

22. LA “MADRE DI TUTTE LE FORMULE” IN TRIGONOMETRIA

Ci siamo fin qui limitati alle tre “Relazioni Fondamentali”:

$$1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad 2) \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad 3) \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

... ma in aggiunta a queste, la Trigonometria ci presenta poi una rigogliosa “fioritura” di nuove formule. Il bello è che tutte possono essere costruite a partire da una sola, la “formula di sottrazione per il coseno”, la quale perciò a buon diritto potrà fregiarsi del titolo di “madre di tutte le formule” della Trigonometria.

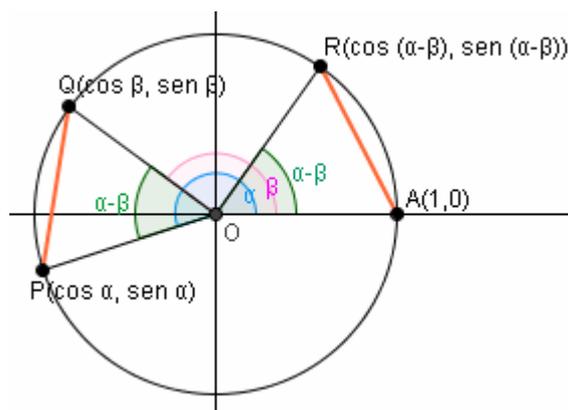
La “**formula di sottrazione per il coseno**” si propone di esprimere il coseno di una differenza

$$\cos(\alpha - \beta)$$

per mezzo di funzioni goniometriche aventi per argomento soltanto α , oppure soltanto β .

Nella figura qui a fianco sono rappresentati:

- un angolo $\alpha = \widehat{AOP}$
- un secondo angolo $\beta = \widehat{AOQ}$
- e, infine, l'angolo differenza $\alpha - \beta$,
che è evidentemente \widehat{QOP} ,
ma è stato poi ridisegnato in posizione “canonica”,
così da diventare \widehat{AOR} :
insomma, è $\alpha - \beta = \widehat{AOP} - \widehat{AOQ} = \widehat{QOP} = \widehat{AOR}$



Occhio alle coordinate dei tre punti P, Q ed R!

Per definizione di seno e coseno, esse sono le seguenti:

$$P(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$Q(\cos \beta, \sin \beta)$$

$$R(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$$

Ora, poiché in una circonferenza ad angoli al centro uguali corrispondono corde uguali, avremo

$$QP = AR$$

e quindi (formula per la distanza tra due punti sul piano cartesiano)

$$\sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2}$$

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta = \cos^2(\alpha - \beta) + 1 - 2 \cos(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)$$

$$\cancel{1} - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cancel{1} - 2 \sin \alpha \sin \beta = \cancel{1} - 2 \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cancel{2} \cos(\alpha - \beta) = \cancel{2} \cos \alpha \cos \beta + \cancel{2} \sin \alpha \sin \beta$$

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

formula di sottrazione per il coseno :

la "MADRE DI TUTTE LE FORMULE"!!!

- Fra pochissimo utilizzeremo la “madre di tutte le formule” nel suo ruolo peculiare, per dedurne altre; diamo però prima un esempio di sua applicazione: la determinazione del coseno di 15° .

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

ESERCIZI

a) Verifica che anche tramite la catena $\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \dots$ si perviene allo stesso risultato.

b) Completa la catena $\cos 75^\circ = \cos(135^\circ - 60^\circ) = \dots$

controlla poi la correttezza del risultato trovato, tenendo conto che si ha $\cos 75^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \sin 15^\circ$ e andando a calcolare $\sin 15^\circ$ mediante la Prima Relazione Fondamentale: $\sin 15^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 15^\circ}$

$$\left[\text{Otterrai } \cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right]$$