13. I GRAFICI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE: IL SENO

Il seno, il coseno, la tangente e la cotangente sono quantità il cui valore DIPENDE dall'angolo considerato: sono dette, proprio per questo, FUNZIONI ANGOLARI.

Possiamo allora pensare di tracciare i GRAFICI di tali funzioni.
Pensiamo innanzitutto, per fissare le idee, alla funzione $y = sen\,x$.
NOTA: qui è più opportuno indicare l'angolo (= arco) con x anziché con α
perché la variabile indipendente di una funzione si indica preferibilmente con x

L'angolo (= arco) x andrà in ascissa, mentre il valore corrispondente del seno andrà in ordinata.

Riflettiamo ora: **i valori dell'angolo (= arco), che dovranno essere riportati sull'asse delle ascisse, sarà meglio esprimerli in gradi oppure in radianti?**

Beh, **la risposta è senza dubbio: in radianti**!

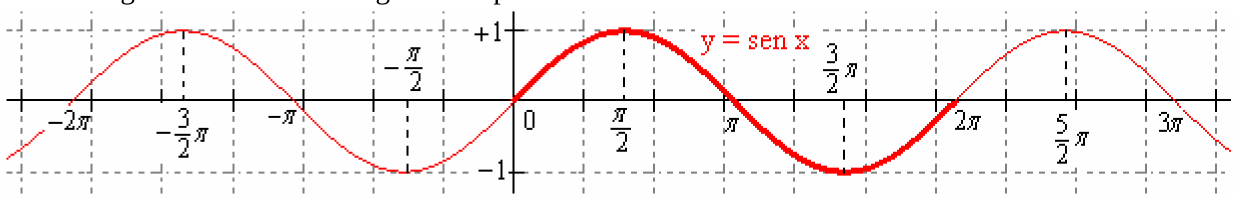
Infatti: se scegliessimo di mettere in ascissa i *gradi*, allora avremmo
- in ascissa, numeri indicanti AMPIEZZE (unità di misura: il grado, ossia la 360-esima parte dell'angolo giro)
- e in ordinata, numeri indicanti LUNGHEZZE (il seno è un'ordinata, quindi è una lunghezza con segno).

Invece, **rappresentando l'angolo (= arco) in radianti,**
l'analogia di ruolo fra i numeri disposti sui due assi sarà piena:
- **in ascissa avremo numeri interpretabili come LUNGHEZZE**
  (misurare un angolo in radianti vuol dire misurare la lunghezza dell'arco corrispondente, supposto rettificato, prendendo come **unità di misura il raggio della circonferenza**);
- **in ordinata avremo allo stesso modo numeri interpretabili come LUNGHEZZE**
  con l'ulteriore vantaggio che **l'unità di misura per queste lunghezze sarà la stessa di prima**: infatti, poiché la circonferenza goniometrica è per definizione una circonferenza di raggio = 1, il segmento che rappresenta il "seno" è come se avesse lunghezza calcolata prendendo il **raggio** come unità di misura.

Procediamo, dunque! Vogliamo tracciare il grafico di $y = sen\,x$. Con l'aiuto della tabella seguente:

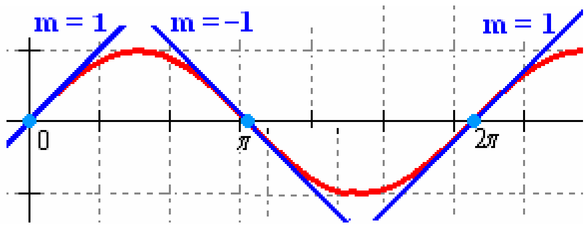
arco x in radianti	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	$\frac{13}{6}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$
sen x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

e tenendo conto che la funzione $y = sen\,x$ è periodica di periodo 2π,
(quindi ripete indefinitamente, sia "verso destra" che "verso sinistra", lo stesso andamento che si ha fra 0 e 2π, ossia nella zona che abbiamo evidenziato aumentando lo spessore),
potremo disegnare la curva: un'elegante "serpentina" che è anche chiamata "**sinusoide**".



Si potrebbe dimostrare, utilizzando le "derivate", che la sinusoide, quando attraversa l'asse orizzontale, lo attraversa secondo una inclinazione di 45° rispetto all'orizzontalità, e precisamente:
- $+45°$ ossia 45° "in salita", nei punti
  $x = -2\pi,\ \ x = 0,\ \ x = 2\pi,\ \ x = 4\pi, ...$
  (insomma: $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$: multipli pari di π)
- $-45°$, ossia 45° "in discesa", nei punti
  $x = -\pi,\ \ \pi,\ \ x = 3\pi, ...$
  (insomma: $x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$: multipli dispari di π)

Ciò equivale a dire che il coefficiente angolare m della retta, che è tangente al grafico in ciascuno di questi punti, vale (a seconda dei casi) $+1$ oppure -1:



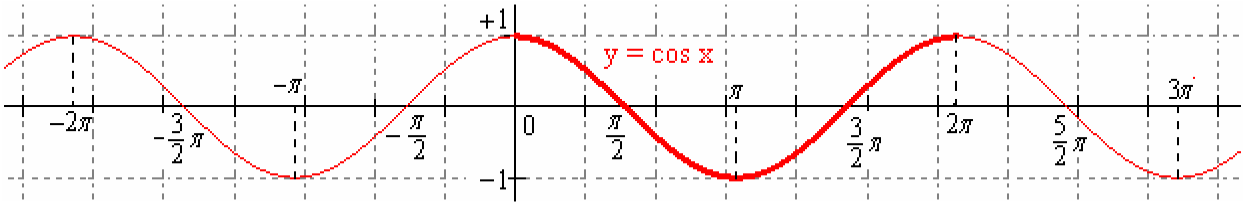
Vuoi adesso un suggerimento molto "alla buona" ma, a mio avviso, decisamente utile?

Quando devi disegnare sul quaderno una sinusoide, prendi come unità di misura un segmento di DUE quadretti. A questo punto il numero $\pi = 3.14...$ dovrebbe essere collocato a una distanza di un po' più di 6 quadretti dall'origine; ma tu, dai retta a me, ponilo ad esattamente 6 quadretti.
La figura subirà così una piccolissima deformazione, ma in compenso avrai il vantaggio che $\pi/6$ si troverà a esattamente 1 quadretto, $\pi/3$ a esattamente 2 quadretti, $\pi/2$ a esattamente 3 quadretti!
Che comodità! E questo a prezzo di un'alterazione della forma della curva, che è davvero molto lieve.

14. I GRAFICI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE: IL COSENO

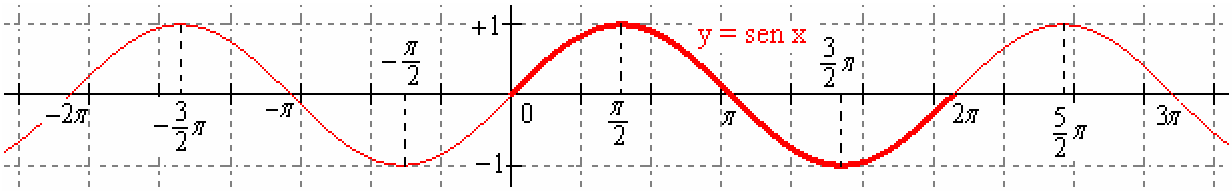
E passiamo ora al grafico di $y = \cos x$: la curva è detta **cosinusoide**.

arco *x* in radianti	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	$\frac{13}{6}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$
cos *x*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$



Si potrebbe dimostrare che anche la cosinusoide, così come la sinusoide, quando attraversa l'asse orizzontale, lo attraversa secondo una inclinazione di $45°$ rispetto all'orizzontalità:
$+45°$ o $-45°$ a seconda che l'attraversamento avvenga "in salita" o "in discesa".
Ricordiamo che ciò corrisponde ad avere una retta tangente con coefficiente angolare $m = 1$ oppure $m = -1$

Hai notato che la cosinusoide assomiglia moltissimo alla sinusoide?
Ridiamo un attimo un'occhiata a quest'ultima, e confrontiamo le due curve:



In effetti, la curva grafico di $y = \cos x$ appare ottenibile traslando la $y = sen\, x$ verso sinistra di $\pi/2$;
in alternativa, si può pensare di ottenere $y = sen\, x$ traslando la $y = \cos x$ verso destra di $\pi/2$.
Tutto ciò è coerente con due formule la cui validità verrà dimostrata più avanti:

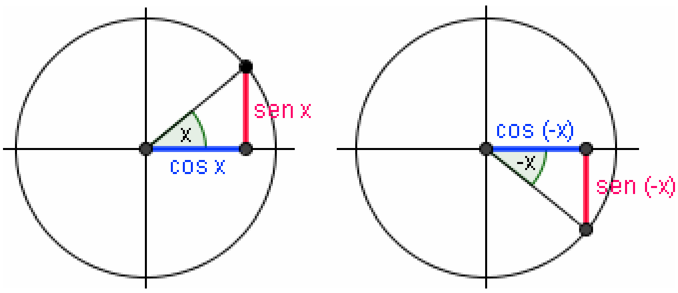
$$\cos x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \qquad sen\, x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Da semplici disegni di circonferenze goniometriche (vedi qui a destra) emergono poi due osservazioni che sono in pieno accordo coi grafici sopra riportati: qualunque sia l'arco x, si ha sempre

- $sen(-x) = -sen\, x$
- $\cos(-x) = \cos x$

ossia:

- il seno è una funzione "dispari" (NOTA)
- il coseno è una funzione "pari" (NOTA)



NOTA

- Una funzione $y = f(x)$ si dice "dispari" se, per ogni x del suo dominio, risulta $f(-x) = -f(x)$
  (il grafico di una funzione dispari ha sempre la caratteristica di essere simmetrico rispetto all'origine);
- una funzione $y = f(x)$ si dice "pari" se, per ogni x del suo dominio, risulta $f(-x) = f(x)$
  (il grafico di una funzione pari ha sempre la caratteristica di essere simmetrico rispetto all'asse delle y).

Approfittiamo del fatto che in questa pagina sono rappresentate entrambe le funzioni $y = sen\, x$ e $y = \cos x$

- per osservare, anche sui rispettivi grafici, come entrambe abbiano la y sempre compresa fra -1 e $+1$
- e per ribadire ancora una volta la loro PERIODICITA'(periodo 2π):
  $sen(x + 2k\pi) = sen\, x, \ \forall k \in \mathbb{Z}$ e $\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \ \forall k \in \mathbb{Z}$

Osserviamo ancora che il valore "particolare" $\frac{\sqrt{3}}{2}$ equivale a *circa* $\frac{1.7}{2} = 0.85$.

Ci sono poi altri valori "particolari" che per motivi si semplicità e di spazio non abbiamo riportato nelle tabelle:
ad esempio, $sen\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; bene, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ è uguale *circa* a $\frac{1.4}{2} = 0.7$.