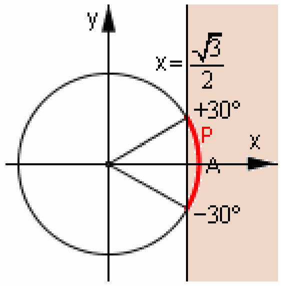
# 36. DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

## A. ELEMENTARI

- La disequazione $\boxed{\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}}$

ci chiede di stabilire quali sono gli archi il cui coseno è maggiore di $\sqrt{3}/2$.
Per determinarli, possiamo disegnare una circonferenza goniometrica ed evidenziare i suoi punti aventi **ascissa** maggiore di $\sqrt{3}/2$, per stabilire di quali archi essi costituiscono l'estremo terminale.




*Qui in figura possiamo vedere la retta di equazione $x = \sqrt{3}/2$ e, ombreggiati, i punti del piano cartesiano la cui ascissa è $> \sqrt{3}/2$. Prendi un punto P sull'arco evidenziato, e disegna, o immagina, il coseno di $\overset{\frown}{AP}$! Esso risulterà $> \sqrt{3}/2$.*

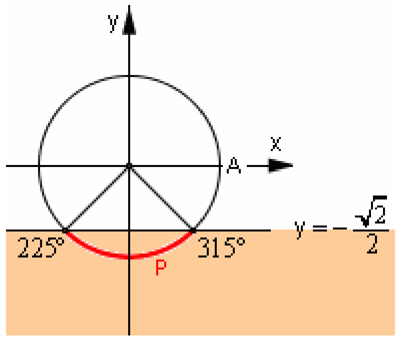
Nell'ambito del primo giro, gli archi-soluzione sono dunque, in gradi,
$0° \le x < 30°$ come pure $330° < x \le 360°$;
e l'insieme di *tutte* le soluzioni, anche quelle fuori dal 1° giro, è
$k \cdot 360° \le x < 30° + k \cdot 360° \ \vee\ 330° + k \cdot 360° < x \le 360° + k \cdot 360°$.

Una scrittura equivalente, ma preferibile perché più elegante e compatta, è
$\mathbf{-30° + k \cdot 360° < x < 30° + k \cdot 360°}$.

Invece scrivere $330° + k \cdot 360° < x < 30° + k \cdot 360°$ sarebbe SBAGLIATO: prova a porre, ad esempio, $k = 0$ e vedrai che si otterrebbe $330° < x < 30°$ il che comporterebbe la disuguaglianza $330° < 30°$, evidentemente falsa.

- Risolviamo ora la $\boxed{\operatorname{sen} x < -\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

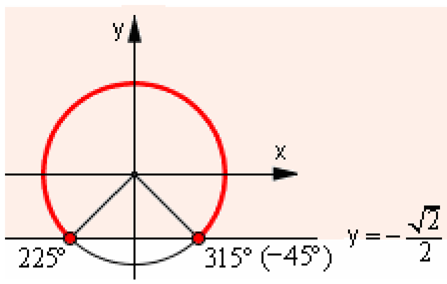
Si tratta di individuare i punti della circonferenza goniometrica che hanno **ordinata** minore di $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Essi sono evidenziati nella figura qui a fianco: sono le intersezioni fra la circonferenza goniometrica e il semipiano che nella figura è stato ombreggiato.
Gli archi, il cui secondo estremo cade in uno di questi punti, sono
$\mathbf{225° + k \cdot 360° < x < 315° + k \cdot 360°}$

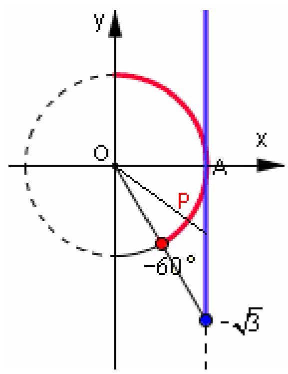



*I punti P dell'arco evidenziato sono quelli per i quali il seno dell'arco $\overset{\frown}{AP}$ (disegnalo, o immaginalo nella tua mente!) è $< -\frac{\sqrt{2}}{2}$*

- E se avessimo $\boxed{\operatorname{sen} x \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ?

Allora la parte di circonferenza goniometrica che interessa sarebbe quella evidenziata nel disegno, estremi compresi.
Soluzioni:
$\mathbf{-45° + k \cdot 360° \le x \le 225° + k \cdot 360°}$,
o anche
$k \cdot 360° \le x \le 225° + k \cdot 360° \ \vee\ 315° + k \cdot 360° \le x \le 360° + k \cdot 360°$.



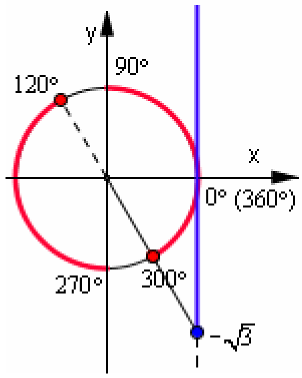




*Le soluzioni della disequazione $tg\, x \ge -\sqrt{3}$ sono quegli archi $\overset{\frown}{AP}$ per i quali la retta OP va a intersecare la retta verticale di destra in un punto di ordinata $\ge -\sqrt{3}$*

- $\boxed{tg\, x \ge -\sqrt{3}}$

Per le disequazioni goniometriche elementari che coinvolgono la TANGENTE, un SUGGERIMENTO PREZIOSO è quello di considerare sempre soltanto ← la "META' DESTRA DELLA TORTA" (archi da $-90°$ a $+90°$, esclusi naturalmente $\pm 90°$ perché a $\pm 90°$ la tangente non esiste) e utilizzare il fatto che la tangente è periodica di periodo "mezzo giro" (180°).

Le soluzioni della disequazione $\operatorname{tg} x \ge -\sqrt{3}$ sono dunque:
$\mathbf{-60° + k \cdot 180° \le x < 90° + k \cdot 180°}$



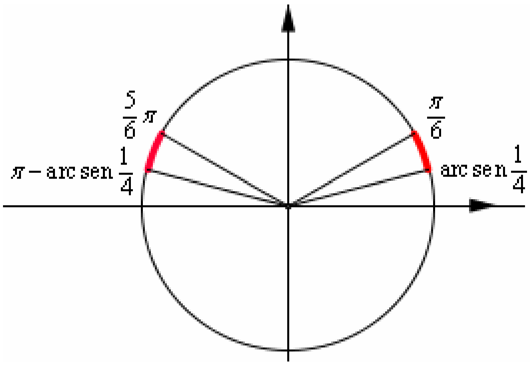

*Questa figura mostra le soluzioni in tutto il "primo giro":*
$0 \le x < 90°$
$120° \le x < 270°$
$300° \le x \le 360°$

## B. DI 2° GRADO

- $8\,sen^2\,x - 6\,sen\,x + 1 < 0$ Questa è una disequazione di 2° grado in $sen\,x$.

Poniamo $sen\,x = z$ e la disequazione diventerà $8z^2 - 6z + 1 < 0$
L'equazione associata è $8z^2 - 6z + 1 = 0$ e, risolvendola, si trovano le soluzioni $z = 1/4 \vee z = 1/2$.
Allora avremo (poiché si devono prendere i valori interni) $1/4 < z < 1/2$ quindi $1/4 < sen\,x < 1/2$.

*Gli archi z il cui seno è compreso fra 1/4 e 1/2 sono evidenziati in figura.*




Le soluzioni della disequazione proposta sono dunque

$$\mathbf{arcsen}\frac{1}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$\vee$$
$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \pi - \mathbf{arcsen}\frac{1}{4} + 2k\pi$$

*La posizione $sen\,x = z$ può, volendo, essere evitata; basta operare sul blocco $sen\,x$ come se fosse una singola lettera:*

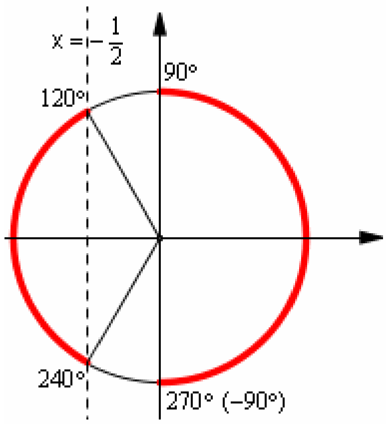
$$8sen^2\,x - 6sen\,x + 1 < 0 \quad \underbrace{(sen\,x)_{1,2}}_{\text{soluzioni equazione associata}} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{8} = \left\langle \begin{matrix} 1/4 \\ 1/2 \end{matrix} \right. \quad \textit{da cui (valori interni)} \quad \frac{1}{4} < sen\,x < \frac{1}{2} \quad \textit{e da qui } x.$$

- $2cos^2\,x + cos\,x > 0$

Pongo $cos\,x = z$ e ottengo $2z^2 + z > 0,\ z(2z+1) > 0$,
da cui si trae che le soluzioni dell'equazione associata sono $0$ e $-1/2$.
Pertanto (valori esterni) avremo $z < -1/2 \vee z > 0$, ossia $cos\,x < -1/2 \vee cos\,x > 0$

*Gli archi z il cui coseno è minore di –1/2 o, in alternativa, maggiore di 0, sono evidenziati in figura.* Soluzioni:

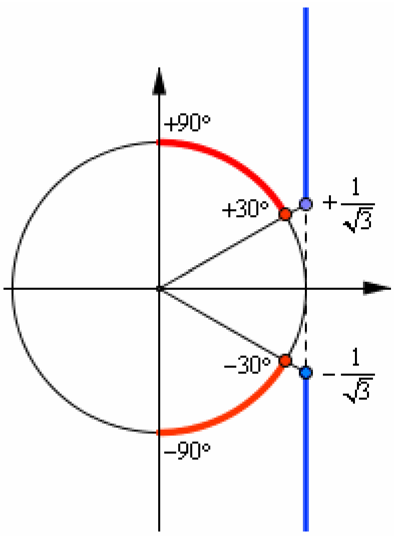
$$\mathbf{-90° + k \cdot 360° < x < 90° + k \cdot 360°}$$
$$\vee$$
$$\mathbf{120° + k \cdot 360° < x < 240° + k \cdot 360°}$$




*Se ti riesce, cerca di evitare, per maggiore brevità, la posizione $cos\,x = z$, semplicemente trattando il blocco $cos\,x$ come se fosse una singola lettera:*

$$2cos^2\,x + cos\,x > 0 \quad \underbrace{cos\,x}_{\substack{\text{si annulla}\\ \text{per}\\ cos\,x=0}}\ \underbrace{(2cos\,x + 1)}_{\substack{\text{si annulla}\\ \text{per}\\ cos\,x=-1/2}} > 0 \quad \underbrace{cos\,x < -\frac{1}{2} \vee cos\,x > 0}_{\text{valori esterni}}$$

- $3tg^2\,x - 1 \ge 0$ Immediatamente: $3tg^2\,x \ge 1 \quad tg^2\,x \ge \frac{1}{3} \quad |tg\,x| \ge \frac{1}{\sqrt{3}} \quad tg\,x \le -\frac{1}{\sqrt{3}} \vee tg\,x \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$



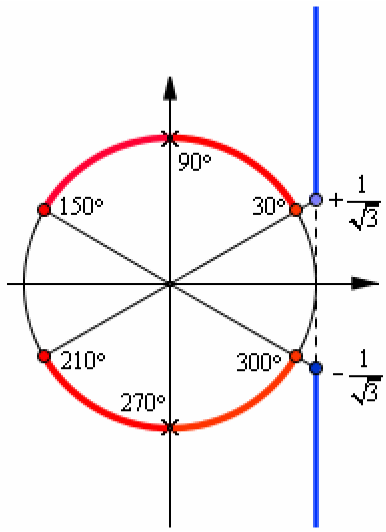

Essendo coinvolta la tangente,
consideriamo soltanto
← la "metà destra della torta"
(angoli da $-90°$ a $+90°$)
e teniamo presente che la tangente
è periodica di periodo 180°:

Le soluzioni sono:

$$\mathbf{-90° + k \cdot 180° < x \le -30° + k \cdot 180°}$$
$$\vee$$
$$\mathbf{30° + k \cdot 180° \le x < 90° + k \cdot 180°}$$

Qui a destra sono rappresentate →
le soluzioni del "1° giro":
$30° \le x \le 150°$ *ma* $x \ne 90°$;
$210° \le x \le 300°$ *ma* $x \ne 270°$

Le "crocette" servono a escludere
gli archi di 90° e 270°,
per i quali la tangente non esiste.



## C. DI GRADO SUERIORE AL 2°

- $4\,sen^3x\cos x+2\,sen^3x<2\,sen^2x\cos x+sen^2x$

  Portiamo tutto a 1° membro e scomponiamo in fattori: otteniamo

  $4\,sen^3x\cos x+2\,sen^3x-2\,sen^2x\cos x-sen^2x<0$
  $sen^2x\left(4\,sen\,x\cos x+2\,sen\,x-2\cos x-1\right)<0$
  $sen^2x\left[2\cos x\left(2\,sen\,x-1\right)+\left(2\,sen\,x-1\right)\right]<0$

  e infine $sen^2x\left(2\,sen\,x-1\right)\left(2\cos x+1\right)<0$

Ci rendiamo conto che qui la situazione è più complicata perché compaiono funzioni goniometriche diverse.
In casi come questo

a) **si studierà il segno di ogni singolo fattore**, mediante la disequazione ausiliaria $fattore>0$
   - che porta a determinare quei valori di *x* per i quali il fattore considerato è positivo,
   - e permette anche di riconoscere i valori di *x* per i quali il fattore considerato si annulla, o non esiste,
   - quindi rivela pure (per esclusione) i valori di *x* per i quali il fattore considerato è negativo

b) poi **si disegnerà uno schema riassuntivo** per il "confronto dei segni"
   (si può scegliere se dare a questo schema riassuntivo un aspetto "**circolare**" oppure "**lineare**")

c) e infine dallo schema riassuntivo, che servirà per avere un comodo "colpo d'occhio complessivo" sulla situazione dei segni dei vari fattori in corrispondenza dei vari valori di *x*,
   **si trarranno le conclusioni**.

a) **STUDIO DEL SEGNO DI OGNI SINGOLO FATTORE**

$\boxed{1°\ f.>0}$ $sen^2x>0$ $\boxed{sen\,x\neq 0}$ (NOTA)

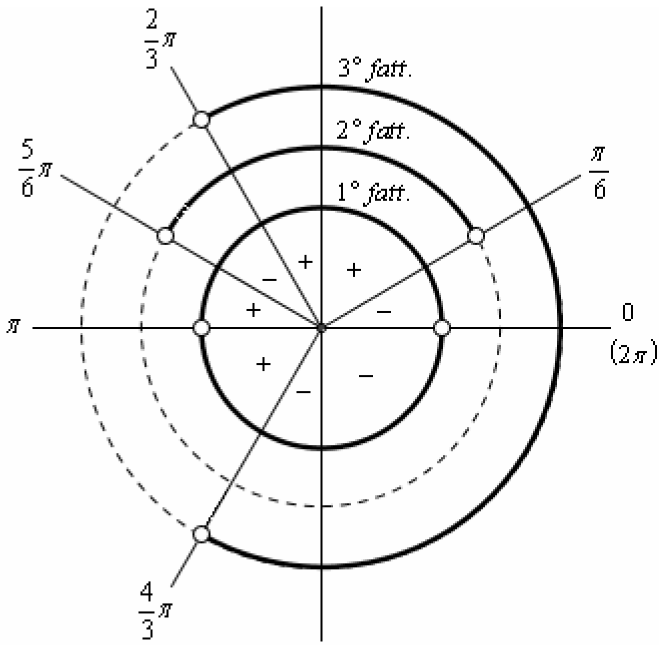
$\boxed{2°\ f.>0}$ $2\,sen\,x-1>0$ $\boxed{sen\,x>1/2}$ (NOTA)

$\boxed{3°\ f.>0}$ $2\cos x+1>0$ $\boxed{\cos x>-1/2}$ (NOTA)

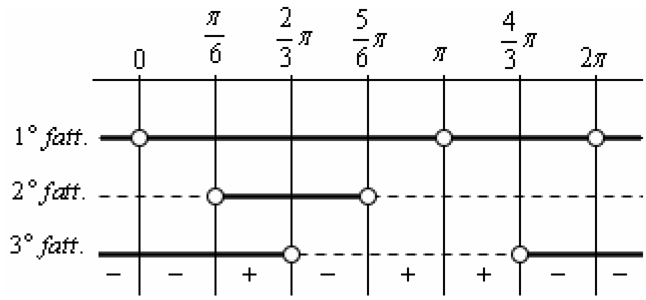
NOTA
*Non stiamo a specificare qui i valori di x per cui questa condizione è verificata; questi valori, li evidenzieremo direttamente nello schema (circolare o lineare che sia) attraverso una linea a tratto continuo*

b) **SCHEMA RIASSUNTIVO**

CIRCOLARE




LINEARE




In entrambi gli schemi, circolare e lineare,
la **simbologia** da noi usata è:
LINEA CONTINUA ——— FATTORE POSITIVO
PALLINO VUOTO ○ FATTORE NULLO
LINEA TRATTEGGIATA − − − FATTORE NEGATIVO
( eventualmente, crocetta × per "fattore non esistente")

SUGGERIMENTO:
In uno schema lineare, è sempre opportuno estendere la linea (continua o tratteggiata, a seconda dei casi) anche "un pochino a sinistra" rispetto a 0 e "un pochino a destra" rispetto a $2\pi$.
L'utilità sarà particolarmente evidente in un contesto di "studio di funzione".

c) **CONCLUSIONI**

Dallo schema riassuntivo si trae facilmente che la disequazione $sen^2x\left(2\,sen\,x-1\right)\left(2\cos x+1\right)<0$

ammette, nel primo giro, le soluzioni $0<x<\frac{\pi}{6}\ \vee\ \frac{2}{3}\pi<x<\frac{5}{6}\pi\ \vee\ \frac{4}{3}\pi<x<2\pi$.

Per le soluzioni in generale, basterà riscrivere tutto con "$+2k\pi$" dopo ciascun estremo di intervallo.

## D. FRATTE

❑ $\dfrac{sen\,x}{cos\,x(1+cos\,x)} \geq 0$

Questa è una disequazione fratta,
e si risolve anch'essa studiando il segno dei vari fattori in gioco
per poi tracciare uno schema (circolare o lineare) per il confronto dei segni

a) **STUDIO DEL SEGNO DI OGNI SINGOLO FATTORE**

$\boxed{N>0}$ $\boxed{sen\,x>0}$ (NOTA)

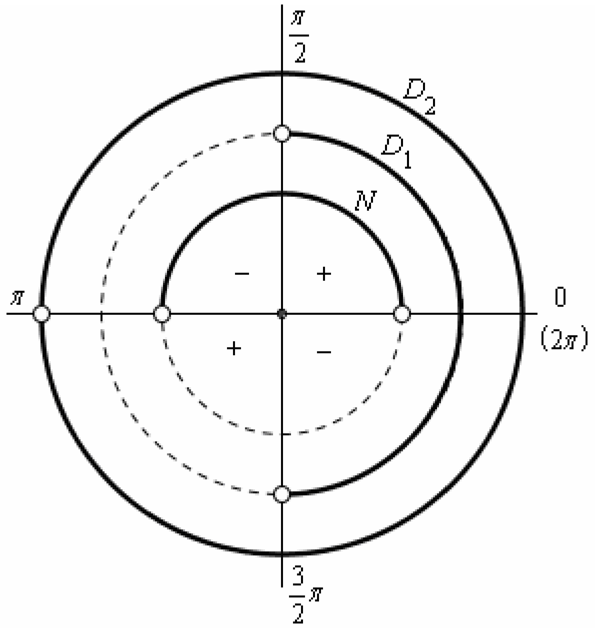
$\boxed{D_1>0}$ $\boxed{cos\,x>0}$ (NOTA)

$\boxed{D_2>0}$ $1+cos\,x>0$ $\boxed{cos\,x>-1}$ (NOTA)

NOTA
*Non stiamo a specificare qui i valori di x per cui questa condizione è verificata; questi valori, li evidenzieremo direttamente nello schema (circolare o lineare che sia) attraverso una linea a tratto continuo*

b) **SCHEMA RIASSUNTIVO**

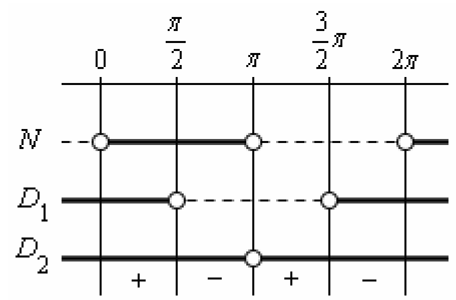
CIRCOLARE




0, $2\pi$ sono soluzioni
(annullano il numeratore, e non annullano il denominatore)

$\pi$ NON è soluzione
(annulla il numeratore, ma anche il denominatore!)

LINEARE




La disequazione porta il $\geq$.

In questi casi, conviene pensare prima alla disequazione "stretta" (>) poi aggiungere alle soluzioni trovate anche i valori che rendono la frazione $=0$.

E una frazione è uguale a 0 quando si annulla il suo NUMERATORE (purché non si annulli contemporaneamente anche il denominatore):

$\frac{0}{a}=0 \quad \frac{a}{0}=IMPOSS. \quad \frac{0}{0}=INDET.$

c) **CONCLUSIONI**

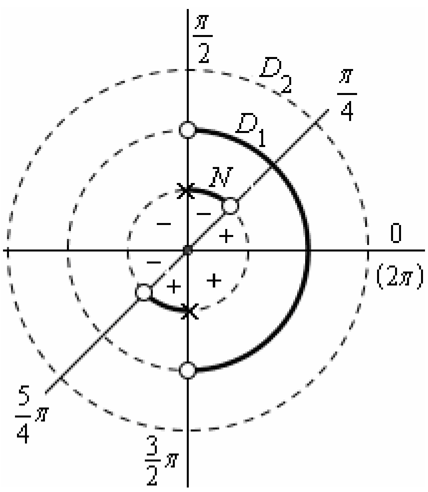
Dallo schema riassuntivo si trae facilmente che la disequazione proposta ammette, nel primo giro, le soluzioni $0 \leq x < \frac{\pi}{2} \;\vee\; \pi < x < \frac{3}{2}\pi \;\vee\; x = 2\pi$.

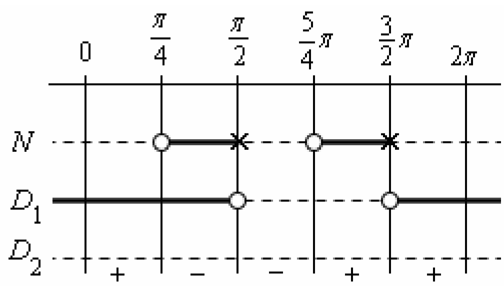
Per le soluzioni in generale, basterà riscrivere tutto con "$+2k\pi$" dopo ciascun estremo di intervallo.

❑ $\dfrac{tg\,x-1}{cos\,x(sen\,x-2)} \leq 0$

Osserviamo che
$sen\,x-2>0$
$sen\,x>2$
è IMPOSSIBILE!
Il seno è sempre compreso fra $-1$ e 1, e il fattore $sen\,x-2$ è negativo per ogni $x$!

Soluzioni nel 1° giro:
$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi \;\; ma \;\; x \neq \frac{\pi}{2}$




La "crocetta" ha il significato di "non esistenza", di "esclusione":

per $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$ la tangente non esiste!

## E. LINEARI $\left(a\,sen\,x+b\cos x+c \gtreqless 0\right)$

- $\sqrt{3}\,sen\,x+\cos x<1$ Questa è una disequazione goniometrica LINEARE $\left(\sqrt{3}\,sen\,x+\cos x-1<0\right)$

**1° modo: con le formule parametriche**

$$\sqrt{3}\,sen\,x+\cos x<1$$

$$\sqrt{3}\cdot\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}<1 \quad (\text{NOTA } 1)$$

$$2t\sqrt{3}+\cancel{1}-t^2<\cancel{1}+t^2 \quad (\text{NOTA } 2)$$

$$-2t^2+2t\sqrt{3}<0$$

$$t^2-t\sqrt{3}>0 \quad (\text{NOTA } 3)$$

$$t\left(t-\sqrt{3}\right)>0$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono $0$ e $\sqrt{3}$
e le soluzioni della disequazione sono $t<0 \vee t>\sqrt{3}$

$$tg\frac{x}{2}<0 \ \vee \ tg\frac{x}{2}>\sqrt{3}$$

$$-\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{x}{2}<0+k\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{3}+k\pi<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (\text{NOTA } 4)$$

$$\boldsymbol{-\pi+2k\pi<x<2k\pi \quad \vee \quad \frac{2}{3}\pi+2k\pi<x<\pi+2k\pi} \quad (\text{NOTA } 5)$$

Abbiamo applicato le formule parametriche,
e questo ha comportato di escludere gli archi $\pi+2k\pi$,
i quali, d'altra parte, potrebbero benissimo essere soluzioni.
Andiamo dunque a verificare direttamente,
sostituendo nella disequazione data,
se il valore $\pi$ ne è soluzione oppure no
(la stessa risposta si estenderà, com'è ovvio,
a tutti i valori $\pi+2k\pi$ ).

$$\sqrt{3}\,sen\,\pi+\cos\pi\overset{?}{<}1$$

$$\sqrt{3}\cdot 0+(-1)\overset{?}{<}1$$

$$-1<1 \ \ OK$$

Sì, **anche $\pi$ è soluzione della nostra disequazione**,
e pertanto pure tutti i valori $\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ lo sono.

NOTA 1
Come sappiamo, l'applicazione
delle formule parametriche
è possibile sotto la condizione
$x\neq\pi+2k\pi$

NOTA 2
Nonostante si tratti
di una disequazione,
qui abbiamo potuto, eccezionalmente,
sbarazzarci dal denominatore
mediante moltiplicazione per esso,
essendo
$1+t^2>0$ *per qualsiasi valore di t*

NOTA 3
Abbiamo diviso per $-2$,
cambiando ovviamente il verso
perché $-2<0$.

NOTA 4
Quando è coinvolta la tangente,
è di solito conveniente
pensare innanzitutto alla
"metà destra della torta"
(archi da $-\pi/2$ a $\pi/2$ )
aggiungendo poi $+k\pi$
per tener conto della periodicità.

NOTA 5
Come è evidente,
quest' ultimo passaggio
è stato ottenuto moltiplicando
il passaggio precedente per 2.

Ricapitoliamo: in definitiva,

- possiamo andare da $\frac{2}{3}\pi$ fino a $\pi$ $\left(\frac{2}{3}\pi+2k\pi<x<\pi+2k\pi\right)$,
- prendere anche il valore $\pi$ ($\pi+2k\pi$ ),
- e poi ricominciare col "mezzo giro inferiore" $\left(-\pi+2k\pi<x<2k\pi,\ \text{che per } k=1 \text{ diventa } \pi<x<2\pi\right)$.

In pratica, possiamo allora dire che le **soluzioni** sono

- nel 1° giro, tutti gli archi da $\frac{2}{3}\pi$ fino a $2\pi$ $\left(\frac{2}{3}\pi<x<2\pi\right)$
- e in generale, tutti gli archi $x$ tali che $\boxed{\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}}}$

**2° modo: con un "sistema misto"**

La coppia ( $sen\,x$ , $cos\,x$ ) di cui stiamo andando alla caccia
soddisferà anche alla 1ª Relazione Fondamentale della Goniometria,
quindi avremo il sistema ("misto", perché composto da una disequazione e un'equazione)

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,sen\,x + cos\,x < 1 \\ sen^2\,x + cos^2\,x = 1 \end{cases}$$

il quale, se poniamo

$sen\,x = \mathrm{Y}$

$cos\,x = \mathrm{X}$

diventerà

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,\mathrm{Y} + \mathrm{X} < 1 \\ \mathrm{Y}^2 + \mathrm{X}^2 = 1 \end{cases}$$

e potrà essere risolto graficamente.

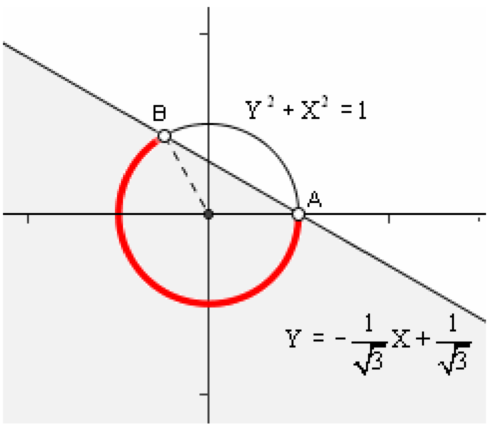
La seconda condizione è rappresentata, com'è noto, da una circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

La prima condizione potrà essere riscritta come $\sqrt{3}\,\mathrm{Y} < -\mathrm{X} + 1$ e infine $\mathrm{Y} < -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{X} + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Una coppia (X, Y) soddisfa dunque a tale condizione
se e solo se il punto di coordinate (X, Y) è tale che la sua Y sia minore di $-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{X} + \frac{1}{\sqrt{3}}$;
ma ciò equivale a richiedere che il punto (X, Y) stia AL DI SOTTO della retta $\mathrm{Y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{X} + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Insomma, la risoluzione grafica di $\begin{cases} \sqrt{3}\,\mathrm{Y} + \mathrm{X} < 1 \\ \mathrm{Y}^2 + \mathrm{X}^2 = 1 \end{cases}$

consiste nella ricerca di quei punti della circonferenza $\mathrm{Y}^2 + \mathrm{X}^2 = 1$
che stanno al di sotto della retta $\mathrm{Y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{X} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ (intersezione circonferenza/semipiano).




Ecco dunque il grafico.
L'arco evidenziato è l'intersezione cercata,
e i suoi punti coincidono
con gli estremi degli archi
che sono soluzione
della disequazione proposta
(puoi andare a rivedere pagina 58
per una motivazione accurata di questo fatto).

Per determinare le coordinate di A e di B
si può risolvere il sistema di *equazioni*

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,\mathrm{Y} + \mathrm{X} = 1 \\ \mathrm{Y}^2 + \mathrm{X}^2 = 1 \end{cases}.$$

Si trova $\mathrm{A}(1,0)$ e $\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

da cui gli archi di $0$ $(2\pi)$ radianti e di $\frac{2}{3}\pi$ radianti,

e la conclusione: $\boxed{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$

**3° modo: con l'"arco ausiliario"**

Così come abbiamo fatto a pagina 59, dividiamo per il numero $\sqrt{a^2+b^2}$ onde "normalizzare" la coppia dei coefficienti ($a$, $b$) e andare poi alla ricerca dell' "arco ausiliario".

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

dunque avremo

$$\sqrt{3}\,sen\,x+cos\,x<1$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{=cos\frac{\pi}{6}}\,sen\,x+\underbrace{\frac{1}{2}}_{=sen\frac{\pi}{6}}\,cos\,x<\frac{1}{2}$$

$$sen\left(x+\frac{\pi}{6}\right)<\frac{1}{2}$$

$$-\frac{7}{6}\pi+2k\pi<x+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{(NOTA 1)}$$

$$-\frac{7}{6}\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$-\frac{4}{3}\pi+2k\pi<x<2k\pi \quad \text{(NOTA 2)}$$

NOTA 1

Perché mai abbiamo utilizzato un arco negativo?
Semplicemente per avere la possibilità
di scrivere le soluzioni
in una forma molto compatta.

NOTA 2

Prova a porre $k=1$ e otterrai

$$\frac{2}{3}\pi<x<2\pi\,.$$

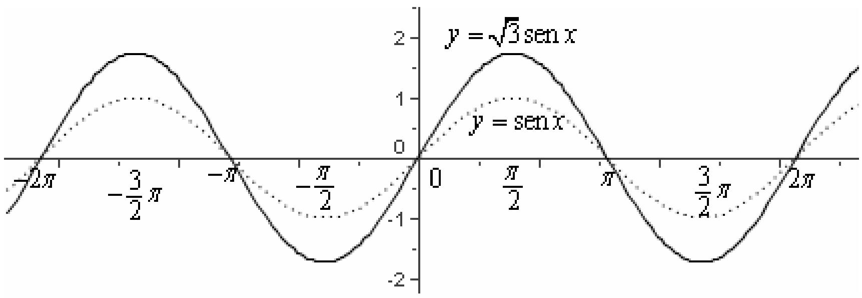
Insomma, l'insieme di soluzioni trovato
coincide perfettamente
con quello determinato
per mezzo dei due metodi precedenti.

**4° modo: con una "classica" risoluzione grafica**

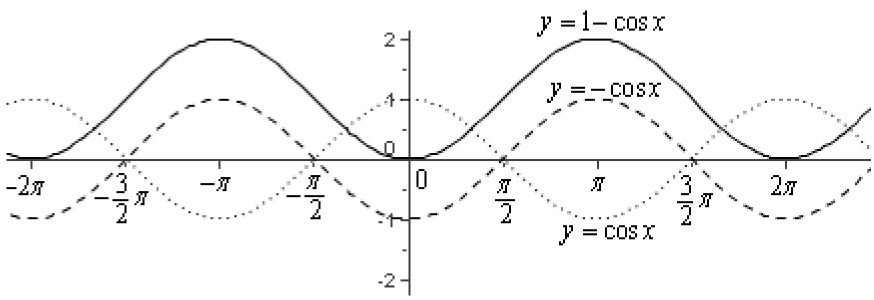
La disequazione data è $\sqrt{3}\,sen\,x+cos\,x<1$.

Riscrivendola come $\sqrt{3}\,sen\,x<1-cos\,x$ la si può risolvere graficamente con buona facilità.

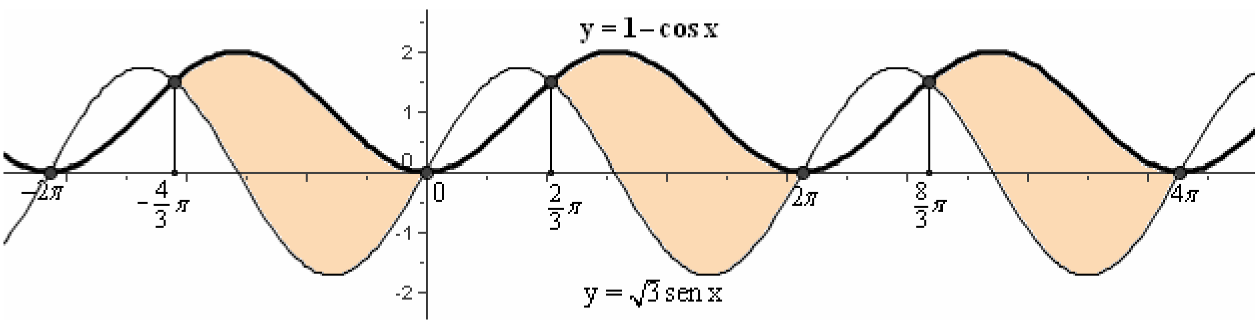
Il grafico della funzione $y=\sqrt{3}\,sen\,x$ si può ottenere dal grafico ben noto della $y=sen\,x$ moltiplicando ciascuna ordinata per $\sqrt{3}$ ("effetto fisarmonica verticale").




Il grafico della $y=1-cos\,x$ si può costruire passando
a) dapprima da $cos\,x$ a $-cos\,x$ (simmetrizzazione rispetto all'asse delle ascisse)
b) poi da $-cos\,x$ a $-cos\,x+1$ (traslazione verso l'alto di 1 unità).




Tracciando le due curve sullo stesso riferimento cartesiano, è fatta!
Basta andare a vedere per quali valori di $x$
il grafico della $y=\sqrt{3}\,sen\,x$ VA A FINIRE AL DI SOTTO del grafico della $y=1-cos\,x$




I punti di intersezione fra i due grafici si possono determinare risolvendo l'*equazione* $\sqrt{3}\,sen\,x=1-cos\,x$.

- $sen\,x-\sqrt{3}\,cos\,x\le 0$

*ATTENZIONE!*
*Questa è una disequazione goniometrica lineare OMOGENEA,*
*ma, trattandosi appunto di una disequazione e non di un'equazione,*
*risolvere tramite divisione per cos x, per far comparire la tangente,*
*sarebbe SBAGLIATO!*
*Infatti la quantità cos x può assumere anche valori negativi,*
*e in una disequazione sappiamo che NON si può moltiplicare o dividere*
*ambo i membri per una stessa quantità,*
*a meno che questa sia sempre strettamente positiva.*

Non potendosi dunque dividere per *cos x*,
dovremo risolvere come abbiamo fatto per la lineare non omogenea dell'esempio precedente (ci puoi provare!).

Oppure …

… oppure potremmo, sì, pensare a una risoluzione tramite divisione per $cos\,x$, ma distinguendo i casi:

a) $cos\,x>0$, nel quale la divisione è possibile, mantenendo il verso invariato

b) $cos\,x<0$, nel quale è possibile dividere, se però simultaneamente si cambia il verso

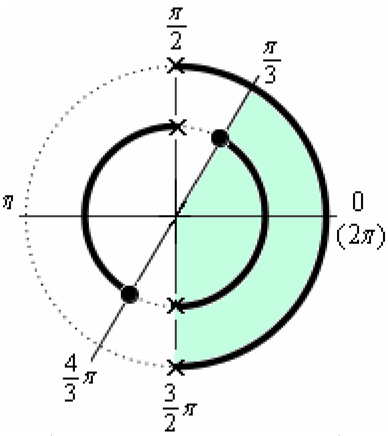
c) $cos\,x=0$, nel quale ovviamente la divisione per $cos\,x$ non è possibile in alcun modo;
ma $cos\,x$ è uguale a 0 esclusivamente quando *x* vale (nel 1° giro) $\frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{3}{2}\pi$,
e allora basterà andare a vedere, per sostituzione diretta,
se $x=\frac{\pi}{2}$ è soluzione, e fare poi altrettanto per $x=\frac{3}{2}\pi$

**Caso a)**

$$\begin{cases} sen\,x-\sqrt{3}\,cos\,x\le 0 \\ cos\,x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{sen\,x-\sqrt{3}\,cos\,x}{cos\,x}\le 0 \\ cos\,x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg\,x-\sqrt{3}\le 0;\ tg\,x\le\sqrt{3} \\ cos\,x>0 \end{cases}$$




$$\boxed{0+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+2k\pi}$$

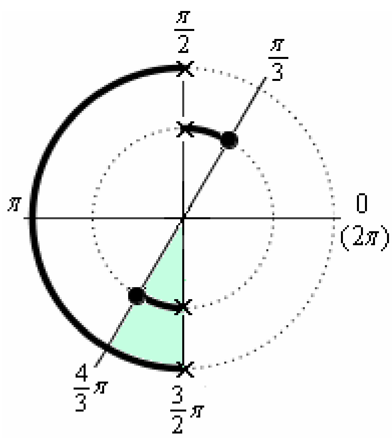
$$\boxed{\frac{3}{2}\pi<x\le 2\pi+2k\pi}$$

**Caso b)**

$$\begin{cases} sen\,x-\sqrt{3}\,cos\,x\le 0 \\ cos\,x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{sen\,x-\sqrt{3}\,cos\,x}{cos\,x}\ge 0 \\ cos\,x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg\,x-\sqrt{3}\ge 0;\ tg\,x\ge\sqrt{3} \\ cos\,x<0 \end{cases}$$




$$\boxed{\frac{4}{3}\pi+2k\pi\le x<\frac{3}{2}\pi+2k\pi}$$

**Caso c)**

$$\begin{cases} sen\,x-\sqrt{3}\,cos\,x\le 0 \\ cos\,x=0 \end{cases}$$

Il coseno si annulla quando
$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ oppure $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$.

Ora, $x=\frac{\pi}{2}$ è soluzione? Vediamo.

$sen\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\cdot cos\frac{\pi}{2}\overset{?}{\le}0$

$1-\sqrt{3}\cdot 0\overset{?}{\le}0$

$1\le 0$ *NO, falsa*: $\frac{\pi}{2}$ *non è soluzione*

E $x=\frac{3}{2}\pi$ è soluzione? Vediamo.

$sen\frac{3}{2}\pi-\sqrt{3}\cdot cos\frac{3}{2}\pi\overset{?}{\le}0$

$-1-\sqrt{3}\cdot 0\overset{?}{\le}0$

$-1\le 0$ *OK, vera!,*

*sì,* $\boxed{\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}\ \textbf{\textit{è soluzione}}}$

Ciascuna delle due figure mostra uno "**schema di SISTEMA** circolare".

| | | |
|---|---|---|
| Simbologia: | **Condizione verificata** | **Linea spessa, pallino pieno** |
| | **Condizione non verificata** | **Linea tratteggiata (o nessuna linea), crocetta di esclusione** |

In definitiva, le soluzioni sono gli *x* tali che $0+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \vee\ \frac{4}{3}\pi+2k\pi\le x\le 2\pi+2k\pi$

oppure (l'utilizzo di un arco negativo permette una scrittura più compatta) $\boxed{\boldsymbol{-\frac{2}{3}\pi+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+2k\pi}}$

## F. OMOGENEE ( = tutti i termini dello stesso grado) IN *sen x, cos x*

- $sen^2 x - 5\,sen\,x\cos x + 4\cos^2 x > 0$

  Di fronte a questa disequazione "*di 2° grado omogenea in sen x e cos x*"
  **si può tranquillamente risolvere dividendo per $\cos^2 x$, allo scopo di far comparire la tangente.**

  Infatti in una disequazione è sempre possibile (lasciando il verso inalterato) dividere ambo i membri per uno stesso numero *positivo*,
  e **$\cos^2 x$ non può mai (in quanto quadrato) assumere valore negativo;**

  **occorrerà soltanto ricordarsi, alla fine, di prendere in considerazione in modo "speciale" i valori di $x$ per i quali il coseno si annulla, e di verificare attraverso una sostituzione diretta se siano soluzione oppure no.**

$$sen^2 x - 5\,sen\,x\cos x + 4\cos^2 x > 0$$
$$\frac{sen^2 x - 5\,sen\,x\cos x + 4\cos^2 x}{\cos^2 x} > 0 \quad (\cos x \neq 0)$$
$$tg^2 x - 5tg\,x + 4 > 0$$
$$(tg\,x - 1)(tg\,x - 4) > 0$$
$$tg\,x < 1 \;\vee\; tg\,x > 4$$
$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \;\vee\; arctg\,4 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Il coseno si annulla quando $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oppure $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$. Perciò, domandiamoci:

$x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione?

$$sen^2\frac{\pi}{2} - 5\,sen\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 4\cos^2\frac{\pi}{2} \overset{?}{>} 0$$
$$1^2 - 5\cdot 1\cdot 0 + 4\cdot 0 \overset{?}{>} 0$$
$$1 > 0 \;\; OK: \frac{\pi}{2} \text{ è soluzione}$$

$x = \frac{3}{2}\pi$ è soluzione?

$$sen^2\frac{3}{2}\pi - 5\,sen\frac{3}{2}\pi\cos\frac{3}{2}\pi + 4\cos^2\frac{3}{2}\pi \overset{?}{>} 0$$
$$(-1)^2 - 5\cdot(-1)\cdot 0 + 4\cdot 0 \overset{?}{>} 0$$
$$1 > 0 \;\; OK: \frac{3}{2}\pi \text{ è soluzione } \left(\text{quindi anche } -\frac{\pi}{2}\right)$$

In definitiva, le soluzioni sono: $-\frac{\pi}{2} + k\pi \le x < \frac{\pi}{4} + k\pi \;\vee\; \text{arctg}\,4 + k\pi < x \le \frac{\pi}{2} + k\pi$

- $\sqrt{sen\,x} > 2\,sen\,x - 1$

  Poniamo $sen\,x = z$ e otterremo la disequazione irrazionale
  $\sqrt{z} > 2z - 1$
  che risolveremo rispetto alla sua incognita $z$;
  alla fine, dai valori trovati per $z$ risaliremo ai valori di $x$.

  $\sqrt{z} > 2z - 1$ è "del 2° tipo" e si riconduce a una coppia di sistemi, separati dal connettivo logico "vel".

$$\begin{cases} 2z - 1 < 0 \\ z \ge 0 \end{cases} \;\vee\; \begin{cases} 2z - 1 \ge 0 \\ z^2 > (2z-1)^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} z < 1/2 \\ z \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z \ge 1/2 \\ z^2 > 4z^2 - 4z + 1; \quad 3z^2 - 4z + 1 < 0; \quad 1/3 < z < 1 \end{cases}$$
$$0 \le z < \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \le z < 1$$

La disequazione in $z$ è quindi verificata per $0 \le z < 1$ e di conseguenza si avrà:

$$0 \le sen\,x < 1$$
$$\mathbf{2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi,\;\; ma\;\; x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

**ESERCIZI** sulle disequazioni goniometriche
(sono richieste le soluzioni nell'intervallo $[0, 2\pi]$)

1) $sen\,x + 8 < 3(4 - sen\,x)$

2) $4cos^2 x - 17cos\,x + 4 < 0$

3) $\dfrac{1}{cos^2 x} < 4tg\,x$

4) $sen\,x + cos\,x > 0$

5) $4cos^4 x < cos^2 x$

6) $sen\,2x + sen\,x < 0$

7) $\dfrac{sen\,2x}{sen\,x\left(2sen\,x - \sqrt{2}\right)} \le 0$

8) $2cos^2 x - sen\,x\,cos\,x - sen^2\,x < 0$

9) $sen\,x + cos\,x < 1$

10) $2sen\,x - 2cos\,x < \sqrt{3} - 1$

11) $\dfrac{sen\,x\,cos\,x}{2cos^2 x - 1} \ge 0$

12) $1 + sen\,2x > 4cos^2 x$

13) $cos\,x - cos\,3x < sen\,2x$

14) $sen\,x + cos\,2x > sen\,3x$

15) $sen\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) - sen\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**SOLUZIONI**

1) $x \ne \dfrac{\pi}{2}$ 2) $0 \le x < arc\,cos\dfrac{1}{4} \vee 2\pi - arc\,cos\dfrac{1}{4} < x \le 2\pi$

3) $\dfrac{\pi}{12} < x < \dfrac{5}{12}\pi \vee \dfrac{13}{12}\pi < x < \dfrac{17}{12}\pi$ 4) $0 \le x < \dfrac{3}{4}\pi \vee \dfrac{7}{4}\pi < x \le 2\pi$

5) $\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{2}{3}\pi \;\, ma \;\, x \ne \dfrac{\pi}{2} \vee \dfrac{4}{3}\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi \;\, ma \;\, x \ne \dfrac{3}{2}\pi$

6) $\dfrac{2}{3}\pi < x < \pi \vee \dfrac{4}{3}\pi < x < 2\pi$ 7) $0 < x < \dfrac{\pi}{4} \vee \dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{3}{4}\pi \vee \dfrac{3}{2}\pi \le x < 2\pi$

8) $\dfrac{\pi}{4} < x < \pi - arc\,tg\,2 \vee \dfrac{5}{4}\pi < x < 2\pi - arc\,tg\,2$ 9) $\dfrac{\pi}{2} < x < 2\pi$

10) $0 \le x < \dfrac{\pi}{3} \vee \dfrac{7}{6}\pi < x \le 2\pi$ 11) $0 \le x < \dfrac{\pi}{4} \vee \dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{3}{4}\pi \vee \pi \le x < \dfrac{5}{4}\pi \vee \dfrac{3}{2}\pi \le x < \dfrac{7}{4}\pi$

12) $\dfrac{\pi}{4} < x < \pi - arc\,tg\,3 \vee \dfrac{5}{4}\pi < x < 2\pi - arc\,tg\,3$

13) $0 < x < \dfrac{\pi}{6} \vee \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{5}{6}\pi \vee \pi < x < \dfrac{3}{2}\pi$

14) $0 \le x < \dfrac{\pi}{6} \vee \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3}{4}\pi \vee \dfrac{5}{6}\pi < x < \dfrac{5}{4}\pi \vee \dfrac{7}{4}\pi < x \le 2\pi$

15) $\dfrac{5}{4}\pi < x < \dfrac{23}{12}\pi$