17. LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

Sono quelle della forma

$$\boldsymbol{sen\,x = q \qquad cos\,x = q \qquad tg\,x = q \qquad cotg\,x = q}$$

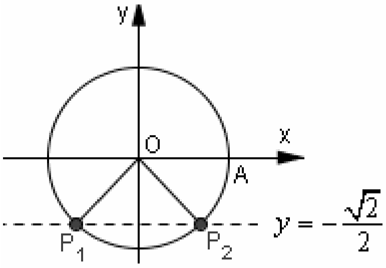
essendo q un numero reale assegnato.

Facciamo qualche esempio.

a) $sen\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Devo trovare quegli archi x il cui seno è $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Disegno dunque, o comunque mi figuro nella mente, la circonferenza goniometrica:
il seno è un' ORDINATA, è l'ordinata di un punto (l'estremo dell'arco) sulla circonferenza goniometrica, quindi
si tratta di andare a cercare i punti della circonferenza goniometrica che hanno ordinata $-\sqrt{2}/2$
per stabilire quali sono gli archi di cui questi punti rappresentano l'estremo terminale.
Volendo, a tale scopo, si può pensare di trovare le intersezioni fra la circonferenza goniometrica (di raggio 1) e la retta di ordinata costante $y = -\sqrt{2}/2$ ($-\sqrt{2}/2$ vale circa –0.7):



Ricordandoci a questo punto anche le formule sui triangoli rettangoli particolari,
comprendiamo che i due archi in questione sono $\frac{5}{4}\pi$ (arco $\overset{\frown}{AP_1}$) e $\frac{7}{4}\pi$ (arco $\overset{\frown}{AP_2}$)
e scriviamo in definitiva, tenendo conto che il seno è una funzione periodica di periodo 2π
(quindi il suo valore non cambia se l'arco viene aumentato o diminuito di 2π o di un multiplo di 2π):

$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \ \vee\ x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$, essendo k un intero relativo arbitrario ($k \in \mathbb{Z}$).

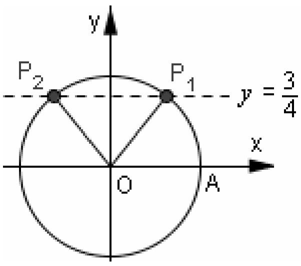
In alternativa, potevamo anche "vedere" il punto P_2 come il secondo estremo dell'arco negativo $-\frac{\pi}{4}$,
scrivendo dunque le soluzioni sotto la forma alternativa

$$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \ \vee\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Controlliamo bene: in effetti le due scritture $\frac{7}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ e $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
"generano", al variare di k, lo stesso insieme di valori:

k	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	..
$\frac{7}{4}\pi + 2k\pi$	…	$-\frac{17}{4}\pi$	$-\frac{9}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{15}{4}\pi$	$\frac{23}{4}\pi$	$\frac{31}{4}\pi$	…
$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$	…	$-\frac{25}{4}\pi$	$-\frac{17}{4}\pi$	$-\frac{9}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{15}{4}\pi$	$\frac{23}{4}\pi$	…

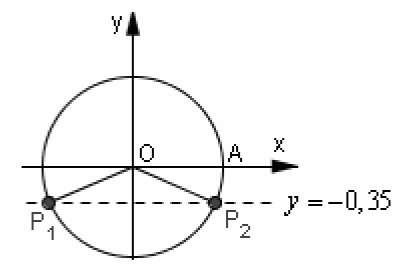
b) $sen\,x = \frac{3}{4}$



$$x = arc\,sen\frac{3}{4} + 2k\pi \ \vee\ x = \pi - arc\,sen\frac{3}{4} + 2k\pi$$

In figura: $\quad arc\,sen\frac{3}{4} = \overset{\frown}{AP_1}, \qquad \pi - arc\,sen\frac{3}{4} = \overset{\frown}{AP_2}$

c) $sen\,x = -0.35$



Puoi controllare che anche in questo caso si ha, come nell'es. b),
$x = arc\,sen(-0,35) + 2k\pi \;\vee\; x = \pi - arc\,sen(-0,35) + 2k\pi$

$arc\,sen(-0,35) = \widehat{AP_2}$ (*da* A *fino a* P_2 *in verso orario = negativo*)
$\pi - arc\,sen(-0,35) = \widehat{AP_1}$

Ricordando che $arc\,sen(-t) = -arc\,sen\,t$,
le soluzioni si possono, più elegantemente, riscrivere come
$x = -arc\,sen\;0,35 + 2k\pi \;\vee\; x = \pi + arc\,sen\;0,35 + 2k\pi$

I precedenti tre esempi a), b), c)
mostrano che, in generale,
l'equazione goniometrica elementare $\boxed{\boldsymbol{sen\,x = q \quad (-1 \le q \le 1)}}$
avrà come soluzioni $\boxed{\boldsymbol{x = arc\,sen\,q + 2k\pi \;\vee\; x = \pi - arc\,sen\,q + 2k\pi}}$

d) $sen\,x = 2$ Evidentemente, questa equazione è IMPOSSIBILE

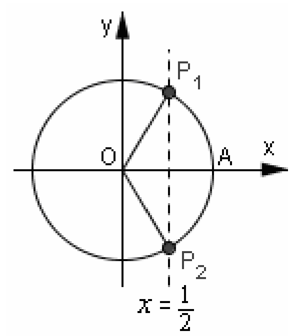
e) $sen\,x = 1 \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

f) $sen\,x = 0$ Le soluzioni di questa equazione si possono scrivere sotto la forma $x = k\pi$

g) $sen\,x = -1 \qquad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

h) $cos\,x = \frac{1}{2}$

Il coseno è un'ASCISSA, è l'ascissa di un punto (l'estremo dell'arco) sulla circonferenza goniometrica, quindi si tratta di andare a cercare i punti della circonferenza goniometrica che hanno ascissa $1/2$ per stabilire quanto valgono, in radianti, gli archi corrispondenti.
Tali punti sono le intersezioni fra la circonferenza goniometrica e la retta di ascissa costante $x = 1/2$.



Ricordandoci a questo punto anche le formule sui triangoli rettangoli particolari, comprendiamo che i due archi in questione sono
$\frac{\pi}{3}$ (arco $\widehat{AP_1}$) e $-\frac{\pi}{3}$(arco $\widehat{AP_2}$, pensando di andare da A a P_2 in senso orario;
volendo si può anche pensare all'arco positivo $\frac{5}{3}\pi$)
e scriviamo in definitiva, tenendo conto della periodicità del coseno,
$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, essendo k un intero relativo arbitrario ($k \in \mathbb{Z}$).

Alternativa meno elegante: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\vee\; x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$

i) $cos\,x = 0.81 \qquad x = \pm arc\;cos\,0.81 + 2k\pi$

j) $cos\,x = -0.2 \qquad x = \pm arc\;cos(-0.2) + 2k\pi = \pi \mp arc\;cos\,0.2 + 2k\pi$

I precedenti tre esempi h), i), j)
mostrano che, in generale,
l'equazione goniometrica elementare $\boxed{\boldsymbol{cos\,x = q \quad (-1 \le q \le 1)}}$
avrà come soluzioni $\boxed{\boldsymbol{x = \pm arc\,cos\,q + 2k\pi}}$

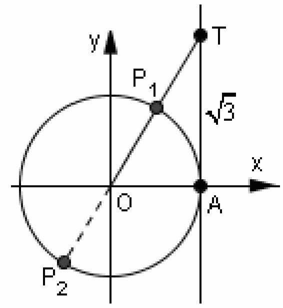
k) $cos\,x = 2$ IMPOSSIBILE

l) $cos\,x = 1 \qquad x = 0 + 2k\pi = 2k\pi$

m) $cos\,x = 0 \qquad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

n) $cos\,x = -1 \qquad x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi,\;$ *ossia : multipli dispari di* π

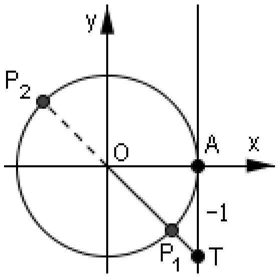
o) $tg\, x = \sqrt{3}$



Nell'ambito del 1° giro, le soluzioni sono i due archi
$x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{4}{3}\pi$;
in generale, tenendo conto del fatto che
la tangente è periodica di periodo "mezzo giro" (π)
le soluzioni saranno rappresentabili dalla scrittura

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

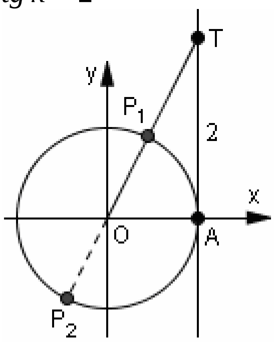
p) $tg\, x = -1$



Fra gli archi soluzione,
quello che è più spontaneo considerare è senz'altro $x = -\pi/4$.
L'altro arco soluzione in figura è $x = \frac{3}{4}\pi = -\frac{\pi}{4} + \pi$.
La tangente è periodica di periodo "mezzo giro" (π)
per cui le soluzioni possono essere indicate dalla scrittura

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

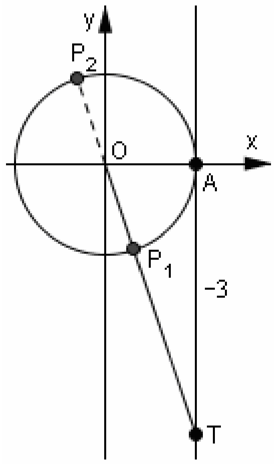
q) $tg\, x = 2$



$$x = arc\ tg\, 2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nella figura,
$\overset{\frown}{AP_1} = arc\ tg\, 2$
$\overset{\frown}{AP_2} = arc\ tg\, 2 + \pi$

r) $tg\, x = -3$



$$x = arc\ tg\,(-3) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nella figura,
$\overset{\frown}{AP_1}$ $(senso\ orario) = arc\ tg\,(-3)$
$\overset{\frown}{AP_2} = arc\ tg\,(-3) + \pi$

Tenendo presente che $arc\ tg\,(-q) = -arc\ tg\ q$
Possiamo riscrivere l'insieme delle soluzioni nella forma più elegante
$x = -\,arc\ tg\, 3 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

I precedenti quattro esempi o), p), q), r) mostrano che, in generale,
per risolvere l'equazione goniometrica elementare $\boxed{tg\ x = q}$
"BASTA GUARDARE LA SOLA METÀ DESTRA DELLA TORTA"
(quella che si riferisce agli archi tra $-\frac{\pi}{2}$ **e** $\frac{\pi}{2}$**)**
e scrivere che le soluzioni sono $\boxed{x = arc\, tg\, q + k\pi}$

s) $tg\, x = 0 \qquad x = 0 + k\pi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

In questa rassegna di equazioni elementari, **volutamente evitiamo di inserire la tipologia** $\boxed{cotg\ x = q}$;
d'altronde, per la 3^a Rel. Fond., $cotg\ x = q$ **si può risolvere trasformandola nell'equivalente** $\boxed{tg\ x = 1/q}$.

ESERCIZI

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche elementari (soluzioni in radianti, anche fuori dal "1° giro"):

1) $sen\,x=\frac{\sqrt{3}}{2}$	2) $sen\,x=\frac{1}{\sqrt{2}}$	3) $sen\,x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	4) $sen\,x=-\frac{1}{2}$
5) $sen\,x=1$	6) $sen\,x=0$	7) $sen\,x=-1$	8) $sen\,x=-2$
9) $sen\,x=0.6$	10) $sen\,x=-0.3$	11) $sen\,x=0.5$	12) $sen\,x=-\frac{\sqrt{2}}{4}$
13) $cos\,x=\frac{1}{2}$	14) $cos\,x=-\frac{1}{2}$	15) $cos\,x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$	16) $cos\,x=1$
17) $cos\,x=\frac{\sqrt{3}}{2}$	18) $cos\,x=\sqrt{3}$	19) $cos\,x=\frac{\sqrt{3}}{3}$	20) $cos\,x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$
21) $tg\,x=\frac{\sqrt{3}}{3}$	22) $tg\,x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$	23) $tg\,x=1$	24) $tg\,x=0$
25) $tg\,x=1000$	26) $tg\,x=-0{,}01$	27) $cotg\,x=1/\sqrt{3}$	28) $cotg\,x=-1$
29) $sen\,x=\frac{1}{4}$	30) $cos\,x=\frac{1}{4}$	31) $tg\,x=\frac{1}{4}$	32) $cotg\,x=\frac{1}{4}$
33) $sen\,x=-\frac{1}{4}$	34) $cos\,x=-\frac{1}{4}$	35) $tg\,x=-\frac{1}{4}$	36) $cotg\,x=-\frac{1}{4}$

SOLUZIONI (s'intende che k sia un intero relativo arbitrario: $k\in\mathbb{Z}$)

1) $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$ 2) $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$

3) $x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi \vee x=\frac{5}{3}\pi+2k\pi \left(oppure: x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$

4) $x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi \vee x=\frac{11}{6}\pi+2k\pi \left(oppure: x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$

5) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 6) $x=k\pi$ 7) $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$ 8) impossibile

9) $x=arc\,sen\,0.6+2k\pi \vee x=\pi-arc\,sen\,0.6+2k\pi$

10) $x=arc\,sen\,(-0.3)+2k\pi=-arc\,sen\,0.3+2k\pi \vee x=\pi-arc\,sen(-0.3)+2k\pi=\pi+arc\,sen\,0.3+2k\pi$

11) $0.5=\frac{1}{2}$ $quindi:$ $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$

12) $x=arc\,sen\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+2k\pi=-arc\,sen\,\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi \vee x=\pi-arc\,sen\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+2k\pi=\pi+arc\,sen\,\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi$

13) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 14) $x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi$ 15) $x=\pm\frac{3}{4}\pi+2k\pi$ 16) $x=0+2k\pi=2k\pi$

17) $x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 18) impossibile

19) $x=\pm arc\cos\frac{\sqrt{3}}{3}+2k\pi$ 20) $x=\pm arc\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+2k\pi=\pi\mp arc\cos\frac{\sqrt{3}}{3}+2k\pi$

21) $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ 22) $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$ 23) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 24) $x=k\pi$

25) $x=arc\,tg\,1000+k\pi$ 26) $x=arc\,tg\,(-0.01)+k\pi=-arc\,tg\,0.01+k\pi$

27) $cotg\,x=\frac{1}{\sqrt{3}}\leftrightarrow tg\,x=\sqrt{3};\quad x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ 28) $cotg\,x=-1\leftrightarrow tg\,x=-1;\quad x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

29) $x=arc\,sen\frac{1}{4}+2k\pi \vee x=\pi-arc\,sen\frac{1}{4}+2k\pi$ 30) $x=\pm arc\cos\frac{1}{4}+2k\pi$

31) $x=arc\,tg\frac{1}{4}+k\pi$ 32) $x=arc\,tg\,4+k\pi$

33) $x=-arc\,sen\frac{1}{4}+2k\pi \vee x=\pi+arc\,sen\frac{1}{4}+2k\pi$ 34) $x=\pi\mp arc\cos\frac{1}{4}+2k\pi$

35) $x=-arc\,tg\frac{1}{4}+k\pi$ 36) $x=-arc\,tg\,4+k\pi$