31. EQUAZIONI GONIOMETRICHE LINEARI IN SENO E COSENO

Sono quelle della forma

$$\boxed{a\,sen\,x + b\cos x + c = 0 \quad (a,\, b \neq 0)}$$

e sono particolarmente importanti nelle applicazioni.

I) LINEARI OMOGENEE

Vediamo dapprima il caso $c = 0$
(equazione lineare "omogenea"):

$$\boxed{a\,sen\,x + b\cos x = 0 \quad (a,\, b \neq 0)}$$

Essa si risolve in modo semplicissimo,
dividendo per $\cos x$.
Osserviamo che gli archi per i quali NON ha senso tale procedura sono quelli il cui coseno è uguale a 0;
ma per tali archi,
che sono poi, nel 1° giro, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$,
il seno non è nullo (vale +1 o –1 a seconda dei casi)
e pertanto essi NON possono, comunque,
essere soluzioni dell'equazione in gioco.

Dunque:

$$\frac{a\,sen\,x + b\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a\frac{sen\,x}{\cos x} + b\frac{\cos x}{\cos x} = 0$$

$$a\,tg\,x + b = 0$$

$$tg\,x = -\frac{b}{a}$$ che è un'equazione elementare!

- Esempio:

  $$\sqrt{3}\,sen\,x - \cos x = 0$$

  Dividendo per $\cos x$, si ottiene

  $$\sqrt{3}\,tg\,x - 1 = 0$$

  $$tg\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

  $$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + k\pi} \quad (in\ gradi,\ x = 30° + k \cdot 180°)$$

Ricordiamo che un polinomio si dice "omogeneo" quando i suoi termini hanno tutti lo stesso grado.

Nel caso dell'equazione
$a\,sen\,x + b\cos x + c = 0$
i primi due termini vanno pensati nelle variabili sen x, cos x rispettivamente, quindi sono di 1° grado, e l'omogeneità si ha soltanto a patto che manchi il termine di grado zero c.

II)
LINEARI NON OMOGENEE

Vediamo ora le “lineari non omogenee”, ossia le equazioni della forma

$$\boxed{a\,sen\,x + b\cos x + c = 0 \quad (a,\, b,\, c \neq 0)}$$

Per la risoluzione di queste, esistono diversi metodi alternativi.

PRIMO METODO: CON LE FORMULE PARAMETRICHE

Ricordiamo che tali formule sono

$$sen\,x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \left(t = tg\frac{x}{2};\ le\ \ formule\ sono\ valide\ \ per\ \ x \neq \pi + 2k\pi\right)$$

OSSERVAZIONE MOLTO IMPORTANTE:

Le formule parametriche valgono solo se $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ossia $x \neq \pi + 2k\pi$.

Pertanto se noi ci serviamo, per la risoluzione, di queste formule,
il nostro procedimento risolutivo viene ad escludere i valori $\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
D’altra parte, questi valori *potrebbero benissimo* essere soluzioni della nostra equazione!
Bisognerà quindi **completare la risoluzione** ricordandosi di **controllare, per sostituzione diretta, se $x = \pi$ è soluzione oppure no** (la cosa si può fare alla fine o all’inizio, è ovviamente lo stesso).

- Facciamo un esempio:

$$\boxed{sen\,x - \cos x - 1 = 0}$$

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0$$

$$\frac{2t - 1 \cancel{+t^2} - 1 \cancel{-t^2}}{1+t^2} = 0$$

$$2t - 2 = 0 \quad (osserviamo\ che\ non\ occorre\ \ porre\ alcuna\ condizione\ all'atto\ di\ spedir\ via\ il\ denominatore,\ perché\ l'espressione\ 1+t^2\ \ non\ si\ \ può\ mai\ annullare)$$

$$2t = 2$$

$$t = 1$$

$$tg\frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

Adesso andiamo a vedere se il valore $x = \pi$,
che fin qui era stato lasciato da parte,
è soluzione oppure no.
Sostituiamo nell’equazione iniziale π al posto di x ,
per vedere se l’uguaglianza è o non è verificata.

$$sen\,x - \cos x - 1 = 0$$

$$sen\,\pi - \cos\pi - 1 \overset{?}{=} 0$$

$$0 - (-1) - 1 \overset{?}{=} 0$$

$$1 - 1 = 0 \quad OK!!!$$

Pertanto aggiungeremo al paniere delle soluzioni già trovate anche il valore $x = \pi$
(anzi: tutti i valori $\boxed{x = \pi + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}}$).

In definitiva, le soluzioni dell’equazione considerata sono $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, $\boxed{x = \pi + 2k\pi}$.

SECONDO METODO: CON UN SISTEMA

Di fronte a un'equazione lineare non omogenea $a\,sen\,x + b\cos x + c = 0 \;\; (a,\, b,\, c \neq 0)$
possiamo anche pensare che la coppia $(sen\,x,\ cos\,x)$ di cui stiamo andando alla caccia
soddisferà anche alla 1ª Relazione Fondamentale della Goniometria, e quindi impostare il sistema

$$\begin{cases} a\,sen\,x + b\cos x + c = 0 \\ sen^2 x + cos^2 x = 1 \end{cases}$$

che è poi un banale sistema di 2° grado nelle due incognite *sen x* , *cos x*.

Ora, per comodità, possiamo utilizzare una simbologia che è "standard" in matematica: poniamo

$$sen\,x = \mathrm{Y}$$
$$cos\,x = \mathrm{X}$$

(la scelta dei simboli si deve al fatto che il *seno* è un'*ordinata*, mentre il *coseno* è un'*ascissa*)

e otteniamo $\begin{cases} a\mathrm{Y} + b\mathrm{X} + c = 0 \\ \mathrm{Y}^2 + \mathrm{X}^2 = 1 \end{cases}$; trovati i valori della coppia (X, Y), da questi valori risaliremo a *x*.

- Riprendiamo l'equazione che avevamo già risolto col primo metodo: $\boxed{sen\,x - cos\,x - 1 = 0}$. Avremo

$$\begin{cases} sen\,x - cos\,x - 1 = 0 \\ sen^2 x + cos^2 x = 1 \end{cases} \text{e quindi}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Y} - \mathrm{X} - 1 = 0 \\ \mathrm{Y}^2 + \mathrm{X}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Y} = \mathrm{X} + 1 \\ \mathrm{Y}^2 + \mathrm{X}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Y} = \mathrm{X} + 1 \\ (\mathrm{X}+1)^2 + \mathrm{X}^2 = 1; \quad \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} \cancel{+1} + \mathrm{X}^2 = \cancel{1}; \quad \cancel{2}\mathrm{X}^2 + \cancel{2}\mathrm{X} = 0; \quad \mathrm{X}(\mathrm{X}+1) = 0; \quad \mathrm{X} = 0 \vee \mathrm{X} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{X} = 0 \\ \mathrm{Y} = \mathrm{X} + 1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \mathrm{X} = -1 \\ \mathrm{Y} = \mathrm{X} + 1 = 0 \end{cases} \; \textit{ossia}$$

$$\begin{cases} cos\,x = 0 \\ sen\,x = cos\,x + 1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} cos\,x = -1 \\ sen\,x = cos\,x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

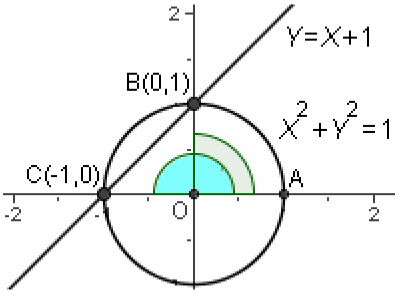
$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi} \qquad\qquad \boxed{x = \pi + 2k\pi}$$

E' interessante l'**OSSERVAZIONE** seguente.

Il sistema, nel nostro esempio il sistema $\begin{cases} \mathrm{Y} = \mathrm{X} + 1 \\ \mathrm{Y}^2 + \mathrm{X}^2 = 1 \end{cases}$,

potrebbe anche essere risolto per via grafica,
pensando ad un piano cartesiano OXY nel quale la prima equazione rappresenterà una retta,
la seconda una circonferenza avente centro nell'origine e raggio uguale a 1, quindi …
del tutto identica alla circonferenza goniometrica!!!

In questo modo si ha il vantaggio di
vedere immediatamente dalla figura quali sono gli archi-soluzione (o, almeno, le loro approssimazioni).



Guardiamo infatti la figura qui a fianco: i due punti di intersezione
$\mathrm{B}(0,1)$ e $\mathrm{C}(-1,0)$ fra la retta $\mathrm{Y} = \mathrm{X} + 1$ e la circonferenza $\mathrm{Y}^2 + \mathrm{X}^2 = 1$
hanno come coordinate le soluzioni (0, 1) e (– 1,0) del nostro sistema.
Pensiamo, tanto per fissare le idee, al punto B.
La sua ascissa, 0, coincide con il coseno dell'arco $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$
mentre la sua ordinata, 1, è il seno di $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$.
E allo stesso modo si potrebbe ragionare per C.
Dunque i due archi soluzione, nel primo giro, sono i due archi che da A vanno:
il primo, fino a B, il secondo fino a C, ossia $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 90°$ e $\overset{\frown}{\mathrm{AC}} = 180°$, come si era in altro modo stabilito.

TERZO METODO: CON L'UTILIZZO DI UN "ARCO AUSILIARIO", DOPO AVER "NORMALIZZATO" LA COPPIA (*a*, *b*)

Questo metodo prevede innanzitutto di "normalizzare" la coppia (*a*, *b*) dei coefficienti di $sen\,x$ e $cos\,x$, ossia di rimpiazzarli con due nuovi coefficienti (a', b') determinati in modo che sia $a'^2+b'^2=1$.
A tale scopo si dividerà l'equazione per il numero $\sqrt{a^2+b^2}$.

$$a\,sen\,x+b\cos x+c=0$$
$$\frac{a\,sen\,x+b\cos x+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{0}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\underbrace{\boxed{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}}_{a'}sen\,x+\underbrace{\boxed{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}}_{b'}cos\,x+\underbrace{\boxed{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}}_{c'}=0$$

Dei tre nuovi coefficienti a', b', c' ci interessa in particolare, come dicevamo, che $a'^2+b'^2=1$!

Infatti $a'^2+b'^2=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$

Ora, se due numeri sono tali che la somma dei loro quadrati dà 1,
ne consegue che quei due numeri sono interpretabili come le coordinate
di un punto che sta sulla circonferenza goniometrica
(essa com'è noto ha centro l'origine e raggio 1, e la sua equazione è $x^2+y^2=1$)
e pertanto sono interpretabili come il coseno e il seno di un arco opportuno!
Detto dunque φ l'arco (l' "*arco ausiliario*" nel titolo del paragrafo) tale che

$$a'=cos\,\varphi$$
$$b'=sen\,\varphi$$

l'equazione ottenuta "normalizzando"

$$a'sen\,x+b'cos\,x+c'=0$$

diventerà

$$cos\,\varphi\,sen\,x+sen\,\varphi\,cos\,x+c'=0$$

e dunque (formula di addizione per il seno)

$$sen(x+\varphi)+c'=0;\quad sen(x+\varphi)=-c'$$

che è una variante di equazione elementare, facilissimamente risolubile.

- Riprendiamo il solito esempio: $\boxed{sen\,x-cos\,x-1=0}$.

Avremo $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

e quindi $\frac{sen\,x-cos\,x-1}{\sqrt{2}}=\frac{0}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}sen\,x-\frac{1}{\sqrt{2}}cos\,x-\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$$

Ora, essendo $a'=\frac{1}{\sqrt{2}}=cos\left(-\frac{\pi}{4}\right),\quad b'=-\frac{1}{\sqrt{2}}=sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\quad\left(\varphi=-\frac{\pi}{4}\right)$,

potremo scrivere $cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)sen\,x+sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)cos\,x-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$

$$sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$
$$sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi\quad\vee\quad x-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$$
$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2k\pi\quad\vee\quad x=\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi$$
$$\boxed{x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\qquad\vee\qquad x=\pi+2k\pi}$$

Gli ESERCIZI sulle equazioni goniometriche lineari in seno e coseno sono ALLA PAGINA SUCCESSIVA.