

33. FORMULE DI PROSTAFERESI

“**Prostaféresi**” significa “**somma e differenza**”, e le formule di prostaféresi si possono applicare quando si ha una somma, o una differenza, di due seni, o di due coseni.

$$\text{sen } p + \text{sen } q =$$

$$\text{sen } p - \text{sen } q =$$

$$\text{cos } p + \text{cos } q =$$

$$\text{cos } p - \text{cos } q =$$

Vengono impiegate molto di frequente in Fisica (es. studio delle onde) e **sono utili quando per qualche ragione si desidera trasformare la somma o la differenza in prodotto**.

Le formule di prostaféresi si ricavano dalle formule di addizione e sottrazione, sommando o sottraendo membro a membro due opportune formule e poi ponendo $\alpha + \beta = p$, $\alpha - \beta = q$.

Sommiamo ...	Sottraiamo ...
$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta + \text{cos } \alpha \text{sen } \beta$	$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta + \text{cos } \alpha \text{sen } \beta$
$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta - \text{cos } \alpha \text{sen } \beta$	$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta - \text{cos } \alpha \text{sen } \beta$
$\frac{\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)}{2} = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta$ (*)	$\frac{\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta)}{2} = \text{cos } \alpha \text{sen } \beta$ (**)
$\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha \text{cos } \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$	$\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha \text{cos } \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$
$\text{cos}(\alpha - \beta) = \text{cos } \alpha \text{cos } \beta + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$	$\text{cos}(\alpha - \beta) = \text{cos } \alpha \text{cos } \beta + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$
$\frac{\text{cos}(\alpha + \beta) + \text{cos}(\alpha - \beta)}{2} = \text{cos } \alpha \text{cos } \beta$ (***)	$\frac{\text{cos}(\alpha + \beta) - \text{cos}(\alpha - \beta)}{2} = -\text{sen } \alpha \text{sen } \beta$ (***)

Poniamo ora $\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha - \beta = q \end{cases}$. Avremo $\begin{cases} (1) + (2) \{ 2\alpha = p + q \\ (1) - (2) \{ 2\beta = p - q \end{cases}$ e infine $\begin{cases} \alpha = \frac{p+q}{2} \\ \beta = \frac{p-q}{2} \end{cases}$

per cui le nostre quattro formule (*), (**), (***) e (****) diventeranno rispettivamente

$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \text{sen } \frac{p+q}{2} \text{cos } \frac{p-q}{2}$	$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \text{cos } \frac{p+q}{2} \text{sen } \frac{p-q}{2}$	LE QUATTRO FORMULE DI PROSTAFERESI
$\text{cos } p + \text{cos } q = 2 \text{cos } \frac{p+q}{2} \text{cos } \frac{p-q}{2}$	$\text{cos } p - \text{cos } q = -2 \text{sen } \frac{p+q}{2} \text{sen } \frac{p-q}{2}$	

Osserviamo che il nostro procedimento è stato di partire da due angoli arbitrari α, β per giungere *alla fine* ai due angoli $\alpha + \beta = p$, $\alpha - \beta = q$.

D'altra parte, se sono dati *in partenza* due qualsiasi angoli p, q ,

è comunque sempre possibile trovare due altri angoli α, β tali che si abbia $\alpha + \beta = p$, $\alpha - \beta = q$:

si tratta degli angoli $\alpha = \frac{p+q}{2}$, $\beta = \frac{p-q}{2}$.

Questa semplice considerazione mostra che le formule trovate valgono *qualunque sia* la coppia di angoli p, q alle quali noi vogliamo riferirle.

E se avessimo invece $\text{sen } p \pm \text{cos } q$, e desiderassimo trasformare la somma o differenza in prodotto?

Nessun problema! Basterà scrivere $\text{sen } p \pm \text{cos } q = \begin{cases} \text{sen } p \pm \text{sen}(90^\circ - q) = \text{ecc.} \\ \text{oppure} \\ \text{cos}(90^\circ - p) \pm \text{cos } q = \text{ecc.} \end{cases}$

□ Esempio 1: risolvere (soluzioni in gradi) l'equazione $\boxed{\text{cos } 4x + \text{cos } 2x = \text{cos } 3x}$

$$2 \text{cos } \frac{4x+2x}{2} \text{cos } \frac{4x-2x}{2} = \text{cos } 3x$$

$$2 \text{cos } \frac{6x}{2} \text{cos } \frac{2x}{2} = \text{cos } 3x$$

$$2 \text{cos } 3x \text{cos } x = \text{cos } 3x \quad (\text{NOTA})$$

$$2 \text{cos } 3x \text{cos } x - \text{cos } 3x = 0$$

$$\text{cos } 3x(2 \text{cos } x - 1) = 0$$

$$\text{cos } 3x = 0 \quad 3x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \boxed{x = 30^\circ + k \cdot 60^\circ}$$

$$2 \text{cos } x - 1 = 0 \quad 2 \text{cos } x = 1 \quad \text{cos } x = 1/2 \quad \boxed{x = \pm 60^\circ + k \cdot 360^\circ}$$

NOTA

Qui possiamo portare tutto a 1° membro, raccogliendo poi $\text{cos } 3x$, oppure anche semplificare per $\text{cos } 3x$ tenendo conto però che i valori di x per i quali è verificata l'uguaglianza $\text{cos } 3x = 0$ saranno anch'essi soluzioni dell'equazione (“soluzioni trovate per strada”)

□ Esempio 2: risolvere (soluzioni in radianti) l'equazione $\boxed{\text{sen } 4x + \text{sen } 3x + \text{sen } 2x + \text{sen } x = 0}$

$$\begin{aligned} & (\text{sen } 4x + \text{sen } 2x) + (\text{sen } 3x + \text{sen } x) = 0 \\ & 2 \text{sen} \frac{4x+2x}{2} \cdot \cos \frac{4x-2x}{2} + 2 \text{sen} \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2} = 0 \\ & \cancel{2} \text{sen } 3x \cdot \cos x + \cancel{2} \text{sen } 2x \cdot \cos x = 0 \\ & \cos x (\text{sen } 3x + \text{sen } 2x) = 0 \\ & \cos x = 0 \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi} \\ & \text{sen } 3x + \text{sen } 2x = 0 \text{ (NOTA)} \quad \boxed{x = \frac{2}{5}k\pi \vee x = \pi + 2k\pi} \end{aligned}$$

NOTA

Questa equazione si può risolvere in due modi:

- ancora con prostaferesi

$$2 \text{sen} \frac{3x+2x}{2} \cdot \cos \frac{3x-2x}{2} = 0$$

$$\text{sen} \frac{5x}{2} = 0 \vee \cos \frac{x}{2} = 0 \text{ ecc.}$$
- oppure scrivendo

$$\text{sen } 3x = -\text{sen } 2x$$

$$\text{sen } 3x = \text{sen}(-2x)$$

$$3x = -2x + 2k\pi \vee 3x = \pi + 2x + 2k\pi \text{ ecc.}$$

34. FORMULE DI WERNER

Queste fanno il servizio inverso rispetto alle formule di prostaferesi, perché trasformano un prodotto in una somma o differenza.

Si ricavano anch'esse sommando o sottraendo due opportune formule di addizione e sottrazione; in pratica, se andiamo a rivedere il lavoro fatto per ricavare le formule di prostaferesi, e ci fermiamo a metà strada, ci ritroviamo di fronte

LE TRE FORMULE DI WERNER, che sono **quelle in grassetto nel riquadro sottostante**.

$\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2 \text{sen } \alpha \cos \beta \quad (*)$ $\text{sen } \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)]$	$\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \text{sen } \beta \quad (**)$ $\cos \alpha \text{sen } \beta = \frac{1}{2} [\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta)]$	La formula ottenuta è però sostanzialmente una replica della precedente!
$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad (***)$ $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$	$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \text{sen } \alpha \text{sen } \beta \quad (***)$ $\text{sen } \alpha \text{sen } \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$	

□ Esempio: risolvere (soluzioni in radianti) l'equazione $\boxed{\text{sen } 4x \text{sen } 3x = \text{sen } 2x \text{sen } x}$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} [\cos(4x+3x) - \cos(4x-3x)] = -\frac{1}{2} [\cos(2x+x) - \cos(2x-x)] \\ & \cancel{\cos 7x} - \cancel{\cos x} = \cancel{\cos 3x} - \cancel{\cos x} \\ & 7x = 3x + 2k\pi \vee 7x = -3x + 2k\pi \\ & 4x = 2k\pi \vee 10x = 2k\pi \\ & \boxed{x = k \frac{\pi}{2} \vee x = k \frac{\pi}{5}} \end{aligned}$$

ESERCIZI sulle formule di prostaferesi e di Werner

1) Dimostra che:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{\cos 3\alpha - \cos 5\alpha}{\text{sen } 3\alpha + \text{sen } 5\alpha} = \text{tg } \alpha & \text{b) } & \frac{\text{sen } 6\alpha - \text{sen } 2\alpha}{\cos 6\alpha - \cos 2\alpha} = -\text{cotg } 4\alpha ; \\ \text{c) } & \cos 58^\circ = 2 \cos 74^\circ \cos 16^\circ & \text{d) } & \frac{\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta)}{\text{sen } 2\alpha} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \alpha} \end{aligned}$$

2) Risolvi le equazioni:

$$\text{a) } \cos 5x - \cos 3x + \text{sen } x = 0 \quad \text{b) } \text{sen } 5x + \cos 3x - \text{sen } x = 0 \quad \text{c) } \text{sen } 2x + \text{sen } 4x = 2 \text{sen } 45^\circ \cos x$$

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI

$$\begin{aligned} 1) & x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{24} + k \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{5}{24}\pi + k \frac{\pi}{2} \\ 2) & x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{7}{12}\pi + k\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi + k\pi \\ 3) & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$