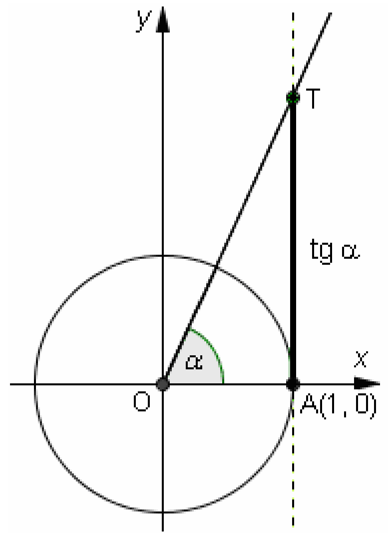
4. TANGENTE DI UN ANGOLO NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Nella circonferenza goniometrica, consideriamo il punto A che sta “all’estrema destra”, di coordinate $(1,0)$.
Per A tracciamo la retta “verticale”, ossia quella parallela all’asse y,
e indichiamo con T il punto di intersezione fra tale retta e il raggio vettore di un dato angolo α
(o, eventualmente, il prolungamento del raggio vettore dalla parte dell’origine).

Si dice “tangente di α” l’ordinata del punto T, ossia la misura (con segno) del segmento AT in figura.

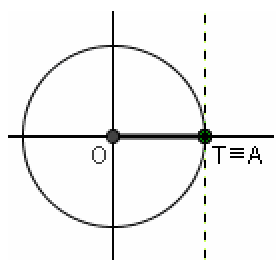


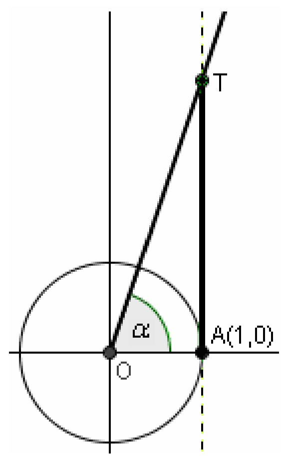
tg α = ordinata di T = misura (con segno) di AT

Clicca QUI ⇨
per una bella figura dinamica
(software GeoGebra)
che ti permetterà di osservare
la variazione della tangente goniometrica
al variare dell’angolo.

Per $\boxed{\alpha = 0° \text{ (0 radianti)}}$

$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = 0}$





Nel $\boxed{\text{1° quadrante}}$, ossia

per $0° < \alpha < 90°$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$,

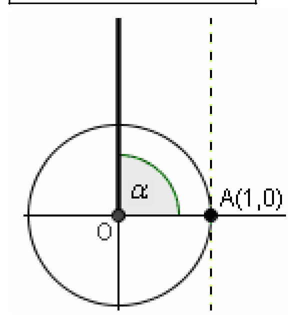
si ha $\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha > 0}$

… e quando α si avvicina a 90°,
mantenendosi però *minore* di 90°,
tg α diventa altissima,
“tende a $+\infty$”.

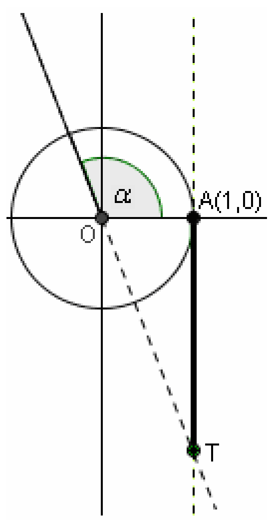
Ad esempio, si ha
$\mathrm{tg}\ 89.97° \approx 1909.86$

Per $\boxed{\alpha = 90° \ (\pi/2 \text{ radianti})}$

$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha \ \text{NON ESISTE}}$!



Il raggio vettore, ossia
il secondo lato dell’angolo,
in questo caso coincide col
semiasse delle ordinate positive.
Ma allora il punto T “non si trova”,
perché il raggio vettore
e la retta tratteggiata
sono parallele
e quindi non si incontrano.



Nel $\boxed{\text{2° quadrante}}$, ossia

per $90° < \alpha < 180°$ $\left(\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$,

si ha $\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha < 0}$

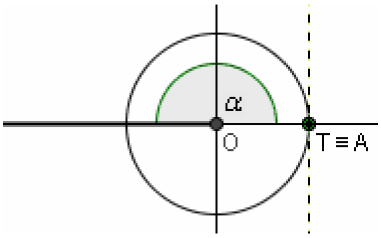
Il raggio vettore è una semiretta
immersa nel 2° quadrante,
ma la definizione di tangente goniometrica
prevede che si debba sempre considerare
l’intersezione fra la retta verticale per A
e il raggio vettore o, eventualmente
(come in questo caso), il suo prolungamento.

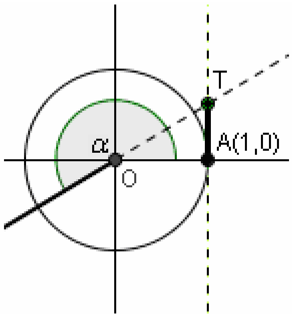
Quando α si avvicina a 90°,
mantenendosi però *maggiore* di 90°
(ossia: decrescendo),
tg α diventa altissima in valore assoluto,
ma negativa in segno:
si dice che “tende a $-\infty$”

Ad es., si ha $\mathrm{tg}\ 90.01° \approx -5729.58$

Per $\boxed{\alpha = 180° \ (\pi \text{ radianti})}$

è di nuovo $\boxed{\text{tg}\,\alpha = 0}$





Nel $\boxed{3° \text{ quadrante}}$, ossia

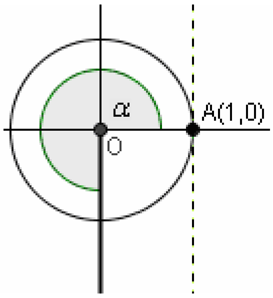
per $180° < \alpha < 270°$ $\left(\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi\right)$,

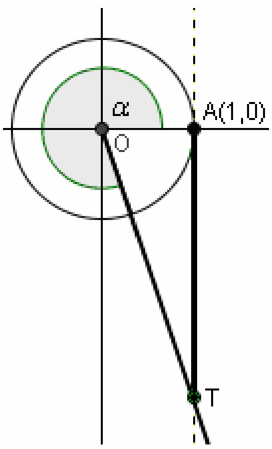
ritorna ad essere $\boxed{\text{tg}\,\alpha > 0}$

Osserva che,
appena l'angolo supera i 180°,
la tangente riprende gli stessi valori
che aveva a partire da 0°.

Per $\boxed{\alpha = 270° \ \left(\frac{3}{2}\pi \text{ radianti}\right)}$

$\boxed{\text{tg}\,\alpha}$, nuovamente, $\boxed{\text{NON ESISTE}}$.



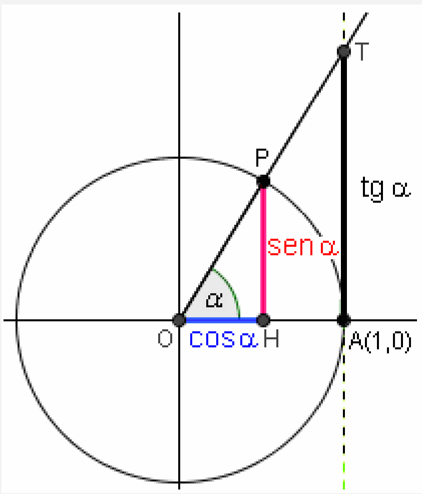


Nel $\boxed{4° \text{ quadrante}}$, ossia

per $270° < \alpha < 360°$ $\left(\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi\right)$,

ritorna ad essere $\boxed{\text{tg}\,\alpha < 0}$

Quando l'angolo α raggiunge e poi supera i 360°, i valori della tangente "ripartono come se si ripartisse da 0° ".
Ma in fondo vediamo che questo "ricominciare da capo" si ha già quando l'angolo raggiunge e poi supera **180°**!
Insomma, **la funzione "tangente" è "periodica di periodo 180°"**; di questo torneremo a parlare più avanti.



La figura qui a fianco mostra
$AT = \text{tg}\,\alpha$, $HP = \text{sen}\,\alpha$, $OH = \cos\alpha$.
I due triangoli OAT, OHP sono simili
(sono entrambi rettangoli,
hanno l'angolo α in comune
e i due angoli acuti di vertici T e P uguali
per differenza rispetto a 180°).
Perciò vale la proporzione $AT : OA = HP : OH$
la quale si può riscrivere come

Due triangoli
con gli angoli
rispettivamente uguali
sono detti "*simili*",
e hanno anche
i lati in proporzione.
Breve spiegazione
se volti la pagina.

$\text{tg}\,\alpha : 1 = \text{sen}\,\alpha : \cos\alpha$ ossia $\boxed{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}}$.

L'uguaglianza nel riquadro prende il nome di

2ª RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA.

Possiamo a questo punto osservare che la 2ª rel. fondamentale della goniometria è coerente col fatto che

- **la tangente vale 0 per tutti e soli quegli angoli il cui seno è 0**, che sono poi: **0°, 180°, 360°**
  e, andando fuori dai confini del 1° giro, $\mathbf{360° + 180° = 540°,\ 540° + 180° = 720°,\ \ldots\ ;\ -180°,\ -360°,\ \ldots}$;
  più in generale, dunque: per tutti gli angoli che si possono scrivere sotto la forma
  $\boldsymbol{k \cdot 180°}$, essendo k un intero relativo ($\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$);
- **la tangente non esiste ("va all'infinito") per tutti e soli quegli angoli il cui coseno è 0** cioè **90°, 270°**
  e, andando fuori dai confini del 1° giro, $\mathbf{270° + 180° = 450°,\ 450° + 180° = 630°,\ \ldots\ ;\ -90°,\ -270°,\ \ldots}$
  più in generale, dunque: per tutti gli angoli che si possono scrivere sotto la forma
  $\boldsymbol{90° + k \cdot 180°}$, essendo k un intero relativo ($\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$)

IL TENDERE A INFINITO. Dire, ad es., che **la tangente "va all'infinito a 90°"**, significa affermare che **quando l'angolo si fa molto vicino a 90°, la rispettiva tangente diventa grandissima in valore assoluto**:

- **per un angolo di pochissimo inferiore a 90°**, ossia **quando l'angolo tende a 90° "per difetto" (1° quadrante), la tangente è grandissima in valore assoluto e positiva ("tende a $+\infty$")**
- mentre **per un angolo appena superiore a 90°**, ossia **quando l'angolo tende a 90° "per eccesso" (2° quadrante), la tangente è grandissima in valore assoluto e negativa ("tende a $-\infty$").**