

2. CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

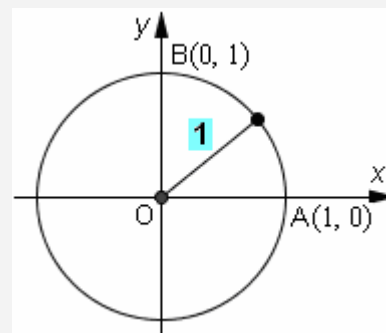
Inizieremo ora lo studio di alcune importantissime
funzioni angolari
 (= quantità, come il *seno*, il *coseno*, la *tangente*, la *cotangente*,
 il cui valore dipende dall'ampiezza di un angolo
 - o, in modo equivalente, dalla misura di un arco).
 Questo studio viene chiamato “**GONIOMETRIA**”
 (in greco, **gonos** = **angolo** e **metron** = **misura**)
 oppure “**TRIGONOMETRIA**”,
 termine che è praticamente un sinonimo di “goniometria”
 ma mette maggiormente in rilievo il fatto che, molto sovente,
 interessa applicare le formule studiate ai tre angoli interni di un *triangolo*.

Lo strumento concettuale che è posto alla base della goniometria è la “**circonferenza goniometrica**”.

Cos'è, dunque, la “**CIRCONFERENZA GONIOMETRICA**”?

E' una circonferenza

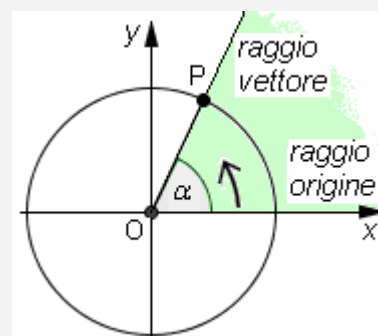
- **avente il centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani**
- **e (importantissimo!) RAGGIO UGUALE A 1**
 (cioè, raggio uguale all'unità di misura del sistema di riferimento).



**S'intende che sulla circonferenza goniometrica
 gli ANGOLI vadano sempre riportati**

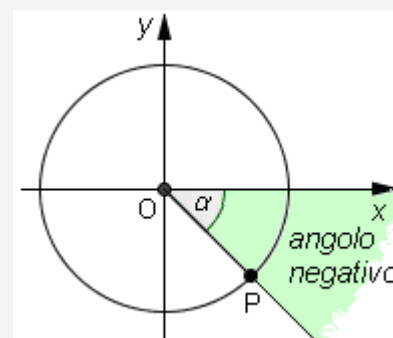
- **con vertice nel centro (= nell'origine)**
- **a partire dal semiasse delle ascisse positive**
 (che sarà dunque sempre il “primo lato” dell'angolo)
- **e in SENSO ANTIORARIO** ↺.

Il “primo lato” dell'angolo, ossia il semiasse delle ascisse positive,
 viene anche detto “**raggio origine**” dell'angolo, mentre
 il secondo lato (semiretta OP nella figura) è detto “**raggio vettore**”.



Agli angoli riportati in senso ORARIO si assegna MISURA NEGATIVA:

ad esempio,
 l'angolo qui a fianco raffigurato misurerà -45°
 (oppure, in radianti, $-\frac{\pi}{4}$).

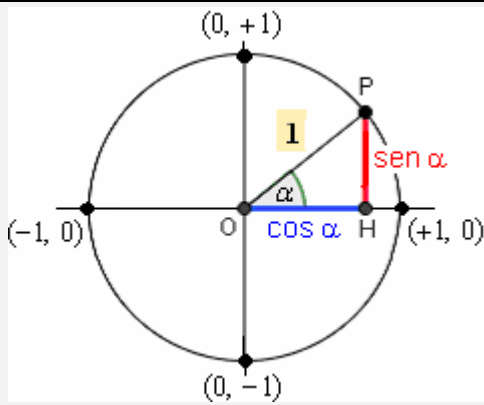


3. SENO E COSENO DI UN ANGOLO NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Nella circonferenza goniometrica, consideriamo un certo angolo α
 (che di norma sarà compreso fra 0° e 360° , ma potrebbe pure essere negativo, o maggiore di 360°):
 cosa intendiamo per “seno di α ($\sin \alpha$)” e per “coseno di α ($\cos \alpha$)”?

Andiamo a considerare il punto P in cui il raggio vettore di α interseca la circonferenza goniometrica:

- ♪ il **SENO** di α è, per definizione, l'**ORDINATA** di P,
- ♪ mentre il **COSENO** di α è, per definizione, l'**ASCISSA** di P.



sen α = ordinata di P = misura (con segno) di HP

cos α = ascissa di P = misura (con segno) di OH

La circonferenza goniometrica ha, come abbiamo detto, centro nell'origine e raggio 1; quindi i suoi punti hanno

- ascissa che può andare da un minimo di -1 a un max di $+1$;
- ordinata che può andare, anch'essa, da un minimo di -1 a un massimo di $+1$.

Pertanto **il seno e il coseno di un angolo α sono sempre compresi fra -1 e $+1$** :

$$\forall \alpha, -1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1 \quad -1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1$$

Si ha subito (Pitagora) la **1ª RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA**: qualunque sia l'angolo α (anche, eventualmente, con $\alpha > 360^\circ$, o $\alpha < 0^\circ$), è sempre

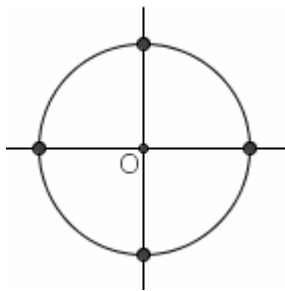
$$\boxed{\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1}$$

NOTA: $\text{sen}^2 \alpha$, $\text{cos}^2 \alpha$ sono scritte abbreviate di: $(\text{sen } \alpha)^2$, $(\text{cos } \alpha)^2$



<p>Per $\alpha = 0^\circ$ (0 radianti) $\text{sen } \alpha = 0$; $\text{cos } \alpha = 1$</p>	<p>Nel 1° quadrante, ossia per $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), è $\boxed{\text{sen } \alpha > 0, \text{cos } \alpha > 0}$</p> <p>... e quando α cresce da 0° a 90°, $\text{sen } \alpha$ cresce (da 0 a 1) $\text{cos } \alpha$ decresce (da 1 a 0)</p>
<p>Per $\alpha = 90^\circ$ ($\pi/2$ radianti) $\text{sen } \alpha = 1$; $\text{cos } \alpha = 0$</p>	<p>Nel 2° quadrante, ossia per $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), è $\boxed{\text{sen } \alpha > 0, \text{cos } \alpha < 0}$</p> <p>... e quando α cresce da 90° a 180°, $\text{sen } \alpha$ decresce (da 1 a 0) $\text{cos } \alpha$ decresce (da 0 a -1)</p>
<p>Per $\alpha = 180^\circ$ (π radianti) $\text{sen } \alpha = 0$; $\text{cos } \alpha = -1$</p>	<p>Nel 3° quadrante, ossia per $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ($\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$), è $\boxed{\text{sen } \alpha < 0, \text{cos } \alpha < 0}$</p> <p>... e quando α cresce da 180° a 270°, $\text{sen } \alpha$ decresce (da 0 a -1) $\text{cos } \alpha$ cresce (da -1 a 0)</p>
<p>Per $\alpha = 270^\circ$ ($\frac{3}{2}\pi$ radianti) $\text{sen } \alpha = -1$; $\text{cos } \alpha = 0$</p>	<p>Nel 4° quadrante, ossia per $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ($\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$), è $\boxed{\text{sen } \alpha < 0, \text{cos } \alpha > 0}$</p> <p>... e quando α cresce da 270° a 360°, $\text{sen } \alpha$ cresce (da -1 a 0) $\text{cos } \alpha$ cresce (da 0 a 1)</p> <p>Quando α raggiunge e poi supera i 360°, i valori di $\text{sen } \alpha$ e di $\text{cos } \alpha$ “ripartono come se si ripartisse da 0°”; cioè, le funzioni “seno” e “coseno” sono “periodiche di periodo 360°”. Ne riparleremo.</p>

Clicca QUI [↗](#) per una bella figura “dinamica” (GeoGebra) sulla variazione di seno e coseno al variare dell'arco

ESERCIZI

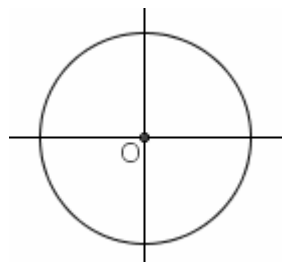
- 1) Nella circonferenza goniometrica in figura
- scrivi la coppia delle coordinate di ciascuno dei cinque punti evidenziati
 - disegna: a) l'angolo di 135° ; b) quello che misura $\frac{7}{6}\pi$; c) quello di -80°
 - e disegna inoltre una coppia di angoli fra loro complementari: α e $90^\circ - \alpha$ (potrebbero essere, ad esempio, 25° e $65^\circ \dots$)
per constatare un fatto importante, che vale poi per qualsiasi valore di α , anche maggiore di 90° o di 180° o di 360° , anche negativo: si ha sempre

$$\boxed{\text{sen}(90^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha} \quad \text{e} \quad \boxed{\text{cos}(90^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha}$$

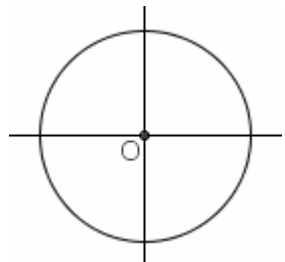
PASSANDO DA UN ANGOLO AL SUO COMPLEMENTARE, I VALORI DI SENO E COSENO SI SCAMBIANO FRA LORO.



- 2) Sapendo che $\text{sen}43^\circ \approx 0.68$, $\text{cos}43^\circ \approx 0.73$, riempi i puntini: $\text{sen}47^\circ \approx \dots$, $\text{cos}47^\circ \approx \dots$
- 3) a) Noto il valore $\text{sen } \alpha$ del seno di un angolo, ci sono due modi per ricavare $\text{cos } \alpha$. Quali?
b) Determina: il coseno di un angolo ottuso il cui seno vale 0.39
c) Determina il seno di un angolo acuto il cui coseno vale 0.14
- 4) Quali sono gli angoli, compresi fra 0° e 360° ,
- il cui seno è uguale a 0?
 - il cui coseno è uguale a 0?
 - il cui seno è uguale a 1?
 - il cui coseno è uguale a 1?
 - il cui seno è uguale a -1 ?
 - il cui coseno è uguale a -1 ?
 - il cui seno è uguale al coseno?
 - il cui seno è l'opposto del coseno?
- i) Se un angolo α compreso fra 0° e 360° ha coseno < 0 , in quale intervallo di ampiezze può trovarsi?



- 5) $\text{sen} 122^\circ$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
 $\text{cos} 122^\circ$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
 $\text{sen} 180^\circ$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
 $\text{cos} 180^\circ$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
 $\text{sen} 214^\circ$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
 $\text{cos} 214^\circ$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
 $\text{sen} 270^\circ$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
 $\text{cos} 270^\circ$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
 $\text{sen} 355^\circ$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
 $\text{cos} 355^\circ$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$



- 6) Utilizzando una matita e una circonferenza goniometrica, individua la risposta corretta:
- $\text{sen}(\alpha + 180^\circ) = ?$ a) $\text{sen } \alpha$ b) $\text{cos } \alpha$ c) $-\text{sen } \alpha$ d) $-\text{cos } \alpha$
 $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = ?$ a) $\text{sen } \alpha$ b) $\text{cos } \alpha$ c) $-\text{sen } \alpha$ d) $-\text{cos } \alpha$
 $\text{sen}(90^\circ - \alpha) = ?$ a) $\text{sen } \alpha$ b) $\text{cos } \alpha$ c) $-\text{sen } \alpha$ d) $-\text{cos } \alpha$
 $\text{sen}(90^\circ + \alpha) = ?$ a) $\text{sen } \alpha$ b) $\text{cos } \alpha$ c) $-\text{sen } \alpha$ d) $-\text{cos } \alpha$
 $\text{sen}(-\alpha) = ?$ a) $\text{sen } \alpha$ b) $\text{cos } \alpha$ c) $-\text{sen } \alpha$ d) $-\text{cos } \alpha$
 $\text{cos}(180^\circ - \alpha) = ?$ a) $\text{sen } \alpha$ b) $\text{cos } \alpha$ c) $-\text{sen } \alpha$ d) $-\text{cos } \alpha$

RISPOSTE

- 1) III) In effetti, nella figura qui a destra, si ha: $\widehat{POH} = \alpha$, $\widehat{P'O'H'} = 90^\circ - \alpha$,
 $PH = \text{sen } \alpha$, $OH = \text{cos } \alpha$, $P'H' = \text{sen}(90^\circ - \alpha)$, $OH' = \text{cos}(90^\circ - \alpha)$
e si può osservare (e dimostrare) che è $P'H' = OH$, $OH' = PH$
- 2) $\text{sen}47^\circ = \text{cos}(90^\circ - 47^\circ) = \text{cos}43^\circ \approx 0.73$
 $\text{cos}47^\circ = \text{sen}(90^\circ - 47^\circ) = \text{sen}43^\circ \approx 0.68$
- 3) a) Primo modo: $\text{cos } \alpha = \pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}$ dove il segno dev'essere deciso in base all'ampiezza dell'angolo
Secondo modo: con la macchinetta, risalire dal seno all'angolo (tasto sen^{-1}), poi calcolare il coseno (cos)
b) ≈ -0.92 c) ≈ 0.99
- 4) a) $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ b) $90^\circ, 270^\circ$ c) 90° d) $0^\circ, 360^\circ$ e) 270°
f) 180° g) $45^\circ, 225^\circ$ h) $135^\circ, 315^\circ$ i) $90^\circ < \alpha < 270^\circ$
- 5) $\text{sen} 122^\circ > 0$, $\text{cos} 122^\circ < 0$, $\text{sen} 180^\circ = 0$, $\text{cos} 180^\circ = -1$, $\text{sen} 214^\circ < 0$,
 $\text{cos} 214^\circ < 0$, $\text{sen} 270^\circ = -1$, $\text{cos} 270^\circ = 0$, $\text{sen} 355^\circ < 0$, $\text{cos} 355^\circ > 0$
- 6) $\text{sen}(\alpha + 180^\circ) = -\text{sen } \alpha$, $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$, $\text{sen}(90^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha$,
 $\text{sen}(90^\circ + \alpha) = \text{cos } \alpha$, $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha$, $\text{cos}(180^\circ - \alpha) = -\text{cos } \alpha$

