

**ESERCIZI** sulle equazioni goniometriche lineari in seno e coseno

- 1)  $\operatorname{sen} x + \cos x + 1 = 0$       2)  $\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 1$       3)  $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} (\cos x - 1) = 0$   
 4)  $\operatorname{sen} x - \cos x + \sqrt{2} = 0$       5)  $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$       6)  $\cos x - \operatorname{sen} x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$   
 7)  $\operatorname{sen} x - 2 \cos x = 2$       8)  $\sqrt{3} \operatorname{sen} x = \cos x$       9)  $4 \operatorname{sen} x + 2\sqrt{3} \cos x = 5$

**RISPOSTE**

- 1)  $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \left( \text{opp. } \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right) \vee x = \pi + 2k\pi$       2)  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$   
 3)  $x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$       4)  $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \left( \text{opp. } \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \right)$       5)  $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi \left( \text{opp. } -\frac{\pi}{4} + k\pi \right)$   
 6)  $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \left( \text{opp. } -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \left( \text{opp. } -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right)$   
 7)  $x = 2 \operatorname{arctg} 2 + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi$       8)  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$       9)  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = 2 \operatorname{arctg} \frac{14 - 3\sqrt{3}}{13} + 2k\pi$

## 32. EQUAZIONI OMOGENEE IN SENO E COSENO (O RICONDUCEBILI A QUESTA TIPOLOGIA)

**I) Omogenee di 2° grado in seno e coseno**

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

Se  $a = 0$  o  $c = 0$  si può risolvere per scomposizione in fattori;  
 supponiamo dunque  $a \neq 0$ ,  $c \neq 0$ .

Divideremo allora per  $\cos^2 x$ , ottenendo un'equazione di 2° grado nell'incognita  $\operatorname{tg} x$ .

$$\frac{a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$a \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + b \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} + c \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$$

Osserviamo che questo procedimento esclude gli archi  $x$  per i quali  $\cos x = 0$ ;  
 ma ciò a ben guardare risulta non restrittivo,  
 perché comunque tali archi non potrebbero essere soluzione!

Infatti, se un arco ha il coseno nullo, allora ha il seno che può valere  $+1$  o  $-1$ ,  
 e per un arco con coseno uguale a 0 e seno uguale a  $\pm 1$  l'equazione NON è verificata:

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

diventa infatti

$$a \cdot (\pm 1)^2 + b \cdot (\pm 1) \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot 1 + 0 + 0 = 0$$

$$a = 0 \text{ uguaglianza falsa (stiamo supponendo } a \neq 0 \wedge c \neq 0)$$

□ Esempio:  $3 \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x = 0$

Dividendo per  $\cos^2 x$  si ottiene

$$3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0$$

$$(\operatorname{tg} x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{3} = \frac{-1 \pm 2}{3} = \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ 1/3 \end{array} \right\rangle$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = 1/3$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \vee \quad x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + k\pi$$

## II) Equazioni di 2° grado in seno e coseno, riconducibili ad omogenee

Sono quelle della forma

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x + d = 0,$$

nelle quali l'omogeneità è "rovinata" dalla presenza del termine noto  $d$ , ma può essere ripristinata moltiplicando  $d$  per la quantità  $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ , che è sempre uguale a 1 per ogni  $x$ .

□ Esempio:  $\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x + 4 \cos^2 x - 2 = 0}$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x + 4 \cos^2 x - 2(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) &= 0 \\ \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x + 4 \cos^2 x - 2 \operatorname{sen}^2 x - 2 \cos^2 x &= 0 \\ -\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x + 2 \cos^2 x &= 0 \\ \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x - 2 \cos^2 x &= 0 \\ \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 &= 0 \\ (\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - 2) &= 0 \\ \operatorname{tg} x = -1 \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi} \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = 2 \quad \boxed{x = \operatorname{arctg} 2 + k\pi} \end{aligned}$$

## III) Omogenee di 4° grado in seno e coseno

$$a \operatorname{sen}^4 x + b \operatorname{sen}^3 x \cos x + c \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + d \operatorname{sen} x \cos^3 x + e \cos^4 x = 0$$

Per risolverle, basterà dividere per  $\cos^4 x$  ottenendo un'equazione di 4° grado in  $\operatorname{tg} x$ .

Il caso di gran lunga più frequente negli esercizi è

$$a \operatorname{sen}^4 x + c \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + e \cos^4 x = 0 \quad (b = d = 0)$$

nel quale la divisione per  $\cos^4 x$  porta a ottenere un'equazione biquadratica nell'incognita  $\operatorname{tg} x$ .

□ Esempio:  $\boxed{\operatorname{sen}^4 x + 2\sqrt{2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 3(2\sqrt{2} - 3) \cos^4 x = 0}$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^4 x + 2\sqrt{2} \operatorname{tg}^2 x + 3(2\sqrt{2} - 3) &= 0 \\ (\operatorname{tg}^2 x)_{1,2} &= -\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 3(2\sqrt{2} - 3)} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 6\sqrt{2} + 9} = \\ &= -\sqrt{2} \pm \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} = -\sqrt{2} \pm (3 - \sqrt{2}) = \begin{cases} -3 \\ 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \\ \operatorname{tg}^2 x = -3 &\quad \text{IMPOSSIBILE} \\ \operatorname{tg}^2 x = 3 - 2\sqrt{2} \quad \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} &= \pm\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \pm(\sqrt{2} - 1) \quad \boxed{x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi} \end{aligned}$$

## IV) Riconducibili a omogenee di 4° grado in seno e coseno

$$a \operatorname{sen}^4 x + b \operatorname{sen}^3 x \cos x + c \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + d \operatorname{sen} x \cos^3 x + e \cos^4 x + f = 0$$

Qui, per ottenere un'equazione omogenea, basterà moltiplicare il termine noto  $f$  per

$$(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$$

**ESERCIZI** sulle equazioni goniometriche omogenee in seno e coseno

1)  $3 \operatorname{sen}^2 x - 5 \operatorname{sen} x \cos x + 6 \cos^2 x = 2$     2)  $\operatorname{sen}^2 x + (\sqrt{3} + 1) \operatorname{sen} x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$

3)  $4 \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 0$     4)  $4 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x = 0$     5)  $4 \operatorname{sen} x \cos x = \sqrt{3}$

6)  $\operatorname{sen}^4 x - 4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 3 \cos^4 x = 0$     7)  $2 \operatorname{sen}^4 x - 2 \cos^4 x = 1$     8)  $16 \operatorname{sen}^4 x - 32 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 5 = 0$

**RISPOSTE**

1)  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \operatorname{arctg} 4 + k\pi$     2)  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$     3)  $x = \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi$

4)  $x = k\pi \vee x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + k\pi$     5)  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi$     6)  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

7)  $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$     8)  $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{35}}{7} + k\pi$