

30. EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Le ripartiremo in tipologie.

1) Equazioni goniometriche elementari

Sono quelle della forma $\operatorname{sen} x = q$ $\operatorname{cos} x = q$ $\operatorname{tg} x = q$ essendo q un numero reale assegnato. Ce ne siamo già occupati; pertanto, ci limitiamo qui ad aggiungere qualche ulteriore esempio.

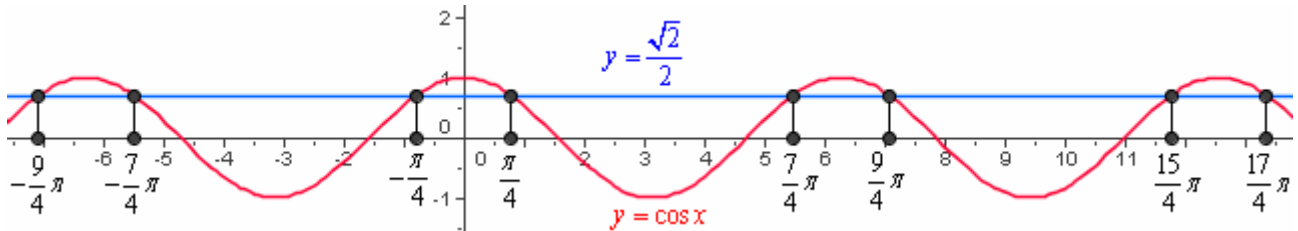
$$\text{a) } 2\operatorname{cos} x - \sqrt{2} = 0 \quad 2\operatorname{cos} x = \sqrt{2} \quad \operatorname{cos} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \boxed{x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi}$$

$$\text{b) } 4\operatorname{sen} x + 1 = \sqrt{5} \quad 4\operatorname{sen} x = \sqrt{5} - 1 \quad \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \quad \boxed{x = \frac{\pi}{10} + 2k\pi \vee x = \frac{9}{10}\pi + 2k\pi}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} x = 1 - \sqrt{2} \text{ (soluzioni in gradi)} \quad \boxed{x = -22^\circ 30' + k \cdot 180^\circ}$$

$$\text{d) } 5\operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \operatorname{sen} x = \frac{1}{5} \quad \boxed{x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{5} + 2k\pi \vee x = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{5} + 2k\pi}$$

Osserviamo che, volendo, una equazione goniometrica elementare può essere risolta graficamente pensando di intersecare il grafico della sinusoidale, o cosinusoidale, o tangente, con una retta orizzontale. Ad esempio, l'equazione a) ammette la seguente interpretazione grafica:



2) Equazioni goniometriche simili alle elementari

$$\begin{aligned} \text{a) } 2\operatorname{sen}(2x + 7^\circ) - 1 &= 0 \\ 2\operatorname{sen}(2x + 7^\circ) &= 1 \\ \operatorname{sen}(2x + 7^\circ) &= \frac{1}{2} \\ 2x + 7^\circ &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ \vee 2x + 7^\circ = 150^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x &= 23^\circ + k \cdot 360^\circ \vee 2x = 143^\circ + k \cdot 360^\circ \\ \boxed{x = 11^\circ 30' + k \cdot 180^\circ \vee x = 71^\circ 30' + k \cdot 180^\circ} \end{aligned}$$

Se interessassero solo le soluzioni nel "primo giro" ($0^\circ \leq x \leq 360^\circ$), daremmo a $k \in \mathbb{Z}$ quei valori che permettono di restare nell'ambito del "primo giro", ottenendo

$$\begin{aligned} x = 11^\circ 30' & \quad x = 71^\circ 30' \\ x = 191^\circ 30' & \quad x = 251^\circ 30' \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sqrt{3} \operatorname{tg}(10^\circ - 4x) + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg}(10^\circ - 4x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$10^\circ - 4x = -30^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$-4x = -40^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$x = 10^\circ - k \cdot 45^\circ$$

$$\boxed{x = 10^\circ + k \cdot 45^\circ} \text{ (NOTA)}$$

... e nel 1° giro soltanto, le soluzioni sono $10^\circ, 55^\circ, 100^\circ, 145^\circ, 190^\circ, 235^\circ, 280^\circ, 325^\circ$

NOTA

Spieghiamo l'ultimo passaggio, quando abbiamo cambiato un segno. Cosa indicava all'inizio il simbolo k ?

k indicava un intero relativo arbitrario.

Ma se k è un intero relativo arbitrario, allora anche il suo opposto $-k$ sarà un intero relativo arbitrario, quindi nulla ci impedisce, a questo punto, di indicare tale moltiplicatore intero arbitrario ancora con k .

Volendo essere formalmente impeccabili,

si potrebbe usare nell'ultimo passaggio un simbolo nuovo,

ad esempio k_1 , per indicare l'intero arbitrario $-k$

scrivendo dunque le soluzioni sotto la forma $x = 10^\circ + k_1 \cdot 45^\circ$;

oppure, all'incontrario, appiccicare un indice 1 al "k" iniziale,

ponendo poi alla fine $-k_1 = k$; ossia,

$$\operatorname{tg}(10^\circ - 4x) = -1/\sqrt{3}$$

$$10^\circ - 4x = -30^\circ + k_1 \cdot 180^\circ; \quad -4x = -40^\circ + k_1 \cdot 180^\circ;$$

$$x = 10^\circ - k_1 \cdot 45^\circ; \quad x = 10^\circ + k \cdot 45^\circ$$

c) $\operatorname{sen} \frac{x}{5} = 1$ (soluzioni in radianti)

$$\frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\boxed{x = \frac{5}{2}\pi + 10k\pi}$$

Nessuna soluzione, in questo caso, nel "primo giro"!

d) $\cos 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$4x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad 4x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad (\text{NOTA})$$

$$\boxed{x = \frac{5}{24}\pi + k\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{7}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}}$$

NOTA oppure: $4x = \pm \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

$$x = \pm \frac{5}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}$$

e) $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{3}$

$$2x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{3} + 2k\pi$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{3} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{3} + k\pi}$$

f) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{4}$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}x = \pm \operatorname{arc} \cos \frac{1}{4} + 2k\pi$$

$$-\frac{1}{3}x = \pm \operatorname{arc} \cos \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\frac{1}{3}x = \pm \operatorname{arc} \cos \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}$$

sarebbe
stato \mp ,
ma
ovviamente
è lo stesso

$+2k\pi$
non abbiamo
cambiato il segno,
essendo k un
intero relativo
arbitrario (NOTA)

$$\boxed{x = \pm 3 \operatorname{arc} \cos \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\pi + 6k\pi}$$

NOTA: ci siamo comportati, insomma,
secondo la NOTA relativa
al precedente esercizio b).

Sostituendo il simbolo k al posto di $-k$,
nulla cambia,

perché,

al variare di k nell'insieme \mathbb{Z}
degli interi relativi,

sia $-k$ che $+k$ assumono gli stessi valori.

g) $\operatorname{tg} 2x = 2$

$$2x = \operatorname{arctg} 2 + k\pi$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + k\frac{\pi}{2}}$$

Osserviamo che $\operatorname{arctg} 2$ vale circa 63 gradi e mezzo

h) $\operatorname{sen} 3x = 0$

$$3x = k\pi$$

$$\boxed{x = k\frac{\pi}{3}}$$

i) $\cos \frac{x}{4} = 0$

$$\frac{x}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\boxed{x = 2\pi + 4k\pi}$$

Vediamo ora qualche variante, come le equazioni della forma

- $\text{sen}(\dots) = \text{sen}(\dots)$ ossia $\text{sen } f(x) = \text{sen } g(x)$
- $\text{cos}(\dots) = \text{cos}(\dots)$
- $\text{tg}(\dots) = \text{tg}(\dots)$

k) $\text{sen}(7x + 30^\circ) = \text{sen } 3x$

Due angoli hanno lo stesso seno quando sono uguali (a meno di interi giri) ma anche quando sono supplementari (sempre “a meno di interi giri”).

Quindi:

$$7x + 30^\circ = 3x + k \cdot 360^\circ \quad \vee \quad 7x + 30^\circ = 180^\circ - 3x + k \cdot 360^\circ$$

$$7x - 3x = -30^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \vee \quad 7x + 3x = 180^\circ - 30^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$4x = -30^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \vee \quad 10x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x = \frac{-30^\circ + k \cdot 360^\circ}{4} \quad \vee \quad x = \frac{150^\circ + k \cdot 360^\circ}{10}$$

$$\boxed{x = -7^\circ 30' + k \cdot 90^\circ} \quad \vee \quad \boxed{x = 15^\circ + k \cdot 36^\circ}$$

→ Nel primo giro, le soluzioni sono dunque:
 $82^\circ 30'$ $172^\circ 30'$
 $262^\circ 30'$ $352^\circ 30'$
 15° 51° 87° 123° 159°
 195° 231° 267° 303° 339°

l) $\text{cos}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \text{cos}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

Due angoli hanno lo stesso coseno quando sono uguali (a meno di interi giri) ma anche quando sono opposti (sempre “a meno di interi giri”).

Quindi:

$$\frac{\pi}{3} - x = 3x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{3} - x = -3x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$-x - 3x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad -x + 3x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$-4x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$4x = \frac{\pi}{6} - 2k\pi \quad \vee \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi}$$

$x = \frac{\pi}{24} - k \frac{\pi}{2}$ che, data l'arbitrarietà di $k \in \mathbb{Z}$, possiamo riscrivere come

$$\boxed{x = \frac{\pi}{24} + k \frac{\pi}{2}}$$

m) $\text{tg } 5x = \text{tg } 2x$

Due angoli hanno la stessa tangente quando sono uguali, a meno di multipli di 180° .

Quindi:

$$5x = 2x + k\pi \quad 3x = k\pi \quad \boxed{x = k \frac{\pi}{3}}$$

n) $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \text{cos } 2x$

Qui converrà mutare il coseno in seno (o viceversa) passando al complementare!

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \quad \vee \quad x + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi$$

...

$$\boxed{x = \frac{\pi}{18} + 2k \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$$

3) Equazioni goniometriche riconducibili alle elementari

a) $6\cos^2x + \cos x = 1$

$$6\cos^2x + \cos x - 1 = 0$$

Questa è sostanzialmente un'equazione di 2° grado in cui fa da incognita la quantità $\cos x$.

A questo punto potremmo indicare questo blocco incognito $\cos x$ con una singola lettera,

ad esempio z , ottenendo l'equazione $6z^2 + z - 1 = 0$

dalla quale si ricaverebbe z per poi, infine, da z risalire a x ;

oppure, più rapidamente, possiamo scrivere

$$(\cos x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} = \begin{cases} -1/2 \\ 1/3 \end{cases}$$

$$\text{Ora: } \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi}; \quad \cos x = \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2k\pi}$$

C'è anche la possibilità di risolvere l' "equaz. di 2° grado nell'incognita $\cos x$ " scomponendo in fattori:

$$6\cos^2x + \cos x - 1 = 0; \quad 6\cos^2x + 3\cos x - 2\cos x - 1 = 0; \quad 3\cos x(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1) = 0$$

$$(2\cos x + 1)(3\cos x - 1) = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \vee \cos x = \frac{1}{3} \quad \dots \text{ eccetera}$$

b) $\sin x + \cos^2x + 1 = 0$

$$\sin x + 1 - \sin^2x + 1 = 0; \quad -\sin^2x + \sin x + 2 = 0$$

$$\sin^2x - \sin x - 2 = 0$$

$$(\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0 \quad (\text{NOTA})$$

$$\sin x = -1$$

$$\vee \sin x = 2 \quad (\text{IMPOSSIBILE})$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi} \quad \text{o, indifferentemente, } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

NOTA

Qui la scomposizione in fattori è preferibile

perché particolarmente rapida;

è evidente che si sarebbe potuta,

in alternativa, applicare la formula

ottenendo gli stessi valori:

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

c) $\sin 2x + \cos x = 0$ (soluzioni in gradi)

$$2\sin x \cos x + \cos x = 0 \quad \dots \text{ e a questo punto basta scomporre in fattori!}$$

$$\cos x(2\sin x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \rightarrow \boxed{x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ} \vee \sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ \vee x = \begin{matrix} 330^\circ \\ (\text{oppure } -30^\circ) \end{matrix} + k \cdot 360^\circ}$$

ESERCIZI sulle equazioni goniometriche elementari o ad esse affini.

1) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ 2) $\cos x + \sqrt{3} = 0$ 3) $\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$ 4) $\cos 4x = -1$ 5) $\cos(150^\circ - x) = \cos 2x$

6) $\sin 2(x + \pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$ 7) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 8) $\sin x(\sin x + 2) + \cos^2 x = 0$

9) $\operatorname{tg}^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$ 10) $\cos^2 x + \cos x = 0$ 11) $8\sin^2 x + 1 = 6\sin x$ 12) $\sin(4x + 20^\circ) + \sin(2x + 10^\circ) = 0$

RISPOSTE

1) $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$ 2) *imposs.* 3) $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2k\pi = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2k\pi$

4) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ 5) $x = 50^\circ + k \cdot 120^\circ \vee x = -150^\circ + k \cdot 360^\circ$ (opp. $x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ$) 6) $x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{5} + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

7) $x = \frac{7}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{13}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ 8) $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$ (o $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$) 9) $x = k\frac{\pi}{4}$

10) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pi + 2k\pi$ 11) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \arcsin\frac{1}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \arcsin\frac{1}{4} + 2k\pi$

12) $x = -5^\circ + k \cdot 60^\circ \vee x = 85^\circ + k \cdot 180^\circ$