23. LE FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Partiamo dunque dalla "madre di tutte le formule"

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\,\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta$.

Essa ci permette di scrivere la seguente catena:

$$\begin{aligned}\mathbf{cos(\alpha+\beta)}&=\cos(\alpha-(-\beta))=\\&=\cos\alpha\,\cos(-\beta)+\operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}(-\beta)\underset{\text{NOTA}}{=}\\&=\cos\alpha\,\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\,(-\operatorname{sen}\beta)=\\&=\mathbf{cos\,\alpha\,cos\,\beta-sen\,\alpha\,sen\,\beta}\end{aligned}$$

NOTA
Sappiamo che
il coseno è una funzione PARI: $\cos(-x)=\cos x$
mentre il seno è DISPARI: $\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}x$

Nelle due catene che seguono utilizzeremo il fatto
che il coseno di un angolo è uguale al seno del complementare, e viceversa:

$$\begin{aligned}\mathbf{sen(\alpha+\beta)}&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\\&=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\beta=\mathbf{sen\,\alpha\,cos\,\beta+cos\,\alpha\,sen\,\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{sen(\alpha-\beta)}&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)=\\&=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\beta=\mathbf{sen\,\alpha\,cos\,\beta-cos\,\alpha\,sen\,\beta}\end{aligned}$$

Per la tangente:

$$\mathbf{tg(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta}\underset{\text{NOTA}}{=}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\,\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\,\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\,\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\,\operatorname{sen}\beta}{\cancel{\cos\alpha}\,\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\,\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\,\cos\beta}}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}}=\mathbf{\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}}$$

NOTA Dividiamo a questo punto sia il numeratore che il denominatore per $\cos\alpha\cos\beta$;
il procedimento è finalizzato a far comparire, dopo successiva semplificazione, $tg\,\alpha$ e $tg\,\beta$.
Osserviamo che questa divisione è effettuabile solo nel caso $\cos\alpha\neq0\wedge\cos\beta\neq0$, ossia nel caso
$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\wedge\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.
Queste ultime, d'altronde, sono poi anche le condizioni di esistenza di $tg\,\alpha$ e $tg\,\beta$.
In definitiva, la formula ricavata qui sopra è valida sotto le condizioni

$$\underbrace{\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi}_{\substack{\text{condizione di esistenza}\\ \text{di } tg(\alpha+\beta)}}\qquad\underbrace{\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi}_{\substack{\text{condizione di esistenza di } tg\,\alpha,\\ \text{e anche condizione necessaria}\\ \text{per poter effettuare un passaggio}\\ \text{nella costruzione della formula}}}\qquad\underbrace{\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi}_{\substack{\text{condizione di esistenza di } tg\,\beta,\\ \text{e anche condizione necessaria}\\ \text{per poter effettuare un passaggio}\\ \text{nella costruzione della formula}}}$$

Allo stesso modo, è possibile ottenere

$$\mathbf{tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\,tg\,\beta}}$$

la cui validità è soggetta alle condizioni

$$\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Ricapitoliamo:

$\mathbf{cos(\alpha-\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta+sen\,\alpha\,sen\,\beta}$ FORMULA DI SOTTRAZIONE PER IL COSENO

$\mathbf{cos(\alpha+\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta-sen\,\alpha\,sen\,\beta}$ FORMULA DI ADDIZIONE PER IL COSENO

$\mathbf{sen(\alpha+\beta)=sen\,\alpha\,cos\,\beta+cos\,\alpha\,sen\,\beta}$ FORMULA DI ADDIZIONE PER IL SENO

$\mathbf{sen(\alpha-\beta)=sen\,\alpha\,cos\,\beta-cos\,\alpha\,sen\,\beta}$ FORMULA DI SOTTRAZIONE PER IL SENO

$\mathbf{tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}}$ $\left[\alpha+\beta,\ \alpha,\ \beta\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right]$ FORMULA DI ADDIZIONE PER LA TANGENTE

$\mathbf{tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\,tg\,\beta}}$ $\left[\alpha-\beta,\ \alpha,\ \beta\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right]$ FORMULA DI SOTTRAZIONE PER LA TANGENTE

ESEMPI di applicazione

- $\operatorname{sen}75°=\operatorname{sen}(45°+30°)=\operatorname{sen}45°\cos30°+\cos45°\operatorname{sen}30°=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac12=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$

  Ricorderai che nella parte finale del paragrafo precedente lo stesso valore era stato ricavato per $\cos 15°$.
  E' naturale: il seno di un angolo è uguale al coseno del complementare.

- $\operatorname{sen}15°=\operatorname{sen}(60°-45°)=\operatorname{sen}60°\cos45°-\cos60°\operatorname{sen}45°=\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}-\frac12\cdot\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt6}{4}-\frac{\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$

  $\cos15°=\cos(60°-45°)=\cos60°\cos45°+\operatorname{sen}60°\operatorname{sen}45°=\frac12\cdot\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt2}{4}+\frac{\sqrt6}{4}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$

  $$\operatorname{tg}15°=\operatorname{tg}(60°-45°)=\frac{\operatorname{tg}60°-\operatorname{tg}45°}{1+\operatorname{tg}60°\cdot\operatorname{tg}45°}=\frac{\sqrt3-1}{1+\sqrt3\cdot1}=\frac{\sqrt3-1}{\sqrt3+1}\cdot\frac{\sqrt3-1}{\sqrt3-1}=$$
  $$=\frac{(\sqrt3-1)^2}{3-1}=\frac{3+1-2\sqrt3}{2}=\frac{4-2\sqrt3}{2}=2-\sqrt3$$

  Controlla tu che si ottiene lo stesso valore, per $tg15°$,anche facendo $\frac{\operatorname{sen}15°}{\cos15°}$ coi valori prima trovati.

- $\cos75°=\cos(45°+30°)=\cos45°\cos30°-\operatorname{sen}45°\operatorname{sen}30°=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac12=\frac{\sqrt6}{4}-\frac{\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$

  valore che era già stato determinato in altro modo nelle pagine precedenti, e che ovviamente coincide col valore di $sen\,15°$ determinato qui sopra: $cos\,75°=sen(90°-75°)=sen\,15°$

- $$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}x\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}x\right)^2=$$
  $$=\left(\frac{1}{\sqrt2}\cos x-\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{sen}x\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt2}\cos x+\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{sen}x\right)^2=$$
  $$=\frac12\cos^2x+\frac12\operatorname{sen}^2x-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\operatorname{sen}x\cos x+\frac12\cos^2x+\frac12\operatorname{sen}^2x+\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\operatorname{sen}x\cos x=$$
  $$=\frac12\left(\cos^2x+\operatorname{sen}^2x\right)\cancel{-\operatorname{sen}x\cos x}+\frac12\left(\cos^2x+\operatorname{sen}^2x\right)\cancel{+\operatorname{sen}x\cos x}=\frac12\cdot1+\frac12\cdot1=\frac12+\frac12=1$$

ESERCIZI

Puoi costruirti tu stesso tantissimi esercizi semplicemente "riciclando" valori già noti:
ad esempio, puoi calcolare $sen(60°+30°)$ con la formula di addizione per il seno,
sapendo già che, se il procedimento è corretto, dovrà uscire come risultato il valore di $sen\,90°$ e cioè 1.

Altri spunti di questo tipo:

a) ritrova, con le formule di addizione e sottrazione, qualcuna fra le funzioni goniometriche di
$30°+30°,\ \ 45°+45°,\ \ 90°\pm30°,\ \ 90°\pm60°,\ \ 180°\pm45°,\ ...$

b) calcola, con le formule di addizione e sottrazione,
$sen(90°-x)$ sapendo già che il risultato sarà $cos\,x$,
$cos(x+90°)$ sapendo che dovrà uscire $-sen\,x$,
$cos(180°+x)$ sapendo che il risultato dev'essere $-cos\,x$,
ecc. ecc.