

25. LE FORMULE DI BISEZIONE

Esprimono le funzioni dell'angolo metà $\alpha/2$ mediante le funzioni dell'angolo α ; oppure, le funzioni di α per mezzo di quelle di 2α .

Risolvono, in pratica, il problema inverso di quello che è risolto dalla formule di duplicazione.

Per ricavarle, consideriamo due fra le "formule di duplicazione ad angoli dimezzati", e precisamente

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1.$$

Invertendole, otteniamo

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \rightarrow \boxed{\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}$$

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \rightarrow 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \rightarrow \boxed{\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}$$

... e a questo punto potremo anche scrivere:

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} \stackrel{\text{NOTA 1}}{=} \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \stackrel{\text{NOTA 2}}{=} \boxed{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}}$$

NOTA 1:

la frazione che precede porta un doppio segno \pm a numeratore ed un altro a denominatore.

Non deve però intendersi che il "+ sopra" corrisponda necessariamente al "+ sotto", e altrettanto per i due "-"; le combinazioni di segno possono invece essere qualsiasi, per cui il " \pm " deve rimanere, anche nel passaggio successivo.

NOTA 2:

questa formula è una "identità condizionata", ossia vale ad eccezione di casi particolari, nei quali perde invece significato.

Affinché la formula sussista deve innanzitutto esistere $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, deve cioè essere $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ossia $\alpha \neq \pi + 2k\pi$; inoltre deve essere diverso da 0 il denominatore introdotto, ovvero $1 + \cos \alpha$; ma $1 + \cos \alpha \neq 0$ equivale a $\cos \alpha \neq -1$, $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ e quindi non c'è altra condizione che si affianchi alla precedente.

La formula $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ ha però due alternative, che sono senz'altro più comode ed efficienti, perché

- non contengono il doppio segno
- e per giunta sono "razionali", nel senso che non contengono nemmeno la radice.

Vediamole.

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{\cancel{\cancel{2}} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{\cancel{\cancel{2}}}} = \boxed{\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Condizioni di validità:

esistenza di $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$: $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($\alpha \neq \pi + 2k\pi$)
 $1 + \cos \alpha \neq 0$ $\cos \alpha \neq -1$, $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ già scritta

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cancel{\cancel{2}} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cancel{\cancel{2}}}}{\sin \alpha} = \boxed{\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}}$$

Condizioni di validità:

esistenza di $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$: $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($\alpha \neq \pi + 2k\pi$)
 $\sin \alpha \neq 0$, $\alpha \neq k\pi$ condizione che "contiene" la precedente, rendendola quindi inutile

ESERCIZI

Verifica, con "bisezione", che: $\sin\left(\frac{60^\circ}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{60^\circ}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, e similari.