28. LE FORMULE PARAMETRICHE

Trovano applicazione nella risoluzione delle cosiddette “equazioni goniometriche lineari”, che vedremo.

Esprimono $\operatorname{sen}\alpha,\ \cos\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha$ in funzione di $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (che di solito viene poi indicata brevemente con t).

$$\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha} \underset{\text{NOTA 1}}{=} 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \underset{\text{NOTA 2}}{=} \frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}} \underset{\text{NOTA 3}}{=} \frac{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\mathbf{2\,tg}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{1+tg^2}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{2t}}{\mathbf{1+t^2}}$$

NOTA 1:
formula di duplicazione per il seno, con angoli dimezzati

NOTA 2:
è lecito dividere per $\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$,
perché $\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}=1\quad\forall\alpha$
(Prima Relazione Fondamentale)

NOTA 3:
per la proprietà invariantiva delle frazioni, il valore di una frazione resta invariato se si dividono sia il numeratore che il denominatore per uno stesso numero diverso da 0

CONDIZIONI DI VALIDITA':

La formula introduce $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, quindi vale a condizione di supporre questa esistente: $\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \boxed{\alpha\neq\pi+2k\pi}$

Inoltre, il procedimento per costruire la formula ha richiesto
la divisione per $\cos\frac{\alpha}{2}$, operazione effettuabile a patto di supporre $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$,
condizione che però equivale a quella già posta prima: $\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ \alpha\neq\pi+2k\pi$

$$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}=\ldots=\frac{\mathbf{1-tg^2}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{1+tg^2}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}}=\frac{\mathbf{1-t^2}}{\mathbf{1+t^2}}$$

(stesso procedimento di prima, e stesse condizioni di validità)

$$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathbf{2\,tg}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{1-tg^2}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}}=\frac{\mathbf{2t}}{\mathbf{1-t^2}}$$

ottenibile dividendo membro a membro le due formule precedenti;
Le condizioni di validità sono qui

- l'esistenza di $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, quindi $\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \boxed{\alpha\neq\pi+2k\pi}$
- l'esistenza di $\operatorname{tg}\alpha$, quindi $\boxed{\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi}$
- e inoltre (per il fatto che si è diviso per $\frac{1-t^2}{1+t^2}$)

  $\frac{1-t^2}{1+t^2}\neq 0$ ossia $1-t^2\neq 0,\ \ t^2\neq 1,\ \ t\neq\pm 1$

  ovvero $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\neq\pm 1,\ \ \frac{\alpha}{2}\neq\pm\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ \ \alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}+k\pi$

  che è poi, a ben guardare, equivalente ad $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, già posta prima.

RIASSUNTO DELLE FORMULE PARAMETRICHE $\left(\mathbf{t=tg}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}\right)$

$\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\mathbf{2t}}{\mathbf{1+t^2}}$	$\boxed{\alpha\neq\pi+2k\pi}$
$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\mathbf{1-t^2}}{\mathbf{1+t^2}}$	$\boxed{\alpha\neq\pi+2k\pi}$
$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\mathbf{2t}}{\mathbf{1-t^2}}$	$\boxed{\alpha\neq\pi+2k\pi,\ \ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi}$

ESERCIZIO

Verifica che eseguendo il calcolo sen^2x+cos^2x per il tramite delle formule parametriche, si ottiene 1.