$ c) $14^\circ 15' = (\dots)^\circ = \dots rad$ d) $2.45 rad = \dots^\circ$
 e) $24^\circ = \dots rad$ f) $55^\circ = \dots rad$ g) $11^\circ 30' = \dots rad$ h) $95^\circ 20' = \dots rad$
 i) $137^\circ 6' = \dots rad$ l) $1.42 rad = \dots^\circ$ m) $0.4 rad = \dots^\circ$ n) $200.5^\circ = \dots rad$

4) Data la lunghezza del raggio e l'ampiezza dell'angolo, determina la lunghezza dell'arco

- a) $r = 3.7$ km; $\alpha = 48^\circ$ b) $r = 4$ cm; $\alpha = 22^\circ 45'$

5) Data la lunghezza dell'arco e il raggio, trova l'angolo al centro corrispondente in gradi e in primi.

- a) $\ell = 5.4$; $r = 12$ b) $\ell = 0.154$; $r = 0.245$

6) Un arco è lungo cm 4.7, ed è sotteso da un angolo al centro di 23.4° .

Quanto misura il raggio della circonferenza?

7) Un arco è lungo m 0.03, ed è sotteso da un angolo al centro di 2° .

Quanto misura il raggio della circonferenza?

8) In un cerchio di raggio 4.5 metri, quanto è lungo un arco di 2 radianti?

In un cerchio di raggio 4.5 metri, quanto è lungo un arco di 2° ?

In un cerchio di raggio 2 m, quanto è lungo un arco di $25^\circ 30'$?

9) In una circonferenza di diametro 4 metri, che angolo al centro corrisponde a un arco lungo 1 metro?

Esprimi la risposta in gradi, primi e secondi.

Puoi trovare altri esercizi di questo tipo, e dei tipi successivi, su [➡](#)

RISPOSTE

1) a) Vedi figura (il triplo del raggio; 0.8 volte il raggio = gli 8/10 del raggio)

b) 2π , perché è uguale a 2π volte il raggio c) $2\pi \cdot \frac{1}{16} = \frac{\pi}{8} \approx 0.39$

2) I) a) 60° b) 150° c) 135° d) 2° e) 270° f) 300° g) 216°

h) Proporzione: $3 : \pi = x^\circ : 180^\circ$ da cui $x^\circ = \frac{3 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx 171.9^\circ$

i) $2.2 \cdot 180^\circ / \pi \approx 126.1^\circ$ l) $0.8 \cdot 180^\circ / \pi \approx 45.8^\circ = 45^\circ 48'$

II) a) $\frac{5}{18}\pi$ b) $\frac{\pi}{5}$ c) $\frac{7}{6}\pi$ d) $\frac{5}{4}\pi$ e) $\frac{\pi}{9}$ f) $\frac{11}{6}\pi$ g) $\frac{7}{9}\pi$

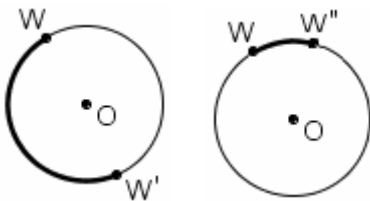
3) I) $x_{rad} = \frac{x^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$; $x^\circ = \frac{x_{rad}}{\pi} \cdot 180^\circ$

II) a) $2.46 rad$ b) $68^\circ 45' 18''$ c) $14^\circ 15' = 14.25^\circ \approx 0.25 rad$ d) $140^\circ 22' 29''$ e) $0.42 rad$

f) $0.96 rad$ g) $0.20 rad$ h) $1.66 rad$ i) $2.39 rad$ l) $81^\circ 21' 36''$ m) $22^\circ 55' 6''$ n) $3.50 rad$

4) a) Circa 3.10 km b) Circa 1.59 cm 5) a) $\approx 25^\circ 47'$ b) $\approx 36^\circ 1'$

6) $\approx$ cm 11.5 7) $\approx$ m 0.86 8) m 9; $\approx$ m 0.157; $\approx$ 0.89 m 9) $\approx 28^\circ 38' 52''$



2. CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

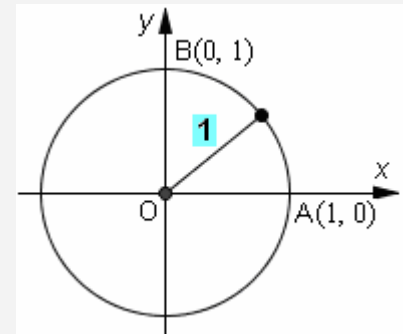
Inizieremo ora lo studio di alcune importantissime
funzioni angolari
 (= quantità, come il *seno*, il *coseno*, la *tangente*, la *cotangente*,
 il cui valore dipende dall'ampiezza di un angolo
 - o, in modo equivalente, dalla misura di un arco).
 Questo studio viene chiamato “**GONIOMETRIA**”
 (in greco, **gonos** = **angolo** e **metron** = **misura**)
 oppure “**TRIGONOMETRIA**”,
 termine che è praticamente un sinonimo di “goniometria”
 ma mette maggiormente in rilievo il fatto che, molto sovente,
 interessa applicare le formule studiate ai tre angoli interni di un *triangolo*.

Lo strumento concettuale che è posto alla base della goniometria è la “**circonferenza goniometrica**”.

Cos'è, dunque, la “**CIRCONFERENZA GONIOMETRICA**”?

E' una circonferenza

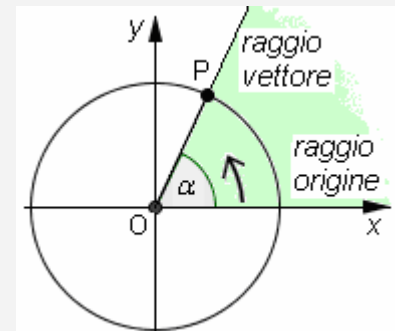
- **avente il centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani**
- **e (importantissimo!) RAGGIO UGUALE A 1**
 (cioè, raggio uguale all'unità di misura del sistema di riferimento).



**S'intende che sulla circonferenza goniometrica
 gli ANGOLI vadano sempre riportati**

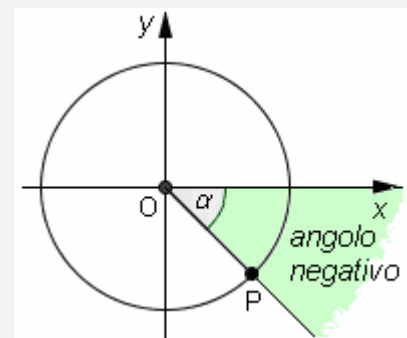
- **con vertice nel centro (= nell'origine)**
- **a partire dal semiasse delle ascisse positive**
 (che sarà dunque sempre il “primo lato” dell'angolo)
- **e in SENSO ANTIORARIO** ↺.

Il “primo lato” dell'angolo, ossia il semiasse delle ascisse positive,
 viene anche detto “**raggio origine**” dell'angolo, mentre
 il secondo lato (semiretta OP nella figura) è detto “**raggio vettore**”.



Agli angoli riportati in senso ORARIO si assegna MISURA NEGATIVA:

ad esempio,
 l'angolo qui a fianco raffigurato misurerà -45°
 (oppure, in radianti, $-\frac{\pi}{4}$).

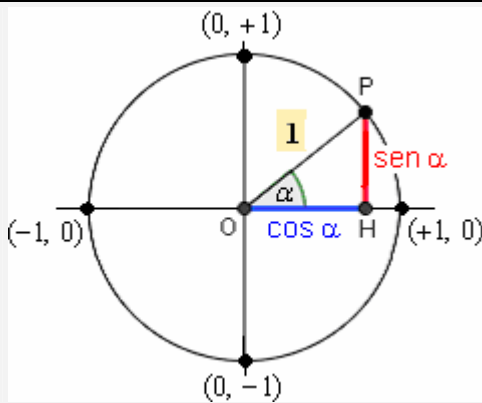


3. SENO E COSENO DI UN ANGOLO NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Nella circonferenza goniometrica, consideriamo un certo angolo α
 (che di norma sarà compreso fra 0° e 360° , ma potrebbe pure essere negativo, o maggiore di 360°):
 cosa intendiamo per “seno di α ($\sin \alpha$)” e per “coseno di α ($\cos \alpha$)”?

Andiamo a considerare il punto P in cui il raggio vettore di α interseca la circonferenza goniometrica:

- ♪ il **SENO** di α è, per definizione, l'**ORDINATA** di P,
- ♪ mentre il **COSENO** di α è, per definizione, l'**ASCISSA** di P.



sen α = ordinata di P = misura (con segno) di HP

cos α = ascissa di P = misura (con segno) di OH

La circonferenza goniometrica ha, come abbiamo detto, centro nell'origine e raggio 1; quindi i suoi punti hanno

- ascissa che può andare da un minimo di -1 a un max di $+1$;
- ordinata che può andare, anch'essa, da un minimo di -1 a un massimo di $+1$.

Pertanto **il seno e il coseno di un angolo α sono sempre compresi fra -1 e $+1$:**

$$\forall \alpha, \quad -1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1 \quad -1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1$$

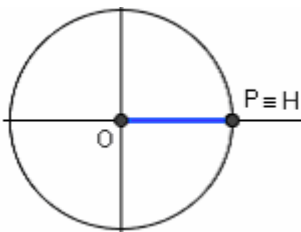
Si ha subito (Pitagora) la **1ª RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA**: qualunque sia l'angolo α (anche, eventualmente, con $\alpha > 360^\circ$, o $\alpha < 0^\circ$), è sempre

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

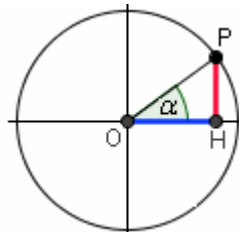
NOTA: $\text{sen}^2 \alpha$, $\text{cos}^2 \alpha$ sono scritte abbreviate di: $(\text{sen } \alpha)^2$, $(\text{cos } \alpha)^2$



Per $\alpha = 0^\circ$ (0 radianti)
 $\text{sen } \alpha = 0$; $\text{cos } \alpha = 1$



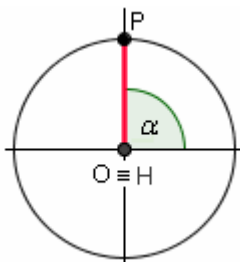
Nel **1° quadrante**, ossia per $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), è $\text{sen } \alpha > 0$, $\text{cos } \alpha > 0$



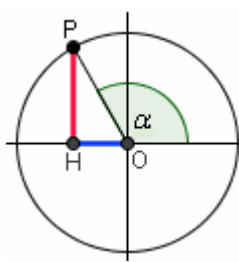
... e quando α cresce da 0° a 90° ,

$\text{sen } \alpha$ cresce (da 0 a 1)
 $\text{cos } \alpha$ decresce (da 1 a 0)

Per $\alpha = 90^\circ$ ($\frac{\pi}{2}$ radianti)
 $\text{sen } \alpha = 1$; $\text{cos } \alpha = 0$



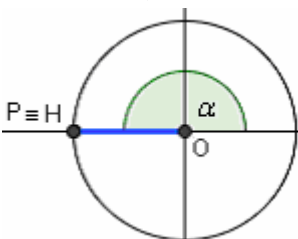
Nel **2° quadrante**, ossia per $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), è $\text{sen } \alpha > 0$, $\text{cos } \alpha < 0$



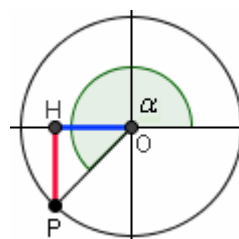
... e quando α cresce da 90° a 180° ,

$\text{sen } \alpha$ decresce (da 1 a 0)
 $\text{cos } \alpha$ decresce (da 0 a -1)

Per $\alpha = 180^\circ$ (π radianti)
 $\text{sen } \alpha = 0$; $\text{cos } \alpha = -1$



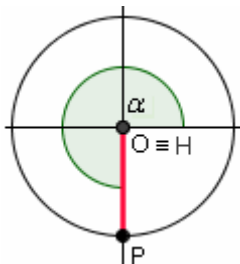
Nel **3° quadrante**, ossia per $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ($\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$), è $\text{sen } \alpha < 0$, $\text{cos } \alpha < 0$



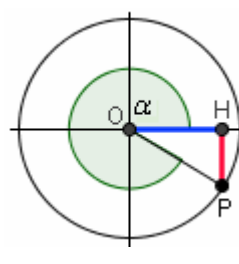
... e quando α cresce da 180° a 270° ,

$\text{sen } \alpha$ decresce (da 0 a -1)
 $\text{cos } \alpha$ cresce (da -1 a 0)

Per $\alpha = 270^\circ$ ($\frac{3}{2}\pi$ radianti)
 $\text{sen } \alpha = -1$; $\text{cos } \alpha = 0$



Nel **4° quadrante**, ossia per $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ($\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$), è $\text{sen } \alpha < 0$, $\text{cos } \alpha > 0$

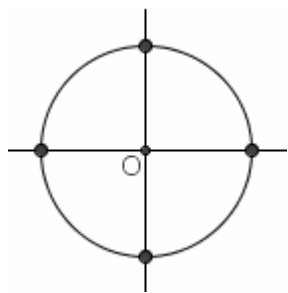


... e quando α cresce da 270° a 360° ,

$\text{sen } \alpha$ cresce (da -1 a 0)
 $\text{cos } \alpha$ cresce (da 0 a 1)

Quando α raggiunge e poi supera i 360° ,
i valori di $\text{sen } \alpha$ e di $\text{cos } \alpha$
“ripartono come se si ripartisse da 0° ”;
cioè, **le funzioni “seno” e “coseno” sono “periodiche di periodo 360° ”**. Ne ripareremo.

Clicca QUI ➡ per una bella figura “dinamica” (GeoGebra) sulla variazione di seno e coseno al variare dell'arco

ESERCIZI

1) Nella circonferenza goniometrica in figura

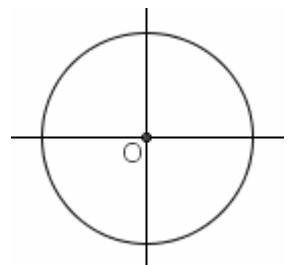
- I) scrivi la coppia delle coordinate di ciascuno dei cinque punti evidenziati
 II) disegna: a) l'angolo di 135° ; b) quello che misura $\frac{7}{6}\pi$; c) quello di -80°
 III) e disegna inoltre una coppia di angoli fra loro complementari: α e $90^\circ - \alpha$ (potrebbero essere, ad esempio, 25° e $65^\circ \dots$)
 per constatare un fatto importante, che vale poi per qualsiasi valore di α , anche maggiore di 90° o di 180° o di 360° , anche negativo: si ha sempre

$$\boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha} \quad \text{e} \quad \boxed{\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha}$$

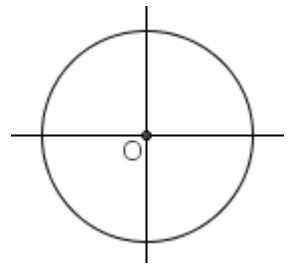
PASSANDO DA UN ANGOLO AL SUO COMPLEMENTARE, I VALORI DI SENO E COSENO SI SCAMBIANO FRA LORO.



- 2) Sapendo che $\sin 43^\circ \approx 0.68$, $\cos 43^\circ \approx 0.73$, riempi i puntini: $\sin 47^\circ \approx \dots$, $\cos 47^\circ \approx \dots$
 3) a) Noto il valore $\sin \alpha$ del seno di un angolo, ci sono due modi per ricavare $\cos \alpha$. Quali?
 b) Determina: il coseno di un angolo ottuso il cui seno vale 0.39
 c) Determina il seno di un angolo acuto il cui coseno vale 0.14
 4) Quali sono gli angoli, compresi fra 0° e 360° ,
 a) il cui seno è uguale a 0? b) il cui coseno è uguale a 0? c) il cui seno è uguale a 1?
 d) il cui coseno è uguale a 1? e) il cui seno è uguale a -1? f) il cui coseno è uguale a -1?
 g) il cui seno è uguale al coseno? h) il cui seno è l'opposto del coseno?
 i) Se un angolo α compreso fra 0° e 360° ha coseno < 0 , in quale intervallo di ampiezze può trovarsi?



- 5) $\sin 122^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\cos 122^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\sin 180^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\cos 180^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\sin 214^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\cos 214^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\sin 270^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\cos 270^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\sin 355^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\cos 355^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$



6) Utilizzando una matita e una circonf. goniometrica, individua la risposta corretta:

- $\sin(\alpha + 180^\circ) = ?$ a) $\sin \alpha$ b) $\cos \alpha$ c) $-\sin \alpha$ d) $-\cos \alpha$
 $\sin(180^\circ - \alpha) = ?$ a) $\sin \alpha$ b) $\cos \alpha$ c) $-\sin \alpha$ d) $-\cos \alpha$
 $\sin(90^\circ - \alpha) = ?$ a) $\sin \alpha$ b) $\cos \alpha$ c) $-\sin \alpha$ d) $-\cos \alpha$
 $\sin(90^\circ + \alpha) = ?$ a) $\sin \alpha$ b) $\cos \alpha$ c) $-\sin \alpha$ d) $-\cos \alpha$
 $\sin(-\alpha) = ?$ a) $\sin \alpha$ b) $\cos \alpha$ c) $-\sin \alpha$ d) $-\cos \alpha$
 $\cos(180^\circ - \alpha) = ?$ a) $\sin \alpha$ b) $\cos \alpha$ c) $-\sin \alpha$ d) $-\cos \alpha$

RISPOSTE

- 1) III) In effetti, nella figura qui a destra, si ha: $\widehat{POH} = \alpha$, $\widehat{P'OH'} = 90^\circ - \alpha$,
 $PH = \sin \alpha$, $OH = \cos \alpha$, $P'H' = \sin(90^\circ - \alpha)$, $OH' = \cos(90^\circ - \alpha)$
 e si può osservare (e dimostrare) che è $P'H' = OH$, $OH' = PH$

- 2) $\sin 47^\circ = \cos(90^\circ - 47^\circ) = \cos 43^\circ \approx 0.73$
 $\cos 47^\circ = \sin(90^\circ - 47^\circ) = \sin 43^\circ \approx 0.68$

- 3) a) Primo modo: $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ dove il segno dev'essere deciso in base all'ampiezza dell'angolo

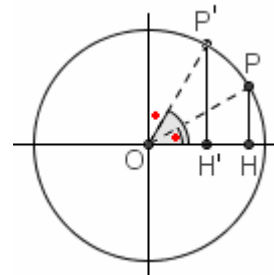
Secondo modo: con la macchinetta, risalire dal seno all'angolo (tasto $\sin^{-1}$), poi calcolare il coseno ($\cos$)

- b) ≈ -0.92 c) ≈ 0.99

- 4) a) $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ b) $90^\circ, 270^\circ$ c) 90° d) $0^\circ, 360^\circ$ e) 270°
 f) 180° g) $45^\circ, 225^\circ$ h) $135^\circ, 315^\circ$ i) $90^\circ < \alpha < 270^\circ$

- 5) $\sin 122^\circ > 0$, $\cos 122^\circ < 0$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\sin 214^\circ < 0$,
 $\cos 214^\circ < 0$, $\sin 270^\circ = -1$, $\cos 270^\circ = 0$, $\sin 355^\circ < 0$, $\cos 355^\circ > 0$

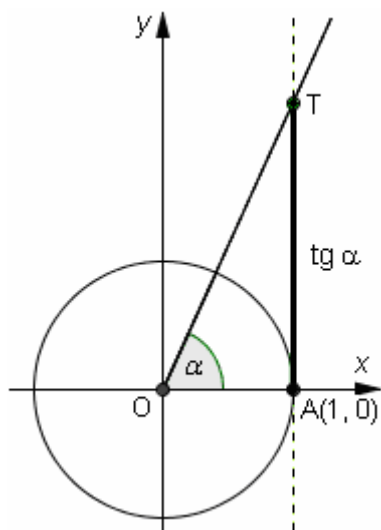
- 6) $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$, $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$,
 $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$



4. TANGENTE DI UN ANGOLO NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Nella circonferenza goniometrica, consideriamo il punto A che sta “all’estrema destra”, di coordinate (1,0). Per A tracciamo la retta “verticale”, ossia quella parallela all’asse y, e indichiamo con T il punto di intersezione fra tale retta e il raggio vettore di un dato angolo α (o, eventualmente, il prolungamento del raggio vettore dalla parte dell’origine).

Si dice “tangente di α ” l’ordinata del punto T, ossia la misura (con segno) del segmento AT in figura.

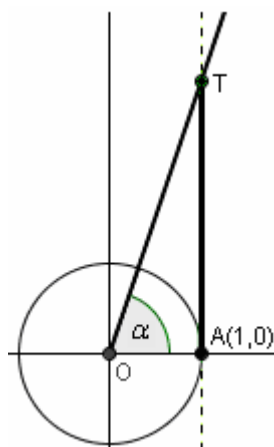
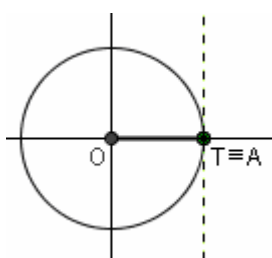


$\text{tg } \alpha = \text{ordinata di T} = \text{misura (con segno) di AT}$

Clicca QUI [⇨](#)
per una bella figura dinamica
(software GeoGebra)
che ti permetterà di osservare
la variazione della tangente goniometrica
al variare dell’angolo.

Per $\alpha = 0^\circ$ (0 radianti)

$$\text{tg } \alpha = 0$$



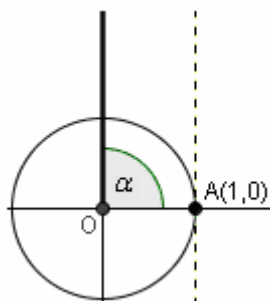
Nel **1° quadrante**, ossia
per $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$,
si ha $\text{tg } \alpha > 0$

... e quando α si avvicina a 90° ,
mantenendosi però *minore* di 90° ,
 $\text{tg } \alpha$ diventa altissima,
“tende a $+\infty$ ”.

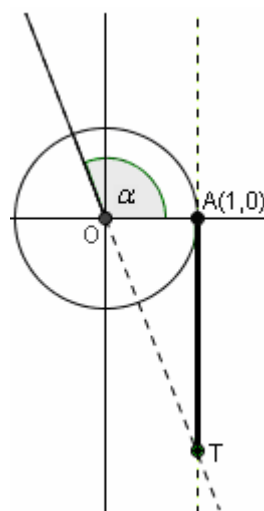
Ad esempio, si ha
 $\text{tg } 89.97^\circ \approx 1909.86$

Per $\alpha = 90^\circ$ ($\pi/2$ radianti)

$\text{tg } \alpha$ NON ESISTE!



Il raggio vettore, ossia
il secondo lato dell’angolo,
in questo caso coincide col
semiasse delle ordinate positive.
Ma allora il punto T “non si trova”,
perché il raggio vettore
e la retta tratteggiata
sono parallele
e quindi non si incontrano.

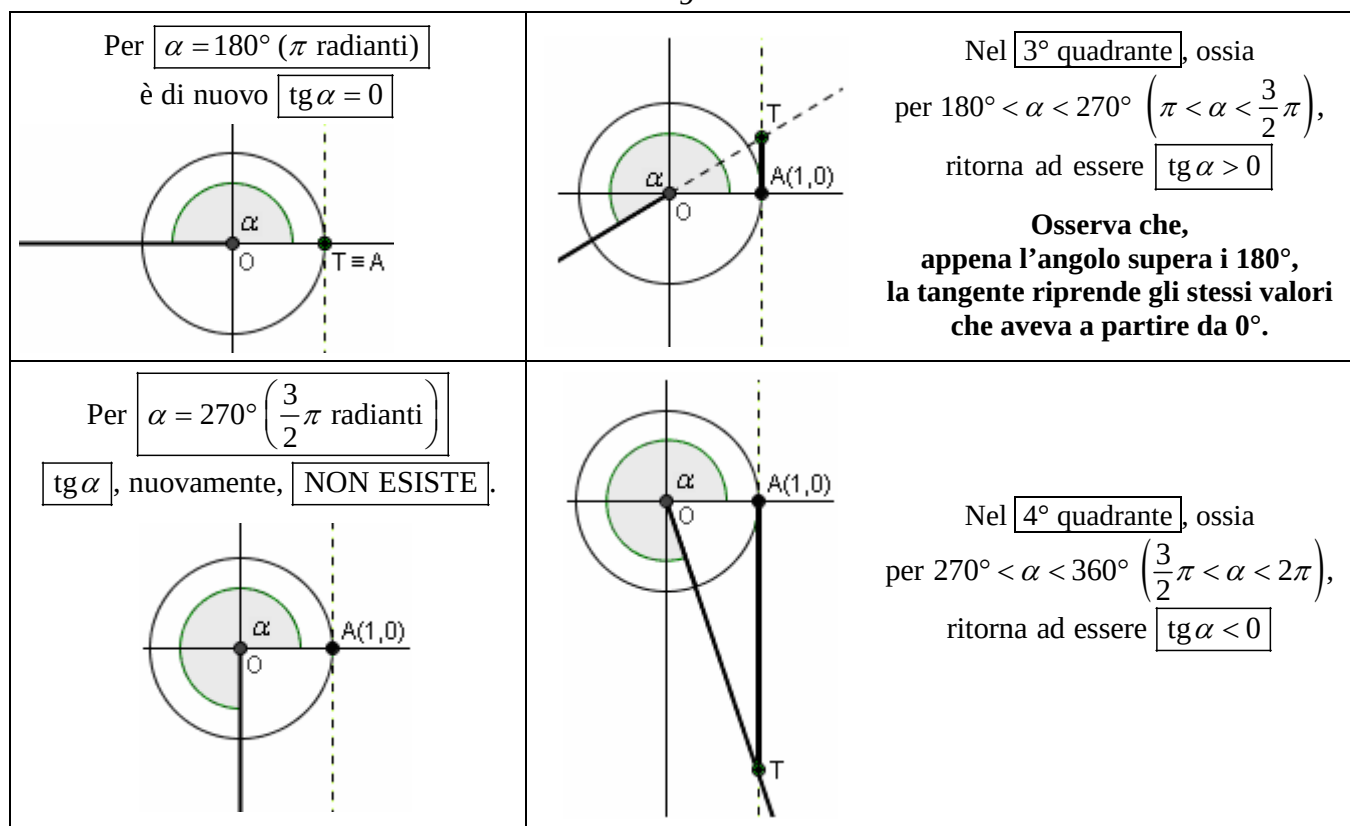


Nel **2° quadrante**, ossia
per $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$,
si ha $\text{tg } \alpha < 0$

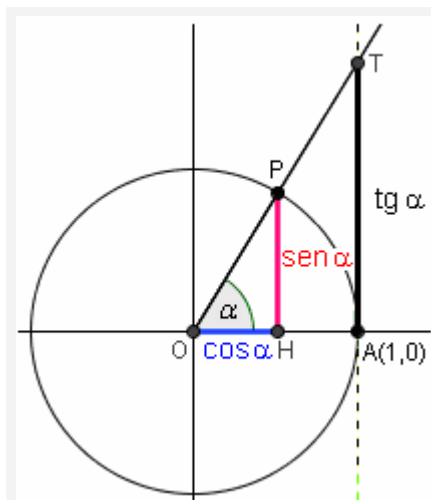
Il raggio vettore è una semiretta
immersa nel 2° quadrante,
ma la definizione di tangente goniometrica
prevede che si debba sempre considerare
l’intersezione fra la retta verticale per A
e il raggio vettore o, eventualmente
(come in questo caso), il suo prolungamento.

Quando α si avvicina a 90° ,
mantenendosi però *maggiore* di 90°
(ossia: decrescendo),
 $\text{tg } \alpha$ diventa altissima in valore assoluto,
ma negativa in segno:
si dice che “tende a $-\infty$ ”

Ad es., si ha $\text{tg } 90.01^\circ \approx -5729.58$



Quando l'angolo α raggiunge e poi supera i 360° , i valori della tangente “ripartono come se si ripartisse da 0° ”. Ma in fondo vediamo che questo “ricominciare da capo” si ha già quando l'angolo raggiunge e poi supera **180°** ! Insomma, **la funzione “tangente” è “periodica di periodo 180° ”**; di questo torneremo a parlare più avanti.



La figura qui a fianco mostra
 $AT = \text{tg } \alpha$, $HP = \text{sen } \alpha$, $OH = \text{cos } \alpha$.
 I due triangoli OAT, OHP sono simili
 (sono entrambi rettangoli,
 hanno l'angolo α in comune
 e i due angoli acuti di vertici T e P uguali
 per differenza rispetto a 180°).
 Perciò vale la proporzione $AT : OA = HP : OH$
 la quale si può riscrivere come

Due triangoli
 con gli angoli
 rispettivamente uguali
 sono detti “simili”,
 e hanno anche
 i lati in proporzione.
 Breve spiegazione
 se volti la pagina.

$$\text{tg } \alpha : 1 = \text{sen } \alpha : \text{cos } \alpha \quad \text{ossia}$$

$$\boxed{\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}}$$

L'uguaglianza nel riquadro prende il nome di

2ª RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA.



Possiamo a questo punto osservare che la 2ª rel. fondamentale della goniometria è coerente col fatto che

- **la tangente vale 0 per tutti e soli quegli angoli il cui seno è 0**, che sono poi: $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$
 e, andando fuori dai confini del 1° giro, $360^\circ + 180^\circ = 540^\circ, 540^\circ + 180^\circ = 720^\circ, \dots$; $-180^\circ, -360^\circ, \dots$;
 più in generale, dunque: per tutti gli angoli che si possono scrivere sotto la forma
 $k \cdot 180^\circ$, essendo k un intero relativo ($k \in \mathbb{Z}$);
- **la tangente non esiste (“va all'infinito”) per tutti e soli quegli angoli il cui coseno è 0** cioè $90^\circ, 270^\circ$
 e, andando fuori dai confini del 1° giro, $270^\circ + 180^\circ = 450^\circ, 450^\circ + 180^\circ = 630^\circ, \dots$; $-90^\circ, -270^\circ, \dots$
 più in generale, dunque: per tutti gli angoli che si possono scrivere sotto la forma
 $90^\circ + k \cdot 180^\circ$, essendo k un intero relativo ($k \in \mathbb{Z}$)

IL TENDERE A INFINITO. Dire, ad es., che la tangente “va all'infinito a 90° ”, significa affermare che **quando l'angolo si fa molto vicino a 90° , la rispettiva tangente diventa grandissima in valore assoluto:**

- **per un angolo di pochissimo inferiore a 90°** , ossia **quando l'angolo tende a 90° “per difetto”** (1° quadrante), **la tangente è grandissima in valore assoluto e positiva (“tende a $+\infty$ ”)**
- **mentre per un angolo appena superiore a 90°** , ossia **quando l'angolo tende a 90° “per eccesso”** (2° quadrante), **la tangente è grandissima in valore assoluto e negativa (“tende a $-\infty$ ”)**.

5. COTANGENTE DI UN ANGOLO

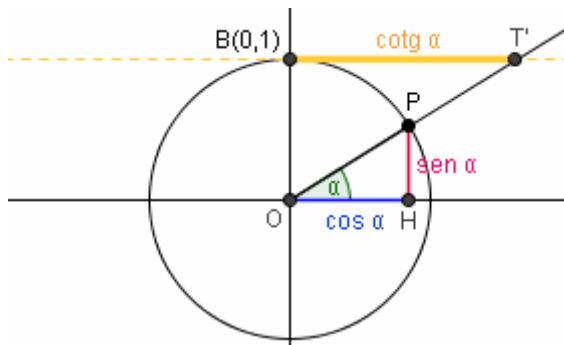
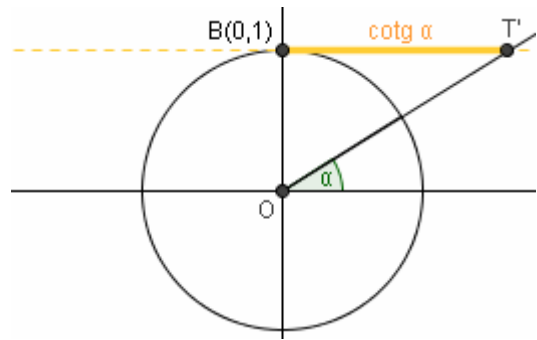
Ecco ora una quarta funzione goniometrica: la **cotangente**.

Nella circonferenza goniometrica, consideriamo il punto B che sta alla sommità e ha coordinate (0,1).

Per B tracciamo la retta "orizzontale" (= parallela all'asse x) e indichiamo con T' il punto di intersezione fra tale retta e il raggio vettore di un dato angolo α (eventualmente, il suo prolungamento dalla parte dell'origine).

Si dice "cotangente di α " ($\cotg \alpha$) l'ascissa del punto T',

che è poi la misura (con segno) del segmento BT' in figura.



Dalla figura qui a fianco riportata si trae, per l'ovvia similitudine dei due triangoli rettangoli OBT', OHP, la proporzione $BT' : OB = OH : HP$ da cui $\cotg \alpha : 1 = \cos \alpha : \sin \alpha$ e infine

$$\cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tg \alpha}$$

(3ª RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA TRIGONOMETRIA)

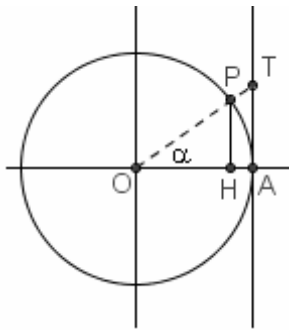
Per $\alpha = 0^\circ$ (0 radianti) $\cotg \alpha$ NON ESISTE	Nel 1° quadrante $\cotg \alpha > 0$	Per $\alpha = 90^\circ$ ($\pi/2$ radianti) $\cotg \alpha = 0$
Nel 2° quadrante $\cotg \alpha < 0$	Per $\alpha = 180^\circ$ (π radianti) $\cotg \alpha$ NON ESISTE	Nel 3° quadrante $\cotg \alpha > 0$
Per $\alpha = 270^\circ$ ($3\pi/2$ radianti) $\cotg \alpha = 0$	Nel 4° quadrante $\cotg \alpha > 0$	... e per $\alpha = 360^\circ$ accade come per $\alpha = 0^\circ$: $\cotg \alpha$ NON ESISTE

Poiché, per la 3ª Rel. Fond. della Trigonometria, cotangente e tangente sono reciproche l'una dell'altra, la cotangente non esiste (= va all'infinito) per tutti e soli gli angoli per i quali la tangente si annulla, e viceversa

Clicca QUI ➡ per un ripasso della questione "1/0 non esiste ma, in un certo senso, 1/0 = infinito"

ESERCIZI

1)



Sui lati del triangolo OAT nella circonferenza goniometrica in figura, pianta le seguenti due bandierine:

$tg\alpha$	1

Invece sui lati di OPH pianta le bandierine:

$sen\alpha$	$cos\alpha$	1

Ora i due triangoli OHP, OAT sono “simili”: cosa vuol dire?
 Scrivi la proporzione fra i loro lati, che porta alla
 “2^a relazione fondamentale della goniometria”.

- 2) Fra gli angoli compresi fra 0° e 360° ,
 - a) quali sono quelli la cui tangente è < 0 ?
 - b) quali quelli la cui tangente non esiste?
 - c) quali quelli la cui tangente è uguale a $+1$?
 - d) e a -1 ?
- 3) Cosa si può dire della tangente degli angoli il cui coseno vale 0?
- 4) Secondo te, a “occhio” (fai un disegno!),
 l'angolo acuto la cui tangente goniometrica misura 4 è compreso:
 - a) fra 50° e 60° ? b) fra 60° e 70° ? c) fra 70° e 80° ?
 Servendoti di una macchinetta calcolatrice, stabilisci la misura di quell'angolo (in gradi e primi),
 poi trasformala in radianti (approssimando ai centesimi).
- 5) Disponendo di una macchinetta calcolatrice, calcola $tg\,54^\circ$ senza però mai pigiare il tasto tan .
- 6) E' vero che $tg(90^\circ - \alpha) = cotg\,\alpha$?
- 7) Elenca, nel “primo giro” ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$), gli angoli α
 - a) la cui cotangente vale 0
 - b) la cui cotangente non esiste
 - c) la cui cotangente è uguale alla tangente
 - d) la cui cotangente è opposta alla tangente

RISPOSTE

- 2) a) sono gli angoli α tali che $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ e $270^\circ < \alpha < 360^\circ$
 b) $90^\circ, 270^\circ$ c) $45^\circ, 225^\circ$ d) $135^\circ, 315^\circ$
- 3) Quando il coseno di un angolo vale 0, la tangente di quell'angolo non esiste.
 Questo si vede a partire dalla circonferenza goniometrica, o anche dalla 2^a Relazione Fondamentale:
 essa ci dice che $tg\,\alpha = sen\,\alpha / cos\,\alpha$, e quando il denominatore è 0 una frazione non è definita.
- 4) c) $\approx 75^\circ 58'$; ≈ 1.33 radianti
- 5) Basta fare $sen54^\circ / cos54^\circ$. Si ottiene ≈ 1.376
- 6) Sì, è vero. Lo si può desumere facendo un disegno oppure con la catena
 $tg(90^\circ - \alpha) = sen(90^\circ - \alpha) / cos(90^\circ - \alpha) = cos\,\alpha / sen\,\alpha = 1 / (sen\,\alpha / cos\,\alpha) = 1 / tg\,\alpha = cotg\,\alpha$
- 7) a) $90^\circ, 270^\circ$ b) $0^\circ, 360^\circ$ c) $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ d) nessuno!

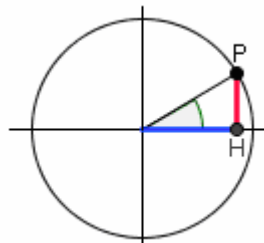
6. PERIODICITA' DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

I VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE SENO, COSENO E TANGENTE

“SI RIPETONO DOPO UN GIRO COMPLETO”. Insomma:

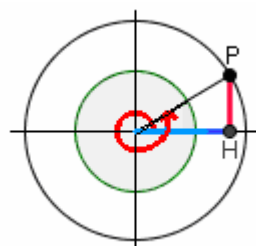
sulla circonferenza goniometrica, un angolo di 30°
 “vale come un angolo di $30^\circ + 360^\circ = 390^\circ$,
 o come un angolo di $30^\circ - 360^\circ = -330^\circ$ ”
 dal punto di vista dei valori delle tre funzioni goniometriche.

a) 30°



b) $30^\circ + 360^\circ = 390^\circ$

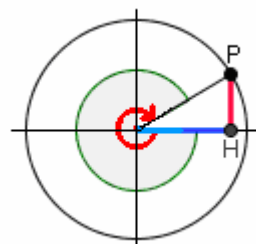
Si prosegue, oltre l'angolo di 30° ,
 di un altro giro in senso ANTIORARIO ...



... e il punto P
 ritorna
 NELLA STESSA
 POSIZIONE
 DI PRIMA!

c) $30^\circ - 360^\circ = -330^\circ$

Da 30° si toglie,
 ruotando in senso ORARIO,
 un giro completo
 (cioè, tutti i 30° poi altri 330°):
 l'effetto è di ripartire
 dal semiasse delle ascisse positive
 ruotando di 330° in senso ORARIO ...

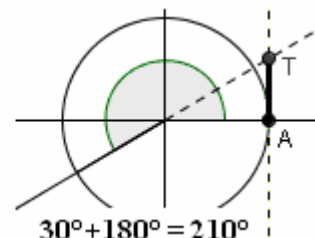
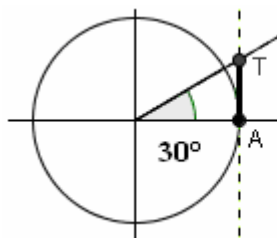


... e il punto P
 ritorna
 NELLA STESSA
 POSIZIONE
 DI PRIMA!

Più in generale, **prendendo un angolo α** ,
e aumentandolo, o anche diminuendolo, di un giro completo ($= 360^\circ$)
o di un numero intero di giri completi ($=$ un multiplo di 360°),
le tre funzioni goniometriche restano inalterate.

PER LA TANGENTE, ADDIRITTURA,
BASTA CHE L'ANGOLO α SUBISCA UN AUMENTO, O UNA DIMINUZIONE,
ANCHE SOLO DI “MEZZO GIRO” ($= 180^\circ$)
O DI UN MULTIPLO DI MEZZO GIRO ($=$ UN MULTIPLO DI 180°),
PERCHÉ TALE FUNZIONE RESTI INVARIATA.

La figura qui a fianco, ad esempio,
 mostra che
 la tangente non cambia
 se l'angolo subisce
 un aumento di 180° .



Questo ripetersi del valore di $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$,
 quando α aumenta o diminuisce di 360° o di un multiplo di 360° ,
 e questo ripetersi del valore di $\tan \alpha$,
 quando α aumenta o diminuisce di 180° o di un multiplo di 180° ,
 viene chiamato la “**PERIODICITÀ**”.

Si dice che

- **LE FUNZIONI “SENO” E “COSENO” SONO PERIODICHE DI PERIODO 360° ,**
- **LA FUNZIONE “TANGENTE” È PERIODICA DI PERIODO 180° .**

7. CALCOLATRICI E FUNZIONI GONIOMETRICHE

Come fa la calcolatrice tascabile a determinare i valori delle funzioni goniometriche, dirette e inverse?

La matematica mette a disposizione, per calcoli di questo tipo, le *formule di Maclaurin*.

Colin Maclaurin o Mac Laurin, 1698-1746, fu un matematico scozzese. Eccole, queste fantastiche formule:

$$\square \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\square \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\square \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$$

Il “punto esclamativo” indica il cosiddetto

“**fattoriale**” di un intero: ad esempio,

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (si legge: “3 fattoriale”); $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Queste “**somme di infiniti addendi**” (= “**serie**”) a secondo membro approssimano il valore esatto con una precisione che cresce al crescere del numero di addendi presi in considerazione.

- Inversa del seno (dal seno y fa tornare all'angolo x espresso in radianti, e compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$):

$$x = \sin^{-1}(y) = \operatorname{arc} \sin y = y + \frac{1}{2} \frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{y^7}{7} + \dots \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

Si legge “arco seno di y ” (significa, essenzialmente: “il più semplice fra gli archi aventi per seno y ”)

- Inversa del coseno:

$$x = \cos^{-1}(y) = \operatorname{arc} \cos y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin y = \frac{\pi}{2} - y - \frac{1}{2} \frac{y^3}{3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{y^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{y^7}{7} - \dots \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

- Inversa della tangente: $x = \operatorname{tg}^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \dots \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$

Per testare la correttezza di queste formule, prova tu stesso a prendere, ad esempio, la formula per $\sin x$ e ad applicarla nel caso dell'angolo di 30° .

Prima di tutto dovrai passare ai radianti ottenendo, per l'angolo in gioco, 0.5236 rad (valore arrotondato). Poi potrai $x = 0.5236$ e considererai, ad esempio, i primi 3 termini, eseguendo il calcolo.

Otterrai un valore che in piccola parte dipenderà anche dagli arrotondamenti eseguiti nei vari passaggi dallo strumento di calcolo di cui ti sei servito, ma che comunque dovrebbe essere vicino a 0.500003193 , numero che differisce di pochissimo da quello che è il VERO seno di 30° ossia, come è noto, esattamente $1/2 = 0.5$.

Prendendo un numero maggiore di termini (e partendo da una misura in radianti affetta da un errore di arrotondamento più piccolo) il valore ottenuto sarebbe ancora più preciso.

Bene! Certe calcolatrici del passato, quando si digitava la misura di un angolo per poi pigiare il tasto della funzione $\sin$, facevano proprio questo lavoro, di trasformare eventualmente i gradi in radianti ed eseguire la rispettiva formula di Maclaurin, con un numero di termini adeguato alla precisione che lo strumento poteva raggiungere. In realtà, dopo aver introdotto il discorso in questo modo per dare un'idea del *modus operandi* di una calcolatrice, dobbiamo dire che gli algoritmi più utilizzati per il calcolo automatico delle funzioni goniometriche sono *altri*, soprattutto il **metodo CORDIC**, di cui non ci possiamo qui occupare.

LE VARIANTI DELLA SIMBOLOGIA (SUI LIBRI, SUI COMPUTER, SULLE CALCOLATRICI)

- a) Accade che, su certi libri di testo o sui tasti delle calcolatrici,

si incontrino leggère variazioni dei simboli da noi scelti:

ad esempio, al posto di **sen x** puoi trovare **sin x**, al posto di **tg x** puoi trovare **tan x**.

A volte, poi, viene usata una parentesi dove noi non l'abbiamo invece messa: **sen (x)**, **cos (x)** ecc.

Analogamente per le funzioni goniometriche inverse:

- al posto di **arc sen** puoi trovare **arc sin** o anche **sen⁻¹** o **sin⁻¹**
- al posto di **arc cos** puoi trovar scritto **cos⁻¹**
- al posto di **arc tg** puoi trovar scritto **arc tan** o anche **tan⁻¹**

Il “**-1**” fa da PSEUDO-esponente: non significa qui “fare il reciproco”, bensì “applicare la funzione inversa”

- b) Occhio quando usi la **calcolatrice tascabile**, alla questione dei **radiani** e dei **gradi**!

Se vuoi calcolare, ad esempio, il seno dell'angolo di 2° ,

devi controllare che la macchinetta sia impostata sui “gradi” e non sui “radiani”.

C'è comunque sempre un tasto, o una successione di tasti, che consente il passaggio dall'impostazione “in gradi” a quella “in radianti” e viceversa.

- ♥ E in ogni caso, tramite la proporzione $x_{\text{rad}} : \pi = x^\circ : 180^\circ$

è ben facile transitare fra la misura di un arco in gradi e la misura dello stesso arco in radianti:

$$\text{dai gradi ai radianti} \quad x_{\text{rad}} = \frac{\pi \cdot x^\circ}{180^\circ} = \frac{x^\circ}{180^\circ} \cdot \pi; \quad \text{dai radianti ai gradi} \quad x^\circ = \frac{x_{\text{rad}} \cdot 180^\circ}{\pi} = \frac{x_{\text{rad}}}{\pi} \cdot 180^\circ$$

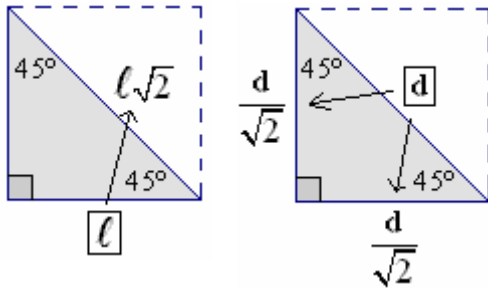
8. ALCUNE FORMULE UTILI

I valori delle funzioni goniometriche (seno, coseno, tangente) degli angoli multipli di 30° o di 45° si possono trovare utilizzando le formule qui sotto riportate (facilmente ottenibili con semplici considerazioni di geometria elementare e utilizzando il T. di Pitagora). Esse permettono, nei cosiddetti “triangoli rettangoli particolari” (=quelli con gli angoli acuti di 30° e 60° , o di 45°), di ricavare tutti i lati conoscendo uno solo di essi.

In un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI 45°

(che può essere visto come la metà di un quadrato):

- L'IPOTENUSA E' UGUALE AL CATETO Moltiplicato $\sqrt{2}$
- IL CATETO E' UGUALE ALL'IPOTENUSA DIVISO $\sqrt{2}$



Ricordiamo che

$$\sqrt{2} = 1.414213... \approx 1.4$$

L'espressione $\frac{d}{\sqrt{2}}$ viene di norma “razionalizzata”:

$$\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

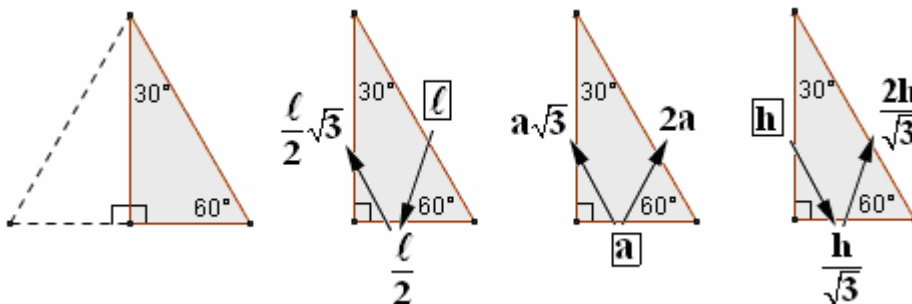
$$\text{Scrivendo } \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

noi non abbiamo alterato il valore dell'espressione di partenza $d/\sqrt{2}$, perché l'abbiamo moltiplicata per 1 ! L'abbiamo invece “razionalizzata”, cioè ci siamo liberati della radice a denominatore, ritenuta per varie ragioni fastidiosa.

In un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI 30° e 60°

(che può essere visto come la metà di un triangolo equilatero):

- IL CATETO MINORE E' META' DELL'IPOTENUSA e quindi l'ipotenusa è il doppio del cateto minore
- IL CATETO MAGGIORE E' UGUALE AL MINORE Moltiplicato $\sqrt{3}$ e quindi: il cateto maggiore è uguale a metà ipotenusa moltiplicato $\sqrt{3}$ mentre il cateto minore è uguale al cateto maggiore diviso $\sqrt{3}$



Ricordiamo che

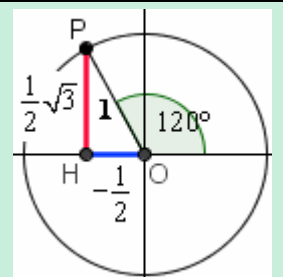
$$\sqrt{3} = 1.73205... \approx 1.7$$

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{h\sqrt{3}}{3}$$

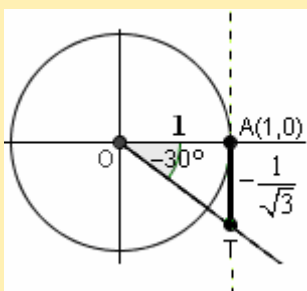
□ Quanto valgono $\sin 120^\circ$ e $\cos 120^\circ$?

Facciamo un disegno e ricordiamo che il raggio della conf. goniometrica vale 1. I lati del triangolo rett. particolare OPH ($\widehat{POH} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$) valgono dunque: 1 (l'ipotenusa OP); $\frac{1}{2}$ (il cateto minore OH); $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (il cateto maggiore HP).

Allora avremo, tenendo conto dei segni: $\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$



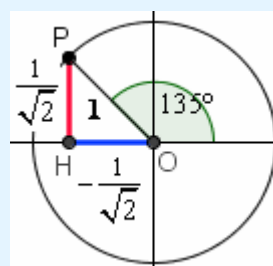
□ Quanto vale $\tan(-30^\circ)$?



Questa volta il segmento noto è OA = raggio = 1.

Si trae subito, tenendo conto che T ha ordinata negativa, $\tan(-30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

□ Quanto valgono seno e coseno di 135° ?



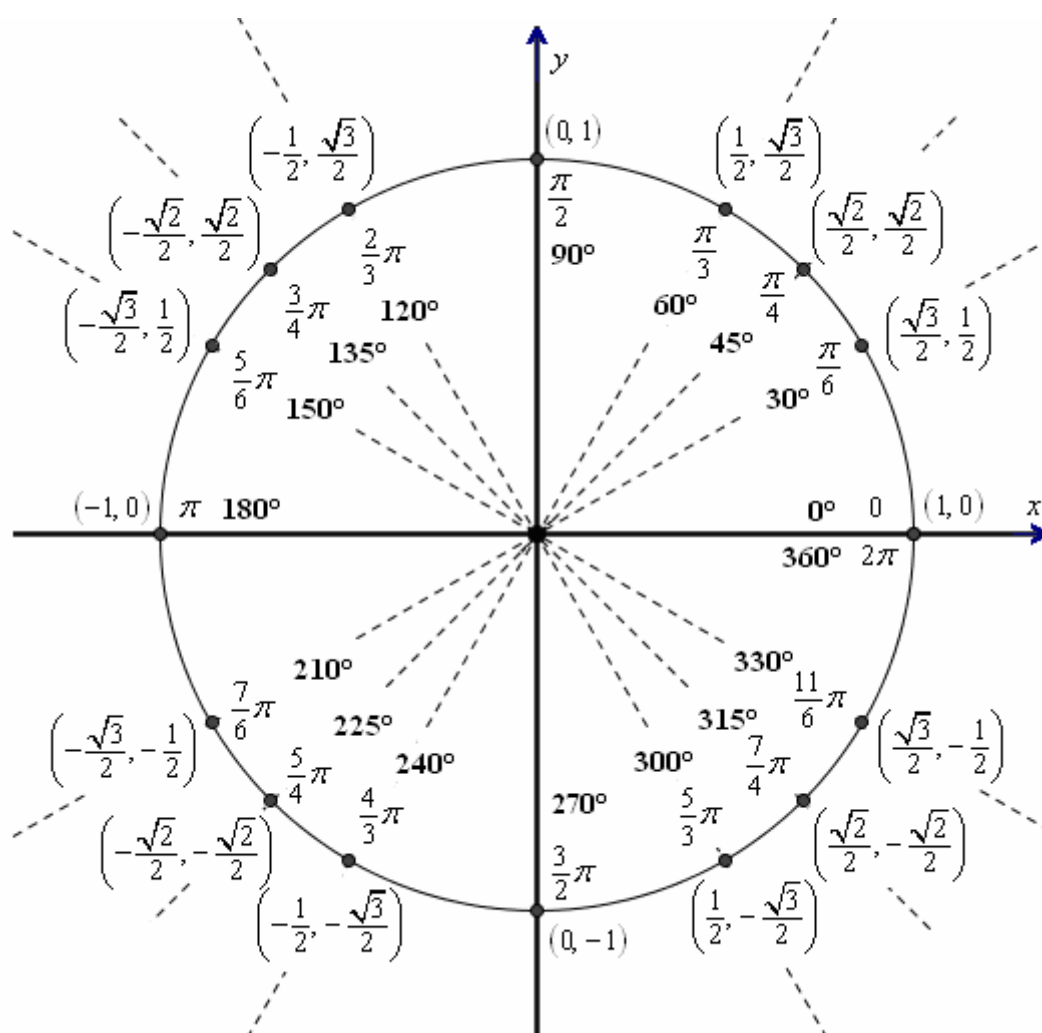
Il segmento noto è qui OP = raggio = 1. Il triangolo rett. POH ha gli angoli acuti di 45° . P ha ascissa negativa e ordinata positiva ...

$$\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La seguente figura mostra i

VALORI DEL SENO E DEL COSENO DI ALCUNI ANGOLI "PARTICOLARI".



Il **coseno**
è la 1^a
coordinata,
ossia
l'**ascissa** del punto;
il **seno**
è la 2^a
coordinata,
ossia
l'**ordinata**.

Tanto per fare
un esempio:
l'angolo di 120°
ha come misura
in radianti
 $\frac{2}{3}\pi$,
e,
dato che
il punto associato
è

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

risulta

$$\begin{aligned}\cos 120^\circ &= \\ &= \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 120^\circ &= \\ &= \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

ESERCIZI (risposte a pag. 16)

Tenendo coperta la figura qui sopra ☺, determina i valori seguenti:

- | | | | | | |
|---------------------------|---------------------------------------|--------------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1) $\sin 30^\circ$ | 2) $\cos 30^\circ$ | 3) $\tan 30^\circ$ | 4) $\sin 60^\circ$ | 5) $\cos 60^\circ$ | 6) $\tan 60^\circ$ |
| 7) $\sin 45^\circ$ | 8) $\cos 45^\circ$ | 9) $\tan 45^\circ$ | 10) $\sin 120^\circ$ | 11) $\cos 120^\circ$ | 12) $\tan 120^\circ$ |
| 13) $\sin 150^\circ$ | 14) $\cos 150^\circ$ | 15) $\tan 150^\circ$ | 16) $\sin 135^\circ$ | 17) $\cos 135^\circ$ | 18) $\tan 135^\circ$ |
| 19) $\sin 0^\circ$ | 20) $\cos 0^\circ$ | 21) $\sin 90^\circ$ | 22) $\cos 90^\circ$ | 23) $\sin 180^\circ$ | 24) $\cos 180^\circ$ |
| 25) $\sin 225^\circ$ | 26) $\cos 225^\circ$ | 27) $\tan 225^\circ$ | 28) $\sin 210^\circ$ | 29) $\cos 210^\circ$ | 30) $\tan 210^\circ$ |
| 31) $\sin 240^\circ$ | 32) $\cos 240^\circ$ | 33) $\tan 240^\circ$ | 34) $\sin 270^\circ$ | 35) $\cos 270^\circ$ | 36) $\tan 270^\circ$ |
| 37) $\cos 270^\circ$ | 38) $\sin 315^\circ$ | 39) $\cos 315^\circ$ | 40) $\sin(-60^\circ)$ | 41) $\cos 300^\circ$ | 42) $\tan 330^\circ$ |
| 43) $\tan \pi$ | 44) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ | 45) $\sin \frac{\pi}{6}$ | 46) $\cos \frac{2}{3}\pi$ | 47) $\tan \frac{5\pi}{2}$ | 48) $\sin \frac{5}{4}\pi$ |
| 49) $\cos \frac{9}{4}\pi$ | 50) $\tan 780^\circ$ | 51) $\sin 630^\circ$ | 52) $\tan \frac{11}{6}\pi$ | 53) $\sin \frac{7}{6}\pi$ | 54) $\cos \frac{5}{3}\pi$ |

Stabilisci quali sono, nell'ambito del **primo giro** ($0^\circ \leq x \leq 360^\circ$),
le soluzioni delle seguenti equazioni goniometriche (scrivi le soluzioni in **gradi**).

- | | | | |
|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 55) $\sin x = \frac{1}{2}$ | 56) $\sin x = -\frac{1}{2}$ | 57) $\cos x = \frac{1}{2}$ | 58) $\cos x = -\frac{1}{2}$ |
| 59) $\tan x = -1$ | 60) $\sin x = 0$ | 61) $\cos x = 0$ | 62) $\tan x = 0$ |
| 63) $\sin x = \cos x$ | 64) $\tan x = -\sqrt{3}$ | 65) $\cos x = \sqrt{2}/2$ | 66) $\sin x + \cos x = 0$ |

RISPOSTE agli esercizi di pag. 15

- 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5) $\frac{1}{2}$ 6) $\sqrt{3}$
- 7) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 8) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 9) 1 10) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 11) $-\frac{1}{2}$ 12) $-\sqrt{3}$
- 13) $\frac{1}{2}$ 14) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 15) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 16) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 17) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 18) -1
- 19) 0 20) 1 21) 1 22) 0 23) 0 24) -1
- 25) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 26) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 27) 1 28) $-\frac{1}{2}$ 29) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 30) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 31) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 32) $-\frac{1}{2}$ 33) $\sqrt{3}$ 34) -1 35) 0 36) non esiste
- 37) 0 38) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 39) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 40) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 41) $\frac{1}{2}$ 42) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 43) 0 44) -1 45) $\frac{1}{2}$ 46) $-\frac{1}{2}$ 47) non esiste 48) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 49) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 50) $\sqrt{3}$ 51) -1 52) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 53) $-\frac{1}{2}$ 54) $\frac{1}{2}$

- 55) $x = 30^\circ$, $x = 150^\circ$
 56) $x = 210^\circ$, $x = 330^\circ$
 57) $x = 60^\circ$, $x = 300^\circ$
 58) $x = 120^\circ$, $x = 240^\circ$
 59) $x = 135^\circ$, $x = 315^\circ$
 60) $x = 0^\circ$, $x = 180^\circ$, $x = 360^\circ$
 61) $x = 90^\circ$, $x = 270^\circ$
 62) $x = 0^\circ$, $x = 180^\circ$, $x = 360^\circ$
 63) $x = 45^\circ$, $x = 225^\circ$
 64) $x = 120^\circ$, $x = 300^\circ$
 65) $x = 45^\circ$, $x = 315^\circ$
 66) $x = 135^\circ$, $x = 315^\circ$

5. Find to the *nearest degree*, the measure of an acute angle formed by the x -axis and the line containing the points (4,3) and (8,9).

Immagine a fianco:
da www.regentsprep.org

*Grab your calculator
for this question.*



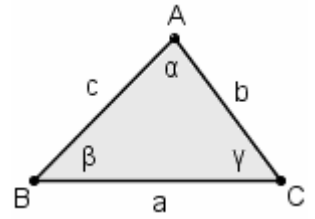
Choose: ☐ 57 ☐ 34 ☐ 56

Answer

9. TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

Adotteremo di preferenza, quando possibile, la **SIMBOLOGIA STANDARD** illustrata dalla figura qui a fianco:

- triangolo ABC,
- lati a, b, c (a opposto al vertice A, ecc.)
- angoli α, β, γ ($\alpha = \hat{A}$ ecc.)



In un triangolo rettangolo, il SENO di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto opposto e l'ipotenusa

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

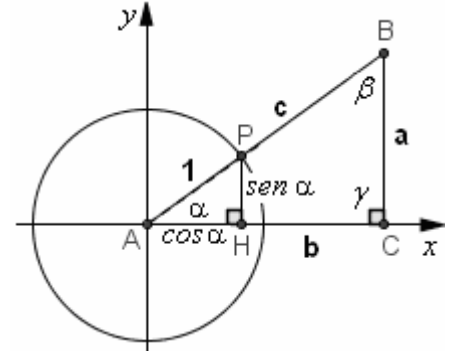
Dimostrazione

Nel piano su cui giace il triangolo rettangolo ABC, disegniamo un riferimento cartesiano di origine A, il cui semiasse delle ascisse positive coincida con la semiretta AC.

Su questo riferimento, disegniamo la circ. goniometrica, di raggio 1.

I due triangoli rettangoli ABC, APH sono simili, quindi possiamo scrivere la proporzione

$$HP : AP = CB : AB \quad \text{da cui} \quad \sin \alpha : 1 = a : c \quad \frac{\sin \alpha}{1} = \frac{a}{c} \quad \sin \alpha = \frac{a}{c}, \text{ c.v.d.}$$



CONSEGUENZA IMMEDIATA: $a = c \cdot \sin \alpha$ cioè $\text{cateto} = \text{ipotenusa} \cdot \text{seno dell'angolo opposto}$

In un triangolo rettangolo, il COSENO di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto adiacente e l'ipotenusa

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

La dimostrazione è analoga alla precedente: poiché i due triangoli rettangoli ABC, APH sono simili avremo

$$AH : AP = AC : AB \quad \text{da cui} \quad \cos \alpha : 1 = b : c \quad \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{b}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \text{ c.v.d.}$$

CONSEGUENZA IMMEDIATA: $b = c \cdot \cos \alpha$ cioè $\text{cateto} = \text{ipotenusa} \cdot \text{coseno dell'angolo adiacente}$

In un triangolo rettangolo, la TANGENTE di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto opposto e il cateto adiacente

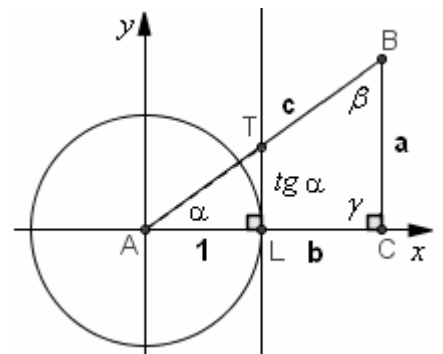
$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}} = \frac{a}{b}$$

Dimostrazione

Questa volta sfruttiamo la similitudine fra ABC e ATL.

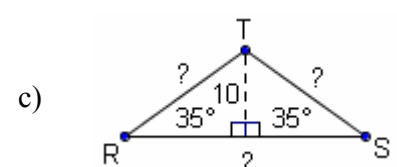
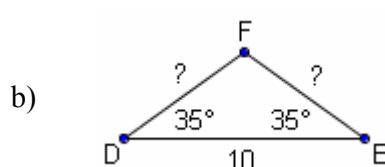
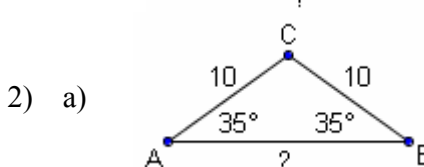
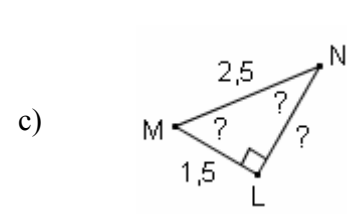
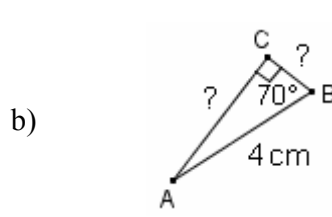
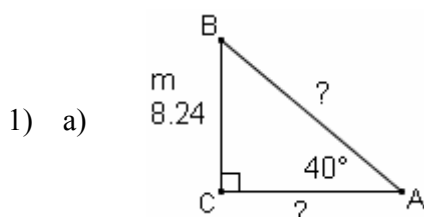
$$LT : AL = CB : AC \quad \text{quindi}$$

$$\tan \alpha : 1 = a : b \quad \frac{\tan \alpha}{1} = \frac{a}{b} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}, \text{ c.v.d.}$$



CONSEGUENZA IMMEDIATA: $a = b \cdot \tan \alpha$; $\text{cateto} = \text{altro cateto} \cdot \text{tangente dell'angolo opposto al primo}$

ESERCIZI (risposte alla pag. seguente)



10. TEOREMI SUI TRIANGOLI QUALSIASI

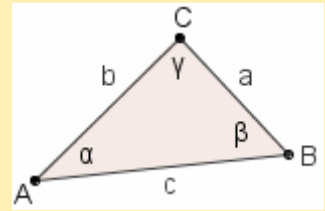
Si potrebbero dimostrare gli interessanti teoremi che seguono, validi per triangoli qualsiasi.

- Il **TEOREMA DEI SENI**:
 “in un triangolo, è costante il rapporto fra
 ciascun lato e il seno dell’angolo opposto”

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

- e il **TEOREMA DEL COSENO**:
 in ogni triangolo, valgono le relazioni
 scritte nel riquadro qui a destra →

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$



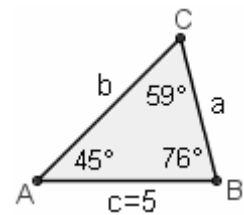
ESERCIZI (risposte in fondo alla pagina)

- 3) Mediante il Teorema dei Seni,
 determina gli elementi incogniti del triangolo qui a fianco raffigurato.

INDICAZIONE: Per ricavare b , si prenderà la formula $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

che coinvolge b e il lato noto c ,

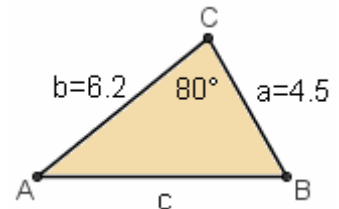
per risolverla rispetto a b : $b = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta$



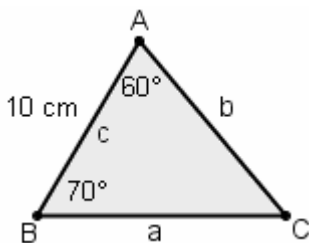
- 4) Serviti del Teorema del Coseno per trovare il 3° lato del triangolo in figura.
 Successivamente, col T. dei Seni, determina le misure dei seni degli angoli
 e infine risalì al valore, approssimato ai gradi, degli angoli stessi.

INDICAZIONE: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = \dots$ dopodiché:

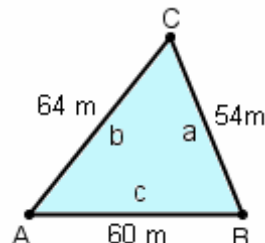
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}; \quad \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}; \quad \sin \alpha = \dots, \text{ da cui il valore di } \alpha.$$



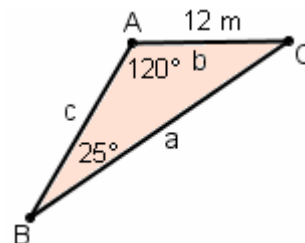
- 5) Applicando in modo opportuno i teoremi dei seni e del coseno,
 “risolvi” i triangoli in figura,
 ossia, a partire dai 3 elementi noti, determinane i tre elementi rimanenti.



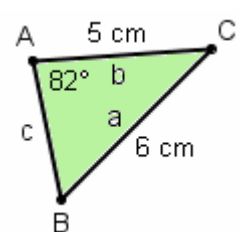
a)



b)



c)



d)

RISPOSTE agli esercizi della pagina precedente e di questa

- 1) a) $CA \approx 9.82$ m, $AB \approx 12.82$ m
 b) $CA \approx 3.76$ m, $CB \approx 1.37$ m
 c) $LN = \sqrt{2.5^2 - 1.5^2} = 2$; $\hat{M} \approx 53^\circ 8'$, $\hat{N} \approx 36^\circ 52'$
- 2) a) $AB \approx 16.38$
 b) $DF = FE \approx 6.10$
 c) $RT = TS \approx 17.43$; $RS \approx 28.56$
- 3) $a \approx 4.1$, $b \approx 5.7$
- 4) $c \approx 7$, $\alpha \approx 39^\circ$, $\beta \approx 61^\circ$
- 5) a) 50° , ≈ 11.3 , ≈ 12.3
 b) $\approx 52^\circ$, $\approx 68^\circ$, $\approx 60^\circ$
 c) 35° , ≈ 24.6 , ≈ 16.3
 d) $\approx 56^\circ$, $\approx 42^\circ$, ≈ 4.1

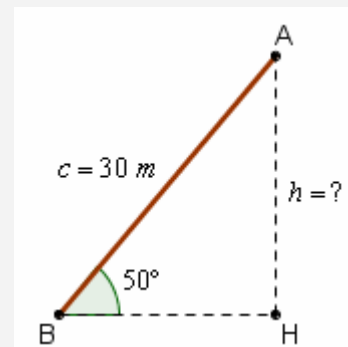
11. ESERCIZI SUI TRIANGOLI

ESEMPI SVOLTI

- 1) Un bambino sta facendo volare un aquilone, in una giornata di primavera in cui il vento è molto forte. La corda è tesa, viene utilizzata per intero, e forma col suolo un angolo di 50° . La lunghezza della corda è di 30 metri. Quanto si è sollevato dal suolo l'aquilone?



FAI SEMPRE UN DISEGNO SCHEMATICO DELLA SITUAZIONE!
E SUL DISEGNO, RIPORTA CON CURA I VARI DATI!



$$\text{cateto} = \text{ipotenusa} \cdot \text{seno dell'angolo opposto} \quad h = c \cdot \sin \hat{B} = 30 \cdot \sin 50^\circ \approx 30 \cdot 0.77 \approx 23 \text{ m}$$

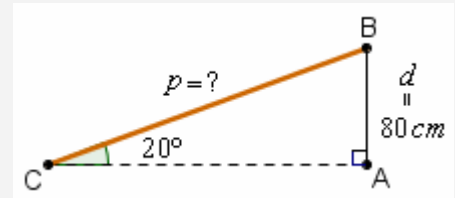
NOTA - Data la manifesta approssimazione da cui sono affette le informazioni, non sarebbe stato per niente logico scrivere il risultato con una precisione maggiore!

Anzi, alla fine andrebbe aggiunto ancora 1 metro circa ... l'altezza da terra della mano che regge la corda!

- 2) Una passerella, che permette di superare un dislivello di 80 cm, forma un angolo di 20° col suolo. Quanto è lunga la passerella?

$$d = p \cdot \sin 20^\circ \rightarrow p = \frac{d}{\sin 20^\circ} \approx \frac{80}{0.342} \approx 234 \text{ cm}$$

Abbiamo approssimato al risultato del calcolo alle unità perché una precisione maggiore non avrebbe avuto molto senso: i dati sono evidentemente affetti da incertezza, e nella pratica la passerella, quando viene sistemata, dovrà andare leggermente più in alto degli 80 cm ...



- 3) Si valuta l'altezza di un bell'abete stando alla finestra di una villa distante 30 metri. Se l'osservatore ne vede la base e la sommità rispettivamente secondo

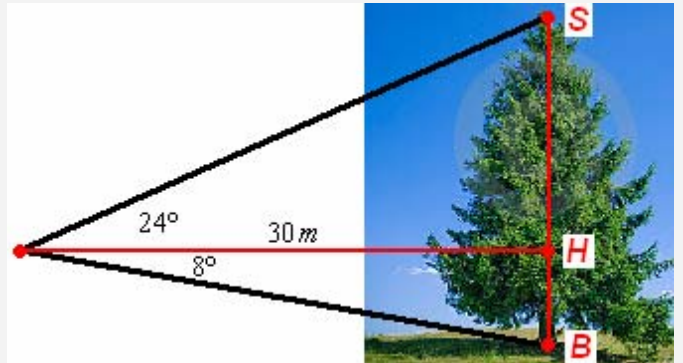
- un angolo di depressione di 8°
- e un angolo di elevazione di 24° ,

quant'è alto l'abete?

$$HB = 30 \cdot \tan 8^\circ \approx 30 \cdot 0.14 = 4.2 \text{ m}$$

$$HS = 30 \cdot \tan 24^\circ \approx 30 \cdot 0.45 = 13.5 \text{ m}$$

$$\text{Totale: circa } 4.2 + 13.5 \approx 18 \text{ metri}$$



PIU' COMPLICATO: SI APPLICA IL "TEOREMA DEI SENI"

- 4) Un grattacielo di 120 metri si affaccia su di una grande piazza al centro della quale sopravvive un'antica chiesetta romanica. Se la sommità del campanile è vista:

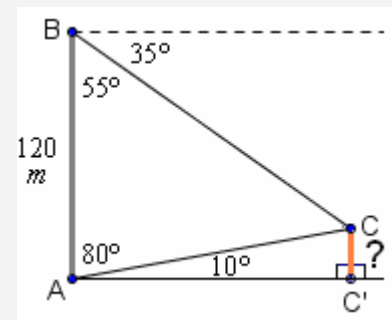
- dalla cima del grattacielo, secondo un angolo di depressione di 35°
- e dalla base del grattacielo, secondo un angolo di elevazione di 10°

quanto è alto il campanile?

Consideriamo il triangolo ABC in figura, del quale conosciamo $AB = m\ 120$, $\hat{ABC} = 55^\circ$, $\hat{BAC} = 80^\circ$, per determinare, col Teorema dei Seni, la lunghezza di AC.

$$\frac{AC}{\sin \hat{ABC}} = \frac{AB}{\sin \hat{BCA}} \rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin \hat{ABC}}{\sin \hat{BCA}} = \frac{120 \cdot \sin 55^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 139 \text{ m}$$

$$\text{Dopodichè: } C'C = AC \cdot \sin 10^\circ \approx 139 \cdot 0.174 \approx 24 \text{ m}$$



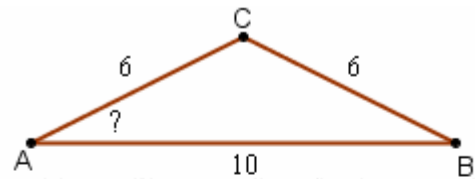
SENO, COSENO, TANGENTE (E RISPETTIVE INVERSE): TRIANGOLI RETTANGOLI

- 5) Un asse lungo 3 metri è appoggiato a una parete, e forma col pavimento un angolo di 53° .
Determina l'altezza a cui arriva l'asse sulla parete.
- 6) Per misurare l'altezza di uno scoglio una persona vi sale in cima, fissa alla roccia il capo di una fune e lancia l'altro capo a un amico sulla spiaggia. La fune viene tesa e risulta misurare metri 11.8; l'angolo che la fune forma con la spiaggia è di 65° . Quanto è alto dunque lo scoglio?
- 7) Se una scala lunga m 2.4, appoggiata al muro, forma col pavimento un angolo di 75° , quanto dista dalla parete la linea d'appoggio della scala sul pavimento?
- 8) Se una lunga scala, appoggiata alla facciata di una casa, forma col selciato un angolo di 77° , e la sua linea d'appoggio dista dalla parete 60 cm, quanto misura la scala?
E a che altezza arriva sulla parete?
- 9) Il monumentale antico castagno di Melle, in Val Varaita (provincia di Cuneo), a distanza di 180 metri ha un "angolo di elevazione" è di 10° . Quanto è alto il castagno?

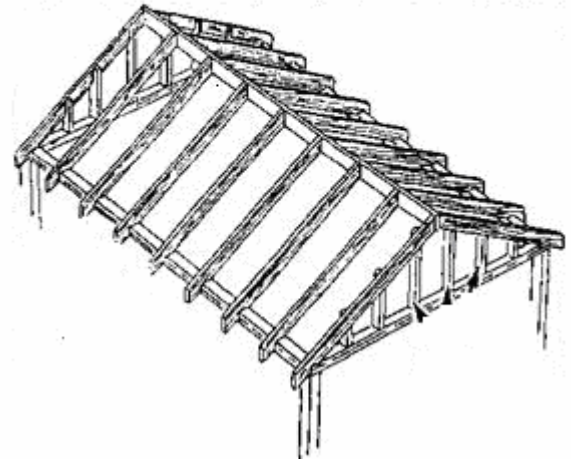


- 10) Da un punto delle bianche scogliere di Dover, alto 100 metri sul mare, si vede una boa con angolo di depressione di 18° . Quanto dista la boa dalle scogliere?
- 11) Dalla cima di una collina sto intravedendo col binocolo un amico, seduto sul cucuzzolo di un'altra collina 250 metri più alta, sotto un angolo di elevazione di 12° . Qual è la distanza in linea d'aria fra me e l'amico?
- 12) Se l'asta di una bandiera, alta metri 8.40, ha un'ombra lunga metri 3.50, che angolo formano i raggi solari col terreno?

- 13) La figura mostra schematicamente la sezione di un tetto. Le travi sono lunghe 6 metri e la larghezza AB della struttura è di m 10. Si domanda qual è l'inclinazione in gradi di ogni trave rispetto all'orizzontalità.



- 14) Una scala a pioli è appoggiata sul muro esterno di una casa; la scala è lunga metri 3.25, e l'altezza che raggiunge sul muro è di metri 3. Che inclinazione ha la scala?
Qual è la distanza fra la linea d'appoggio della scala sul selciato e la parete?
- 15) Un'asta lunga un metro, appoggiata verticalmente sul terreno piano, vi proietta un'ombra di m 0.6. Nello stesso istante un palo della luce proietta un'ombra di 3.3 m. Quanto è alto il palo della luce?
Che inclinazione ha, in gradi, la luce solare?



- 16) La IBT, Inclined Bed Therapy, sostiene che dormire su di un letto inclinato di 5° (rialzato dalla parte della testa) porta notevoli benefici alla salute, specie per gli ammalati di determinate patologie. Se l'asse del letto è lungo 2 m, di quanto andrà sollevata la base per applicare la terapia?

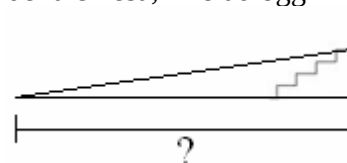


- 17) In un piccolo paese due signore anziane, che abitano in appartamento situati uno di fronte all'altro, da parti opposte di una strada larga 4 metri, si fanno consegnare le compere a turno, e si passano poi le buste con la roba attraverso un cestello fatto scorrere lungo una fune che collega le due finestre. Sapendo che la finestra più bassa è a 3.5 metri dal livello della strada, e quella più alta a 4.2 metri, trovare approssimativamente l'angolo di inclinazione della fune rispetto all'orizzontalità.

- 18) Il parroco di una chiesa decide di far realizzare una rampa in modo che le carrozzine dei fedeli disabili possano affrontare il dislivello di 1 metro e 20 cm, fra la piazza e la porta della chiesa, fino ad oggi superabile solo attraverso i gradini di una scalinata.

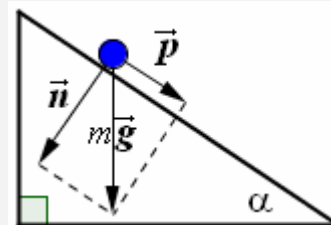
La normativa richiede che la pendenza della rampa non superi gli 8° .

Un muratore del paese si offre di svolgere il lavoro gratuitamente, ma ... che lunghezza dovrebbe avere, al minimo, la base d'appoggio sul selciato di questa rampa?



- 19) Un aeroplano è diretto dagli Stati Uniti verso una località nell'Italia del Nord. Se sta volando sull'oceano a un'altezza di 9500 metri dal suolo, e vede la linea costiera del Portogallo sotto un angolo di depressione di 15° , quanti km deve ancora viaggiare prima di sorvolare il litorale?
- 20) Mentre scattavo una foto a Parigi, la cima della Tour Eiffel, che è alta 324 metri, mi appariva secondo un angolo di elevazione di 60° . A che distanza ero dalla torre?
- a) Fra i 150 e i 160 metri? b) Fra i 160 e i 170? c) Fra i 170 e i 180? d) Più di 180 metri?
- 21) Dalla terrazza (alta 30 metri) alla sommità di un condominio, si osserva una bicicletta avvicinarsi. Se l'angolo di depressione passa da 10° a 60° , che distanza ha percorso nel frattempo il ciclista?
- 22) Sulla parete di un grattacielo c'è una vetrata davvero molto alta. Un geometra in pensione, incuriosito, si posiziona di fronte all'edificio, a una distanza di 50 metri dalla facciata, e constata che la base della vetrata e la sua sommità vengono viste, da lì, secondo angoli di elevazione di 23° e di 52° rispettivamente. Quanto misura la vetrata?

- 23) Quando un corpo si trova su di un piano inclinato, su di esso agisce, verticalmente, la forza di gravità il cui modulo è dato da $F = mg$, dove m è la massa del corpo, $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità. Ora, la forza verticale ha una componente $\vec{n}$ normale (=perpendicolare) al piano inclinato, e un'altra componente $\vec{p}$ parallela alla sua superficie. $\vec{n}$ viene neutralizzata dalla resistenza del piano stesso alla deformazione ("reazione vincolare");



$\vec{p}$ è responsabile del movimento del corpo, che scivolerà, o rotolerà, lungo il piano inclinato, restando invece in equilibrio qualora gli venga applicata una forza uguale e contraria al vettore $\vec{p}$. Ma quanto misura il modulo di $\vec{p}$?

- a) $mg \sin \alpha$ b) $mg \cos \alpha$ c) $mg \tan \alpha$ d) $\frac{mg}{\sin \alpha}$ e) $mg \sin(90^\circ - \alpha)$

- 24) Supponiamo di voler misurare la larghezza di un fiume, senza poterlo attraversare.

Ci porremo sulla riva, in A, proponendoci di determinare la distanza AB, essendo B un punto sulla riva opposta, tale che la retta AB sia perpendicolare alla direzione del fiume.

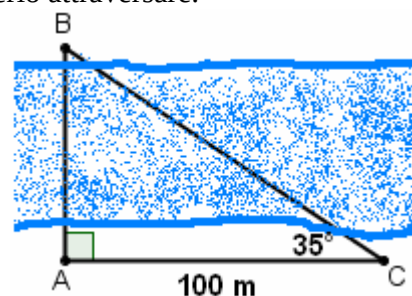
Spostiamoci lateralmente di una certa distanza AC; sia ad esempio $AC = 100$ metri. L'angolo in A è di 90° .

Ora misuriamo, con gli strumenti del geometra,

l'angolo che la congiungente CB forma con AC.

Supponiamo, per fissare le idee, che si abbia $\widehat{ACB} = 35^\circ$.

Allora AB misurerà ... dillo tu!

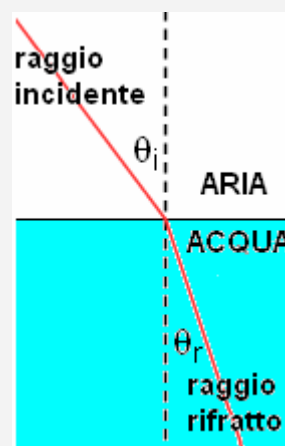


- 25) Osserva la figura qui a destra. Essa si riferisce a ciò che accade quando un raggio di luce penetra nell'acqua provenendo dall'aria. Il raggio di luce viene deviato, avvicinandosi alla normale, cioè alla retta che è perpendicolare alla superficie di separazione aria-acqua. Una legge, chiamata legge di Snell, regola la relazione fra i due angoli θ_i e θ_r cosiddetti "di incidenza" e "di rifrazione", ossia degli angoli formati con la normale dal raggio incidente e, rispettivamente, rifratto. Tale legge però non chiama in causa direttamente gli angoli, bensì i loro seni.

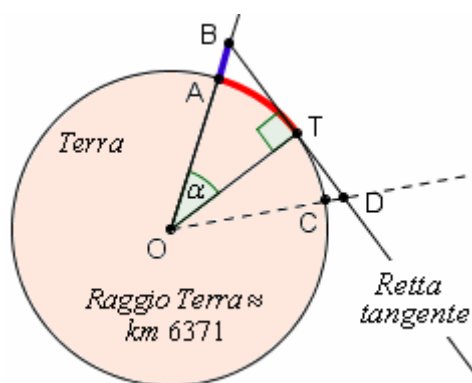
Si ha, precisamente, $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \text{costante} = n_{AB}$ dove n_{AB} è detto

"indice di rifrazione del mezzo B (in cui la luce entra) relativo al mezzo A (da cui la luce proviene)".

Nel caso aria-acqua è $n_{AB} \approx 1.333$. Sapresti ora determinare l'angolo di rifrazione aria-acqua supposto che l'angolo di incidenza sia di 50° ?



ORIZZONTE



<http://www.schoolsliaison.org.uk>

La distanza, dall'osservatore AB, della linea dell'orizzonte, è l'arco $\widehat{AT}$.

E' fondamentale tener presente, in queste questioni, che

□ **UNA RETTA TANGENTE A UNA CIRCONFERENZA È SEMPRE PERPENDICOLARE AL RAGGIO CHE VA AL PUNTO DI CONTATTO ($\widehat{OTB} = 90^\circ$)**

□ **la Terra ha forma "quasi" sferica, con raggio lungo circa 6371 km.**

Si dice che α è l' "angolo al centro" che "sottende" l'arco $\widehat{AT}$.

La semiretta OD potrebbe interessare in relazione al problema di stabilire quanto dev'essere alto un oggetto sulla superficie terrestre, per poter essere visto da un osservatore posto in T, o posto in B.

- 26) Una scogliera è alta 100 metri sul mare. Quanto dista, in linea d'aria, per un osservatore seduto sul prato in cima alla scogliera, la linea dell'orizzonte?

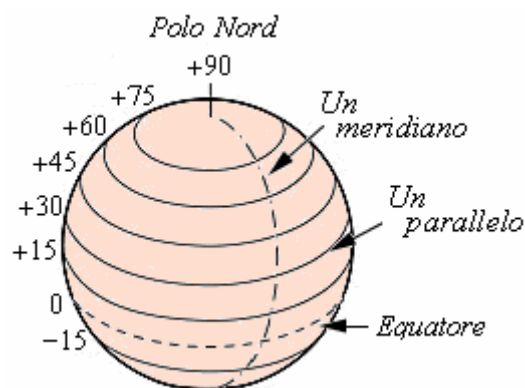
Sulla distanza dell'orizzonte: ➡

- 27) Un faro su di un'isoletta rocciosa dista dalla costa 45 km.

Quanto è alta sul mare, al minimo, la sua lampada, se la può vedere una persona sdraiata sulla spiaggia?

TERRA E LUNA

- 28) La Terra non ha forma esattamente sferica; ma supponendola invece una sfera perfetta, e assumendo come lunghezza del raggio 6371 km, qual è il cambio di latitudine in un viaggio di 1000 km verso Sud?
- 29) Se ci si sposta da Sud verso Nord di un primo (= sessantesimo di grado) di latitudine, supponendo che la Terra sia una sfera perfetta di raggio uguale a 6371 km, che distanza si percorre?
- 30) La Luna ha un diametro di circa 3476 km, ed è vista dalla Terra, a seconda delle fasi della sua orbita, secondo un angolo che può variare, ma che si mantiene vicino a $31'$. Se uno studente ha a disposizione questi dati, che valutazione può dare della distanza Terra-Luna?



Latitudini: Nord = positive; Sud = negative

L'equatore ha latitudine 0, il polo Nord $+90^\circ$, il polo Sud -90°

- 31) Due punti A e B sono sullo stesso meridiano terrestre, uno a Nord e l'altro a Sud dell'equatore, alle latitudini $+1^\circ$ e -3° rispettivamente. Quanto distano i due punti lungo la superficie terrestre, supposto di approssimare la Terra ad una sfera perfetta di raggio 6371 km?
- 32) La bella Anja risiede presso il circolo polare artico, alla latitudine Nord di 66° ($+66^\circ$). L'atletico Zwanga è africano: sta sullo stesso meridiano di Anja, ma alla latitudine Sud di 23° (-23°). Comunicano tramite Internet! Una sera, Anja racconta di vedere la luna esattamente all'orizzonte; Zwanga invece riferisce di osservarla proprio sopra la propria testa. E' noto che il raggio della Terra è di circa 6371 km. Si può dare, con questi dati, una valutazione della distanza Terra-Luna?

PENDENZA DI UNA STRADA

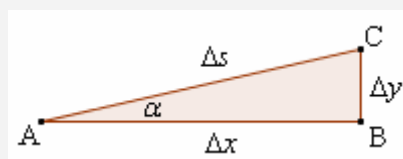
La “PENDENZA” di un tratto rettilineo di strada

è definita come il quoziente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{BC}{AB}$

e quindi, in definitiva,

equivale alla tangente goniometrica di un angolo:

$$\text{pendenza} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$



Se si moltiplica per 100 il numero $\text{pendenza} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$, si ottiene la cosiddetta “**pendenza percentuale**”.

QUALCHE ESEMPIO

(qui consideriamo il **caso rettilineo**, ma il succo del discorso si può poi estendere al caso generale, come specifica la NOTA a fianco della tabella):

Angolo	Pendenza	Pendenza %	NOTA
45°	1	100%	E se la strada non è rettilinea?
60°	1.73	173%	Beh, allora ha senso parlare piuttosto di “ pendenza media ”.
80°	5.67	567%	Questa è definita come rapporto tra
30°	0.58	58%	il dislivello Δy tra il punto di partenza e quello di arrivo
20°	0.36	36%	e la distanza orizzontale Δx .
10°	0.18	18%	Quest'ultima NON è però la distanza effettivamente percorsa,
90°	infinita	infinita	bensì è lunghezza della curva che si otterrebbe
			proiettando il percorso vero e proprio
			su di un piano perfettamente orizzontale.

La definizione è identica a quella che si dà in Geometria Analitica (pendenza, *slope*, di una retta = coefficiente angolare).

Ma dal punto di vista pratico, per una data strada, come si procederà?

Beh, Δy si determina con uno strumento denominato “altimetro”, dopodiché si può scegliere se

- rilevare Δx con l'ausilio di una mappa
- oppure rilevare Δs con un contachilometri poi calcolare Δx col Teorema di Pitagora.

Tuttavia, c'è anche chi, dopo aver utilizzato il contachilometri per trovare Δs ,

non si “scomoda” a fare il pur semplice calcolo, e assume come valore per la pendenza $\frac{\Delta y}{\Delta s}$ anziché $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

In effetti, se, come avviene per la grandissima maggioranza delle strade, la pendenza non supera il 20% (circa 11.3°), l'errore che si commette in questo modo è inferiore al 5%; addirittura, nel caso di pendenze $\leq 10\%$, l'errore che si commette prendendo $\Delta y / \Delta s$ al posto del più corretto $\Delta y / \Delta x$ non va oltre lo 0.5%.

Diciamo quindi che nel concreto è come se qualcuno applicasse la definizione

$$\text{pendenza} = \Delta y / \Delta s$$

anziché

$$\text{pendenza} = \Delta y / \Delta x,$$

ma per pendenze piccole la differenza fra le due alternative è, ai fini pratici, irrilevante.

33) Determina la pendenza percentuale di un tratto rettilineo di strada che si elevi di un angolo $\alpha = 14^\circ$

34) Una pendenza è del 7% se calcolata mediante la formula $\Delta y / \Delta x$.
E se invece per il calcolo si utilizzasse la $\Delta y / \Delta s$?

35) Una pendenza è del 100% se calcolata mediante la formula $\Delta y / \Delta x$.
E se invece per il calcolo si utilizzasse la $\Delta y / \Delta s$?



36) Un segnale di discesa pericolosa.
Se il contachilometri mi dice che ho percorso 800 metri, di quanti metri sono sceso in verticale?

TRIANGOLI QUALSIASI (TEOREMA DEI SENI, TEOREMA DEL COSENO)

- 37) Vogliamo misurare la distanza fra due punti C e D che si trovano entrambi al di là di un fiume; fiume che una impetuosa corrente ci impedisce di attraversare. Siano A, B due punti sulla nostra riva, situati ad una certa distanza AB che per fissare le idee supponiamo essere di 100 metri. Ora andiamo a misurare i 4 angoli $\widehat{CAB}$, $\widehat{DAB}$, $\widehat{DBA}$, $\widehat{CBA}$. Supponiamo ad esempio che sia $\widehat{CAB} = 80^\circ$, $\widehat{DAB} = 50^\circ$, $\widehat{DBA} = 70^\circ$, $\widehat{CBA} = 40^\circ$.

Applichiamo ORA, al triangolo ABD, il **TEOREMA DEI SENI**, introdotto a pag. 18:

in un triangolo, è costante il rapporto fra un lato e il seno dell'angolo opposto

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{AD}{\sin 70^\circ} = \frac{AB}{\sin \dots} \quad \text{quindi} \quad \frac{AD}{\sin 70^\circ} \approx \frac{100 \text{ m}}{0.87}$$

da cui potremo ricavare la misura di AD. Si troverà $AD = \dots$

Sei in grado ora di ricavare, allo stesso modo, la misura di AC?

Su quale triangolo occorrerà operare? Procedi: troverai $AC = \dots$

Andiamo ora a considerare il triangolo CAD.

Di esso conosciamo due lati e l'angolo fra essi compreso,

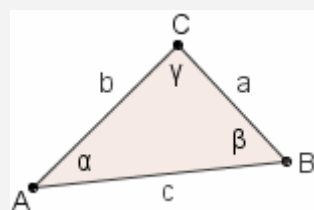
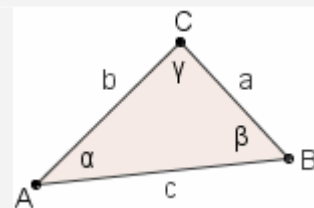
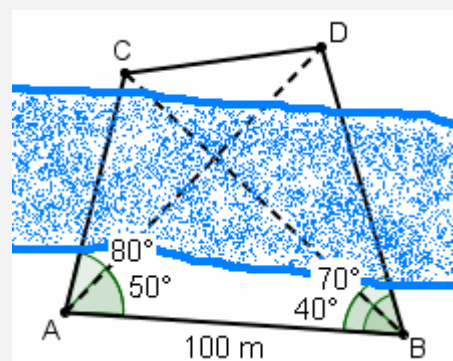
quindi potremo determinare il lato rimanente con il **TEOREMA DEL COSENO** (sempre a pag. 18):

in ogni triangolo, è

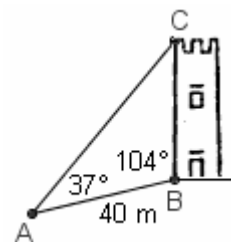
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

$$\text{Allora avremo } CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos (80^\circ - 50^\circ)}.$$

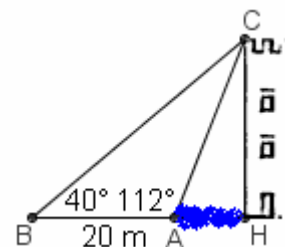
Fai il calcolo poi vai a vedere a pag. 27 se la misura trovata è corretta.



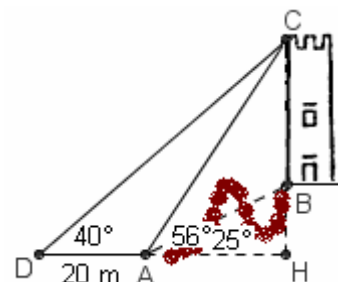
- 38) Supponi di voler misurare l'altezza di una torre, che si trovi sulla cima di un'altura, e che ti separi dalla torre un tratto ad inclinazione costante (vedi figura a fianco). Come fare? Determina l'altezza della torre quando i dati sono quelli in figura.



- 39) Questa volta la torre si trova sul piano orizzontale, ma è inaccessibile per via di un fossato. Noi d'altra parte desidereremmo determinare sia la sua altezza, sia la sua distanza HA dall'osservatore posto in A. Mettiti al lavoro, coi dati della figura.



- 40) L'osservatore della torre da misurare si trova su di un piano orizzontale, mentre la torre è sopraelevata e inaccessibile. Determina la sua altezza, coi dati della figura ($\widehat{BAH} = 25^\circ$, $\widehat{CAH} = 56^\circ$, $\widehat{CDA} = 40^\circ$)



- 41) Supponiamo che due forze abbiano modulo 8 e 6.5 rispettivamente, e formino un angolo di $37^\circ 30'$.

Come determinare il modulo della forza risultante?

Beh, è noto che la risultante di due forze si ottiene applicando (figura) la “regola del parallelogrammo”, e allora potremmo considerare ad es. il triangolo ABD, il cui angolo di vertice B misura evidentemente ... , per applicargli il “teorema del Coseno”:

$$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos(180^\circ - 37^\circ 30')}$$

IN ALTERNATIVA

(ma il procedimento è un po' più lungo)

si può proiettare il punto D sulla retta AB in E, e pensare che l'angolo $\widehat{EBD}$ è anch'esso di $37^\circ 30'$ in quanto ...

per cui si avrà

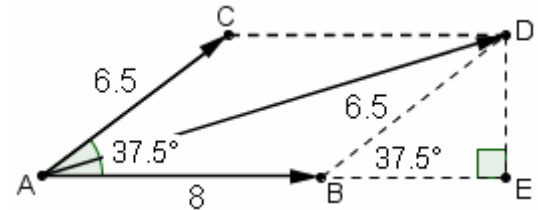
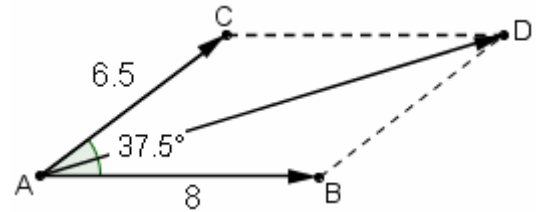
$$ED = BD \cdot \sin 37^\circ 30' = \dots$$

$$BE = BD \cdot \cos 37^\circ 30' = \dots$$

Basterà poi applicare il T. di Pitagora al triangolo AED.

Effettua i calcoli, e constata che si ottiene

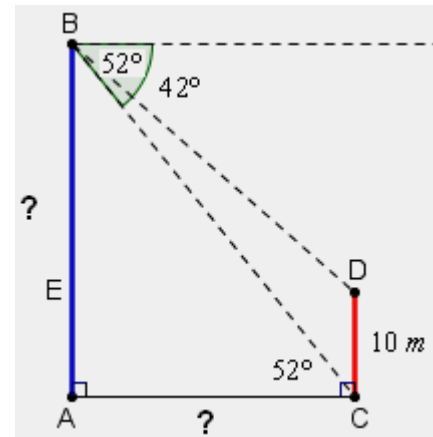
lo stesso risultato determinato con l'altro metodo.



- 42) Dalla sommità di un edificio molto elevato la casa di fronte, che è alta 10 metri, viene vista in modo tale che l'angolo di depressione del suo tetto è di 42° mentre l'angolo di depressione della sua base è di 52° .

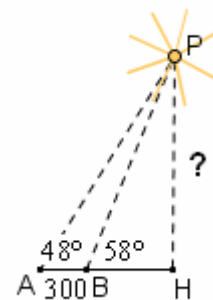
Quanto sono distanti i due fabbricati?

E quanto è alto il primo?

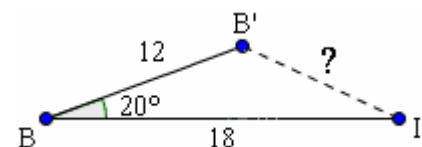


- 43) Un oggetto non identificato nel cielo è fisso in una posizione P, e due osservatori A e B sul terreno, a distanza $AB = m\ 300$, lo vedono guardando dalla stessa parte, sotto le inclinazioni $\widehat{A} = 48^\circ$ e $\widehat{B} = 58^\circ$. Il triangolo PAB sta su di un piano che è perpendicolare al terreno.

Quanto dista da terra l'oggetto?



- 44) Un marinaio deve raggiungere una piccolissima isoletta distante 18 miglia; ma si addormenta, e intanto la barca procede per 12 miglia lungo una direzione sfasata di 20° rispetto a quella giusta. Quanto dista ora la barca dall'isola?

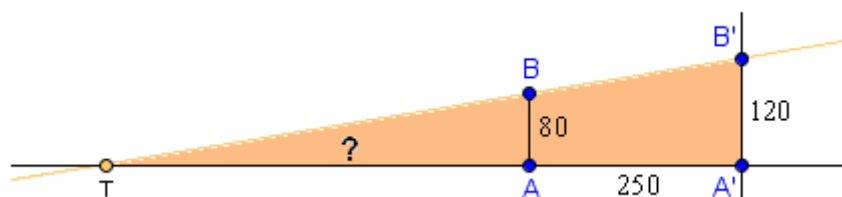


- 45) Un giocatore di golf colpisce con decisione la pallina, posta nel punto P, distante 90 metri dalla posizione B della buca; ma esagera, e il lancio è addirittura di 120 metri ... oltre tutto, la direzione è sbagliata: 15° più a sinistra rispetto alla linea PB. Quanto dista dopo il lancio la pallina dalla buca?



DUE PROBLEMI CHE RICHIEDONO DI IMPOSTARE UN'EQUAZIONE

- 46) Una torcia elettrica è appoggiata a terra orizzontalmente, ed accesa. Un bambino alto 80 cm proietta sulla parete, che dista da lui 2 metri e $\frac{1}{2}$, un'ombra alta 1 m e 20 cm. Qual è la distanza della torcia dai piedi del bambino?



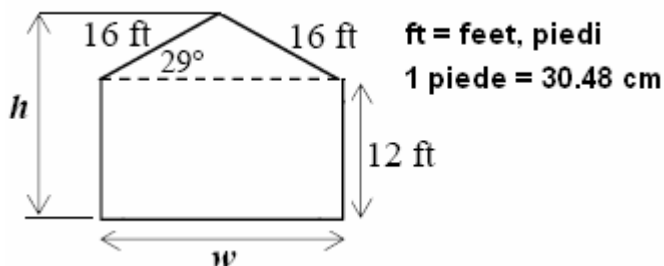
- 47) Una scala viene appoggiata ad un muro esterno, in modo da formare col marciapiede un angolo di 64° . Poi la linea di appoggio sul marciapiede viene avvicinata di 20 cm al muro, e allora l'inclinazione della scala aumenta di 4° . Quanto è lunga la scala?
- [Indicazione: Posto $AP = BP' = x$ e $BH = y$, x potrà essere espressa in due modi diversi, da cui ...]



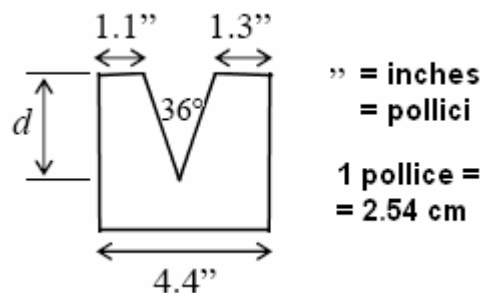
ESERCIZI DA SITI IN LINGUA INGLESE

Da www.swtc.edu:

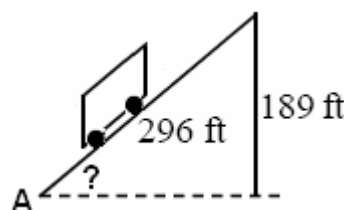
- 48) The diagram shows the end view of a house. Calculate the overall height and width of this house.



- 49) Determine the depth of the machined groove in this steel block.



- 50) The Fenelon Place Elevator in Dubuque, IA → runs on a set of tracks that is 296 ft long and rises 189 ft from its starting place to the top of the hill. What is the angle of the tracks?



Da www.funtrivia.com: TRIGONOMETRY QUIZ

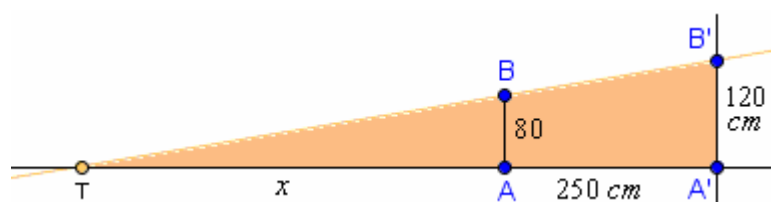
- 51) In trigonometry, angles are formed by the rotation of a ray about its endpoint from an initial position to a terminal position. The measure of an angle can be negative or positive, depending on the direction of its rotation. Which direction of rotation returns negative angles: counter-clockwise or clockwise?

Answer: (Answer ccw or cw only)

- 52) The two main trigonometric functions, sine (sin) and cosine (cos) differ by the addition of the prefix "co" to "cosine". From where does the "co" derive?
- a) Coefficient b) Constant c) Constraint d) Complementary

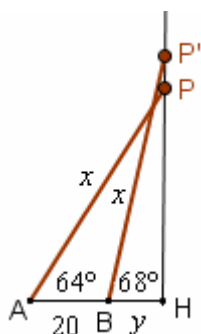
RISPOSTE

- 5) $h = 3 \cdot \sin 53^\circ \approx 3 \cdot 0.80 = 2.4 \text{ m}$ 6) $h = 11.8 \cdot \sin 65^\circ \approx 10.7 \text{ m} \approx 11 \text{ m}$
 7) $2.4 \cdot \cos 75^\circ \approx 0.62 \approx \text{cm } 62$ 8) Circa 267 cm; circa 260 cm 9) $180 \cdot \tan 10^\circ \approx 32 \text{ m}$
 10) Il calcolo porta a un valore vicino a 308 metri; diciamo, realisticamente, 300 metri circa
 11) Circa 1200 m
 12) Intorno a 67° (il calcolo dà circa $67^\circ 23'$) 13) Intorno a 34° 14) $\approx 67^\circ$; $\approx \text{m } 1.25$
 15) $\approx \text{m } 5.5$; $\approx 59^\circ$ 16) Circa 17.4 cm 17) Intorno a 10° 18) $\approx 8.54 \text{ metri}$ 19) Circa 35 km e $\frac{1}{2}$
 20) d) 21) Circa 153 m 22) $\approx 43 \text{ metri}$ (42.77... prendendo i dati alla lettera; ma non ha molto senso)
 23) a) 24) circa 70 metri 25) L'angolo di rifrazione è $\approx 35^\circ$
 26) Quasi 36 km (il calcolo porta a un numero vicinissimo a 35.7) 27) $\approx 159 \text{ metri}$
 28) Circa 9° 29) Circa 1 km e 853 m
 30) Qui si fanno i calcoli come se il diametro della Luna fosse "un pezzetto di arco",
 in una circonferenza il cui raggio è la distanza fra l'osservatore e la Luna.
 Ci sono inoltre varie approssimazioni nei dati.
 Si ottiene in questo modo, come distanza fra l'osservatore e la Luna, un valore vicino a 385500 km.
 La reale distanza media tra il centro della Terra e il centro della Luna è stimata in 384400 chilometri.
 31) Circa 445 km
 32) Il calcolo porta a circa 365000 km (pensando di partire dal centro della Terra).
 La differenza rispetto al valore vero (distanza media = 384400 km circa)
 si deve alle varie approssimazioni (dei dati e delle osservazioni) che evidentemente sono in gioco.
 33) Vicina al 25% 34) 6.98... % (differenza fra i valori davvero trascurabile! L'angolo è piccolo)
 35) 70.7... % (qui la differenza fra i valori è notevole: l'angolo è grande)
 36) Risposta immediata: di circa 80 m.
 La pendenza è comunque "piccola", e il contesto ci fa capire che quel "10%" è già un'approssimazione:
 sarebbe dunque un esercizio puramente teorico stare a calcolare che, se il 10% si intende ricavato con
 la formula $\Delta y / \Delta x$, il vero calo di altitudine sarebbe di metri 79.6
 37) $AD \approx \text{m } 108$; $AC \approx \text{m } 74$; $CD \approx \text{m } 57$ 38) $\approx \text{m } 38$
 39) $HC = \text{circa } 25 \text{ m}$; $HA = \text{circa } 10 \text{ m}$ 40) BC ha una misura di circa 26-27 metri (il calcolo dà ≈ 26.5)
 41) Si trova un valore di circa 13.7 per il modulo della risultante
 42) $\approx 26 \text{ m}$; $\approx 34 \text{ m}$
 43) L'oggetto si trova a un'altezza di circa 1089 metri ... diciamo 1100 metri
 44) Circa 7.9 miglia ... diciamo 8 miglia 45) La distanza è di circa 40 metri
 46)



$$\begin{aligned} TA &= x \\ x : 80 &= (x + 250) : 120 \\ 80(x + 250) &= 120x \\ 80x + 20000 &= 120x \\ -40x &= -20000; \quad 40x = 20000 \\ x &= 500 \rightarrow TA = 5 \text{ m} \end{aligned}$$

47)



$$x = \frac{20 + y}{\cos 64^\circ}; \quad x = \frac{y}{\cos 68^\circ} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{20 + y}{\cos 64^\circ} = \frac{y}{\cos 68^\circ}$$

$$20 \cos 68^\circ + y \cos 68^\circ = y \cos 64^\circ; \quad y \cos 64^\circ - y \cos 68^\circ = 20 \cos 68^\circ$$

$$y (\cos 64^\circ - \cos 68^\circ) = 20 \cos 68^\circ$$

$$y = \frac{20 \cos 68^\circ}{\cos 64^\circ - \cos 68^\circ} \approx \frac{20 \cdot 0.3746}{0.4384 - 0.3746} = \frac{7.492}{0.0638} \approx 117 \text{ cm}$$

$$x = \frac{y}{\cos 68^\circ} \approx \frac{117}{0.3746} \approx 312 \text{ cm}$$

- 48) $h \approx 20 \text{ ft}$, $w \approx 28 \text{ ft}$ 49) $\approx 3.1 \text{ inches}$ 50) $\approx 40^\circ$ 51) cw 52) d

12. E' POSSIBILE, NOTA UNA DELLE QUATTRO FUNZIONI GONIOMETRICHE DI UN ANGOLO, DETERMINARE LE ALTRE?

La risposta è sostanzialmente affermativa; ci può essere, però, ambiguità nel segno.

Ad esempio, supponiamo di sapere che

$$\sin \alpha = 0.23.$$

La Prima Relazione Fondamentale della Trigonometria ci consente di scrivere

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

quindi

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - (0.23)^2} = \pm \sqrt{1 - 0.0529} = \pm \sqrt{0.9471} \approx \pm 0.9732$$

Dei due possibili valori, il positivo e il negativo, quale sarà quello giusto?

Beh, dipende:

se si sa per certo che l'angolo α è compreso fra 0° e 90° , il valore che va bene sarà quello positivo;

se l'angolo α è compreso fra 90° e 180° , dei valori trovati si prenderà quello negativo;

insomma, la scelta del $+$ o del $-$ va fatta a seconda dell'intervallo

nel quale sappiamo, o supponiamo, o desideriamo, che possa variare l'ampiezza dell'angolo.

Eventualmente, si potrà scegliere di lasciare il doppio segno

se si vogliono considerare, per l'ampiezza, tutte le possibilità.

Dunque, vediamo come si risolve il problema in generale.

- Noto $\sin \alpha$, si può ricavare $\cos \alpha$ con la formula $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$,

$$\text{dopodiché si avrà subito } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ e } \cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ oppure } \cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Nel nostro esempio, nel quale era inizialmente noto $\sin \alpha = 0.23$,

dopo aver ricavato $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \approx \pm 0.9732$ calcoleremo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \approx \frac{0.23}{\pm 0.9732} \approx \pm 0.2363 \text{ e poi } \cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{1}{\pm 0.2363} \approx \pm 4.23$$

- Nel caso sia noto $\cos \alpha$, il procedimento è del tutto analogo:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \text{ poi } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ e } \cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ oppure } \cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

- E se invece la funzione angolare che si conosce inizialmente è $\operatorname{tg} \alpha$?

Supponiamo di sapere che $\operatorname{tg} \alpha = m$, essendo m un valore noto.

Allora avremo $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = m$; ma sappiamo pure che è $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

quindi possiamo impostare il sistema

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = m \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

che consentirà di determinare $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$.

Supponiamo ad esempio che sia $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Potremo scrivere

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha \\ \frac{9}{16} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \frac{25}{16} \cos^2 \alpha = 1; \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}; \cos \alpha = \pm \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{4}{5} \\ \sin \alpha = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{4}{5} \\ \sin \alpha = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Ovviamente, da $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ segue subito $\cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{4}{3}$.

ESERCIZI

- 1) E' noto che $\cos \alpha = \frac{8}{17}$ e che $0 < \alpha < 90^\circ$. Determinare $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$
- 2) E' noto che $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ e che $90 < \alpha < 180^\circ$. Determinare $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$
- 3) E' noto che $\cos \alpha = -0.8$ e che $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Determinare $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$
- 4) Se si sa che $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$. Determinare $\sin \alpha$, $\cos \alpha$
- 5) $\operatorname{tg} x = -0.5$, $\pi < x < 2\pi$. Quanto valgono $\sin x$, $\cos x$?
- 6) Si sa che $\cos x = 0$. Quanto valgono $\sin x$ e $\operatorname{tg} x$?

Stabilisci quali sono, nell'ambito del **primo giro** ($0 \leq x \leq 2\pi$), le soluzioni delle seguenti equazioni goniometriche (scrivi le soluzioni in **radiani**).

- 7) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 8) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
- 9) $\cos x = -1$
- 10) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- 11) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
- 12) $\sin x = -1$
- 13) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$
- 14) $\sin x = -\cos x$
- 15) $\cos x = -\sqrt{3}/2$
- 16) $\operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$
- 17) $\operatorname{tg} x = -1$
- 18) $\sin x = 1$
- 19) Elenca gli angoli individuati dalla scrittura $60^\circ + k \cdot 360^\circ$, con $k = -1, 0, 1, 2, 3$
- 20) Elenca gli angoli individuati dalla scrittura $30^\circ + k \cdot 180^\circ$, con $k = -1, 0, 1, 2, 3$
- 21) Elenca gli angoli individuati dalla scrittura $k \cdot \frac{\pi}{2}$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4$
- 22) Elenca gli angoli individuati dalla scrittura $\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, con $k = 0, 1, 2, 3$
- 23) Sapresti scrivere un'equazione goniometrica che sia soddisfatta da tutti e soli gli archi $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$?
- 24) Sapresti scrivere un'equazione goniometrica che sia soddisfatta da tutti e soli gli archi $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$?

RISPOSTE

- 1) $\sin \alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$, $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{8}{15}$
- 2) $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$, $\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{12}{5}$
- 3) $\sin \alpha = -0.6$, $\operatorname{tg} \alpha = 0.75$, $\operatorname{cotg} \alpha = 1.33333\dots$
- 4) $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ e $\cos \alpha = \frac{24}{25}$ oppure $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$ e $\cos \alpha = -\frac{24}{25}$
- 5) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
- 6) $\sin x$ può valere $+1$ oppure -1 . In entrambi i casi, $\operatorname{tg} x$ non esiste.
- 7) $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2}{3}\pi$
- 8) $x = \frac{5}{4}\pi$, $x = \frac{7}{4}\pi$
- 9) $x = \pi$
- 10) $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{7}{6}\pi$
- 11) $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$
- 12) $x = \frac{3}{2}\pi$
- 13) $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{4}{3}\pi$
- 14) $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{7}{4}\pi$
- 15) $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{7}{6}\pi$
- 16) $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{7}{6}\pi$
- 17) $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{7}{4}\pi$
- 18) $x = \frac{\pi}{2}$
- 19) $-300^\circ, 60^\circ, 420^\circ, 780^\circ, 1140^\circ$
- 20) $-150^\circ, 30^\circ, 210^\circ, 390^\circ, 570^\circ$
- 21) $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$
- 22) $\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$
- 23) $\operatorname{tg} x = 1$ (oppure $\sin x = \cos x$)
- 24) $\sin x = -1$ $\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \right)$

13. I GRAFICI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE: IL SENO

Il seno, il coseno, la tangente e la cotangente sono quantità il cui valore DIPENDE dall'angolo considerato: sono dette, proprio per questo, FUNZIONI ANGOLARI.

Possiamo allora pensare di tracciare i GRAFICI di tali funzioni.

Pensiamo innanzitutto, per fissare le idee, alla funzione $y = \sin x$.

NOTA: qui è più opportuno indicare l'angolo (= arco) con x anziché con α perché la variabile indipendente di una funzione si indica preferibilmente con x

L'angolo (= arco) x andrà in ascissa, mentre il valore corrispondente del seno andrà in ordinata.

Riflettiamo ora: **i valori dell'angolo (= arco), che dovranno essere riportati sull'asse delle ascisse, sarà meglio esprimerli in gradi oppure in radianti?**

Beh, la risposta è senza dubbio: in radianti!

Infatti: se scegliessimo di mettere in ascissa i *gradi*, allora avremmo

- in ascissa, numeri indicanti AMPIEZZE (unità di misura: il grado, ossia la 360-esima parte dell'angolo giro)
- e in ordinata, numeri indicanti LUNGHEZZE (il seno è un'ordinata, quindi è una lunghezza con segno).

Invece, **rappresentando l'angolo (= arco) in radianti,**

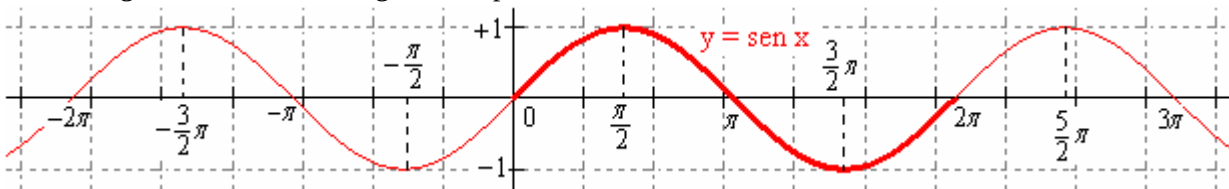
l'analogia di ruolo fra i numeri disposti sui due assi sarà piena:

- **in ascissa avremo numeri interpretabili come LUNGHEZZE**
(misurare un angolo in radianti vuol dire misurare la lunghezza dell'arco corrispondente, supposto rettificato, prendendo come **unità di misura il raggio della circonferenza**);
- **in ordinata avremo allo stesso modo numeri interpretabili come LUNGHEZZE**
con l'ulteriore vantaggio che **l'unità di misura per queste lunghezze sarà la stessa di prima:** infatti, poiché la circonferenza goniometrica è per definizione una circonferenza di raggio = 1, il segmento che rappresenta il "seno" è come se avesse lunghezza calcolata prendendo il **raggio** come unità di misura.

Procediamo, dunque! Vogliamo tracciare il grafico di $y = \sin x$. Con l'aiuto della tabella seguente:

arco x in radianti	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	$\frac{13}{6}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$
sen x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

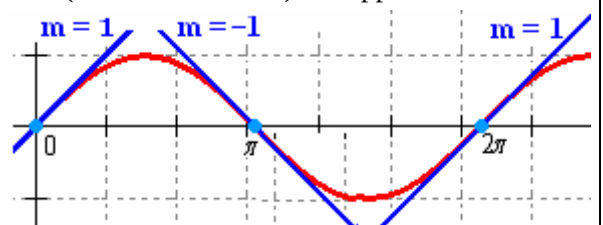
e tenendo conto che la funzione $y = \sin x$ è periodica di periodo 2π ,
(quindi ripete indefinitamente, sia "verso destra" che "verso sinistra", lo stesso andamento che si ha fra 0 e 2π ,
ossia nella zona che abbiamo evidenziato aumentando lo spessore),
potremo disegnare la curva: un'elegante "serpentina" che è anche chiamata **"sinusoide"**.



Si potrebbe dimostrare, utilizzando le "derivate",
che la sinusoide, quando attraversa l'asse orizzontale,
lo attraversa secondo una inclinazione di 45°
rispetto all'orizzontalità, e precisamente:

- $+45^\circ$ ossia 45° "in salita", nei punti
 $x = -2\pi, x = 0, x = 2\pi, x = 4\pi, \dots$
(insomma: $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$: multipli pari di π)
- -45° , ossia 45° "in discesa", nei punti
 $x = -\pi, \pi, x = 3\pi, \dots$
(insomma: $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$: multipli dispari di π)

Ciò equivale a dire che
il coefficiente angolare m della retta, che è
tangente al grafico in ciascuno di questi punti,
vale (a seconda dei casi) $+1$ oppure -1 :



Vuoi adesso un suggerimento molto "alla buona" ma, a mio avviso, decisamente utile?

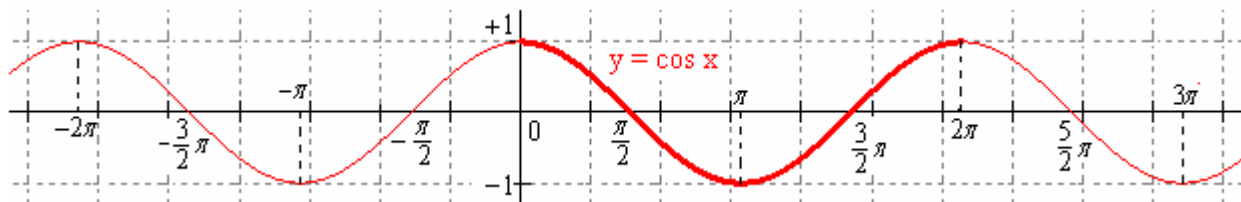
Quando devi disegnare sul quaderno una sinusoide, prendi come unità di misura un segmento di DUE quadretti.
A questo punto il numero $\pi = 3.14\dots$ dovrebbe essere collocato a una distanza di un po' più di 6 quadretti
dall'origine; ma tu, dai retta a me, ponilo ad esattamente 6 quadretti.

La figura subirà così una piccolissima deformazione, ma in compenso avrai il vantaggio che
 $\pi/6$ si troverà a esattamente 1 quadretto, $\pi/3$ a esattamente 2 quadretti, $\pi/2$ a esattamente 3 quadretti!
Che comodità! E questo a prezzo di un'alterazione della forma della curva, che è davvero molto lieve.

14. I GRAFICI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE: IL COSENO

E passiamo ora al grafico di $y = \cos x$: la curva è detta **cosinusoide**.

arco x in radianti	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	$\frac{13}{6}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$



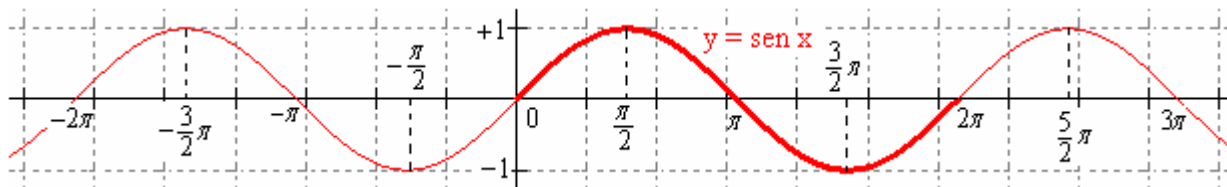
Si potrebbe dimostrare che anche la cosinusoide, così come la sinusoide, quando attraversa l'asse orizzontale, lo attraversa secondo una inclinazione di 45° rispetto all'orizzontale:

$+45^\circ$ o -45° a seconda che l'attraversamento avvenga "in salita" o "in discesa".

Ricordiamo che ciò corrisponde ad avere una retta tangente con coefficiente angolare $m = 1$ oppure $m = -1$

Hai notato che la cosinusoide assomiglia moltissimo alla sinusoide?

Ridiamo un attimo un'occhiata a quest'ultima, e confrontiamo le due curve:



In effetti, la curva grafico di $y = \cos x$ appare ottenibile traslando la $y = \sin x$ verso sinistra di $\pi/2$;

in alternativa, si può pensare di ottenere $y = \sin x$ traslando la $y = \cos x$ verso destra di $\pi/2$.

Tutto ciò è coerente con due formule la cui validità verrà dimostrata più avanti:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Da semplici disegni di circonferenze goniometriche (vedi qui a destra) emergono poi due osservazioni che sono in pieno accordo coi grafici sopra riportati: qualunque sia l'arco x , si ha sempre

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$

ossia:

- il seno è una funzione "dispari" (NOTA)
- il coseno è una funzione "pari" (NOTA)

NOTA

- Una funzione $y = f(x)$ si dice "dispari" se, per ogni x del suo dominio, risulta $f(-x) = -f(x)$
(il grafico di una funzione dispari ha sempre la caratteristica di essere simmetrico rispetto all'origine);
- una funzione $y = f(x)$ si dice "pari" se, per ogni x del suo dominio, risulta $f(-x) = f(x)$
(il grafico di una funzione pari ha sempre la caratteristica di essere simmetrico rispetto all'asse delle y).

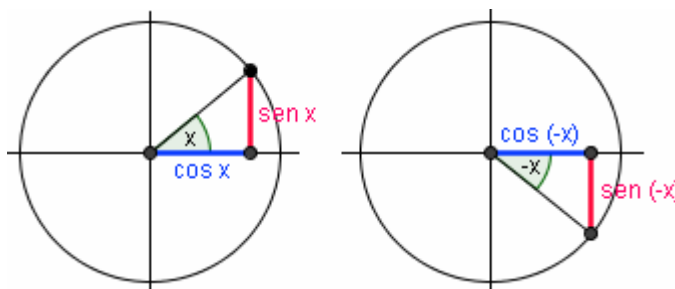
Approfittiamo del fatto che in questa pagina sono rappresentate entrambe le funzioni $y = \sin x$ e $y = \cos x$

- per osservare, anche sui rispettivi grafici, come entrambe abbiano la y sempre compresa fra -1 e $+1$
- e per ribadire ancora una volta la loro PERIODICITA' (periodo 2π):
 $\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \forall k \in \mathbb{Z}$ e $\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \forall k \in \mathbb{Z}$

Osserviamo ancora che il valore "particolare" $\frac{\sqrt{3}}{2}$ equivale a circa $\frac{1.7}{2} = 0.85$.

Ci sono poi altri valori "particolari" che per motivi di semplicità e di spazio non abbiamo riportato nelle tabelle:

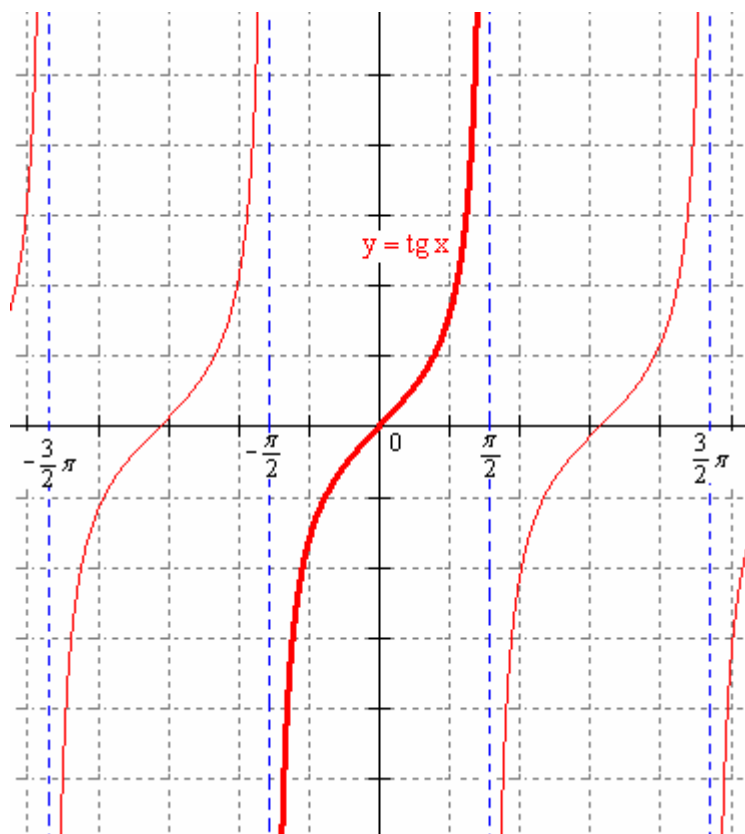
ad esempio, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; bene, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ è uguale circa a $\frac{1.4}{2} = 0.7$.



15. I GRAFICI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE: TANGENTE E COTANGENTE

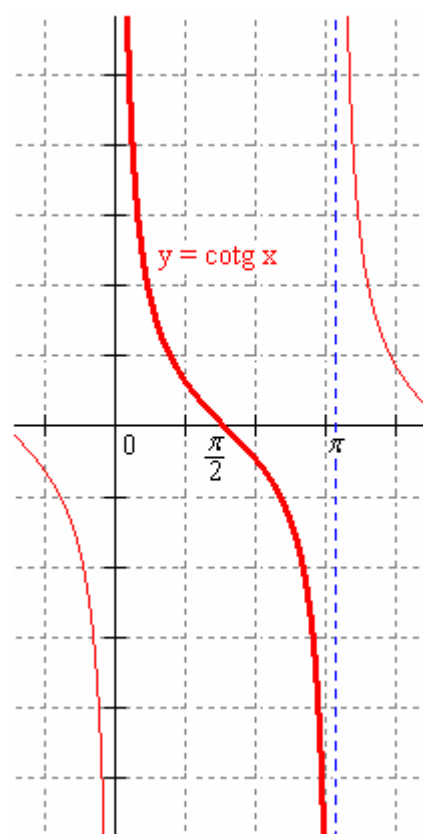
E vediamo infine i grafici di $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{cotg} x$ (tangente e cotangente).

arco x (radianti)	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	$\frac{13}{6}\pi$
$\operatorname{tg} x$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	non esiste	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	non esiste	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
arco x (radianti)	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	$\frac{13}{6}\pi$
$\operatorname{cotg} x$	$-\sqrt{3}$	non esiste	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	non esiste	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	non esiste	$\sqrt{3}$



Il grafico della funzione $y = \operatorname{tg} x$, periodica di periodo $\pi/2$

Anche qui, e pure nel caso della cotangente qui a fianco, l'attraversamento dell'asse delle ascisse avviene con inclinazione di 45°



Il grafico della funzione $y = \operatorname{cotg} x$,

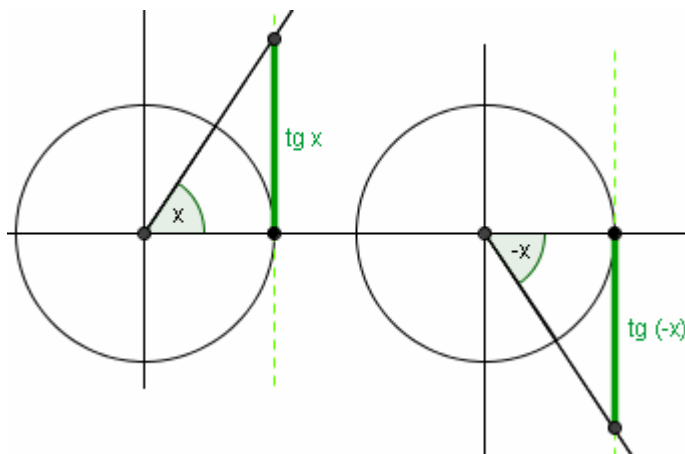
la quale, così come la $y = \operatorname{tg} x$, è periodica di periodo $\pi/2$

Mettiamo in rilievo **alcune caratteristiche** dei grafici di $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{cotg} x$:

- la PERIODICITA' (per entrambe, periodo π):
 $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
 $\operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- sono entrambe funzioni DISPARI:
 $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x; \quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$
 (grafici simmetrici rispetto all'origine)

La figura qui a fianco riportata mostra questo fatto per la tangente, direttamente sulla circonferenza goniometrica.

- La tangente tende all'infinito quando l'arco tende a $\pi/2, -\pi/2$ ecc;
 la cotangente tende all'infinito quando l'arco tende a $0, \pi$ ecc.



16. NOTA UNA FUNZIONE GONIOMETRICA, RISALIRE ALL'ARCO

Se si sa che $\sin x = \frac{1}{2}$, allora si deduce che l'arco x può valere (nel solo "1° giro") $\frac{\pi}{6}$ (30°) oppure $\frac{5}{6}\pi$ (150°);
volendo indicare anche i valori dell'arco fuori dal "1° giro", si scriverebbe $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Supponiamo ora di sapere che $\sin x = \frac{1}{7}$.

Il valore $1/7$ non è "particolare", nel senso che non corrisponde a nessuno fra gli archi "notevoli" studiati.

Bene: per indicare quegli archi il cui seno è $\frac{1}{7}$ si utilizza la scrittura $\arcsin \frac{1}{7}$, che si legge "arco seno di $\frac{1}{7}$ ",

ma - **ATTENZIONE ATTENZIONE!** - la si utilizza in un modo molto speciale,
perché tale scrittura, convenzionalmente, NON sta a indicare TUTTI gli infiniti archi che hanno seno $1/7$,
bensì, fra tutti quegli infiniti archi, ne indica UNO SOLO,
e precisamente QUELLO CHE È PIÙ "SPONTANEO" CONSIDERARE,
PERCHÉ HA IL SUO ESTREMO NEL 1° QUADRANTE (vale circa 8°).

Allora gli archi soluzione dell'equazione $\sin x = \frac{1}{7}$ saranno:

- $\arcsin \frac{1}{7}$ (in gradi, circa 8°) e $\pi - \arcsin \frac{1}{7}$ (circa 172°) se ci limitiamo al primo giro;
- $\arcsin \frac{1}{7} + 2k\pi \vee \pi - \arcsin \frac{1}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ se vogliamo indicare tutti gli infiniti archi con seno $1/7$, anche al di fuori dei confini del 1° giro.

In generale:

la scrittura **$\arcsin q$** si legge "arco seno di q " e significa
"quell'arco, il cui seno è q , e che è compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ "

Ovviamente, la scrittura $\arcsin q$
ha significato
se e solo se q è un numero reale
compreso fra -1 e 1 ($-1 \leq q \leq 1$)

la scrittura **$\arccos q$** si legge "arco coseno di q " e significa
"quell'arco, il cui coseno è q , e che è compreso fra 0 e π "

Ovviamente, la scrittura $\arccos q$
ha significato
se e solo se q è un numero reale
compreso fra -1 e 1 ($-1 \leq q \leq 1$).

la scrittura **$\arctg q$** si legge "arco tangente di q " e significa
"quell'arco, la cui tangente è q , e che è compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ "

La scrittura $\arctg q$
ha significato
per qualsiasi valore di q .

la scrittura **$\text{arccotg } q$** si legge "arco cotangente di q " e significa
"quell'arco, la cui cotangente è q , e che è compreso fra 0 e π "

La scrittura $\text{arccotg } q$
ha significato
per qualsiasi valore di q .

E S E M P I	$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$	$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\pi}{3}$	$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$	$\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{5}{6}\pi$
	$\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$	$\arctg (-1) = -\frac{\pi}{4}$	$\text{arccotg } \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$	$\text{arccotg } (-\sqrt{3}) = \frac{5}{6}\pi$
	$\arcsin 0.8 = 0,927295... \quad (1)$	$\arccos (-1) = \pi$	$\arctg 0 = 0$	$\arctg 5 = 1.37340... \quad (2)$
	(1) Espresso in gradi, questo arco è di poco più di 53° (2) Questo valore corrisponde a poco meno di 79°			

$\arcsin$, $\arccos$, $\arctg$, arccotg sono delle vere e proprie "funzioni",
anzi si possono considerare come le funzioni INVERSE delle quattro funzioni goniometriche.

AVVERTENZA - I valori delle funzioni $\arcsin$, $\arccos$, $\arctg$, arccotg
vanno sempre espressi in RADIANTI e non in gradi.
Quindi sarebbe sbagliato scrivere, ad es., che $\arcsin 0.8 \approx 53^\circ$;
è invece corretto scrivere $\arcsin 0.8 \approx 0.927$
ed eventualmente poi osservare che l'arco di 0.927 radianti corrisponde circa a 53°.

PROPRIETA' - Dalle definizioni poste, segue in modo ovvio

$$\begin{aligned} \arcsin(-q) &= -\arcsin q & \arctg(-q) &= -\arctg q \\ \arccos(-q) &= \pi - \arccos q & \text{arccotg}(-q) &= \pi - \text{arccotg } q \end{aligned}$$

17. LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

Sono quelle della forma

$$\sin x = q \quad \cos x = q \quad \tan x = q \quad \cot x = q$$

essendo q un numero reale assegnato.

Facciamo qualche esempio.

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

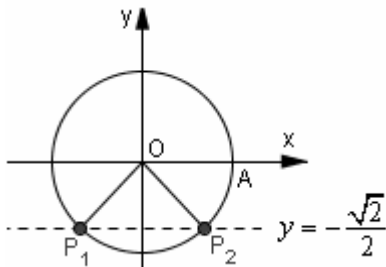
Devo trovare quegli archi x il cui seno è $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Disegno dunque, o comunque mi figuro nella mente, la circonferenza goniometrica:

il seno è un' ORDINATA, è l'ordinata di un punto (l'estremo dell'arco) sulla circonferenza goniometrica, quindi

si tratta di andare a cercare i punti della circonferenza goniometrica che hanno ordinata $-\sqrt{2}/2$ per stabilire quali sono gli archi di cui questi punti rappresentano l'estremo terminale.

Volendo, a tale scopo, si può pensare di trovare le intersezioni fra la circonferenza goniometrica (di raggio 1) e la retta di ordinata costante $y = -\sqrt{2}/2$ ($-\sqrt{2}/2$ vale circa -0.7):



Ricordandoci a questo punto anche le formule sui triangoli rettangoli particolari,

comprendiamo che i due archi in questione sono $\frac{5}{4}\pi$ (arco $\widehat{AP_1}$) e $\frac{7}{4}\pi$ (arco $\widehat{AP_2}$)

e scriviamo in definitiva, tenendo conto che il seno è una funzione periodica di periodo 2π (quindi il suo valore non cambia se l'arco viene aumentato o diminuito di 2π o di un multiplo di 2π):

$$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi, \text{ essendo } k \text{ un intero relativo arbitrario } (k \in \mathbb{Z}).$$

In alternativa, potevamo anche “vedere” il punto P_2 come il secondo estremo dell'arco negativo $-\frac{\pi}{4}$, scrivendo dunque le soluzioni sotto la forma alternativa

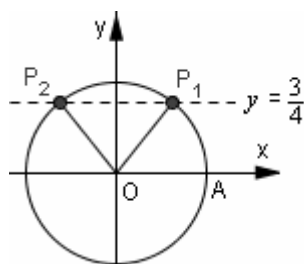
$$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Controlliamo bene: in effetti le due scritture $\frac{7}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

“generano”, al variare di k , lo stesso insieme di valori:

k	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	..
$\frac{7}{4}\pi + 2k\pi$	...	$-\frac{17}{4}\pi$	$-\frac{9}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{15}{4}\pi$	$\frac{23}{4}\pi$	$\frac{31}{4}\pi$	...
$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$	...	$-\frac{25}{4}\pi$	$-\frac{17}{4}\pi$	$-\frac{9}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{15}{4}\pi$	$\frac{23}{4}\pi$	...

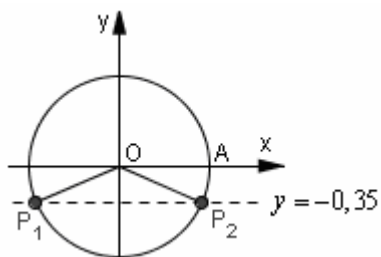
b) $\sin x = \frac{3}{4}$



$$x = \arcsin \frac{3}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \arcsin \frac{3}{4} + 2k\pi$$

In figura: $\arcsin \frac{3}{4} = \widehat{AP_1}$, $\pi - \arcsin \frac{3}{4} = \widehat{AP_2}$

c) $\sin x = -0.35$



Puoi controllare che anche in questo caso si ha, come nell'es. b),

$$x = \arcsin(-0.35) + 2k\pi \vee x = \pi - \arcsin(-0.35) + 2k\pi$$

$$\arcsin(-0.35) = \widehat{AP_2} \text{ (da A fino a } P_2 \text{ in verso orario = negativo)}$$

$$\pi - \arcsin(-0.35) = \widehat{AP_1}$$

Ricordando che $\arcsin(-t) = -\arcsin t$,

le soluzioni si possono, più elegantemente, riscrivere come

$$x = -\arcsin 0.35 + 2k\pi \vee x = \pi + \arcsin 0.35 + 2k\pi$$

I precedenti tre esempi a), b), c)
mostrano che, in generale,

l'equazione goniometrica elementare $\boxed{\sin x = q \quad (-1 \leq q \leq 1)}$

avrà come soluzioni $\boxed{x = \arcsin q + 2k\pi \vee x = \pi - \arcsin q + 2k\pi}$

d) $\sin x = 2$ Evidentemente, questa equazione è IMPOSSIBILE

e) $\sin x = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

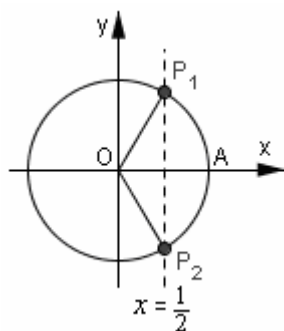
f) $\sin x = 0$ Le soluzioni di questa equazione si possono scrivere sotto la forma $x = k\pi$

g) $\sin x = -1$ $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

h) $\cos x = \frac{1}{2}$

Il coseno è un'ASCISSA, è l'ascissa di un punto (l'estremo dell'arco) sulla circonferenza goniometrica, quindi si tratta di andare a cercare i punti della circonferenza goniometrica che hanno ascissa $1/2$ per stabilire quanto valgono, in radianti, gli archi corrispondenti.

Tali punti sono le intersezioni fra la circonferenza goniometrica e la retta di ascissa costante $x = 1/2$.



Ricordandoci a questo punto anche le formule sui triangoli rettangoli particolari, comprendiamo che i due archi in questione sono

$$\frac{\pi}{3} \text{ (arco } \widehat{AP_1}) \text{ e } -\frac{\pi}{3} \text{ (arco } \widehat{AP_2}), \text{ pensando di andare da A a } P_2 \text{ in senso orario;}$$

$$\text{volendo si può anche pensare all'arco positivo } \frac{5}{3}\pi$$

e scriviamo in definitiva, tenendo conto della periodicità del coseno,

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ essendo } k \text{ un intero relativo arbitrario } (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Alternativa meno elegante: } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

i) $\cos x = 0.81$ $x = \pm \arccos 0.81 + 2k\pi$

j) $\cos x = -0.2$ $x = \pm \arccos(-0.2) + 2k\pi = \pi \mp \arccos 0.2 + 2k\pi$

I precedenti tre esempi h), i), j)
mostrano che, in generale,

l'equazione goniometrica elementare $\boxed{\cos x = q \quad (-1 \leq q \leq 1)}$

avrà come soluzioni $\boxed{x = \pm \arccos q + 2k\pi}$

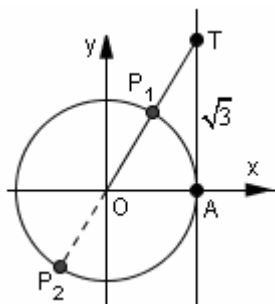
k) $\cos x = 2$ IMPOSSIBILE

l) $\cos x = 1$ $x = 0 + 2k\pi = 2k\pi$

m) $\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

n) $\cos x = -1$ $x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$, ossia: multipli dispari di π

o) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$



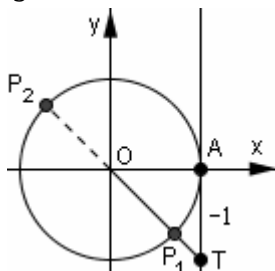
Nell'ambito del 1° giro, le soluzioni sono i due archi

$$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4}{3}\pi;$$

in generale, tenendo conto del fatto che la tangente è periodica di periodo “mezzo giro” (π) le soluzioni saranno rappresentabili dalla scrittura

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

p) $\operatorname{tg} x = -1$



Fra gli archi soluzione,

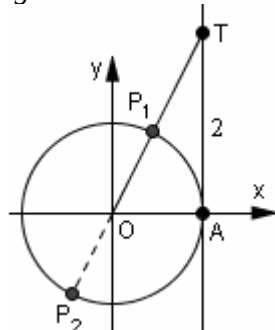
quello che è più spontaneo considerare è senz'altro $x = -\pi/4$.

L'altro arco soluzione in figura è $x = \frac{3}{4}\pi = -\frac{\pi}{4} + \pi$.

La tangente è periodica di periodo “mezzo giro” (π) per cui le soluzioni possono essere indicate dalla scrittura

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

q) $\operatorname{tg} x = 2$



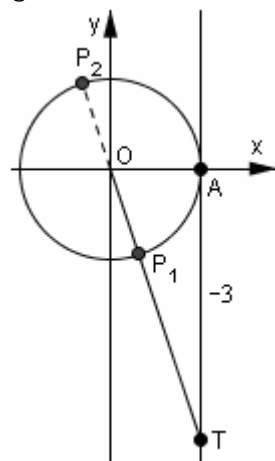
$$x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nella figura,

$$\widehat{AP_1} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2$$

$$\widehat{AP_2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 + \pi$$

r) $\operatorname{tg} x = -3$



$$x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-3) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nella figura,

$$\widehat{AP_1} \text{ (senso orario)} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-3)$$

$$\widehat{AP_2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-3) + \pi$$

Tenendo presente che $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (-q) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} q$

Possiamo riscrivere l'insieme delle soluzioni nella forma più elegante

$$x = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} 3 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

I precedenti quattro esempi o), p), q), r) mostrano che, in generale,

per risolvere l'equazione goniometrica elementare $\boxed{\operatorname{tg} x = q}$

“BASTA GUARDARE LA SOLA METÀ DESTRA DELLA TORTA”

(quella che si riferisce agli archi tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$)

e scrivere che le soluzioni sono $\boxed{x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} q + k\pi}$

s) $\operatorname{tg} x = 0 \quad x = 0 + k\pi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

In questa rassegna di equazioni elementari, **volutamente evitiamo di inserire la tipologia $\boxed{\cotg x = q}$** ;

d'altronde, per la 3ª Rel. Fond., **$\cotg x = q$ si può risolvere trasformandola nell'equivalente $\boxed{\operatorname{tg} x = 1/q}$** .

ESERCIZI

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche elementari (soluzioni in radianti, anche fuori dal "1° giro"):

- | | | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 2) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | 3) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 4) $\sin x = -\frac{1}{2}$ |
| 5) $\sin x = 1$ | 6) $\sin x = 0$ | 7) $\sin x = -1$ | 8) $\sin x = -2$ |
| 9) $\sin x = 0.6$ | 10) $\sin x = -0.3$ | 11) $\sin x = 0.5$ | 12) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ |
| 13) $\cos x = \frac{1}{2}$ | 14) $\cos x = -\frac{1}{2}$ | 15) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 16) $\cos x = 1$ |
| 17) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 18) $\cos x = \sqrt{3}$ | 19) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 20) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 21) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 22) $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 23) $\tan x = 1$ | 24) $\tan x = 0$ |
| 25) $\tan x = 1000$ | 26) $\tan x = -0.01$ | 27) $\cot x = 1/\sqrt{3}$ | 28) $\cot x = -1$ |
| 29) $\sin x = \frac{1}{4}$ | 30) $\cos x = \frac{1}{4}$ | 31) $\tan x = \frac{1}{4}$ | 32) $\cot x = \frac{1}{4}$ |
| 33) $\sin x = -\frac{1}{4}$ | 34) $\cos x = -\frac{1}{4}$ | 35) $\tan x = -\frac{1}{4}$ | 36) $\cot x = -\frac{1}{4}$ |

SOLUZIONI (s'intende che k sia un intero relativo arbitrario: $k \in \mathbb{Z}$)

- | | |
|---|--|
| 1) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ | 2) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ |
| 3) $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$ (oppure: $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$) | |
| 4) $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$ (oppure: $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$) | |
| 5) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ | 6) $x = k\pi$ |
| 7) $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ | 8) impossibile |
| 9) $x = \arcsin 0.6 + 2k\pi \vee x = \pi - \arcsin 0.6 + 2k\pi$ | |
| 10) $x = \arcsin(-0.3) + 2k\pi = -\arcsin 0.3 + 2k\pi \vee x = \pi - \arcsin(-0.3) + 2k\pi = \pi + \arcsin 0.3 + 2k\pi$ | |
| 11) $0.5 = \frac{1}{2}$ quindi: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ | |
| 12) $x = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2k\pi = -\arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2k\pi = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi$ | |
| 13) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ | 14) $x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ |
| 15) $x = \pm \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ | 16) $x = 0 + 2k\pi = 2k\pi$ |
| 17) $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ | 18) impossibile |
| 19) $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} + 2k\pi$ | 20) $x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2k\pi = \pi \mp \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} + 2k\pi$ |
| 21) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ | 22) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ |
| 23) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ | 24) $x = k\pi$ |
| 25) $x = \arctan 1000 + k\pi$ | 26) $x = \arctan(-0.01) + k\pi = -\arctan 0.01 + k\pi$ |
| 27) $\cot x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3}; x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ | 28) $\cot x = -1 \Leftrightarrow \tan x = -1; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ |
| 29) $x = \arcsin \frac{1}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \arcsin \frac{1}{4} + 2k\pi$ | 30) $x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2k\pi$ |
| 31) $x = \arctan \frac{1}{4} + k\pi$ | 32) $x = \arctan 4 + k\pi$ |
| 33) $x = -\arcsin \frac{1}{4} + 2k\pi \vee x = \pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2k\pi$ | 34) $x = \pi \mp \arccos \frac{1}{4} + 2k\pi$ |
| 35) $x = -\arctan \frac{1}{4} + k\pi$ | 36) $x = -\arctan 4 + k\pi$ |

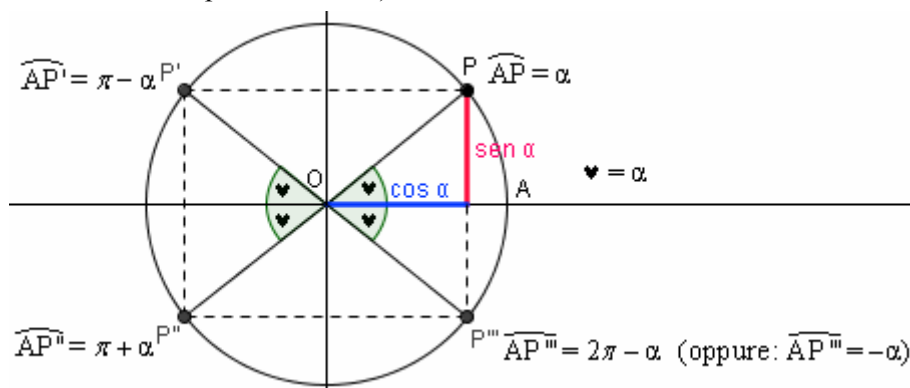
18. ARCHI ASSOCIATI

Sia $\alpha = \widehat{AP}$ un arco. Consideriamo il rettangolo avente per vertici i 4 punti:

P' (simmetrico di P rispetto all'asse y)

P'' (simmetrico di P rispetto all'origine)

P''' (simmetrico di P rispetto all'asse x)



Gli archi $\widehat{AP} = \alpha$ $\widehat{AP'} = \pi - \alpha$ $\widehat{AP''} = \pi + \alpha$ $\widehat{AP'''} = 2\pi - \alpha$ (oppure: $\widehat{AP'''} = -\alpha$) sono detti “archi associati”.

Per due archi associati, tutte e quattro le funzioni goniometriche (seno, coseno, tangente, cotangente) hanno lo stesso valore assoluto, anche se possono differire in segno: lo si desume facilissimamente dall'osservazione della figura (tangente e cotangente sono lasciati all'immaginazione del lettore).

Sussistono le seguenti formule:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	Due archi supplementari hanno ugual seno ...
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	... e coseni opposti
$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	
$\operatorname{cotg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha$	

$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$	Due archi che differiscono di π hanno seni opposti...
$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$	... e coseni pure opposti
$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha$	
$\operatorname{cotg}(\alpha + \pi) = \operatorname{cotg} \alpha$	

Siccome $\alpha - \pi$ differisce di 1 giro (2π , cioè 360°) da $\alpha + \pi$, le funzioni goniometriche di $\alpha - \pi$ coincideranno con quelle di $\alpha + \pi$ e perciò sarà pure :

$\sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha$
$\cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$
$\operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{cotg}(\alpha - \pi) = \operatorname{cotg} \alpha$

$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$	Due archi esplementari hanno seni opposti ...
$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$	... ed ugual coseno
$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	
$\operatorname{cotg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha$	

e perciò anche

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	Due archi opposti hanno seni opposti ...
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	... ed ugual coseno
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	
$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha$	

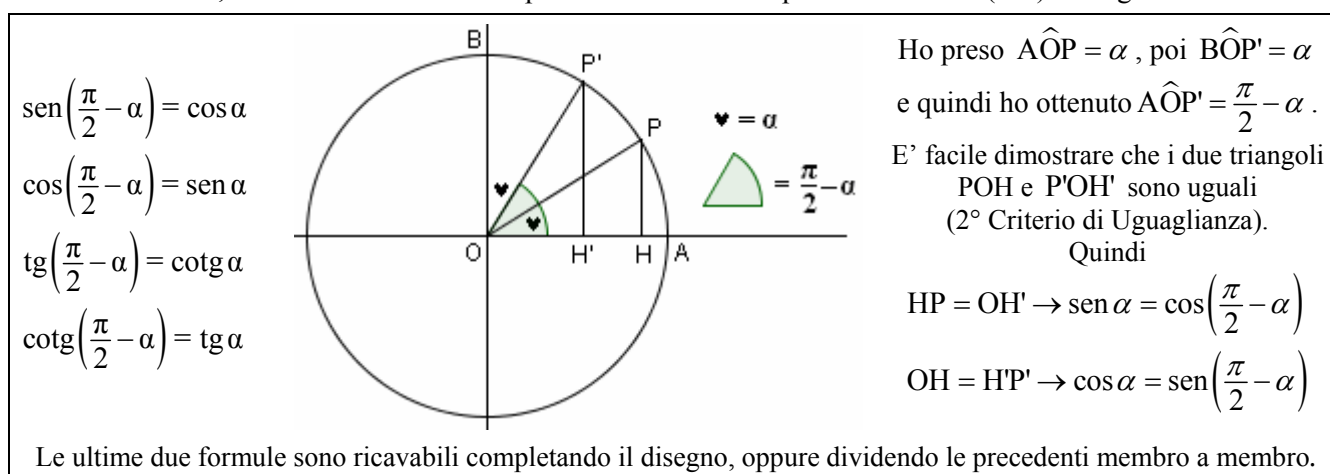
Le ultime 4 formule ci dicono che il coseno è una funzione PARI:
 $f(-x) = f(x)$
 mentre il seno, la tg e la cotg sono funzioni DISPARI:
 $f(-x) = -f(x)$

OSSERVAZIONI

- Le formule scritte sopra (coi relativi “riassuntini”) non hanno bisogno di essere studiate a memoria! Infatti esse possono essere ricostruite in qualsiasi momento semplicemente visualizzando con gli occhi della mente la circonferenza goniometrica
- Le formule riguardanti tg e cotg possono essere ricavate completando i disegni, o anche dividendo membro a membro le due formule per il seno e per il coseno (2^a e 3^a Relazione Fondamentale della Trigonometria)
- Si può verificare che le formule viste, ricavate con riferimento ad una figura in cui l'angolo α era compreso fra 0 e $\pi/2$, varrebbero per qualunque valore di α (anche maggiore di 2π , anche negativo), con le sole eccezioni, per le formule relative a tg e cotg , degli archi per i quali queste non esistono
- Per via della periodicità, le frasette riassuntive restano vere anche qualora noi diamo alla locuzione “archi supplementari” il senso “esteso” di “archi che danno per somma π a meno di un numero intero di giri completi” (insomma: “due archi sono supplementari in senso esteso” se la loro somma è $\pi + 2k\pi$, per un $k \in \mathbb{Z}$) e diamo alla locuzione “archi che differiscono di π ” il senso esteso di “archi che differiscono di π a meno di interi giri”, ecc.

19. ARCHI COMPLEMENTARI

Come è ben noto, due archi si dicono “complementari” se danno per somma $\pi/2$ (90°). La figura mostra che



ossia: **se si passa da un arco al suo complementare,**

il seno si muta nel coseno e viceversa, la tangente si muta nella cotangente e viceversa;

in breve, ogni “funzione” si muta nella corrispondente “co-funzione”.

OSSERVAZIONI

- Le formule appena stabilite sono state dimostrate con riferimento al caso $0 < \alpha < \pi/2$, ma se ne potrebbe provare la validità in generale, cioè per un arco α qualsiasi, anche con l'estremo appartenente agli altri tre quadranti, anche maggiore di un giro oppure negativo. E' estremamente frequente, in goniometria, incontrare situazioni di questo tipo. La generalizzazione di una formula ricavata con riferimento ad un arco del 1° quadrante si effettua prendendo in considerazione altri casi, ma comunque soprattutto servendosi di ragionamenti di vario tipo o sfruttando formule precedentemente acquisite; solitamente, per ragioni di brevità, tali riflessioni aggiuntive non sono riportate sui libri di testo in modo esplicito.

Con ciò NON voglio dire che *ogni* formula ricavata per un arco del primo quadrante debba per forza sempre essere valida per un arco qualsiasi; voglio solo dire che capiterà di scrivere una certa formula da dimostrare, di vederne la dimostrazione con riferimento ad un arco del primo quadrante e di omettere, per brevità, quelle considerazioni che porterebbero ad estendere la validità della formula anche agli archi che superano i 90° oppure sono negativi.

- Per via della periodicità, lo slogan secondo cui quando da un arco si passa al complementare ogni “funzione” si muta nella corrispondente “co-funzione” continua a valere anche se si dà alla locuzione “archi complementari” il senso esteso di “archi che sono complementari meno di interi giri”, ossia, che danno per somma $\pi/2$, eventualmente aumentato o diminuito di un multiplo di 2π .

20. ARCHI CHE DIFFERISCONO DI $\frac{\pi}{2}$ O DI $\frac{3}{2}\pi$

Osservando le figure, si possono ricavare le seguenti formule:

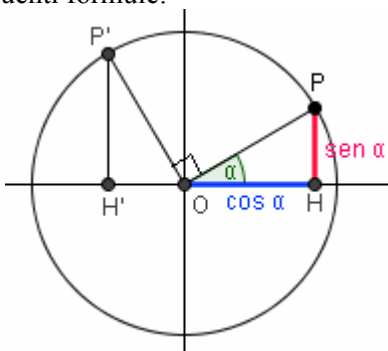
formule per archi
che differiscono
di $\frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$



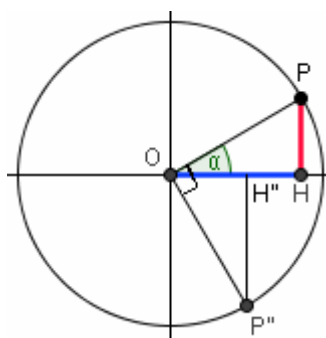
formule per archi
che differiscono
di $\frac{3}{2}\pi$

$$\sin\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) = -\operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$



Quindi, evidentemente, anche

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

21. RIDUZIONE AL PRIMO QUADRANTE E POI, EVENTUALMENTE, AL PRIMO OTTANTE

Consideriamo i seguenti esempi

(nei quali abbiamo deciso di utilizzare i gradi, anziché i radianti,
per ragioni di comodità e di migliore comprensibilità):

$$\sin 460^\circ = \sin(460^\circ - 360^\circ) = \sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 100^\circ) = \sin 80^\circ$$

$$\sin 200^\circ = -\sin(200^\circ - 180^\circ) = -\sin 20^\circ$$

Essi ci suggeriscono come, di fronte al seno di un angolo qualsiasi, si abbia sempre la possibilità di esprimerlo come + oppure - il seno di un angolo appartenente al 1° quadrante (ossia, compreso fra 0° e 90°).

Stessa cosa per un coseno, una tangente o una cotangente:

$$\cos(-179^\circ) = \cos(179^\circ) = -\cos(180^\circ - 179^\circ) = -\cos 1^\circ$$

$$\operatorname{tg} 300^\circ = \operatorname{tg}(300^\circ - 360^\circ) = \operatorname{tg}(-60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ$$

Si dice in questi casi che si è effettuata una “**riduzione al 1° quadrante**”

Se poi l'ultimo argomento (NOTA) ottenuto è un angolo maggiore di 45°,
tramite le formule per gli angoli complementari potremo, volendo, “**ricondurci al 1° ottante**”:

$$\sin 80^\circ = \cos(90^\circ - 80^\circ) = \cos 10^\circ$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{cotg}(90^\circ - 60^\circ) = \operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ}$$

NOTA: L' “ARGOMENTO” DI UNA FUNZIONE

Nell'espressione $\sin x$ l' “argomento” del seno è x ;

nell'espressione $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ l' “argomento” della tangente è $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Insomma, l' “argomento” di una funzione goniometrica, o, più in generale, di una funzione,
è la variabile indipendente, o il valore che ad essa viene assegnato.

22. LA “MADRE DI TUTTE LE FORMULE” IN TRIGONOMETRIA

Ci siamo fin qui limitati alle tre “Relazioni Fondamentali”:

$$1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad 2) \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad 3) \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

... ma in aggiunta a queste, la Trigonometria ci presenta poi una rigogliosa “fioritura” di nuove formule. Il bello è che tutte possono essere costruite a partire da una sola, la “formula di sottrazione per il coseno”, la quale perciò a buon diritto potrà fregiarsi del titolo di “madre di tutte le formule” della Trigonometria.

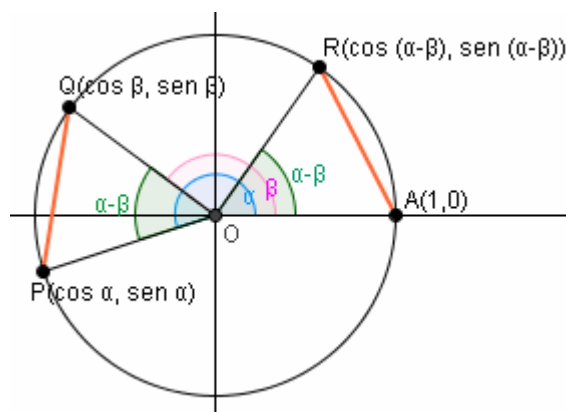
La “**formula di sottrazione per il coseno**” si propone di esprimere il coseno di una differenza

$$\cos(\alpha - \beta)$$

per mezzo di funzioni goniometriche aventi per argomento soltanto α , oppure soltanto β .

Nella figura qui a fianco sono rappresentati:

- un angolo $\alpha = \widehat{AOP}$
- un secondo angolo $\beta = \widehat{AOQ}$
- e, infine, l'angolo differenza $\alpha - \beta$, che è evidentemente $\widehat{QOP}$, ma è stato poi ridisegnato in posizione “canonica”, così da diventare $\widehat{AOR}$:
insomma, è $\alpha - \beta = \widehat{AOP} - \widehat{AOQ} = \widehat{QOP} = \widehat{AOR}$



Occhio alle coordinate dei tre punti P, Q ed R!

Per definizione di seno e coseno, esse sono le seguenti:

$$P(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$Q(\cos \beta, \sin \beta)$$

$$R(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$$

Ora, poiché in una circonferenza ad angoli al centro uguali corrispondono corde uguali, avremo

$$QP = AR$$

e quindi (formula per la distanza tra due punti sul piano cartesiano)

$$\sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2}$$

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta = \cos^2(\alpha - \beta) + 1 - 2 \cos(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)$$

$$\cancel{1} - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cancel{1} - 2 \sin \alpha \sin \beta = \cancel{1} - 2 \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cancel{2} \cos(\alpha - \beta) = \cancel{2} \cos \alpha \cos \beta + \cancel{2} \sin \alpha \sin \beta$$

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

formula di sottrazione per il coseno :

la "MADRE DI TUTTE LE FORMULE"!!!

- Fra pochissimo utilizzeremo la “madre di tutte le formule” nel suo ruolo peculiare, per dedurne altre; diamo però prima un esempio di sua applicazione: la determinazione del coseno di 15° .

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

ESERCIZI

a) Verifica che anche tramite la catena $\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \dots$ si perviene allo stesso risultato.

b) Completa la catena $\cos 75^\circ = \cos(135^\circ - 60^\circ) = \dots$

controlla poi la correttezza del risultato trovato, tenendo conto che si ha $\cos 75^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \sin 15^\circ$

e andando a calcolare $\sin 15^\circ$ mediante la Prima Relazione Fondamentale: $\sin 15^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 15^\circ}$

$$\left[\text{Ottterrai } \cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right]$$

23. LE FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Partiamo dunque dalla “madre di tutte le formule”

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Essa ci permette di scrivere la seguente catena:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) =$$

$$= \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) \stackrel{\text{NOTA}}{=}$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha (-\sin \beta) =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

NOTA

Sappiamo che

il coseno è una funzione PARI: $\cos(-x) = \cos x$

mentre il seno è DISPARI: $\sin(-x) = -\sin x$

Nelle due catene che seguono utilizzeremo il fatto

che il coseno di un angolo è uguale al seno del complementare, e viceversa:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Per la tangente:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \stackrel{\text{NOTA}}{=} \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cancel{\cos \beta}}{\cos \alpha \cancel{\cos \beta}} + \frac{\cancel{\cos \alpha} \sin \beta}{\cancel{\cos \alpha} \cos \beta}}{\frac{\cancel{\cos \alpha} \cos \beta}{\cancel{\cos \alpha} \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

NOTA Dividiamo a questo punto sia il numeratore che il denominatore per $\cos \alpha \cos \beta$;

il procedimento è finalizzato a far comparire, dopo successiva semplificazione, $\operatorname{tg} \alpha$ e $\operatorname{tg} \beta$.

Osserviamo che questa divisione è effettuabile solo nel caso $\cos \alpha \neq 0 \wedge \cos \beta \neq 0$, ossia nel caso

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Queste ultime, d'altronde, sono poi anche le condizioni di esistenza di $\operatorname{tg} \alpha$ e $\operatorname{tg} \beta$.

In definitiva, la formula ricavata qui sopra è valida sotto le condizioni

$\underbrace{\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}_{\text{condizione di esistenza di } \operatorname{tg}(\alpha + \beta)}$	$\underbrace{\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}_{\text{condizione di esistenza di } \operatorname{tg} \alpha, \text{ e anche condizione necessaria per poter effettuare un passaggio nella costruzione della formula}}$	$\underbrace{\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}_{\text{condizione di esistenza di } \operatorname{tg} \beta, \text{ e anche condizione necessaria per poter effettuare un passaggio nella costruzione della formula}}$
--	--	--

Allo stesso modo, è possibile ottenere

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

la cui validità è soggetta alle condizioni

$$\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Ricapitoliamo:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \text{FORMULA DI SOTTRAZIONE PER IL COSENO}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \text{FORMULA DI ADDIZIONE PER IL COSENO}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \text{FORMULA DI ADDIZIONE PER IL SENO}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \text{FORMULA DI SOTTRAZIONE PER IL SENO}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \left[\alpha + \beta, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right] \quad \text{FORMULA DI ADDIZIONE PER LA TANGENTE}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \left[\alpha - \beta, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right] \quad \text{FORMULA DI SOTTRAZIONE PER LA TANGENTE}$$

ESEMPI di applicazione

$$\square \quad \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Ricorderai che nella parte finale del paragrafo precedente lo stesso valore era stato ricavato per $\cos 15^\circ$.
E' naturale: il seno di un angolo è uguale al coseno del complementare.

$$\square \quad \sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 15^\circ &= \operatorname{tg}(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{3 + 1 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Controlla tu che si ottiene lo stesso valore, per $\operatorname{tg} 15^\circ$, anche facendo $\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$ coi valori prima trovati.

$$\square \quad \cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

valore che era già stato determinato in altro modo nelle pagine precedenti, e che ovviamente coincide col valore di $\sin 15^\circ$ determinato qui sopra: $\cos 75^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \sin 15^\circ$

$$\begin{aligned} \square \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x\right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \sin^2 x - \cancel{\frac{1}{2} \sin x \cos x} + \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \sin^2 x + \cancel{\frac{1}{2} \sin x \cos x} = \\ &= \frac{1}{2} (\cos^2 x + \sin^2 x) - \cancel{\sin x \cos x} + \frac{1}{2} (\cos^2 x + \sin^2 x) + \cancel{\sin x \cos x} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

ESERCIZI

Puoi costruirti tu stesso tantissimi esercizi semplicemente “riciclando” valori già noti:
ad esempio, puoi calcolare $\sin(60^\circ + 30^\circ)$ con la formula di addizione per il seno,
sapendo già che, se il procedimento è corretto, dovrà uscire come risultato il valore di $\sin 90^\circ$ e cioè 1.

Altri spunti di questo tipo:

a) ritrova, con le formule di addizione e sottrazione, qualcuna fra le funzioni goniometriche di
 $30^\circ + 30^\circ$, $45^\circ + 45^\circ$, $90^\circ \pm 30^\circ$, $90^\circ \pm 60^\circ$, $180^\circ \pm 45^\circ$, ...

b) calcola, con le formule di addizione e sottrazione,
 $\sin(90^\circ - x)$ sapendo già che il risultato sarà $\cos x$,
 $\cos(x + 90^\circ)$ sapendo che dovrà uscire $-\sin x$,
 $\cos(180^\circ + x)$ sapendo che il risultato dev'essere $-\cos x$,
ecc. ecc.

24. LE FORMULE DI DUPLICAZIONE

Se riscriviamo le formule di addizione nel caso particolare $\beta = \alpha$, otteniamo le **formule di duplicazione**:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \text{diventa} \quad \sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \text{diventa} \quad \cos 2\alpha = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Quest'ultima formula può anche essere modificata nei due modi seguenti:

$$\bullet \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\bullet \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

Passiamo ora a ricavare, dalla formula di addizione per la tangente, la rispettiva formula di duplicazione:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \text{diventa, quando } \beta = \alpha, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Ricapitoliamo:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

FORMULA DI DUPLICAZIONE PER IL SENO

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

FORMULA DI DUPLICAZIONE PER IL COSENO
(nelle sue tre versioni alternative)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

FORMULA DI DUPLICAZIONE PER LA TANGENTE,

valida sotto le condizioni $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ cioè

$$\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$$

- Se il seno di un angolo acuto vale 0.4, quanto varrà il seno dell'angolo doppio?

Per rispondere, applicheremo la formula $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,

ma prima abbiamo bisogno di determinare $\cos \alpha$.

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ dove siamo certi che il segno davanti al radicale è un +

perché è evidente che un angolo acuto con seno uguale a 0.4 è tale che

anche il suo doppio appartiene certamente al 1° quadrante e perciò ha coseno positivo.

$$\text{Dunque } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - (0.4)^2} = \sqrt{1 - 0.16} = \sqrt{0.84} \approx 0.9165$$

$$\text{Ora } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \approx 2 \cdot 0.4 \cdot 0.9165 = 0.7332$$

*Eh sì ...
Questo esercizio
ribadisce,
se ce ne fosse
bisogno,
che
raddoppiando
l'angolo
il seno
NON raddoppia!*

A volte interessano le “formule di duplicazione ad angoli dimezzati”,

quelle che si ottengono “passando agli angoli metà”, ossia mutando α in $\alpha/2$, e 2α in α :

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \rightarrow \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases} \rightarrow \cos \alpha = \begin{cases} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \end{cases}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE
CON ANGOLI DIMEZZATI

(si ottengono dalle “normali”
formule di duplicazione,
mutando α in $\alpha/2$,
e 2α in α)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

ESERCIZI

Verifica, con “duplicazione”, che: $\sin(2 \cdot 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(2 \cdot 60^\circ) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(2 \cdot 60^\circ) = -\sqrt{3}$ e similari.

25. LE FORMULE DI BISEZIONE

Esprimono le funzioni dell'angolo metà $\alpha/2$ mediante le funzioni dell'angolo α ;

oppure, le funzioni di α per mezzo di quelle di 2α .

Risolvono, in pratica, il problema inverso di quello che è risolto dalla formule di duplicazione.

Per ricavarle, consideriamo due fra le “formule di duplicazione ad angoli dimezzati”, e precisamente

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1.$$

Invertendole, otteniamo

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \rightarrow \boxed{\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}$$

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \rightarrow 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \rightarrow \boxed{\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}$$

... e a questo punto potremo anche scrivere:

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} \stackrel{\text{NOTA 1}}{=} \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \stackrel{\text{NOTA 2}}{=} \boxed{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}}$$

NOTA 1:

la frazione che precede porta un doppio segno $\pm$ a numeratore ed un altro a denominatore.

Non deve però intendersi che il “+ sopra” corrisponda necessariamente al “+ sotto”, e altrettanto per i due “-”; le combinazioni di segno possono invece essere qualsiasi, per cui il “ $\pm$ ” deve rimanere, anche nel passaggio successivo.

NOTA 2:

questa formula è una “identità condizionata”,

ossia vale ad eccezione di casi particolari, nei quali perde invece significato.

Affinché la formula sussista deve innanzitutto esistere $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, deve cioè essere $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ossia $\alpha \neq \pi + 2k\pi$;

inoltre deve essere diverso da 0 il denominatore introdotto, ovvero $1 + \cos \alpha$;

ma $1 + \cos \alpha \neq 0$ equivale a $\cos \alpha \neq -1$, $\alpha \neq \pi + 2k\pi$

e quindi non c'è altra condizione che si affianchi alla precedente.

La formula $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ ha però due alternative, che sono senz'altro più comode ed efficienti, perché

- non contengono il doppio segno
- e per giunta sono “razionali”, nel senso che non contengono nemmeno la radice.

Vediamole.

$$\begin{aligned} \boxed{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{\cancel{2} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{\cancel{2}}} = \boxed{\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cancel{2} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cancel{2}}}{\sin \alpha} = \boxed{\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}} \end{aligned}$$

Condizioni di validità:

esistenza di $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$: $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($\alpha \neq \pi + 2k\pi$)

$1 + \cos \alpha \neq 0$ $\cos \alpha \neq -1$, $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ già scritta

Condizioni di validità:

esistenza di $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$: $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($\alpha \neq \pi + 2k\pi$)

$\sin \alpha \neq 0$, $\alpha \neq k\pi$ condizione che "contiene" la precedente, rendendola quindi inutile

ESERCIZI

Verifica, con “bisezione”, che: $\sin\left(\frac{60^\circ}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{60^\circ}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, e similari.

26. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE DEGLI ARCHI DI $\frac{\pi}{8}$ ($22^\circ 30'$) E $\frac{\pi}{10}$ (18°)

Le formule di bisezione ci permettono di calcolare le **funzioni goniometriche dell'arco** $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}$:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \rightarrow \boxed{\sin \frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \rightarrow \boxed{\cos \frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \dots = \boxed{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \rightarrow \boxed{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \boxed{\sqrt{2} - 1}$$

Il valore $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

può anche essere determinato
mediante il **Teorema della Bisettrice**:

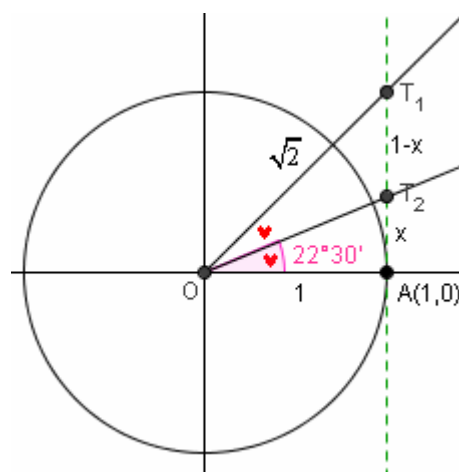
“In un triangolo, la bisettrice di un lato
divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati”.

Applicando questo teorema al triangolo AOT_1 della figura,
nel quale $\widehat{AOT_1} = 45^\circ$ e quindi $AT_1 = OA = 1$, $OT_1 = \sqrt{2}$,
si ottiene

$$AT_2 : T_2T_1 = OA : OT_1$$

$$x : (1 - x) = 1 : \sqrt{2} \quad \left(x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right)$$

$$1 - x = x\sqrt{2} \quad x\sqrt{2} + x = 1 \quad x(\sqrt{2} + 1) = 1 \quad x = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1$$



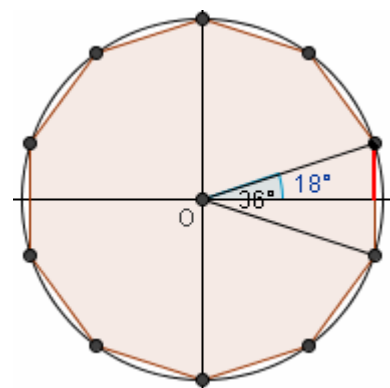
Per quanto riguarda le **funzioni dell'arco di** $\frac{\pi}{10}$ (18°)

possiamo approfittare del fatto che
in un decagono regolare inscritto in una circonferenza
gli angoli al centro che insistono sui lati misurano $360^\circ : 10 = 36^\circ$.

E' noto che il lato del decagono regolare inscritto
è uguale alla sezione aurea del raggio, cioè vale

$$\ell_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} r \quad (\text{nella circonferenza goniometrica, di raggio 1, } \ell_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}).$$

$$\text{Avremo allora } \boxed{\sin 18^\circ} = \frac{1}{2} \ell_{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{5} - 1}{4}}$$



A questo punto, $\cos 18^\circ$ (che corrisponde all'*apotema* del decagono regolare)
potrà essere determinato con Pitagora (o, il che è praticamente lo stesso, con la Prima Relazione Fondamentale):

$$\boxed{\cos 18^\circ} = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{16}} = \sqrt{\frac{16 - (5 + 1 - 2\sqrt{5})}{16}} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}} = \boxed{\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}}$$

Infine sarà

$$\begin{aligned} \boxed{\operatorname{tg} 18^\circ} &= \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{5} - 1}{4}}{\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5 + 1 - 2\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}}} = \\ &= \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 5}{25 - 5}} = \sqrt{\frac{20 - 8\sqrt{5}}{20}} = \boxed{\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}} \text{ oppure } \boxed{\frac{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}}{5}} \end{aligned}$$

27. UNA TABELLA RIASSUNTIVA: LE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ALCUNI “ARCHI NOTEVOLI”

gradi	radiani	sen	cos	tg	cotg
0°	0	0	1	0	Non esiste, è infinita
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
22° 30'	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
54°	$\frac{3}{10}\pi$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
67° 30'	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
72°	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
75°	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Non esiste, è infinita	0

28. LE FORMULE PARAMETRICHE

Trovano applicazione nella risoluzione delle cosiddette “equazioni goniometriche lineari”, che vedremo.

Esprimono $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ in funzione di $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ (che di solito viene poi indicata brevemente con t).

$$\sin \alpha \underset{\text{NOTA 1}}{=} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \underset{\text{NOTA 2}}{=} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \underset{\text{NOTA 3}}{=} \frac{\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

NOTA 1:

formula di duplicazione
per il seno,
con angoli dimezzati

NOTA 2:

è lecito dividere per $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}$,
perché $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \quad \forall \alpha$
(Prima Relazione Fondamentale)

NOTA 3:

per la proprietà invariantiva delle frazioni,
il valore di una frazione resta invariato
se si dividono
sia il numeratore che il denominatore
per uno stesso numero diverso da 0

CONDIZIONI DI VALIDITÀ:

La formula introduce $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, quindi vale a condizione di supporre questa esistente: $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\boxed{\alpha \neq \pi + 2k\pi}$

Inoltre, il procedimento per costruire la formula ha richiesto

la divisione per $\cos \frac{\alpha}{2}$, operazione effettuabile a patto di supporre $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$,

condizione che però equivale a quella già posta prima: $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq \pi + 2k\pi$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \dots = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{(stesso procedimento di prima, e stesse condizioni di validità)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

ottenibile dividendo membro a membro le due formule precedenti;
Le condizioni di validità sono qui

- l'esistenza di $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, quindi $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\boxed{\alpha \neq \pi + 2k\pi}$
- l'esistenza di $\operatorname{tg} \alpha$, quindi $\boxed{\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$
- e inoltre (per il fatto che si è diviso per $\frac{1-t^2}{1+t^2}$)

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} \neq 0 \quad \text{ossia} \quad 1-t^2 \neq 0, \quad t^2 \neq 1, \quad t \neq \pm 1$$

$$\text{ovvero } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \neq \pm 1, \quad \frac{\alpha}{2} \neq \pm \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad \alpha \neq \pm \frac{\pi}{2} + k\pi$$

che è poi, a ben guardare, equivalente ad $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, già posta prima.

RIASSUNTO
DELLE
FORMULE
PARAMETRICHE

$$\left(t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\boxed{\alpha \neq \pi + 2k\pi}$$

$$\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\boxed{\alpha \neq \pi + 2k\pi}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\boxed{\alpha \neq \pi + 2k\pi, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$$

ESERCIZIO

Verifica che eseguendo il calcolo $\sin^2 x + \cos^2 x$ per il tramite delle formule parametriche, si ottiene 1.

29. IDENTITA' GONIOMETRICHE

RICAPITOLAZIONE DELLE FORMULE

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$	FORMULA DI SOTTRAZIONE PER IL COSENO
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	FORMULA DI ADDIZIONE PER IL COSENO
$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$	FORMULA DI ADDIZIONE PER IL SENO
$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$	FORMULA DI SOTTRAZIONE PER IL SENO
$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \left[\alpha + \beta, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$	FORMULA DI ADDIZIONE PER LA TANGENTE
$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \left[\alpha - \beta, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$	FORMULA DI SOTTRAZIONE PER LA TANGENTE

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{FORMULA DI DUPLICAZIONE PER IL SENO}$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases} \quad \text{FORMULA DI DUPLICAZIONE PER IL COSENO}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \text{FORMULA DI DUPLICAZIONE PER LA TANGENTE,}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \rightarrow \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases} \rightarrow \cos \alpha = \begin{cases} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \end{cases}$$

FORMULE
DI DUPLICAZIONE
CON ANGOLI DIMEZZATI

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

FORMULE DI BISEZIONE

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\alpha \neq \pi + 2k\pi$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \alpha \neq k\pi$$

FORMULE PARAMETRICHE

$$(t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2})$$

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\alpha \neq \pi + 2k\pi$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\alpha \neq \pi + 2k\pi, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Più avanti, presenteremo anche le formule seguenti:

FORMULE DI PROSTAFERESI

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

FORMULE DI WERNER

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

Gli esercizi proposti qui di seguito sono IDENTITA' a base di funzioni goniometriche.

La richiesta, in esercizi di questo tipo, è di controllare che l'uguaglianza proposta è effettivamente una identità, ossia è verificata per qualsiasi valore dell'arco (o degli archi) coinvolti, eccettuati al più quei valori per i quali il primo membro, o il secondo, o entrambi, dovessero perdere significato.

Per verificare la correttezza di una identità si svolgono i calcoli a 1° membro e, separatamente, a 2° membro, con l'obiettivo di far vedere che essi possono essere ricondotti ad una medesima espressione.

Ma è pure possibile, nel procedimento, trasportare termini da un membro all'altro cambiandoli di segno, oppure moltiplicare o dividere ambo i membri per una stessa quantità diversa da 0, perché, se così facendo si perviene ad una uguaglianza vera, allora ciò implica che era vera anche l'uguaglianza da cui si era partiti.

Esempio: verificare l'identità $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = (1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)$

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = (1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2} = 1-\operatorname{sen}^2 x$$

$$\frac{1}{1+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

$$\frac{1}{\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = \cos^2 x, \text{ OK !!!}$$

a) Identità che richiedono di utilizzare le tre Relazioni Fondamentali della Goniometria

$$\begin{array}{lll} 1) \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 & 2) \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha & 3) \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \\ 4) \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} \cdot \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = 1 & 5) \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha}{1+\operatorname{cotg}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha & 6) \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \\ 7) \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1+\cos \alpha} = \frac{1-\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} & 8) \cos^4 \alpha - \operatorname{sen}^4 \alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \alpha & 9) \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} + \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta} = 0 \end{array}$$

b) Identità che richiedono di utilizzare gli archi "associati", complementari, o che differiscono di $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3}{2}\pi$

$$\begin{array}{ll} 10) \operatorname{sen}(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\operatorname{sen} \alpha & 11) \operatorname{sen}(\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 0 \\ 12) \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) + \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) + \operatorname{sen}(270^\circ - \alpha) + \operatorname{sen}(360^\circ - \alpha) = 0 & \\ 13) \operatorname{sen}(\alpha + 90^\circ) + \operatorname{sen}(\alpha + 180^\circ) + \operatorname{sen}(\alpha + 270^\circ) + \operatorname{sen}(\alpha + 360^\circ) = 0 & \\ 14) \operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) \operatorname{cotg}(\alpha - 90^\circ) = 1 & 15) \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \cos(\alpha + \pi) + \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha \\ 16) \operatorname{sen}^2(\alpha - \pi) + \cos^2(\alpha + \pi) = 1 & 17) \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) - \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)} = \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) \\ 18) [\operatorname{sen}(-\alpha) + \cos(-\alpha)]^2 = 1 - 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha & 19) \cos(2\pi - \alpha) - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sen}(\alpha + 3\pi) = \frac{1}{\cos \alpha} \\ 20) \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) = 2\cos \alpha & 21) [1 - \cos(\alpha + 270^\circ)][1 - \cos(90^\circ + \alpha)] = \cos^2 \alpha \end{array}$$

c) Identità che richiedono di utilizzare le formule di addizione e sottrazione

$$22) \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$23) \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} = -\operatorname{cotg} \alpha$$

$$24) \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$25) \sin(\alpha + 30^\circ) - \sin(\alpha - 30^\circ) = \cos \alpha$$

$$26) \cos(\alpha + 60^\circ) + \cos(\alpha - 60^\circ) = \cos \alpha$$

$$27) \sin(\alpha + 45^\circ) + \cos(\alpha - 45^\circ) = \sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$28) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \alpha$$

$$29) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$30) \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = 1$$

d) Identità che richiedono di utilizzare le formule di duplicazione

$$31) \frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha$$

$$32) \frac{\cos 2\alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha + 1} + 1 = \cos \alpha$$

$$33) \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha$$

$$34) \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$35) \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \quad [\text{NOTA: } \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \dots]$$

$$36) \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$37) \sin \alpha + \cos \alpha = 1 - 2\sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$38) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$39) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{8}$$

$$40) \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

e) Identità che richiedono di utilizzare le formule di bisezione

$$41) \sin \alpha \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$42) (1 + \cos \alpha)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$43) \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \sin \alpha \qquad 44) \frac{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \cos \alpha$$

30. EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Le ripartiremo in tipologie.

1) Equazioni goniometriche elementari

Sono quelle della forma $\sin x = q$ $\cos x = q$ $\tan x = q$ essendo q un numero reale assegnato. Ce ne siamo già occupati; pertanto, ci limitiamo qui ad aggiungere qualche ulteriore esempio.

$$\text{a) } 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \quad 2\cos x = \sqrt{2} \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{b) } 4\sin x + 1 = \sqrt{5} \quad 4\sin x = \sqrt{5} - 1 \quad \sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{10} + 2k\pi \vee x = \frac{9}{10}\pi + 2k\pi$$

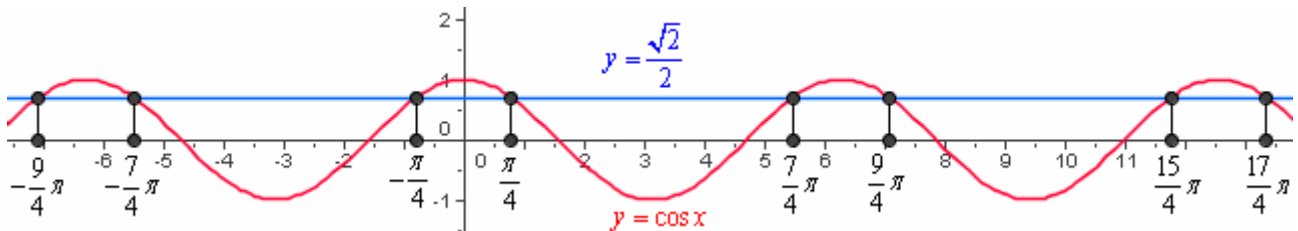
$$\text{c) } \tan x = 1 - \sqrt{2} \text{ (soluzioni in gradi)}$$

$$x = -22^\circ 30' + k \cdot 180^\circ$$

$$\text{d) } 5\sin x - 1 = 0 \quad \sin x = \frac{1}{5}$$

$$x = \arcsin \frac{1}{5} + 2k\pi \vee x = \pi - \arcsin \frac{1}{5} + 2k\pi$$

Osserviamo che, volendo, una equazione goniometrica elementare può essere risolta graficamente pensando di intersecare il grafico della sinusoide, o cosinusoide, o tangentoide, con una retta orizzontale. Ad esempio, l'equazione a) ammette la seguente interpretazione grafica:



2) Equazioni goniometriche simili alle elementari

$$\text{a) } 2\sin(2x + 7^\circ) - 1 = 0$$

$$2\sin(2x + 7^\circ) = 1$$

$$\sin(2x + 7^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$2x + 7^\circ = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \vee 2x + 7^\circ = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$2x = 23^\circ + k \cdot 360^\circ \vee 2x = 143^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x = 11^\circ 30' + k \cdot 180^\circ \vee x = 71^\circ 30' + k \cdot 180^\circ$$

Se interessassero solo le soluzioni nel "primo giro" ($0^\circ \leq x \leq 360^\circ$), daremmo a $k \in \mathbb{Z}$ quei valori che permettono di restare nell'ambito del "primo giro", ottenendo
 $x = 11^\circ 30' \quad x = 71^\circ 30'$
 $x = 191^\circ 30' \quad x = 251^\circ 30'$

$$\text{b) } \sqrt{3}\tan(10^\circ - 4x) + 1 = 0$$

$$\tan(10^\circ - 4x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$10^\circ - 4x = -30^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$-4x = -40^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$x = 10^\circ - k \cdot 45^\circ$$

$$x = 10^\circ + k \cdot 45^\circ \text{ (NOTA)}$$

... e nel 1° giro soltanto, le soluzioni sono
 $10^\circ, 55^\circ, 100^\circ, 145^\circ,$
 $190^\circ, 235^\circ, 280^\circ, 325^\circ$

NOTA

Spieghiamo l'ultimo passaggio, quando abbiamo cambiato un segno. Cosa indicava all'inizio il simbolo k ?

k indicava un intero relativo arbitrario.

Ma se k è un intero relativo arbitrario, allora anche il suo opposto $-k$ sarà un intero relativo arbitrario, quindi nulla ci impedisce, a questo punto, di indicare tale moltiplicatore intero arbitrario ancora con k .

Volendo essere formalmente impeccabili, si potrebbe usare nell'ultimo passaggio un simbolo nuovo, ad esempio k_1 , per indicare l'intero arbitrario $-k$ scrivendo dunque le soluzioni sotto la forma $x = 10^\circ + k_1 \cdot 45^\circ$; oppure, all'incontrario, appiccicare un indice 1 al "k" iniziale, ponendo poi alla fine $-k_1 = k$; ossia,

$$\tan(10^\circ - 4x) = -1/\sqrt{3}$$

$$10^\circ - 4x = -30^\circ + k_1 \cdot 180^\circ; \quad -4x = -40^\circ + k_1 \cdot 180^\circ;$$

$$x = 10^\circ - k_1 \cdot 45^\circ; \quad x = 10^\circ + k \cdot 45^\circ$$

c) $\sin \frac{x}{5} = 1$ (soluzioni in radianti)

$$\frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5}{2}\pi + 10k\pi$$

Nessuna soluzione, in questo caso, nel “primo giro”!

d) $\cos 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$4x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad 4x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad (\text{NOTA})$$

$$x = \frac{5}{24}\pi + k\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{7}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}$$

NOTA oppure: $4x = \pm \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

$$x = \pm \frac{5}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}$$

e) $\sin 2x = \frac{1}{3}$

$$2x = \arcsin \frac{1}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2k\pi$$

$$x = \frac{1}{2}\arcsin \frac{1}{3} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin \frac{1}{3} + k\pi$$

f) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{4}$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2k\pi$$

$$-\frac{1}{3}x = \pm \arccos \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\frac{1}{3}x = \underbrace{\pm}_{\substack{\text{sarebbe} \\ \text{stato } \mp, \\ \text{ma} \\ \text{ovviamente} \\ \text{è lo stesso}}} \arccos \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} \quad \underbrace{+2k\pi}_{\substack{\text{non abbiamo} \\ \text{cambiato il segno,} \\ \text{essendo } k \text{ un} \\ \text{intero relativo} \\ \text{arbitrario (NOTA)}}$$

NOTA: ci siamo comportati, insomma, secondo la NOTA relativa al precedente esercizio b). Sostituendo il simbolo k al posto di $-k$, nulla cambia, perché, al variare di k nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi, sia $-k$ che $+k$ assumono gli stessi valori.

$$x = \pm 3\arccos \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\pi + 6k\pi$$

g) $\tan 2x = 2$

$$2x = \arctan 2 + k\pi$$

$$x = \frac{1}{2}\arctan 2 + k\frac{\pi}{2}$$

Osserviamo che $\arctan 2$ vale circa 63 gradi e mezzo

h) $\sin 3x = 0$

$$3x = k\pi$$

$$x = k\frac{\pi}{3}$$

i) $\cos \frac{x}{4} = 0$

$$\frac{x}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = 2\pi + 4k\pi$$

Vediamo ora qualche variante, come le equazioni della forma

- $\sin(\dots) = \sin(\dots)$ ossia $\sin f(x) = \sin g(x)$
- $\cos(\dots) = \cos(\dots)$
- $\tan(\dots) = \tan(\dots)$

k) $\sin(7x + 30^\circ) = \sin 3x$

Due angoli hanno lo stesso seno quando sono uguali (a meno di interi giri) ma anche quando sono supplementari (sempre “a meno di interi giri”).

Quindi:

$$7x + 30^\circ = 3x + k \cdot 360^\circ \quad \vee \quad 7x + 30^\circ = 180^\circ - 3x + k \cdot 360^\circ$$

$$7x - 3x = -30^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \vee \quad 7x + 3x = 180^\circ - 30^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$4x = -30^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \vee \quad 10x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x = \frac{-30^\circ + k \cdot 360^\circ}{4} \quad \vee \quad x = \frac{150^\circ + k \cdot 360^\circ}{10}$$

$$\boxed{x = -7^\circ 30' + k \cdot 90^\circ \quad \vee \quad x = 15^\circ + k \cdot 36^\circ}$$

➔ Nel primo giro, le soluzioni sono dunque:
 $82^\circ 30'$ $172^\circ 30'$
 $262^\circ 30'$ $352^\circ 30'$
 15° 51° 87° 123° 159°
 195° 231° 267° 303° 339°

l) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

Due angoli hanno lo stesso coseno quando sono uguali (a meno di interi giri) ma anche quando sono opposti (sempre “a meno di interi giri”).

Quindi:

$$\frac{\pi}{3} - x = 3x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{3} - x = -3x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$-x - 3x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad -x + 3x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$-4x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$4x = \frac{\pi}{6} - 2k\pi \quad \vee \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi}$$

$x = \frac{\pi}{24} - k \frac{\pi}{2}$ che, data l'arbitrarietà di $k \in \mathbb{Z}$, possiamo riscrivere come

$$\boxed{x = \frac{\pi}{24} + k \frac{\pi}{2}}$$

m) $\tan 5x = \tan 2x$

Due angoli hanno la stessa tangente quando sono uguali, a meno di multipli di 180° .

Quindi:

$$5x = 2x + k\pi \quad 3x = k\pi \quad \boxed{x = k \frac{\pi}{3}}$$

n) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$

Qui converrà mutare il coseno in seno (o viceversa) passando al complementare!

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \quad \vee \quad x + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi$$

...

$$\boxed{x = \frac{\pi}{18} + 2k \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$$

3) Equazioni goniometriche riconducibili alle elementari

a) $6\cos^2 x + \cos x = 1$

$$6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

Questa è sostanzialmente un'equazione di 2° grado in cui fa da incognita la quantità $\cos x$.

A questo punto potremmo indicare questo blocco incognito $\cos x$ con una singola lettera,

ad esempio z , ottenendo l'equazione $6z^2 + z - 1 = 0$

dalla quale si ricaverebbe z per poi, infine, da z risalire a x ;

oppure, più rapidamente, possiamo scrivere

$$(\cos x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} = \begin{cases} -1/2 \\ 1/3 \end{cases}$$

$$\text{Ora: } \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi}; \quad \cos x = \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2k\pi}$$

C'è anche la possibilità di risolvere l' "equaz. di 2° grado nell'incognita $\cos x$ " scomponendo in fattori:

$$6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0; \quad 6\cos^2 x + 3\cos x - 2\cos x - 1 = 0; \quad 3\cos x(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1) = 0$$

$$(2\cos x + 1)(3\cos x - 1) = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \vee \cos x = \frac{1}{3} \quad \dots \text{ eccetera}$$

b) $\sin x + \cos^2 x + 1 = 0$

$$\sin x + 1 - \sin^2 x + 1 = 0; \quad -\sin^2 x + \sin x + 2 = 0$$

$$\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$$

$$(\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0 \quad (\text{NOTA})$$

$$\sin x = -1$$

$$\vee \sin x = 2 \quad (\text{IMPOSSIBILE})$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi} \text{ o, indifferentemente, } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

NOTA

Qui la scomposizione in fattori

è preferibile

perché particolarmente rapida;

è evidente che si sarebbe potuta,

in alternativa, applicare la formula

ottenendo gli stessi valori:

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

c) $\sin 2x + \cos x = 0$ (soluzioni in gradi)

$$2\sin x \cos x + \cos x = 0 \quad \dots \text{ e a questo punto basta scomporre in fattori!}$$

$$\cos x(2\sin x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \rightarrow \boxed{x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ} \vee \sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ \vee x = \begin{matrix} 330^\circ \\ (\text{oppure } -30^\circ) \end{matrix} + k \cdot 360^\circ}$$

ESERCIZI sulle equazioni goniometriche elementari o ad esse affini.

1) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ 2) $\cos x + \sqrt{3} = 0$ 3) $\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$ 4) $\cos 4x = -1$ 5) $\cos(150^\circ - x) = \cos 2x$

6) $\sin 2(x + \pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$ 7) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 8) $\sin x(\sin x + 2) + \cos^2 x = 0$

9) $\tan^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$ 10) $\cos^2 x + \cos x = 0$ 11) $8\sin^2 x + 1 = 6\sin x$ 12) $\sin(4x + 20^\circ) + \sin(2x + 10^\circ) = 0$

RISPOSTE

1) $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$ 2) *imposs.* 3) $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2k\pi = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2k\pi$

4) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ 5) $x = 50^\circ + k \cdot 120^\circ \vee x = -150^\circ + k \cdot 360^\circ$ (*opp.* $x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ$) 6) $x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{5} + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

7) $x = \frac{7}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{13}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ 8) $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$ (*o* $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$) 9) $x = k\frac{\pi}{4}$

10) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pi + 2k\pi$ 11) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \arcsin\frac{1}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \arcsin\frac{1}{4} + 2k\pi$

12) $x = -5^\circ + k \cdot 60^\circ \vee x = 85^\circ + k \cdot 180^\circ$

31. EQUAZIONI GONIOMETRICHE LINEARI IN SENO E COSENO

Sono quelle della forma

$$a \sin x + b \cos x + c = 0 \quad (a, b \neq 0)$$

e sono particolarmente importanti nelle applicazioni.

I) LINEARI OMOGENEE

Vediamo dapprima il caso $c = 0$
(equazione lineare “omogenea”):

$$a \sin x + b \cos x = 0 \quad (a, b \neq 0)$$

Essa si risolve in modo semplicissimo,
dividendo per $\cos x$.

Osserviamo che gli archi per i quali NON ha senso
tale procedura sono quelli il cui coseno è uguale a 0;
ma per tali archi,

che sono poi, nel 1° giro, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$,

il seno non è nullo (vale +1 o -1 a seconda dei casi)
e pertanto essi NON possono, comunque,
essere soluzioni dell'equazione in gioco.

Dunque:

$$\frac{a \sin x + b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a \frac{\sin x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\cos x} = 0$$

$$a \operatorname{tg} x + b = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a} \quad \text{che è un'equazione elementare!}$$

□ Esempio:

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$$

Dividendo per $\cos x$, si ottiene

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (\text{in gradi, } x = 30^\circ + k \cdot 180^\circ)$$

*Ricordiamo che un polinomio
si dice “omogeneo”
quando i suoi termini
hanno tutti lo stesso grado.*

Nel caso dell'equazione

$$a \sin x + b \cos x + c = 0$$

*i primi due termini vanno pensati
nelle variabili $\sin x$, $\cos x$ rispettivamente,
quindi sono di 1° grado,
e l'omogeneità si ha soltanto
a patto che manchi il termine di grado zero c .*

II)

LINEARI NON OMOGENEE

Vediamo ora le “lineari non omogenee”, ossia le equazioni della forma

$$a \sin x + b \cos x + c = 0 \quad (a, b, c \neq 0)$$

Per la risoluzione di queste, esistono diversi metodi alternativi.

PRIMO METODO: CON LE FORMULE PARAMETRICHE

Ricordiamo che tali formule sono

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \left(t = \tan \frac{x}{2}; \text{ le formule sono valide per } x \neq \pi + 2k\pi \right)$$

OSSERVAZIONE MOLTO IMPORTANTE:

Le formule parametriche valgono solo se $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ossia $x \neq \pi + 2k\pi$.

Pertanto se noi ci serviamo, per la risoluzione, di queste formule,

il nostro procedimento risolutivo viene ad escludere i valori $\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

D'altra parte, questi valori *potrebbero benissimo* essere soluzioni della nostra equazione!

Bisognerà quindi **completare la risoluzione** ricordandosi di **controllare, per sostituzione diretta, se $x = \pi$ è soluzione oppure no** (la cosa si può fare alla fine o all'inizio, è ovviamente lo stesso).

□ Facciamo un esempio:

$$\sin x - \cos x - 1 = 0$$

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0$$

$$\frac{2t - 1 + t^2 - 1 - t^2}{1+t^2} = 0$$

$$2t - 2 = 0 \quad (\text{osserviamo che non occorre porre alcuna condizione all'atto di spedire via il denominatore, perché l'espressione } 1+t^2 \text{ non si può mai annullare})$$

$$2t = 2$$

$$t = 1$$

$$\tan \frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Adesso andiamo a vedere se il valore $x = \pi$, che fin qui era stato lasciato da parte, è soluzione oppure no.

Sostituiamo nell'equazione iniziale π al posto di x , per vedere se l'uguaglianza è o non è verificata.

$$\sin x - \cos x - 1 = 0$$

$$\sin \pi - \cos \pi - 1 = 0$$

$$0 - (-1) - 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0 \quad \text{OK!!!}$$

Pertanto aggiungeremo al paniere delle soluzioni già trovate anche il valore $x = \pi$

(anzi: tutti i valori $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$).

In definitiva, le soluzioni dell'equazione considerata sono $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \pi + 2k\pi$.

SECONDO METODO: CON UN SISTEMA

Di fronte a un'equazione lineare non omogenea $a \sin x + b \cos x + c = 0$ ($a, b, c \neq 0$) possiamo anche pensare che la coppia $(\sin x, \cos x)$ di cui stiamo andando alla caccia soddisferà anche alla 1ª Relazione Fondamentale della Goniometria, e quindi impostare il sistema

$$\begin{cases} a \sin x + b \cos x + c = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

che è poi un banale sistema di 2° grado nelle due incognite $\sin x, \cos x$.

Ora, per comodità, possiamo utilizzare una simbologia che è "standard" in matematica: poniamo

$$\sin x = Y$$

$$\cos x = X$$

(la scelta dei simboli si deve al fatto che il seno è un'ordinata, mentre il coseno è un'ascissa)

e otteniamo $\begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ Y^2 + X^2 = 1 \end{cases}$; trovati i valori della coppia (X, Y) , da questi valori risaliremo a x .

□ Riprendiamo l'equazione che avevamo già risolto col primo metodo: $\boxed{\sin x - \cos x - 1 = 0}$. Avremo

$$\begin{cases} \sin x - \cos x - 1 = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \text{ e quindi}$$

$$\begin{cases} Y - X - 1 = 0 \\ Y^2 + X^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = X + 1 \\ Y^2 + X^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = X + 1 \\ (X + 1)^2 + X^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = X + 1 \\ (X + 1)^2 + X^2 = 1; \quad X^2 + 2X + 1 + X^2 = 1; \quad 2X^2 + 2X = 0; \quad 2X(X + 1) = 0; \quad X(X + 1) = 0; \quad X = 0 \vee X = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = X + 1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} X = -1 \\ Y = X + 1 = 0 \end{cases} \text{ ossia}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \cos x + 1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = \cos x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{x = \pi + 2k\pi}$$

E' interessante l'OSSERVAZIONE seguente.

Il sistema, nel nostro esempio il sistema $\begin{cases} Y = X + 1 \\ Y^2 + X^2 = 1 \end{cases}$,

potrebbe anche essere risolto per via grafica,

pensando ad un piano cartesiano OXY nel quale la prima equazione rappresenterà una retta, la seconda una circonferenza avente centro nell'origine e raggio uguale a 1, quindi ...
del tutto identica alla circonferenza goniometrica!!!

In questo modo si ha il vantaggio di

vedere immediatamente dalla figura quali sono gli archi-soluzione (o, almeno, le loro approssimazioni).

Guardiamo infatti la figura qui a fianco: i due punti di intersezione B(0,1) e C(-1,0) fra la retta $Y = X + 1$ e la circonferenza $Y^2 + X^2 = 1$ hanno come coordinate le soluzioni (0, 1) e (-1, 0) del nostro sistema.

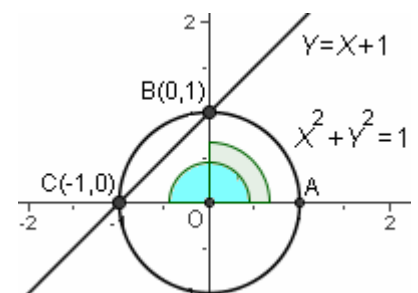
Pensiamo, tanto per fissare le idee, al punto B.

La sua ascissa, 0, coincide con il coseno dell'arco $\widehat{AB}$ mentre la sua ordinata, 1, è il seno di $\widehat{AB}$.

E allo stesso modo si potrebbe ragionare per C.

Dunque i due archi soluzione, nel primo giro, sono i due archi che da A vanno:

il primo, fino a B, il secondo fino a C, ossia $\widehat{AB} = 90^\circ$ e $\widehat{AC} = 180^\circ$, come si era in altro modo stabilito.



**TERZO METODO: CON L'UTILIZZO DI UN "ARCO AUSILIARIO",
DOPO AVER "NORMALIZZATO" LA COPPIA (a, b)**

Questo metodo prevede innanzitutto di "normalizzare" la coppia (a, b) dei coefficienti di $\sin x$ e $\cos x$, ossia di rimpiazzarli con due nuovi coefficienti (a' , b') determinati in modo che sia $a'^2 + b'^2 = 1$.

A tale scopo si dividerà l'equazione per il numero $\sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x + c &= 0 \\ \frac{a \sin x + b \cos x + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} &= \frac{0}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} &= 0 \end{aligned}$$

Dei tre nuovi coefficienti a' , b' , c' ci interessa in particolare, come dicevamo, che $a'^2 + b'^2 = 1$!

$$\text{Infatti } a'^2 + b'^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

Ora, se due numeri sono tali che la somma dei loro quadrati dà 1, ne consegue che quei due numeri sono interpretabili come le coordinate di un punto che sta sulla circonferenza goniometrica (essa com'è noto ha centro l'origine e raggio 1, e la sua equazione è $x^2 + y^2 = 1$) e pertanto sono interpretabili come il coseno e il seno di un arco opportuno! Detto dunque φ l'arco (l' "arco ausiliario" nel titolo del paragrafo) tale che

$$\begin{aligned} a' &= \cos \varphi \\ b' &= \sin \varphi \end{aligned}$$

l'equazione ottenuta "normalizzando"

$$a' \sin x + b' \cos x + c' = 0$$

diventerà

$$\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x + c' = 0$$

e dunque (formula di addizione per il seno)

$$\sin(x + \varphi) + c' = 0; \quad \sin(x + \varphi) = -c'$$

che è una variante di equazione elementare, facilissimamente risolubile.

□ Riprendiamo il solito esempio: $\boxed{\sin x - \cos x - 1 = 0}$.

$$\text{Avremo } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{e quindi } \frac{\sin x - \cos x - 1}{\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

$$\text{Ora, essendo } a' = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad b' = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad \left(\varphi = -\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{potremo scrivere } \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \sin x + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi + 2k\pi}$$

Gli ESERCIZI sulle equazioni goniometriche lineari in seno e coseno sono ALLA PAGINA SUCCESSIVA.

ESERCIZI sulle equazioni goniometriche lineari in seno e coseno

- 1) $\sin x + \cos x + 1 = 0$ 2) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$ 3) $\sin x + \sqrt{3} (\cos x - 1) = 0$
 4) $\sin x - \cos x + \sqrt{2} = 0$ 5) $\sin x + \cos x = 0$ 6) $\cos x - \sin x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
 7) $\sin x - 2 \cos x = 2$ 8) $\sqrt{3} \sin x = \cos x$ 9) $4 \sin x + 2\sqrt{3} \cos x = 5$

RISPOSTE

- 1) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \left(\text{opp. } \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right) \vee x = \pi + 2k\pi$ 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$
 3) $x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ 4) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \left(\text{opp. } \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \right)$ 5) $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi \left(\text{opp. } -\frac{\pi}{4} + k\pi \right)$
 6) $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \left(\text{opp. } -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \left(\text{opp. } -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right)$
 7) $x = 2 \arctg 2 + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi$ 8) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ 9) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = 2 \arctg \frac{14-3\sqrt{3}}{13} + 2k\pi$

32. EQUAZIONI OMOGENEE IN SENO E COSENO (O RICONDUCIBILI A QUESTA TIPOLOGIA)

I) Omogenee di 2° grado in seno e coseno

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

Se $a = 0$ o $c = 0$ si può risolvere per scomposizione in fattori;
 supponiamo dunque $a \neq 0, c \neq 0$.

Divideremo allora per $\cos^2 x$, ottenendo un'equazione di 2° grado nell'incognita $\tan x$.

$$\frac{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$a \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b \frac{\sin x \cancel{\cos x}}{\cos^2 x} + c \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} = 0$$

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

Osserviamo che questo procedimento esclude gli archi x per i quali $\cos x = 0$;

ma ciò a ben guardare risulta non restrittivo,

perché comunque tali archi non potrebbero essere soluzione!

Infatti, se un arco ha il coseno nullo, allora ha il seno che può valere $+1$ o -1 ,

e per un arco con coseno uguale a 0 e seno uguale a ± 1 l'equazione NON è verificata:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

diventa infatti

$$a \cdot (\pm 1)^2 + b \cdot (\pm 1) \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot 1 + 0 + 0 = 0$$

$$a = 0 \text{ uguaglianza falsa (stiamo supponendo } a \neq 0 \wedge c \neq 0)$$

□ Esempio: $3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$

Dividendo per $\cos^2 x$ si ottiene

$$3 \tan^2 x + 2 \tan x - 1 = 0$$

$$(\tan x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{3} = \frac{-1 \pm 2}{3} = \left\langle \begin{matrix} -1 \\ 1/3 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\tan x = -1 \quad \vee \quad \tan x = 1/3$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \vee \quad x = \arctg \frac{1}{3} + k\pi$$

II) Equazioni di 2° grado in seno e coseno, riconducibili ad omogenee

Sono quelle della forma

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x + d = 0,$$

nelle quali l'omogeneità è "rovinata" dalla presenza del termine noto d , ma può essere ripristinata moltiplicando d per la quantità $\sin^2 x + \cos^2 x$, che è sempre uguale a 1 per ogni x .

□ Esempio: $\boxed{\sin^2 x + \sin x \cos x + 4 \cos^2 x - 2 = 0}$

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \sin x \cos x + 4 \cos^2 x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x) &= 0 \\ \sin^2 x + \sin x \cos x + 4 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x &= 0 \\ -\sin^2 x + \sin x \cos x + 2 \cos^2 x &= 0 \\ \sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos^2 x &= 0 \\ \tan^2 x - \tan x - 2 &= 0 \\ (\tan x + 1)(\tan x - 2) &= 0 \\ \tan x = -1 \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi} \quad \vee \quad \tan x = 2 \quad \boxed{x = \arctan 2 + k\pi} \end{aligned}$$

III) Omogenee di 4° grado in seno e coseno

$$a \sin^4 x + b \sin^3 x \cos x + c \sin^2 x \cos^2 x + d \sin x \cos^3 x + e \cos^4 x = 0$$

Per risolverle, basterà dividere per $\cos^4 x$ ottenendo un'equazione di 4° grado in $\tan x$.

Il caso di gran lunga più frequente negli esercizi è

$$a \sin^4 x + c \sin^2 x \cos^2 x + e \cos^4 x = 0 \quad (b = d = 0)$$

nel quale la divisione per $\cos^4 x$ porta a ottenere un'equazione biquadratica nell'incognita $\tan x$.

□ Esempio: $\boxed{\sin^4 x + 2\sqrt{2} \sin^2 x \cos^2 x + 3(2\sqrt{2} - 3) \cos^4 x = 0}$

$$\begin{aligned} \tan^4 x + 2\sqrt{2} \tan^2 x + 3(2\sqrt{2} - 3) &= 0 \\ (\tan^2 x)_{1,2} &= -\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 3(2\sqrt{2} - 3)} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 6\sqrt{2} + 9} = \\ &= -\sqrt{2} \pm \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} = -\sqrt{2} \pm (3 - \sqrt{2}) = \begin{cases} -3 \\ 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \\ \tan^2 x = -3 &\text{ IMPOSSIBILE} \\ \tan^2 x = 3 - 2\sqrt{2} \quad \tan x = \pm \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} &= \pm \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \pm(\sqrt{2} - 1) \quad \boxed{x = \pm \frac{\pi}{8} + k\pi} \end{aligned}$$

IV) Riconducibili a omogenee di 4° grado in seno e coseno

$$a \sin^4 x + b \sin^3 x \cos x + c \sin^2 x \cos^2 x + d \sin x \cos^3 x + e \cos^4 x + f = 0$$

Qui, per ottenere un'equazione omogenea, basterà moltiplicare il termine noto f per

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$$

ESERCIZI sulle equazioni goniometriche omogenee in seno e coseno

1) $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 2$ 2) $\sin^2 x + (\sqrt{3} + 1)\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

3) $4\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ 4) $4\sin^2 x - \sin x \cos x = 0$ 5) $4\sin x \cos x = \sqrt{3}$

6) $\sin^4 x - 4\sin^2 x \cos^2 x + 3\cos^4 x = 0$ 7) $2\sin^4 x - 2\cos^4 x = 1$ 8) $16\sin^4 x - 32\sin^2 x \cos^2 x + 5 = 0$

RISPOSTE

1) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \arctan 4 + k\pi$ 2) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ 3) $x = \pm \arctan \frac{1}{2} + k\pi$

4) $x = k\pi \vee x = \arctan \frac{1}{4} + k\pi$ 5) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ 6) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$

7) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ 8) $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \pm \arctan \frac{\sqrt{35}}{7} + k\pi$

33. FORMULE DI PROSTAFERESI

“**Prostaféresi**” significa “**somma e differenza**”, e le formule di prostaféresi si possono applicare quando si ha una somma, o una differenza, di due seni, o di due coseni.

$$\sin p + \sin q =$$

$$\sin p - \sin q =$$

$$\cos p + \cos q =$$

$$\cos p - \cos q =$$

Vengono impiegate molto di frequente in Fisica (es. studio delle onde) e **sono utili quando per qualche ragione si desidera trasformare la somma o la differenza in prodotto**.

Le formule di prostaféresi si ricavano dalle formule di addizione e sottrazione, sommando o sottraendo membro a membro due opportune formule e poi ponendo $\alpha + \beta = p$, $\alpha - \beta = q$.

Sommiamo ...	Sottraiamo ...
$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$	$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$	$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ (*)	$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$ (**)
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ (***)	$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$ (****)

Poniamo ora $\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha - \beta = q \end{cases}$. Avremo $\begin{cases} (1) + (2) \{ 2\alpha = p + q \\ (1) - (2) \{ 2\beta = p - q \end{cases}$ e infine $\begin{cases} \alpha = \frac{p+q}{2} \\ \beta = \frac{p-q}{2} \end{cases}$

per cui le nostre quattro formule (*), (**), (***) e (****) diventeranno rispettivamente

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$	LE QUATTRO FORMULE DI PROSTAFERESI
$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$	

Osserviamo che il nostro procedimento è stato di partire da due angoli arbitrari α, β per giungere *alla fine* ai due angoli $\alpha + \beta = p$, $\alpha - \beta = q$.

D'altra parte, se sono dati *in partenza* due qualsiasi angoli p, q ,

è comunque sempre possibile trovare due altri angoli α, β tali che si abbia $\alpha + \beta = p$, $\alpha - \beta = q$:

si tratta degli angoli $\alpha = \frac{p+q}{2}$, $\beta = \frac{p-q}{2}$.

Questa semplice considerazione mostra che le formule trovate valgono *qualunque sia* la coppia di angoli p, q alle quali noi vogliamo riferirle.

E se avessimo invece $\sin p \pm \cos q$, e desiderassimo trasformare la somma o differenza in prodotto?

Nessun problema! Basterà scrivere $\sin p \pm \cos q = \begin{cases} \sin p \pm \sin(90^\circ - q) = \text{ecc.} \\ \text{oppure} \\ \cos(90^\circ - p) \pm \cos q = \text{ecc.} \end{cases}$

□ Esempio 1: risolvere (soluzioni in gradi) l'equazione $\cos 4x + \cos 2x = \cos 3x$

$$2 \cos \frac{4x+2x}{2} \cos \frac{4x-2x}{2} = \cos 3x$$

$$2 \cos \frac{6x}{2} \cos \frac{2x}{2} = \cos 3x$$

$$2 \cos 3x \cos x = \cos 3x \quad (\text{NOTA})$$

$$2 \cos 3x \cos x - \cos 3x = 0$$

$$\cos 3x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\cos 3x = 0 \quad 3x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \boxed{x = 30^\circ + k \cdot 60^\circ}$$

$$2 \cos x - 1 = 0 \quad 2 \cos x = 1 \quad \cos x = 1/2 \quad \boxed{x = \pm 60^\circ + k \cdot 360^\circ}$$

NOTA

Qui possiamo portare tutto a 1° membro, raccogliendo poi $\cos 3x$, oppure anche semplificare per $\cos 3x$ tenendo conto però che i valori di x per i quali è verificata l'uguaglianza $\cos 3x = 0$ saranno anch'essi soluzioni dell'equazione (“soluzioni trovate per strada”)

□ Esempio 2: risolvere (soluzioni in radianti) l'equazione

$$\boxed{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0}$$

$$(\sin 4x + \sin 2x) + (\sin 3x + \sin x) = 0$$

$$2 \sin \frac{4x+2x}{2} \cdot \cos \frac{4x-2x}{2} + 2 \sin \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2} = 0$$

$$\cancel{2 \sin 3x \cdot \cos x} + \cancel{2 \sin 2x \cdot \cos x} = 0$$

$$\cos x (\sin 3x + \sin 2x) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$$

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \text{ (NOTA)} \quad \boxed{x = \frac{2}{5}k\pi \vee x = \pi + 2k\pi}$$

NOTA

Questa equazione si può risolvere in due modi:

- ancora con prostaferesi

$$2 \sin \frac{3x+2x}{2} \cdot \cos \frac{3x-2x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{5x}{2} = 0 \vee \cos \frac{x}{2} = 0 \text{ ecc.}$$

- oppure scrivendo

$$\sin 3x = -\sin 2x$$

$$\sin 3x = \sin(-2x)$$

$$3x = -2x + 2k\pi \vee 3x = \pi + 2x + 2k\pi \text{ ecc.}$$

34. FORMULE DI WERNER

Queste fanno il servizio inverso rispetto alle formule di prostaferesi, perché trasformano un prodotto in una somma o differenza.

Si ricavano anch'esse sommando o sottraendo due opportune formule di addizione e sottrazione; in pratica, se andiamo a rivedere il lavoro fatto per ricavare le formule di prostaferesi, e ci fermiamo a metà strada, ci ritroviamo di fronte

LE TRE FORMULE DI WERNER, che sono **quelle in grassetto nel riquadro sottostante**.

$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \quad (*)$ $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$	$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta \quad (**)$ $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$	La formula ottenuta è però sostanzialmente una replica della precedente!
$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad (***)$ $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$	$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta \quad (****)$ $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$	

□ Esempio: risolvere (soluzioni in radianti) l'equazione

$$\boxed{\sin 4x \sin 3x = \sin 2x \sin x}$$

$$-\frac{1}{2} [\cos(4x+3x) - \cos(4x-3x)] = -\frac{1}{2} [\cos(2x+x) - \cos(2x-x)]$$

$$\cancel{\cos 7x} - \cancel{\cos x} = \cancel{\cos 3x} - \cancel{\cos x}$$

$$7x = 3x + 2k\pi \vee 7x = -3x + 2k\pi$$

$$4x = 2k\pi \vee 10x = 2k\pi$$

$$\boxed{x = k \frac{\pi}{2} \vee x = k \frac{\pi}{5}}$$

ESERCIZI sulle formule di prostaferesi e di Werner

1) Dimostra che:

a) $\frac{\cos 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

b) $\frac{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 6\alpha - \cos 2\alpha} = -\operatorname{cotg} 4\alpha$;

c) $\cos 58^\circ = 2 \cos 74^\circ \cos 16^\circ$

d) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$

2) Risolvi le equazioni:

a) $\cos 5x - \cos 3x + \sin x = 0$

b) $\sin 5x + \cos 3x - \sin x = 0$

c) $\sin 2x + \sin 4x = 2 \sin 45^\circ \cos x$

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI

1) $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{24} + k \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{5}{24}\pi + k \frac{\pi}{2}$

2) $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{7}{12}\pi + k\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi + k\pi$

3) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

35. ESERCIZI SULLE EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Determina le soluzioni delle seguenti equazioni nell'intervallo $[0, 2\pi]$

$$1) (\sin x - 5)(5\sin x - 1) = 0$$

$$2) \sin x - (2 + \sqrt{3})\cos x = 0$$

$$3) (2 + \sqrt{3})\sin x \cos x = 0$$

$$4) (\sin x - 1)(\sin x + \sqrt{3}) = 0$$

$$5) (\tan x - 1)(\tan x + \sqrt{3}) = 0$$

$$6) 2\cos x(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$$

$$7) \sin x \cos x = \sin^2 x$$

$$8) 2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$$

$$9) 8\sin^4 x = \sin x$$

$$10) 2\sin^2 x + \cos x = 1$$

$$11) \tan x = \frac{(\tan x + 1)(\tan x - 1)}{2}$$

$$12) \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$13) \sin 2x = \sin x$$

$$14) \sin 7x - \sin x = 0$$

$$15) 2\sin^2 3x = \sin 3x + 1 = 0$$

$$16) \cos 4x + \cos 2x = 0$$

$$17) \tan 8x \cdot \tan x = 0$$

$$18) \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$$

$$19) \sin 3x = \cos 2x$$

$$20) \sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 2 = 0$$

$$21) \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$22) \sin 5x + \sin x = \sin 3x$$

$$23) 2\sin x + 5\cos x - 2 = 0$$

$$24) 2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$$

$$25) \cos 2x + 2\sin^2 \frac{x}{2} = 1$$

$$26) 8\sin^2 x(\sin^2 x - \cos^2 x) = 3$$

RISPOSTE

- 1) $\arcsin \frac{1}{5}, \pi - \arcsin \frac{1}{5}$
- 2) $\frac{5}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi$
- 3) $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$
- 4) $\frac{\pi}{2}$
- 5) $\frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{5}{3}\pi$
- 6) $\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi$
- 7) $0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5}{4}\pi, 2\pi$
- 8) π
- 9) $0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi, 2\pi$
- 10) $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$
- 11) $\frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi$
- 12) *imposs.*
- 13) $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$
- 14) $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{7}{8}\pi, \pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{15}{8}\pi, 2\pi$
- 15) $\frac{\pi}{6}, \frac{7}{18}\pi, \frac{11}{18}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{19}{18}\pi, \frac{23}{18}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{31}{18}\pi, \frac{35}{18}\pi$
- 16) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$
- 17) $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{8}\pi, \pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{15}{8}\pi, 2\pi$
- 18) $\frac{\pi}{3}$
- 19) $\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9}{10}\pi, \frac{13}{10}\pi, \frac{17}{10}\pi$
- 20) $0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$
- 21) $\frac{5}{4}\pi, \frac{23}{12}\pi$
- 22) $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi, 2\pi$
- 23) $\frac{\pi}{2}, 2\pi - 2\arctg \frac{3}{7}$
- 24) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$
- 25) $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$
- 26) $\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$

36. DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

A. ELEMENTARI

- La disequazione $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

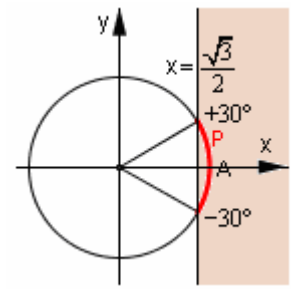
ci chiede di stabilire quali sono gli archi il cui coseno è maggiore di $\sqrt{3}/2$. Per determinarli, possiamo disegnare una circonferenza goniometrica ed evidenziare i suoi punti aventi **ascissa** maggiore di $\sqrt{3}/2$, per stabilire di quali archi essi costituiscono l'estremo terminale.

Nell'ambito del primo giro, gli archi-soluzione sono dunque, in gradi,
 $0^\circ \leq x < 30^\circ$ come pure $330^\circ < x \leq 360^\circ$;

e l'insieme di *tutte* le soluzioni, anche quelle fuori dal 1° giro, è
 $k \cdot 360^\circ \leq x < 30^\circ + k \cdot 360^\circ \vee 330^\circ + k \cdot 360^\circ < x \leq 360^\circ + k \cdot 360^\circ$.

Una scrittura equivalente, ma preferibile perché più elegante e compatta, è
 $-30^\circ + k \cdot 360^\circ < x < 30^\circ + k \cdot 360^\circ$.

Invece scrivere $330^\circ + k \cdot 360^\circ < x < 30^\circ + k \cdot 360^\circ$ sarebbe SBAGLIATO: prova a porre, ad esempio, $k = 0$ e vedrai che si otterrebbe $330^\circ < x < 30^\circ$ il che comporterebbe la disuguaglianza $330^\circ < 30^\circ$, evidentemente falsa.



Qui in figura possiamo vedere la retta di equazione $x = \sqrt{3}/2$

e, ombreggiati, i punti del piano cartesiano la cui ascissa è $> \sqrt{3}/2$.

Prendi un punto P sull'arco evidenziato, e disegna, o immagina, il coseno di $\widehat{AP}$! Esso risulterà $> \sqrt{3}/2$.

- Risolviamo ora la $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

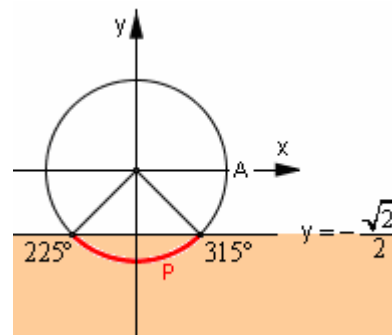
Si tratta di individuare i punti della circonferenza goniometrica

che hanno **ordinata** minore di $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Essi sono evidenziati nella figura qui a fianco: sono le intersezioni fra la circonferenza goniometrica e il semipiano che nella figura è stato ombreggiato.

Gli archi, il cui secondo estremo cade in uno di questi punti, sono

$$225^\circ + k \cdot 360^\circ < x < 315^\circ + k \cdot 360^\circ$$



I punti P dell'arco evidenziato sono quelli per i quali il seno dell'arco $\widehat{AP}$ (disegnalo, o immaginalo nella tua mente!) è $< -\frac{\sqrt{2}}{2}$

- E se avessimo $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$?

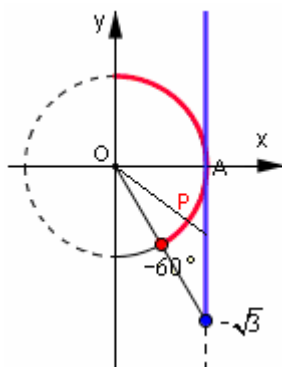
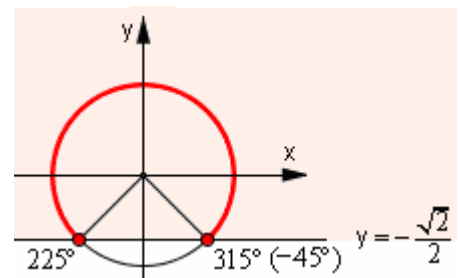
Allora la parte di circonferenza goniometrica che interessa sarebbe quella evidenziata nel disegno, estremi compresi.

Soluzioni:

$$-45^\circ + k \cdot 360^\circ \leq x \leq 225^\circ + k \cdot 360^\circ,$$

o anche

$$k \cdot 360^\circ \leq x \leq 225^\circ + k \cdot 360^\circ \vee 315^\circ + k \cdot 360^\circ \leq x \leq 360^\circ + k \cdot 360^\circ.$$



Le soluzioni della disequazione $\tan x \geq -\sqrt{3}$ sono quegli archi $\widehat{AP}$ per i quali la retta OP va a intersecare la retta verticale di destra in un punto di ordinata $\geq -\sqrt{3}$

$$\square \tan x \geq -\sqrt{3}$$

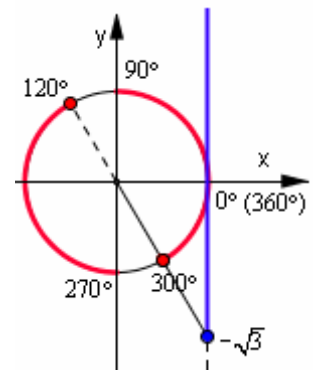
Per le disequazioni goniometriche elementari che coinvolgono la TANGENTE, un **SUGGERIMENTO PREZIOSO** è quello di considerare sempre soltanto la "META' DESTRA DELLA TORTA" (archi da -90° a $+90^\circ$, esclusi naturalmente $\pm 90^\circ$ perché a $\pm 90^\circ$ la tangente non esiste) e utilizzare il fatto che la tangente è periodica di periodo "mezzo giro" (180°).

Le soluzioni della disequazione

$$\tan x \geq -\sqrt{3}$$

sono dunque:

$$-60^\circ + k \cdot 180^\circ \leq x < 90^\circ + k \cdot 180^\circ$$



Questa figura mostra le soluzioni in tutto il "primo giro":

$$0^\circ \leq x < 90^\circ$$

$$120^\circ \leq x < 270^\circ$$

$$300^\circ \leq x \leq 360^\circ$$

B. DI 2° GRADO

- $8\sin^2 x - 6\sin x + 1 < 0$ Questa è una disequazione di 2° grado in $\sin x$.

Poniamo $\sin x = z$ e la disequazione diventerà $8z^2 - 6z + 1 < 0$

L'equazione associata è $8z^2 - 6z + 1 = 0$ e, risolvendola, si trovano le soluzioni $z = 1/4 \vee z = 1/2$.

Allora avremo (poiché si devono prendere i valori interni) $1/4 < z < 1/2$ quindi $1/4 < \sin x < 1/2$.

Gli archi z il cui seno è compreso fra $1/4$ e $1/2$ sono evidenziati in figura.

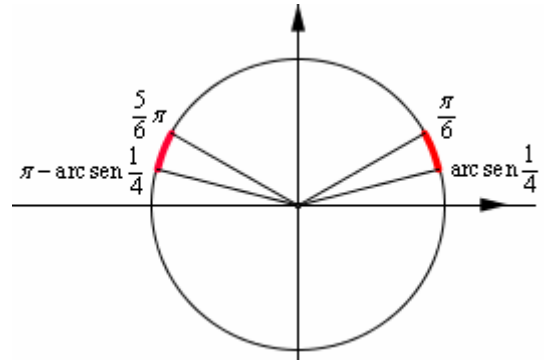
Le soluzioni della disequazione proposta sono dunque

$$\arcsen \frac{1}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \pi - \arcsen \frac{1}{4} + 2k\pi$$

La posizione $\sin x = z$ può, volendo, essere evitata; basta operare sul blocco $\sin x$ come se fosse una singola lettera:

$$8\sin^2 x - 6\sin x + 1 < 0 \quad \underbrace{(\sin x)_{1,2}}_{\substack{\text{soluzioni} \\ \text{equazione} \\ \text{associata}}} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{8} = \left\langle \frac{1}{4} \right. \text{ da cui (valori interni) } \frac{1}{4} < \sin x < \frac{1}{2} \text{ e da qui } x.$$



- $2\cos^2 x + \cos x > 0$

Pongo $\cos x = z$ e ottengo $2z^2 + z > 0$, $z(2z+1) > 0$,

da cui si trae che le soluzioni dell'equazione associata sono 0 e $-1/2$.

Pertanto (valori esterni) avremo $z < -1/2 \vee z > 0$, ossia $\cos x < -1/2 \vee \cos x > 0$

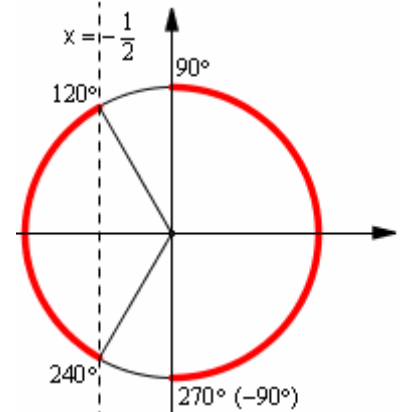
Gli archi z il cui coseno è minore di $-1/2$ o, in alternativa, maggiore di 0 , sono evidenziati in figura. Soluzioni:

$$-90^\circ + k \cdot 360^\circ < x < 90^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$120^\circ + k \cdot 360^\circ < x < 240^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Se ti riesce, cerca di evitare, per maggiore brevità, la posizione $\cos x = z$, semplicemente trattando il blocco $\cos x$ come se fosse una singola lettera:

$$2\cos^2 x + \cos x > 0 \quad \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{si annulla} \\ \text{per} \\ \cos x = 0}} \underbrace{(2\cos x + 1)}_{\substack{\text{si annulla} \\ \text{per} \\ \cos x = -1/2}} > 0 \quad \underbrace{\cos x < -\frac{1}{2} \vee \cos x > 0}_{\text{valori esterni}}$$



- $3\tg^2 x - 1 \geq 0$ Immediatamente: $3\tg^2 x \geq 1 \quad \tg^2 x \geq \frac{1}{3} \quad |\tg x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \tg x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \vee \tg x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Essendo coinvolta la tangente, consideriamo soltanto
 ← la “metà destra della torta”
 (angoli da -90° a $+90^\circ$)
 e teniamo presente che la tangente è periodica di periodo 180° :

Le soluzioni sono:

$$-90^\circ + k \cdot 180^\circ < x \leq -30^\circ + k \cdot 180^\circ$$

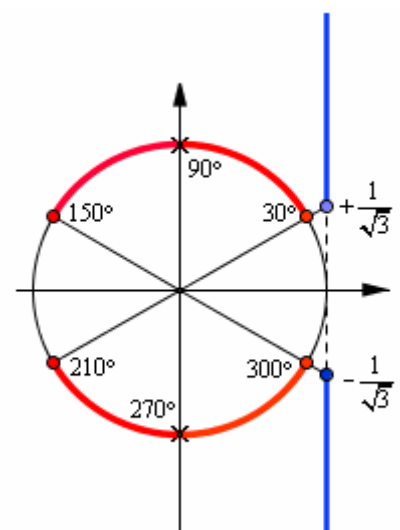
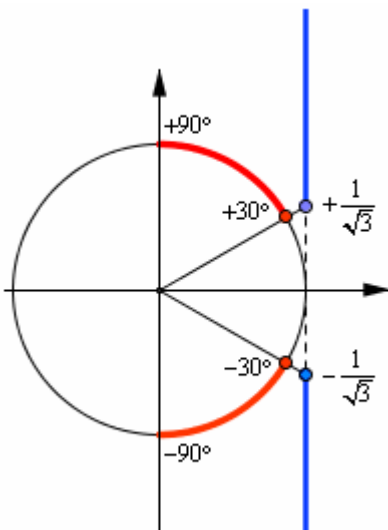
$$30^\circ + k \cdot 180^\circ \leq x < 90^\circ + k \cdot 180^\circ$$

Qui a destra sono rappresentate → le soluzioni del “1° giro”:

$$30^\circ \leq x \leq 150^\circ \text{ ma } x \neq 90^\circ;$$

$$210^\circ \leq x \leq 300^\circ \text{ ma } x \neq 270^\circ$$

Le “crocette” servono a escludere gli archi di 90° e 270° , per i quali la tangente non esiste.



C. DI GRADO SUERIORE AL 2°

$$\square \quad 4\operatorname{sen}^3 x \cos x + 2\operatorname{sen}^3 x < 2\operatorname{sen}^2 x \cos x + \operatorname{sen}^2 x$$

Portiamo tutto a 1° membro e scomponiamo in fattori: otteniamo

$$4\operatorname{sen}^3 x \cos x + 2\operatorname{sen}^3 x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos x - \operatorname{sen}^2 x < 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x (4\operatorname{sen} x \cos x + 2\operatorname{sen} x - 2\cos x - 1) < 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x [2\cos x (2\operatorname{sen} x - 1) + (2\operatorname{sen} x - 1)] < 0$$

$$\text{e infine } \operatorname{sen}^2 x (2\operatorname{sen} x - 1)(2\cos x + 1) < 0$$

Ci rendiamo conto che qui la situazione è più complicata perché compaiono funzioni goniometriche diverse. In casi come questo

- si studierà il segno di ogni singolo fattore**, mediante la disequazione ausiliaria *fattore* > 0
 - che porta a determinare quei valori di x per i quali il fattore considerato è positivo,
 - e permette anche di riconoscere i valori di x per i quali il fattore considerato si annulla, o non esiste,
 - quindi rivela pure (per esclusione) i valori di x per i quali il fattore considerato è negativo
- poi **si disegnerà uno schema riassuntivo** per il “confronto dei segni”
(si può scegliere se dare a questo schema riassuntivo un aspetto “**circolare**” oppure “**lineare**”)
- e infine dallo schema riassuntivo, che servirà per avere un comodo “colpo d’occhio complessivo” sulla situazione dei segni dei vari fattori in corrispondenza dei vari valori di x , **si trarranno le conclusioni**.

a) STUDIO DEL SEGNO DI OGNI SINGOLO FATTORE

$$\boxed{1^\circ f. > 0} \quad \operatorname{sen}^2 x > 0 \quad \boxed{\operatorname{sen} x \neq 0} \quad (\text{NOTA})$$

$$\boxed{2^\circ f. > 0} \quad 2\operatorname{sen} x - 1 > 0 \quad \boxed{\operatorname{sen} x > 1/2} \quad (\text{NOTA})$$

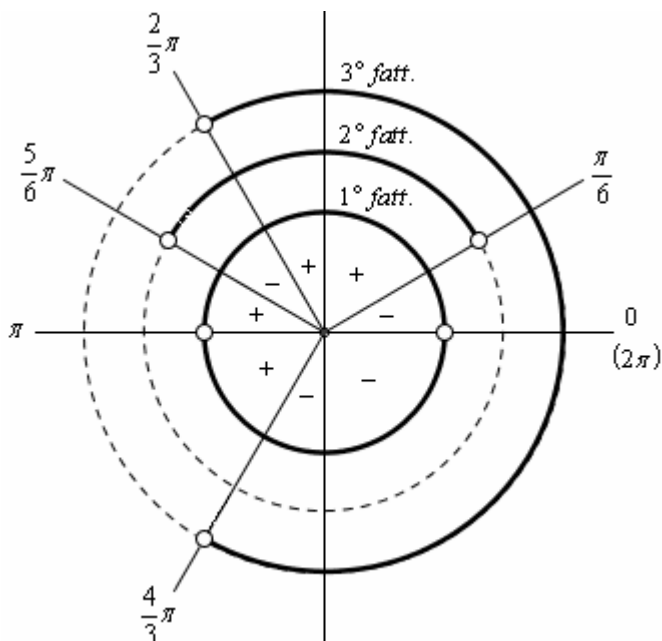
$$\boxed{3^\circ f. > 0} \quad 2\cos x + 1 > 0 \quad \boxed{\cos x > -1/2} \quad (\text{NOTA})$$

NOTA

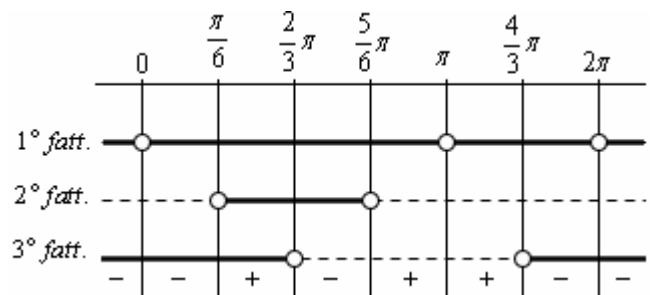
Non stiamo a specificare qui i valori di x per cui questa condizione è verificata; questi valori, li evidenzieremo direttamente nello schema (circolare o lineare che sia) attraverso una linea a tratto continuo

b) SCHEMA RIASSUNTIVO

CIRCOLARE



LINEARE



In entrambi gli schemi, circolare e lineare,

la **simbologia** da noi usata è:

LINEA CONTINUA — FATTORE POSITIVO
PALLINO VUOTO ○ FATTORE NULO
LINEA TRATTEGGIATA --- FATTORE NEGATIVO
(eventualmente, crocetta × per “fattore non esistente”)

SUGGERIMENTO:

In uno schema lineare, è sempre opportuno estendere la linea (continua o tratteggiata, a seconda dei casi) anche “un pochino a sinistra” rispetto a 0 e “un pochino a destra” rispetto a 2π . L'utilità sarà particolarmente evidente in un contesto di “studio di funzione”.

c) CONCLUSIONI

Dallo schema riassuntivo si trae facilmente che la disequazione $\operatorname{sen}^2 x (2\operatorname{sen} x - 1)(2\cos x + 1) < 0$

ammette, nel primo giro, le soluzioni $0 < x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{2}{3}\pi < x < \frac{5}{6}\pi \vee \frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$.

Per le soluzioni in generale, basterà riscrivere tutto con “ $+2k\pi$ ” dopo ciascun estremo di intervallo.

D. FRATTE

- $\frac{\sin x}{\cos x(1 + \cos x)} \geq 0$ Questa è una disequazione fratta,
e si risolve anch'essa studiando il segno dei vari fattori in gioco
per poi tracciare uno schema (circolare o lineare) per il confronto dei segni

a) STUDIO DEL SEGNO DI OGNI SINGOLO FATTORE

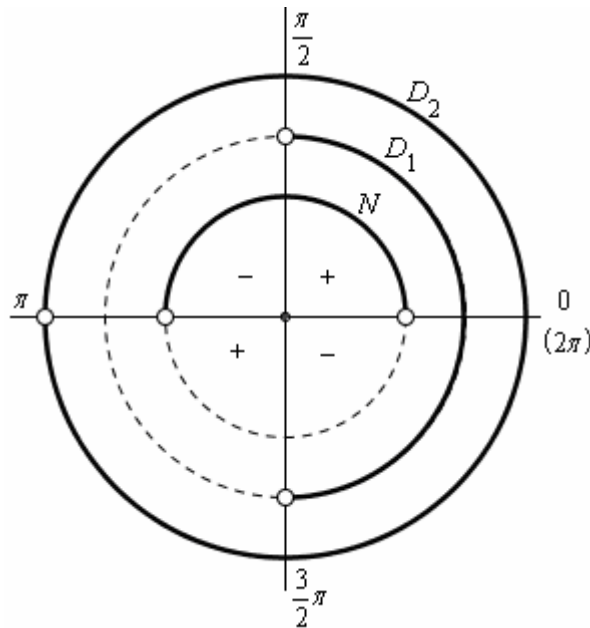
$$\begin{array}{lll} \boxed{N > 0} & \boxed{\sin x > 0} & (\text{NOTA}) \\ \boxed{D_1 > 0} & \boxed{\cos x > 0} & (\text{NOTA}) \\ \boxed{D_2 > 0} & 1 + \cos x > 0 & \boxed{\cos x > -1} \quad (\text{NOTA}) \end{array}$$

NOTA

Non stiamo a specificare qui i valori di x per cui questa condizione è verificata; questi valori, li evidenzieremo direttamente nello schema (circolare o lineare che sia) attraverso una linea a tratto continuo

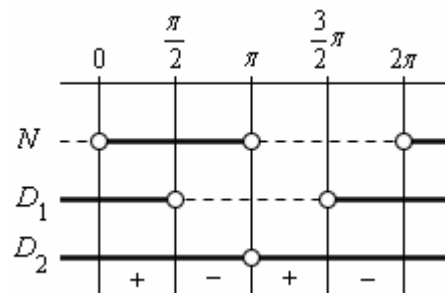
b) SCHEMA RIASSUNTIVO

CIRCOLARE



$0, 2\pi$ sono soluzioni
(annullano il numeratore, e non annullano il denominatore)
 π NON è soluzione
(annulla il numeratore, ma anche il denominatore!)

LINEARE



La disequazione porta il $\geq$.

In questi casi, conviene pensare prima alla disequazione "stretta" ($>$)
poi aggiungere alle soluzioni trovate anche i valori che rendono la frazione $= 0$.

E una frazione è uguale a 0
quando si annulla il suo NUMERATORE
(purché non si annulli contemporaneamente anche il denominatore):

$$\frac{0}{a} = 0 \quad \frac{a}{0} = \text{IMPOSS.} \quad \frac{0}{0} = \text{INDET.}$$

c) CONCLUSIONI

Dallo schema riassuntivo si trae facilmente che la disequazione proposta

ammette, nel primo giro, le soluzioni $0 \leq x < \frac{\pi}{2} \vee \pi < x < \frac{3}{2}\pi \vee x = 2\pi$.

Per le soluzioni in generale, basterà riscrivere tutto con $+2k\pi$ dopo ciascun estremo di intervallo.

□ $\frac{\tan x - 1}{\cos x(\sin x - 2)} \leq 0$

Osserviamo che

$$\sin x - 2 > 0$$

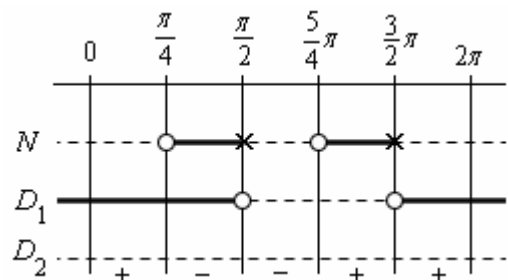
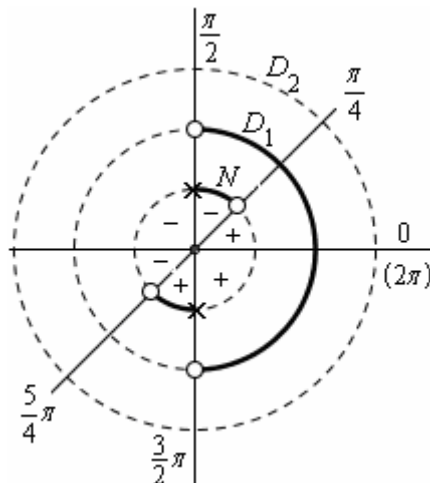
$$\sin x > 2$$

è IMPOSSIBILE!

Il seno è sempre compreso fra -1 e 1 ,
e il fattore $\sin x - 2$
è negativo per ogni x !

Soluzioni nel 1° giro:

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi \quad \text{ma } x \neq \frac{\pi}{2}$$



La "crocetta" ha il significato di "non esistenza", di "esclusione":

per $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$ la tangente non esiste!

E. LINEARI ($a \sin x + b \cos x + c \geq 0$)

□ $\sqrt{3} \sin x + \cos x < 1$ Questa è una disequazione goniometrica LINEARE ($\sqrt{3} \sin x + \cos x - 1 < 0$)

1° modo: con le formule parametriche

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x < 1$$

$$\sqrt{3} \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} < 1 \quad (\text{NOTA 1})$$

$$2t\sqrt{3} + 1 - t^2 < 1 + t^2 \quad (\text{NOTA 2})$$

$$-2t^2 + 2t\sqrt{3} < 0$$

$$t^2 - t\sqrt{3} > 0 \quad (\text{NOTA 3})$$

$$t(t - \sqrt{3}) > 0$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono 0 e $\sqrt{3}$
e le soluzioni della disequazione sono $t < 0 \vee t > \sqrt{3}$

$$\tan \frac{x}{2} < 0 \vee \tan \frac{x}{2} > \sqrt{3}$$

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{x}{2} < 0 + k\pi \vee \frac{\pi}{3} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (\text{NOTA 4})$$

$$-\pi + 2k\pi < x < 2k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad (\text{NOTA 5})$$

Abbiamo applicato le formule parametriche,
e questo ha comportato di escludere gli archi $\pi + 2k\pi$,
i quali, d'altra parte, potrebbero benissimo essere soluzioni.
Andiamo dunque a verificare direttamente,
sostituendo nella disequazione data,
se il valore π ne è soluzione oppure no
(la stessa risposta si estenderà, com'è ovvio,
a tutti i valori $\pi + 2k\pi$).

$$\sqrt{3} \sin \pi + \cos \pi < 1$$

$$\sqrt{3} \cdot 0 + (-1) < 1$$

$$-1 < 1 \quad \text{OK}$$

Sì, anche π è soluzione della nostra disequazione,
e pertanto pure tutti i valori $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ lo sono.

NOTA 1

Come sappiamo, l'applicazione
delle formule parametriche
è possibile sotto la condizione
 $x \neq \pi + 2k\pi$

NOTA 2

Nonostante si tratti
di una disequazione,
qui abbiamo potuto, eccezionalmente,
sbarazzarci dal denominatore
mediante moltiplicazione per esso,
essendo
 $1+t^2 > 0$ per qualsiasi valore di t

NOTA 3

Abbiamo diviso per -2 ,
cambiando ovviamente il verso
perché $-2 < 0$.

NOTA 4

Quando è coinvolta la tangente,
è di solito conveniente
pensare innanzitutto alla
“metà destra della torta”
(archi da $-\pi/2$ a $\pi/2$)
aggiungendo poi $+k\pi$
per tener conto della periodicità.

NOTA 5

Come è evidente,
quest'ultimo passaggio
è stato ottenuto moltiplicando
il passaggio precedente per 2.

Ricapitoliamo: in definitiva,

- possiamo andare da $\frac{2}{3}\pi$ fino a π ($\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$),
- prendere anche il valore π ($\pi + 2k\pi$),
- e poi ricominciare col “mezzo giro inferiore” ($-\pi + 2k\pi < x < 2k\pi$, che per $k = 1$ diventa $\pi < x < 2\pi$).

In pratica, possiamo allora dire che le **soluzioni** sono

- nel 1° giro, tutti gli archi da $\frac{2}{3}\pi$ fino a 2π ($\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$)
- e in generale, tutti gli archi x tali che $\boxed{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$

2° modo: con un “sistema misto”

La coppia $(\sin x, \cos x)$ di cui stiamo andando alla caccia soddisferà anche alla 1ª Relazione Fondamentale della Goniometria, quindi avremo il sistema (“misto”, perché composto da una disequazione e un’equazione)

$$\begin{cases} \sqrt{3} \sin x + \cos x < 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

il quale, se poniamo

$$\sin x = Y$$

$$\cos x = X$$

diventerà

$$\begin{cases} \sqrt{3} Y + X < 1 \\ Y^2 + X^2 = 1 \end{cases}$$

e potrà essere risolto graficamente.

La seconda condizione è rappresentata, com’è noto, da una circonferenza di centro l’origine e raggio 1.

La prima condizione potrà essere riscritta come $\sqrt{3} Y < -X + 1$ e infine $Y < -\frac{1}{\sqrt{3}}X + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Una coppia (X, Y) soddisfa dunque a tale condizione

se e solo se il punto di coordinate (X, Y) è tale che la sua Y sia minore di $-\frac{1}{\sqrt{3}}X + \frac{1}{\sqrt{3}}$;

ma ciò equivale a richiedere che il punto (X, Y) stia AL DI SOTTO della retta $Y = -\frac{1}{\sqrt{3}}X + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Insomma, la risoluzione grafica di $\begin{cases} \sqrt{3} Y + X < 1 \\ Y^2 + X^2 = 1 \end{cases}$

consiste nella ricerca di quei punti della circonferenza $Y^2 + X^2 = 1$

che stanno al di sotto della retta $Y = -\frac{1}{\sqrt{3}}X + \frac{1}{\sqrt{3}}$ (intersezione circonferenza/semipiano).

Ecco dunque il grafico.

L’arco evidenziato è l’intersezione cercata, e i suoi punti coincidono con gli estremi degli archi che sono soluzione della disequazione proposta (puoi andare a rivedere pagina 58 per una motivazione accurata di questo fatto).

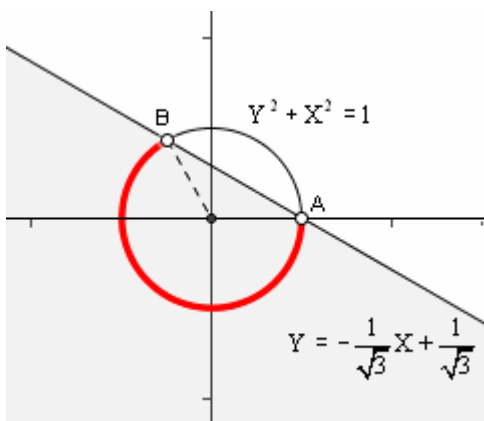
Per determinare le coordinate di A e di B si può risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \sqrt{3} Y + X = 1 \\ Y^2 + X^2 = 1 \end{cases}$$

Si trova $A(1, 0)$ e $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

da cui gli archi di 0 (2π) radianti e di $\frac{2}{3}\pi$ radianti,

e la conclusione: $\boxed{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$



3° modo: con l'arco ausiliario

Così come abbiamo fatto a pagina 59, dividiamo per il numero $\sqrt{a^2 + b^2}$

onde "normalizzare" la coppia dei coefficienti (a, b) e andare poi alla ricerca dell' "arco ausiliario".

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

dunque avremo

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x < 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x < \frac{1}{2}$$

$$= \cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (\text{NOTA 1})$$

$$-\frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$-\frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < 2k\pi \quad (\text{NOTA 2})$$

NOTA 1

Perché mai abbiamo utilizzato un arco negativo?
Semplicemente per avere la possibilità di scrivere le soluzioni in una forma molto compatta.

NOTA 2

Prova a porre $k = 1$ e otterrai

$$\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi.$$

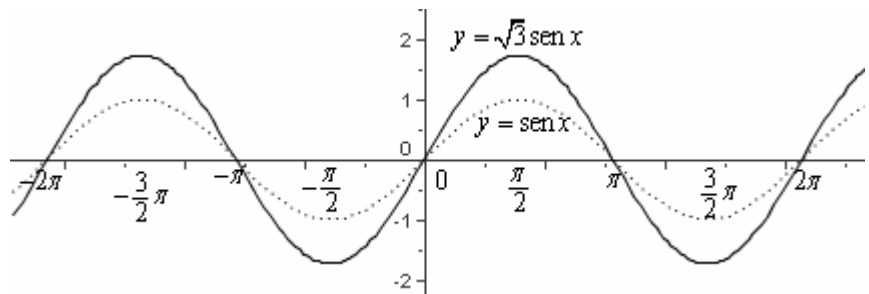
Insomma, l'insieme di soluzioni trovato coincide perfettamente con quello determinato per mezzo dei due metodi precedenti.

4° modo: con una "classica" risoluzione grafica

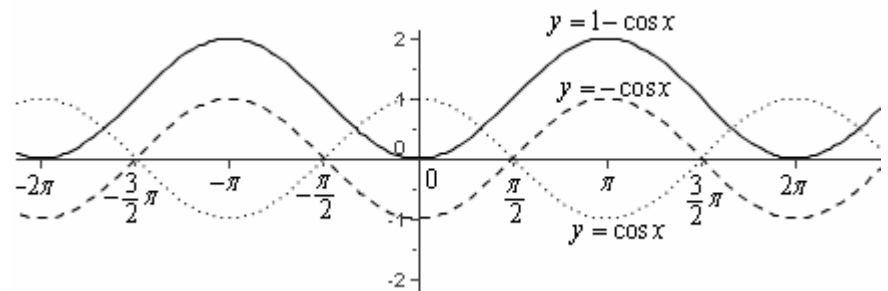
La disequazione data è $\sqrt{3} \sin x + \cos x < 1$.

Riscrivendola come $\sqrt{3} \sin x < 1 - \cos x$ la si può risolvere graficamente con buona facilità.

Il grafico della funzione $y = \sqrt{3} \sin x$ si può ottenere dal grafico ben noto della $y = \sin x$ moltiplicando ciascuna ordinata per $\sqrt{3}$ ("effetto fisarmonica verticale").



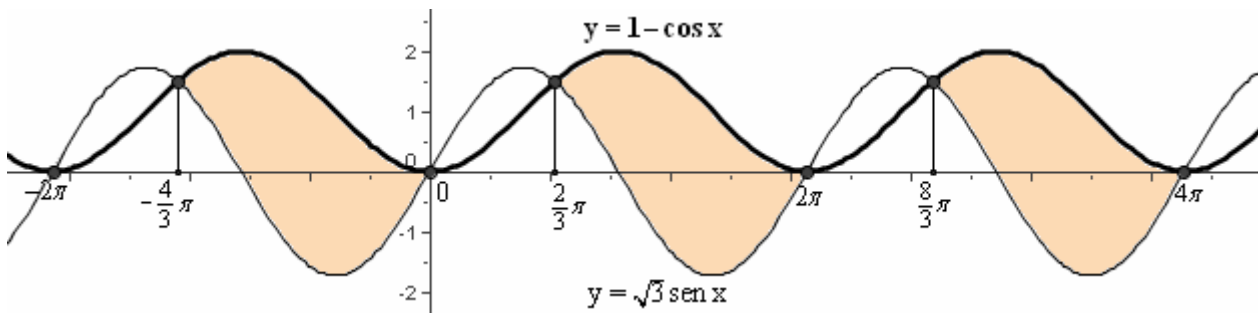
- Il grafico della $y = 1 - \cos x$ si può costruire passando
- dapprima da $\cos x$ a $-\cos x$ (simmetrizzazione rispetto all'asse delle ascisse)
 - poi da $-\cos x$ a $-\cos x + 1$ (traslazione verso l'alto di 1 unità).



Tracciando le due curve sullo stesso riferimento cartesiano, è fatta!

Basta andare a vedere per quali valori di x

il grafico della $y = \sqrt{3} \sin x$ VA A FINIRE AL DI SOTTO del grafico della $y = 1 - \cos x$



I punti di intersezione fra i due grafici si possono determinare risolvendo l'equazione $\sqrt{3} \sin x = 1 - \cos x$.

$$\square \quad \sin x - \sqrt{3} \cos x \leq 0$$

ATTENZIONE!

Questa è una disequazione goniometrica lineare OMOGENEA, ma, trattandosi appunto di una disequazione e non di un'equazione, risolvere tramite divisione per $\cos x$, per far comparire la tangente, sarebbe SBAGLIATO!

Infatti la quantità $\cos x$ può assumere anche valori negativi, e in una disequazione sappiamo che NON si può moltiplicare o dividere ambo i membri per una stessa quantità, a meno che questa sia sempre strettamente positiva.

Non potendosi dunque dividere per $\cos x$, dovremo risolvere come abbiamo fatto per la lineare non omogenea dell'esempio precedente (ci puoi provare!).

Oppure ...

... oppure potremmo, sì, pensare a una risoluzione tramite divisione per $\cos x$, ma distinguendo i casi:

- $\cos x > 0$, nel quale la divisione è possibile, mantenendo il verso invariato
- $\cos x < 0$, nel quale è possibile dividere, se però simultaneamente si cambia il verso
- $\cos x = 0$, nel quale ovviamente la divisione per $\cos x$ non è possibile in alcun modo;

ma $\cos x$ è uguale a 0 esclusivamente quando x vale (nel 1° giro) $\frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{3}{2}\pi$,

e allora basterà andare a vedere, per sostituzione diretta,

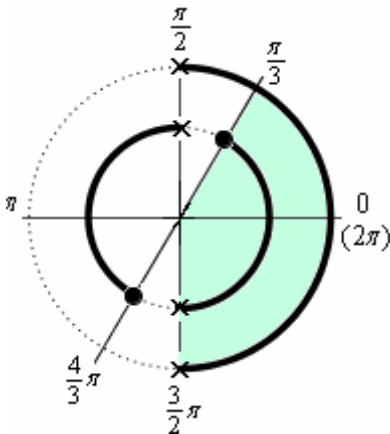
se $x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione, e fare poi altrettanto per $x = \frac{3}{2}\pi$

Caso a)

$$\begin{cases} \sin x - \sqrt{3} \cos x \leq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\cos x} \leq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan x - \sqrt{3} \leq 0; \tan x \leq \sqrt{3} \\ \cos x > 0 \end{cases}$$



$$0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

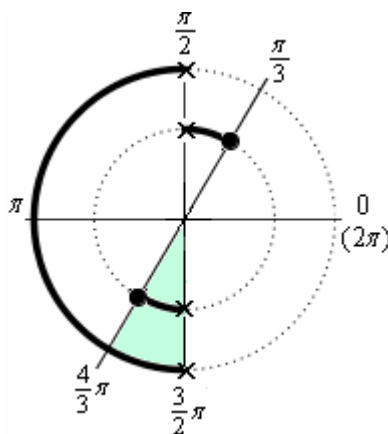
$$\frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$$

Caso b)

$$\begin{cases} \sin x - \sqrt{3} \cos x \leq 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\cos x} \geq 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan x - \sqrt{3} \geq 0; \tan x \geq \sqrt{3} \\ \cos x < 0 \end{cases}$$



$$\frac{4}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

Caso c)

$$\begin{cases} \sin x - \sqrt{3} \cos x \leq 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

Il coseno si annulla quando

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{oppure} \quad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi.$$

Ora, $x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione? Vediamo.

$$\sin \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$1 - \sqrt{3} \cdot 0 \stackrel{?}{\leq} 0$$

$1 \leq 0$ NO, falsa: $\frac{\pi}{2}$ non è soluzione

E $x = \frac{3}{2}\pi$ è soluzione? Vediamo.

$$\sin \frac{3}{2}\pi - \sqrt{3} \cdot \cos \frac{3}{2}\pi \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$-1 - \sqrt{3} \cdot 0 \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$-1 \leq 0 \quad \text{OK, vera!},$$

sì, $\frac{3}{2}\pi$ è soluzione

Ciascuna delle due figure mostra uno “schema di SISTEMA circolare”.

Simbologia:	Condizione verificata	Linea spessa, pallino pieno
	Condizione non verificata	Linea tratteggiata (o nessuna linea), crocetta di esclusione

In definitiva, le soluzioni sono gli x tali che $0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$

oppure (l'utilizzo di un arco negativo permette una scrittura più compatta)

$$-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

F. OMOGENEE (= tutti i termini dello stesso grado) IN $\sin x, \cos x$

$$\square \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x > 0$$

Di fronte a questa disequazione “di 2° grado omogenea in $\sin x$ e $\cos x$ ”

si può tranquillamente risolvere dividendo per $\cos^2 x$, allo scopo di far comparire la tangente.

Infatti in una disequazione è sempre possibile (lasciando il verso inalterato) dividere ambo i membri per uno stesso numero *positivo*,

e $\cos^2 x$ non può mai (in quanto quadrato) assumere valore negativo;

occorrerà soltanto ricordarsi, alla fine, di prendere in considerazione

in modo “speciale” i valori di x per i quali il coseno si annulla,

e di verificare attraverso una sostituzione diretta se siano soluzione oppure no.

$$\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x > 0$$

$$\frac{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x}{\cos^2 x} > 0 \quad (\cos x \neq 0)$$

$$\tan^2 x - 5 \tan x + 4 > 0$$

$$(\tan x - 1)(\tan x - 4) > 0$$

$$\tan x < 1 \vee \tan x > 4$$

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \vee \arctan 4 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Il coseno si annulla quando $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oppure $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$. Perciò, domandiamoci:

$$\begin{aligned} x = \frac{\pi}{2} \text{ è soluzione?} \\ \sin^2 \frac{\pi}{2} - 5 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 4 \cos^2 \frac{\pi}{2} &\stackrel{?}{>} 0 \\ 1^2 - 5 \cdot 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 &\stackrel{?}{>} 0 \\ 1 > 0 \text{ OK : } \frac{\pi}{2} \text{ è soluzione} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = \frac{3}{2}\pi \text{ è soluzione?} \\ \sin^2 \frac{3}{2}\pi - 5 \sin \frac{3}{2}\pi \cos \frac{3}{2}\pi + 4 \cos^2 \frac{3}{2}\pi &\stackrel{?}{>} 0 \\ (-1)^2 - 5 \cdot (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 0 &\stackrel{?}{>} 0 \\ 1 > 0 \text{ OK : } \frac{3}{2}\pi \text{ è soluzione (quindi anche } -\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

In definitiva, le soluzioni sono: $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + k\pi \vee \arctan 4 + k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\square \sqrt{\sin x} > 2 \sin x - 1$$

Poniamo $\sin x = z$ e otterremo la disequazione irrazionale

$$\sqrt{z} > 2z - 1$$

che risolveremo rispetto alla sua incognita z ;

alla fine, dai valori trovati per z risaliremo ai valori di x .

$\sqrt{z} > 2z - 1$ è “del 2° tipo” e si riconduce a una coppia di sistemi, separati dal connettivo logico “vel”.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2z - 1 < 0 \\ z \geq 0 \end{cases} &\vee \begin{cases} 2z - 1 \geq 0 \\ z^2 > (2z - 1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} z < 1/2 \\ z \geq 0 \end{cases} &\begin{cases} z \geq 1/2 \\ z^2 > 4z^2 - 4z + 1; \quad 3z^2 - 4z + 1 < 0; \quad 1/3 < z < 1 \end{cases} \\ 0 \leq z < \frac{1}{2} &\quad \frac{1}{2} \leq z < 1 \end{aligned}$$

La disequazione in z è quindi verificata per $0 \leq z < 1$ e di conseguenza si avrà:

$$0 \leq \sin x < 1$$

$$2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi, \text{ ma } x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ESERCIZI sulle disequazioni goniometriche
(sono richieste le soluzioni nell'intervallo $[0, 2\pi]$)

- 1) $\sin x + 8 < 3(4 - \sin x)$
- 2) $4\cos^2 x - 17\cos x + 4 < 0$
- 3) $\frac{1}{\cos^2 x} < 4\tan x$
- 4) $\sin x + \cos x > 0$
- 5) $4\cos^4 x < \cos^2 x$
- 6) $\sin 2x + \sin x < 0$
- 7) $\frac{\sin 2x}{\sin x(2\sin x - \sqrt{2})} \leq 0$
- 8) $2\cos^2 x - \sin x \cos x - \sin^2 x < 0$
- 9) $\sin x + \cos x < 1$
- 10) $2\sin x - 2\cos x < \sqrt{3} - 1$
- 11) $\frac{\sin x \cos x}{2\cos^2 x - 1} \geq 0$
- 12) $1 + \sin 2x > 4\cos^2 x$
- 13) $\cos x - \cos 3x < \sin 2x$
- 14) $\sin x + \cos 2x > \sin 3x$
- 15) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

SOLUZIONI

- 1) $x \neq \frac{\pi}{2}$ 2) $0 \leq x < \arccos \frac{1}{4} \vee 2\pi - \arccos \frac{1}{4} < x \leq 2\pi$
- 3) $\frac{\pi}{12} < x < \frac{5}{12}\pi \vee \frac{13}{12}\pi < x < \frac{17}{12}\pi$ 4) $0 \leq x < \frac{3}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x \leq 2\pi$
- 5) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi$ ma $x \neq \frac{\pi}{2} \vee \frac{4}{3}\pi < x < \frac{5}{3}\pi$ ma $x \neq \frac{3}{2}\pi$
- 6) $\frac{2}{3}\pi < x < \pi \vee \frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$ 7) $0 < x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3}{4}\pi \vee \frac{3}{2}\pi \leq x < 2\pi$
- 8) $\frac{\pi}{4} < x < \pi - \arctg 2 \vee \frac{5}{4}\pi < x < 2\pi - \arctg 2$ 9) $\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$
- 10) $0 \leq x < \frac{\pi}{3} \vee \frac{7}{6}\pi < x \leq 2\pi$ 11) $0 \leq x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3}{4}\pi \vee \pi \leq x < \frac{5}{4}\pi \vee \frac{3}{2}\pi \leq x < \frac{7}{4}\pi$
- 12) $\frac{\pi}{4} < x < \pi - \arctg 3 \vee \frac{5}{4}\pi < x < 2\pi - \arctg 3$
- 13) $0 < x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi \vee \pi < x < \frac{3}{2}\pi$
- 14) $0 \leq x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi \vee \frac{5}{6}\pi < x < \frac{5}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x \leq 2\pi$
- 15) $\frac{5}{4}\pi < x < \frac{23}{12}\pi$