

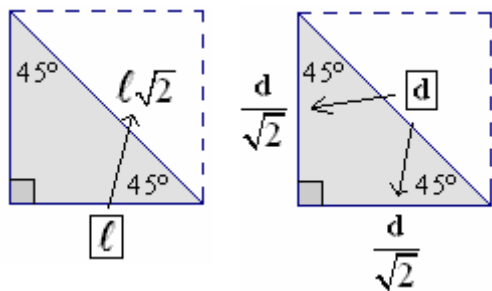
## 8. ALCUNE FORMULE UTILI

I valori delle funzioni goniometriche (seno, coseno, tangente) degli angoli multipli di  $30^\circ$  o di  $45^\circ$  si possono trovare utilizzando le formule qui sotto riportate (facilmente ottenibili con semplici considerazioni di geometria elementare e utilizzando il T. di Pitagora). Esse permettono, nei cosiddetti “triangoli rettangoli particolari” (=quelli con gli angoli acuti di  $30^\circ$  e  $60^\circ$ , o di  $45^\circ$ ), di ricavare tutti i lati conoscendo uno solo di essi.

### In un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI $45^\circ$

(che può essere visto come la metà di un quadrato):

- L'IPOTENUSA E' UGUALE AL CATETO MOLTIPLICATO  $\sqrt{2}$
- IL CATETO E' UGUALE ALL'IPOTENUSA DIVISO  $\sqrt{2}$



Ricordiamo che

$$\sqrt{2} = 1.414213... \approx 1.4$$

L'espressione  $\frac{d}{\sqrt{2}}$  viene di norma “razionalizzata”:

$$\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

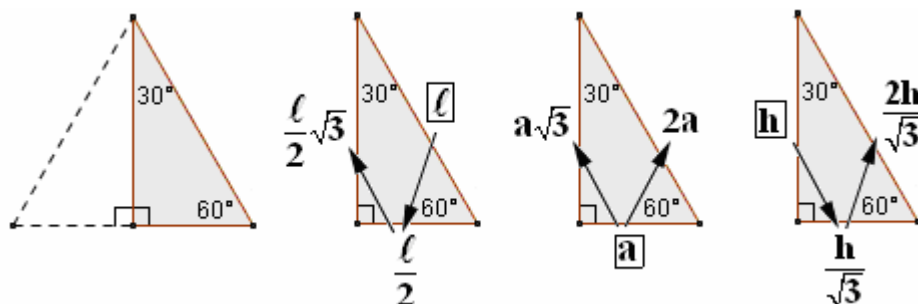
$$\text{Scrivendo } \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

noi non abbiamo alterato il valore dell'espressione di partenza  $d/\sqrt{2}$ , perché l'abbiamo moltiplicata per 1! L'abbiamo invece “razionalizzata”, cioè ci siamo liberati della radice a denominatore, ritenuta per varie ragioni fastidiosa.

### In un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI $30^\circ$ e $60^\circ$

(che può essere visto come la metà di un triangolo equilatero):

- IL CATETO MINORE E' META' DELL'IPOTENUSA e quindi l'ipotenusa è il doppio del cateto minore
- IL CATETO MAGGIORE E' UGUALE AL MINORE MOLTIPLICATO  $\sqrt{3}$  e quindi: il cateto maggiore è uguale a metà ipotenusa moltiplicato  $\sqrt{3}$  mentre il cateto minore è uguale al cateto maggiore diviso  $\sqrt{3}$



Ricordiamo che

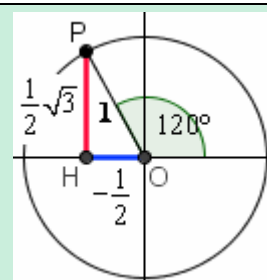
$$\sqrt{3} = 1.73205... \approx 1.7$$

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{h\sqrt{3}}{3}$$

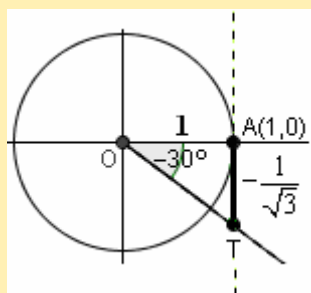
#### □ Quanto valgono $\sin 120^\circ$ e $\cos 120^\circ$ ?

Facciamo un disegno e ricordiamo che il raggio della circonf. goniometrica vale 1. I lati del triangolo rett. particolare OPH ( $\widehat{POH} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ) valgono dunque: 1 (l'ipotenusa OP);  $\frac{1}{2}$  (il cateto minore OH);  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$  (il cateto maggiore HP).

Allora avremo, tenendo conto dei segni:  $\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ;  $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

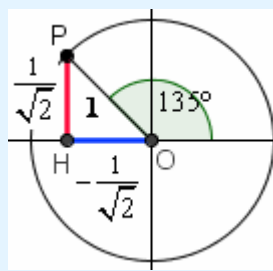


#### □ Quanto vale $\text{tg}(-30^\circ)$ ?



Questa volta il segmento noto è  $OA = \text{raggio} = 1$ .  
Si trae subito, tenendo conto che T ha ordinata negativa,  $\text{tg}(-30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

#### □ Quanto valgono seno e coseno di $135^\circ$ ?



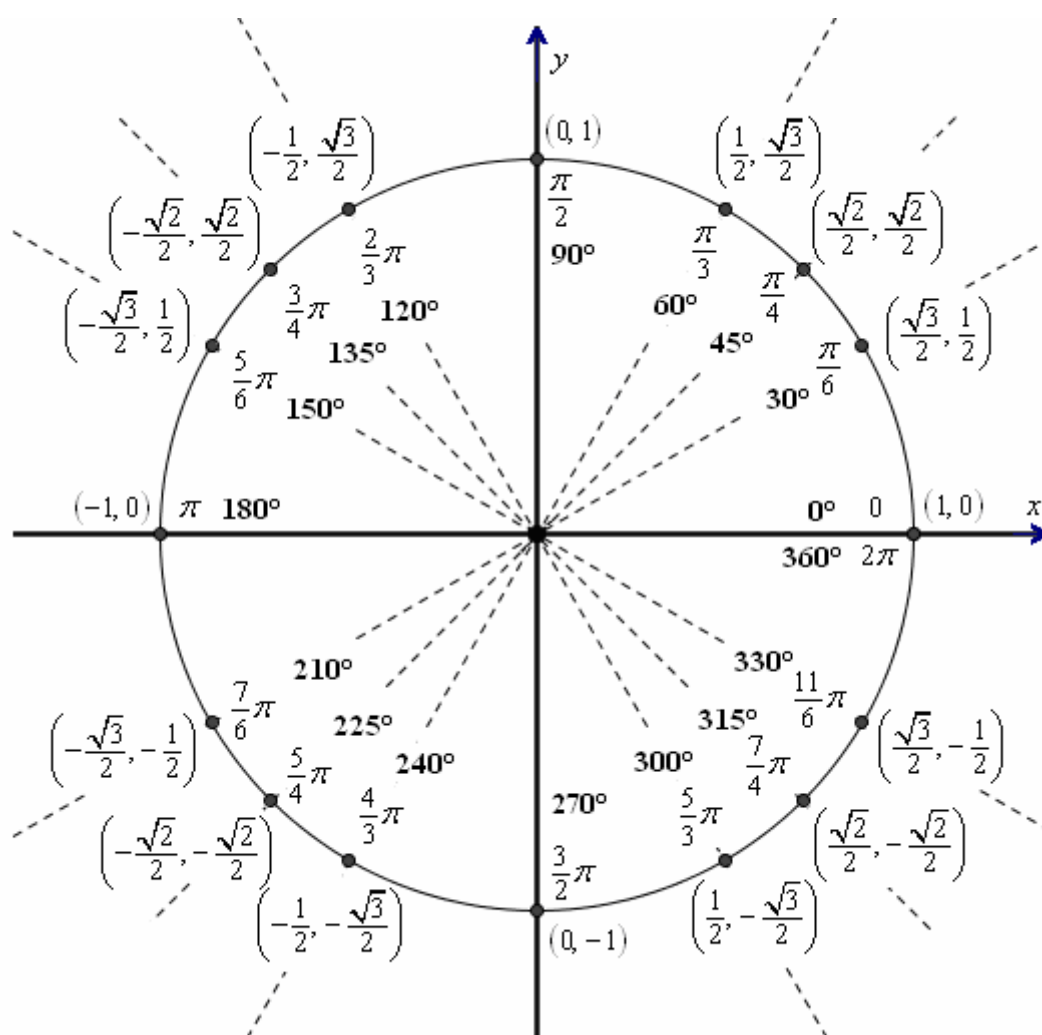
Il segmento noto è qui  $OP = \text{raggio} = 1$ .  
Il triangolo rett. POH ha gli angoli acuti di  $45^\circ$ .  
P ha ascissa negativa e ordinata positiva ...

$$\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La seguente figura mostra i

**VALORI DEL SENO E DEL COSENO DI ALCUNI ANGOLI "PARTICOLARI".**



**Il coseno**

è la 1<sup>a</sup> coordinata, ossia l'ascissa del punto; il seno è la 2<sup>a</sup> coordinata, ossia l'ordinata.

Tanto per fare un esempio: l'angolo di 120° ha come misura in radianti

$$\frac{2}{3}\pi,$$

e, dato che il punto associato è

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

risulta

$$\begin{aligned} \cos 120^\circ &= \\ &= \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 120^\circ &= \\ &= \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

**ESERCIZI** (risposte a pag. 16)

Tenendo coperta la figura qui sopra ☺, determina i valori seguenti:

- |                             |  |                                   |   |  |                                   |
|-----------------------------|--|-----------------------------------|---|--|-----------------------------------|
| 1) $\sin 30^\circ$          | 2) $\cos 30^\circ$                                 | 3) $\operatorname{tg} 30^\circ$   | 4) $\sin 60^\circ$                      | 5) $\cos 60^\circ$                     | 6) $\operatorname{tg} 60^\circ$   |
| 7) $\sin 45^\circ$          | 8) $\cos 45^\circ$                                 | 9) $\operatorname{tg} 45^\circ$   | 10) $\sin 120^\circ$                    | 11) $\cos 120^\circ$                   | 12) $\operatorname{tg} 120^\circ$ |
| 13) $\sin 150^\circ$        | 14) $\cos 150^\circ$                               | 15) $\operatorname{tg} 150^\circ$ | 16) $\sin 135^\circ$                    | 17) $\cos 135^\circ$                   | 18) $\operatorname{tg} 135^\circ$ |
| 19) $\sin 0^\circ$          | 20) $\cos 0^\circ$                                 | 21) $\sin 90^\circ$               | 22) $\cos 90^\circ$                     | 23) $\sin 180^\circ$                   | 24) $\cos 180^\circ$              |
| 25) $\sin 225^\circ$        | 26) $\cos 225^\circ$                               | 27) $\operatorname{tg} 225^\circ$ | 28) $\sin 210^\circ$                    | 29) $\cos 210^\circ$                   | 30) $\operatorname{tg} 210^\circ$ |
| 31) $\sin 240^\circ$        | 32) $\cos 240^\circ$                               | 33) $\operatorname{tg} 240^\circ$ | 34) $\sin 270^\circ$                    | 35) $\cos 270^\circ$                   | 36) $\operatorname{tg} 270^\circ$ |
| 37) $\cos 270^\circ$        | 38) $\sin 315^\circ$                               | 39) $\cos 315^\circ$              | 40) $\sin(-60^\circ)$                   | 41) $\cos 300^\circ$                   | 42) $\operatorname{tg} 330^\circ$ |
| 43) $\operatorname{tg} \pi$ | 44) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ | 45) $\sin \frac{\pi}{6}$          | 46) $\cos \frac{2}{3}\pi$               | 47) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{2}$ | 48) $\sin \frac{5}{4}\pi$         |
| 49) $\cos \frac{9}{4}\pi$   | 50) $\operatorname{tg} 780^\circ$                  | 51) $\sin 630^\circ$              | 52) $\operatorname{tg} \frac{11}{6}\pi$ | 53) $\sin \frac{7}{6}\pi$              | 54) $\cos \frac{5}{3}\pi$         |

Stabilisci quali sono, nell'ambito del **primo giro** ( $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ ), le soluzioni delle seguenti equazioni goniometriche (scrivi le soluzioni in **gradi**).

- |                                |                                       |                            |                               |
|--------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| 55) $\sin x = \frac{1}{2}$     | 56) $\sin x = -\frac{1}{2}$           | 57) $\cos x = \frac{1}{2}$ | 58) $\cos x = -\frac{1}{2}$   |
| 59) $\operatorname{tg} x = -1$ | 60) $\sin x = 0$                      | 61) $\cos x = 0$           | 62) $\operatorname{tg} x = 0$ |
| 63) $\sin x = \cos x$          | 64) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ | 65) $\cos x = \sqrt{2}/2$  | 66) $\sin x + \cos x = 0$     |

**RISPOSTE agli esercizi di pag. 15**

- 1)  $\frac{1}{2}$       2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       3)  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$       4)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       5)  $\frac{1}{2}$       6)  $\sqrt{3}$   
 7)  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$       8)  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$       9) 1      10)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       11)  $-\frac{1}{2}$       12)  $-\sqrt{3}$   
 13)  $\frac{1}{2}$       14)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       15)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$       16)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       17)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       18) -1  
 19) 0      20) 1      21) 1      22) 0      23) 0      24) -1  
 25)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       26)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       27) 1      28)  $-\frac{1}{2}$       29)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       30)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 31)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       32)  $-\frac{1}{2}$       33)  $\sqrt{3}$       34) -1      35) 0      36) non esiste  
 37) 0      38)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       39)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       40)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       41)  $\frac{1}{2}$       42)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 43) 0      44) -1      45)  $\frac{1}{2}$       46)  $-\frac{1}{2}$       47) non esiste      48)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 49)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       50)  $\sqrt{3}$       51) -1      52)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$       53)  $-\frac{1}{2}$       54)  $\frac{1}{2}$

- 55)  $x = 30^\circ, x = 150^\circ$   
 56)  $x = 210^\circ, x = 330^\circ$   
 57)  $x = 60^\circ, x = 300^\circ$   
 58)  $x = 120^\circ, x = 240^\circ$   
 59)  $x = 135^\circ, x = 315^\circ$   
 60)  $x = 0^\circ, x = 180^\circ, x = 360^\circ$   
 61)  $x = 90^\circ, x = 270^\circ$   
 62)  $x = 0^\circ, x = 180^\circ, x = 360^\circ$   
 63)  $x = 45^\circ, x = 225^\circ$   
 64)  $x = 120^\circ, x = 300^\circ$   
 65)  $x = 45^\circ, x = 315^\circ$   
 66)  $x = 135^\circ, x = 315^\circ$

**5.** Find to the *nearest degree*, the measure of an acute angle formed by the  $x$ -axis and the line containing the points (4,3) and (8,9).

Immagine a fianco:  
 da [www.regentsprep.org](http://www.regentsprep.org)

Grab your calculator  
 for this question.



Choose:  57     34     56

**Answer**