

26. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE DEGLI ARCHI DI $\frac{\pi}{8}$ ($22^\circ 30'$) E $\frac{\pi}{10}$ (18°)

Le formule di bisezione ci permettono di calcolare le **funzioni goniometriche dell'arco** $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}$:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \rightarrow \boxed{\cos \frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \dots = \boxed{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \rightarrow \boxed{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \boxed{\sqrt{2} - 1}$$

Il valore $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

può anche essere determinato mediante il **Teorema della Bisettrice**:

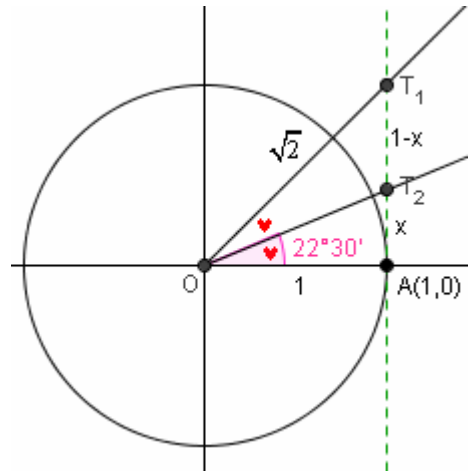
“In un triangolo, la bisettrice di un lato divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati”.

Applicando questo teorema al triangolo AOT_1 della figura, nel quale $\widehat{AOT_1} = 45^\circ$ e quindi $AT_1 = OA = 1$, $OT_1 = \sqrt{2}$, si ottiene

$$AT_2 : T_2T_1 = OA : OT_1$$

$$x : (1 - x) = 1 : \sqrt{2} \quad \left(x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right)$$

$$1 - x = x\sqrt{2} \quad x\sqrt{2} + x = 1 \quad x(\sqrt{2} + 1) = 1 \quad x = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1$$



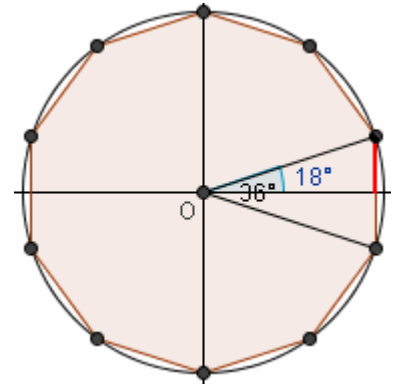
Per quanto riguarda le **funzioni dell'arco di** $\frac{\pi}{10}$ (18°)

possiamo approfittare del fatto che in un decagono regolare inscritto in una circonferenza gli angoli al centro che insistono sui lati misurano $360^\circ : 10 = 36^\circ$.

E' noto che il lato del decagono regolare inscritto è uguale alla sezione aurea del raggio, cioè vale

$$\ell_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} r \quad (\text{nella circonferenza goniometrica, di raggio 1, } \ell_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}).$$

$$\text{Avremo allora } \boxed{\operatorname{sen} 18^\circ} = \frac{1}{2} \ell_{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{5} - 1}{4}}$$



A questo punto, $\cos 18^\circ$ (che corrisponde all'apotema del decagono regolare) potrà essere determinato con Pitagora (o, il che è praticamente lo stesso, con la Prima Relazione Fondamentale):

$$\boxed{\cos 18^\circ} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{16}} = \sqrt{\frac{16 - (5 + 1 - 2\sqrt{5})}{16}} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}} = \boxed{\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}}$$

Infine sarà

$$\boxed{\operatorname{tg} 18^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{5} - 1}{4}}{\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5 + 1 - 2\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 5}{25 - 5}} = \sqrt{\frac{20 - 8\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} \quad \text{oppure} \quad \boxed{\frac{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}}{5}}$$