VERSO L'ANALISI MATEMATICA: INTORNI, ESTREMI & C.

1. **La "number line" pag. 1**
2. **Intervalli 1**
3. **Insiemi numerici; punto, intorno di un punto 2**
4. **Punti di accumulazione di un insieme numerico 4**
5. **Insiemi limitati e illimitati; massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore 5**
6. **Punti interni o esterni ad un insieme; punti di frontiera per un insieme 7**
7. **Insiemi aperti, insiemi chiusi, insiemi ne' aperti ne' chiusi 8**
8. **Estremo superiore e inferiore, massimo e minimo (relativi o assoluti) di una funzione 8**

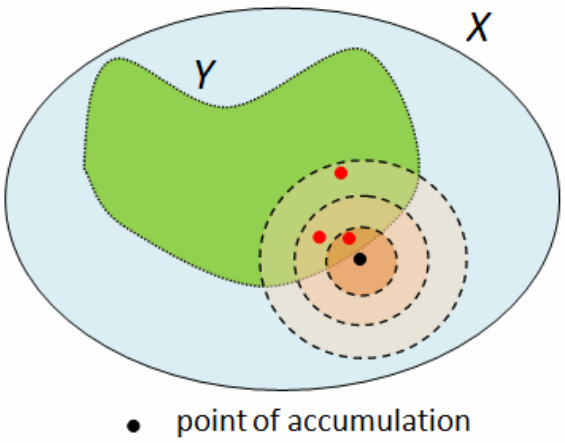
ESERCIZI 12

RISPOSTE 12

9. **Concetto di funzione 14**
10. **Determinazione del dominio di una funzione reale di variabile reale; domini delle funzioni fondamentali 16**
11. **Determinazione del codominio 19**
12. **Composizione di funzioni 21**
13. **Funzioni crescenti o decrescenti (= monotòne) su di un intervallo 22**
14. **Funzioni pari o dispari 22**
15. **Inversione di una funzione numerica 24**
16. **Le funzioni goniometriche inverse (= le inverse delle funzioni goniometriche) 26**

RISPOSTE ad alcuni esercizi del capitolo 28

"Verso l'Analisi matematica: Intorni, Estremi & C.", di Giancarlo Zilio, è distribuito con licenza Creative Commons Attribuzione - - Non commerciale - - Non opere derivate 4.0 Internazionale



Da https://simomaths.wordpress.com

VERSO L'ANALISI MATEMATICA: INTORNI, ESTREMI & C.

1. LA "NUMBER LINE"

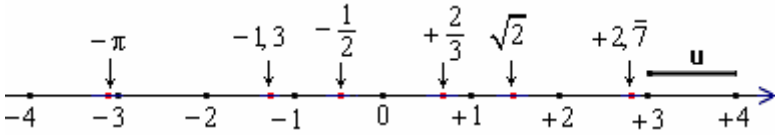
Il termine inglese "number line" ("*linea numerica*", "*linea dei numeri*") indica una retta, dotata di
a) orientamento **b) origine** **c) unità di misura,** sulla quale vengono rappresentati i numeri reali.

Vi è una **corrispondenza biunivoca** fra l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (razionali+irrazionali) e l'insieme dei punti della numb*er line*:

- ♪ ad ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto (detto "l'immagine" di quel numero);
- ♫ e ad ogni punto della *number line* corrisponde uno e un solo numero reale ("l'ascissa" di quel punto).

In ogni intervallino, anche piccolissimo, della "number line", troviamo sempre infiniti punti con ascissa razionale ed infiniti altri punti con ascissa irrazionale.

In lingua italiana viene di norma denominata "**asse delle ascisse**", locuzione che però tende a richiamarci un'idea di "orizzontalità", mentre non è detta che una *number line* debba essere orizzontale: ecco perché preferiamo il termine inglese.



Un asse delle *ordinate*, in un riferimento cartesiano, altro non è che una *number line* disposta (nella maggior parte dei casi) *verticalmente* rispetto all'osservatore.

2. INTERVALLI

Si chiamano "**intervalli**" **particolari insiemi numerici** (vedi schema seguente).
Gli intervalli possono essere: **chiusi, aperti, semiaperti**; possono essere **limitati o illimitati**.

Notare **l'uso delle parentesi**:

- parentesi **QUADRA** = **estremo COMPRESO**;
- parentesi **TONDA** = **estremo ESCLUSO**

Certi testi al posto della tonda usano la "quadra voltata di schiena" e quindi, ad es., al posto di $[a,b)$ *scrivono* $[a,b[$

Intervallo chiuso di estremi *a* e *b*: $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\ /\ a\le x\le b\}$

Intervallo aperto di estremi *a* e *b*: $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ a<x<b\}$

Intervallo di estremi *a* e *b*, chiuso a sinistra e aperto a destra:
$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ a\le x<b\}$

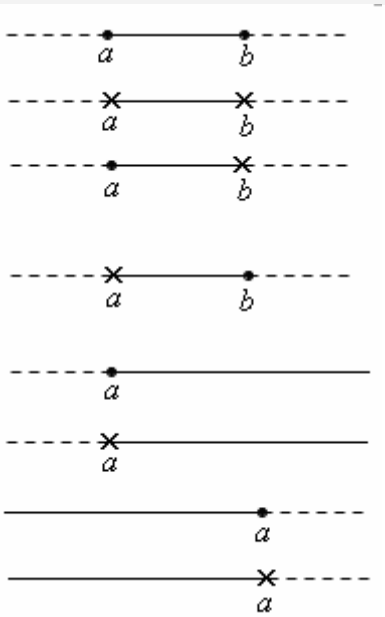
Intervallo di estremi *a* e *b*, aperto a sinistra e chiuso a destra:
$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\ /\ a<x\le b\}$

Intervallo chiuso illimitato superiormente: $[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\ge a\}$

Intervallo aperto illimitato superiormente: $(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x>a\}$

Intervallo chiuso illimitato inferiormente: $(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\le a\}$

Intervallo aperto illimitato inferiormente: $(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x<a\}$



Ad esempio, l'intervallo $[4,8)$:

- ❑ contiene il 4;
- ❑ contiene tutti i numeri, **NON SOLO** (occhio!) quelli interi **MA ANCHE** quelli "con la virgola", compresi fra 4 e 8;
- ❑ NON contiene l'8.

Anche l'intero insieme $\mathbb{R}$ si può pensare come un intervallo (illimitato sia inferiormente che superiormente):

$$\boxed{\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)}$$

Da quanto sopra emerge che l'aggettivo "aperto", riferito ad un *intervallo*, significa "privato degli estremi", mentre "chiuso" significa "compresi gli estremi"
(ci sono poi le situazioni intermedie degli intervalli "semiaperti").

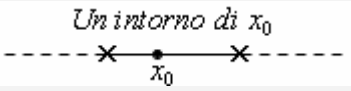
Vedremo più avanti come gli stessi aggettivi "aperto" e "chiuso" possano essere adoperati, con un significato che verrà precisato, in relazione a sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ *QUALSIASI***.**

3. INSIEMI NUMERICI; PUNTO, INTORNO DI UN PUNTO

- **INSIEME "NUMERICO"**
  Viene così chiamato un insieme i cui elementi siano numeri;
  noi resteremo esclusivamente nell'ambito dei numeri *reali,*
  senza sconfinare mai nel campo dei *complessi*;
  quindi per noi un "insieme numerico" sarà un **sottoinsieme di** $\mathbb{R}$.

- **PUNTO**
  Poiché su di una "number line" ad ogni numero reale corrisponde 1 e 1 solo punto geometrico,
  e viceversa,
  il termine "punto" è spesso usato come sinonimo di
  "numero, pensato rappresentato su di una *number line*".

- **Si dice "INTORNO" DI UN PUNTO x_0, un qualsiasi intervallo aperto contenente x_0.**



Quindi possiamo dire che un "intorno" di x_0 è un intervallo della forma $\left(x_0-\delta_1,\, x_0+\delta_2\right)$,
essendo $\delta_1,\, \delta_2$ due numeri strettamente positivi ($\delta_1>0,\ \delta_2>0$).

La distanza $\delta_1+\delta_2$ *viene detta "l'ampiezza" dell'intorno dato.*
Un intorno di x_0 *viene di norma indicato con:* I_{x_0} *, oppure* $\mathrm{I}(x_0)$

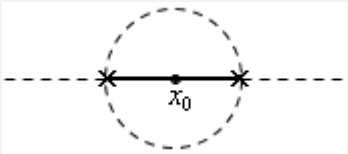
- **INTORNI "CIRCOLARI" DI UN PUNTO**

Si tratta di quegli intorni per i quali $\delta_1=\delta_2=\delta$.
Quindi: **si dice "intorno circolare" di x_0, un intervallo aperto della forma $\left(x_0-\delta,\, x_0+\delta\right)$.**

- *Si parla di "intorno circolare di centro* x_0 *e raggio* δ *"*
- *Si può utilizzare il simbolo* $\mathrm{I}(x_0,\delta)$
- *L'ampiezza di tale intorno è* 2δ

E' pertanto $\mathrm{I}(x_0,\delta)=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x_0-\delta<x<x_0+\delta\right\}$.

E si può scrivere **(MOLTO importante!)**:
$\mathrm{I}(x_0,\delta)=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ \left|x-x_0\right|<\delta\right\}$

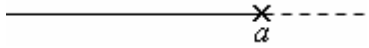


PSST … BENINTESO …
Con riferimento alla figura qui sopra,
non è che l'intorno circolare di x_0
sia la parte *di piano* interna al cerchio … NO!
E' la **parte DI RETTA fra le due crocette**!
Anzi, a dire al vero:
è l'insieme dei NUMERI che sono rappresentati geometricamente
dai punti compresi fra le due crocette.

- **INTORNO DI "MENO INFINITO"** $(-\infty)$

  E' un qualsiasi intervallo aperto del tipo $(-\infty, a)$:

  $$\mathrm{I}_{-\infty} = (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < a\}$$



Un intorno di "meno infinito": l'insieme degli $x < a$

- **INTORNO DI "PIÙ INFINITO"** $(+\infty)$

  E' un qualsiasi intervallo aperto del tipo $(b, +\infty)$

  $$\mathrm{I}_{+\infty} = (b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > b\}$$

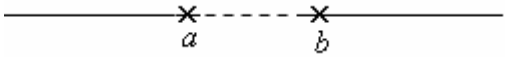
Un intorno di "più infinito": l'insieme degli $x > b$

- **INTORNO DI "INFINITO"** (∞)

  E' l'unione di un intorno di $-\infty$ con un intorno di $+\infty$

  $$\mathrm{I}_{\infty} = (-\infty, a) \cup (b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < a \vee x > b\}$$

  dove ordinariamente interessa il caso $a < b$,
  ma potrebbe anche essere $a = b$
  (e allora l'intorno di ∞ coinciderebbe
  con tutto $\mathbb{R}$ privato di un solo punto)
  o $a > b$ (l'intorno di ∞ coinciderebbe con tutto $\mathbb{R}$)



Un intorno di "infinito": l'insieme degli x minori di a, VEL maggiori di b

- **INTORNO CIRCOLARE DI INFINITO**: $\mathrm{I}_{\infty} = (-\infty, -k) \cup (k, +\infty)$ o anche $\mathrm{I}_{\infty} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| > k\}$

  dove di norma $k > 0$, ma potrebbe essere pure $k = 0$ o $k < 0$,
  nel quale ultimo caso l'intorno circolare di ∞ coinciderebbe con l'intero insieme $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

NEL SEGUITO UTILIZZEREMO IL SIMBOLO c COME UN SIMBOLO "JOLLY",
che potrà indicare un'ascissa finita x_0, ma pure uno dei simboli $-\infty$, o $+\infty$, o (a volte) ∞
qualora emerga dal contesto che stiamo facendo un'affermazione,
o dando una definizione, la cui validità o portata si estende anche a *quei* casi.

- **OSSERVAZIONE IMPORTANTE:**
  L'INTERSEZIONE DI DUE INTORNI DI c È SEMPRE ANCORA UN INTORNO DI c

- **INTORNI "UNILATERALI":**
  intorno SINISTRO, intorno DESTRO di un punto
  - Si dice "intorno sinistro" di un punto x_0,
    un qualsiasi intervallo $(x_0 - \delta, x_0]$
  - Si dice "intorno destro" di un punto x_0,
    un qualsiasi intervallo $[x_0, x_0 + \delta)$

Un intorno sinistro di x_0

Un intorno destro di x_0

OSSERVAZIONE
Qualche testo preferisce formulare le definizioni nel modo seguente:
"intorno sinistro" di $x_0 = (x_0 - \delta, x_0)$; "intorno destro" di $x_0 = (x_0, x_0 + \delta)$.
Viene così escluso dall'intorno il punto x_0 stesso.
Ciò da una parte permette un risparmio di parole in alcuni enunciati, ma dall'altra è assai poco "naturale", perché appare artificioso tagliare fuori dall'intorno proprio il punto di cui ci si sta occupando.
Perciò noi adotteremo le definizioni da cui abbiamo preso le mosse,
quelle in cui l'intervallo è chiuso dalla parte di x_0.

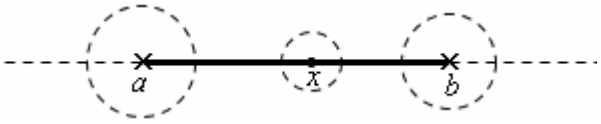
- Quando si vuole sottolineare che un intorno di un punto x_0 è "**bilaterale**", si parla di "**intorno completo**". Questo aggettivo fa da rafforzativo per maggiore chiarezza, ma resta inteso che ogniqualvolta scriveremo semplicemente "intorno", intenderemo sempre "intorno bilaterale ovvero completo", salvo una eccezione: parlando di un estremo di un intervallo $[a, b]$, si potrà scrivere semplicemente "intorno" ma sottintendere che tale intorno sia: soltanto destro, per a, e soltanto sinistro, per b.

- **Noi in generale quando considereremo un intorno di x_0, lo prenderemo circolare. D'altra parte,**
  ACCADE SPESSISSIMO CHE RISULTI DEL TUTTO INDIFFERENTE
  PENSARE AD INTORNI "CIRCOLARI" O AD INTORNI "GENERICI".
  Su questo fatto ritorneremo a riflettere, quando la circostanza si presenterà.

4. PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI UN INSIEME NUMERICO

- **Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$, il punto x_0 (appartenente o non appartenente ad E) si dice "PUNTO DI ACCUMULAZIONE" per E se ogni intorno completo di x_0 contiene almeno un punto di E, *DISTINTO DA* x_0.**

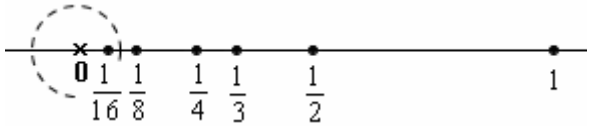
Esempio 1
Consideriamo l'intervallo aperto (a,b).
Evidentemente, qualsiasi punto x di (a,b)
è di accumulazione per (a,b);
ma anche i due estremi a, b, pur non appartenendo ad (a,b), sono punti di accumulazione per (a,b).



Esempio 2
Consideriamo l'insieme

$$F = \left\{\frac{1}{k},\ con\ k = 1, 2, 3, 4, ...\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$$

di cui nella figura qui a fianco sono rappresentati alcuni fra gli infiniti elementi.
Questo insieme F possiede un punto di accumulazione, *NON* appartenente all'insieme stesso:
si tratta del numero 0.
Infatti, ogni intorno di 0 contiene punti di F !!!
Dimostriamolo.
Fissiamo un intorno di 0,
ossia un intervallo aperto del tipo $(-\delta, \delta)$.
Ora, se noi prendiamo una frazione della forma $1/k$
e diamo a k valori molto grandi, otteniamo che
la frazione si fa "piccola quanto noi desideriamo",
per cui, comunque piccolo sia stato fissato δ,
tale frazione riuscirà comunque a "intrufolarsi"
fra 0 e δ, "entrando" quindi nell'intorno considerato.
In effetti, se vogliamo che si abbia
$\frac{1}{k} < \delta$, basta che scegliamo $k > \frac{1}{\delta}$.



Per ovvi motivi pratici di carattere grafico, abbiamo rappresentato in figura soltanto pochi fra gli infiniti elementi dell'insieme $F = \left\{\frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$

(la figura mostra poi anche il punto 0, NON appartenente all'insieme F).
Ma con gli occhi della mente possiamo "vedere" gli elementi di F "accumularsi", al crescere di k, in prossimità dello 0.

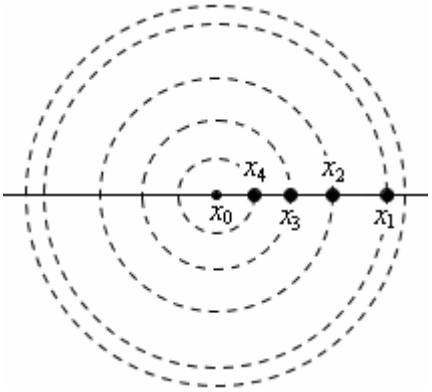
Osserviamo poi che 0 è l'unico punto di accumulazione per l'insieme F. Infatti, qualora noi prendiamo un altro punto c, diverso dallo 0:

1) *se c NON appartiene ad F, riusciremo sempre a determinare un intorno di c talmente piccolo da non contenere alcun punto di F;*
2) *e se c appartiene ad F, riusciremo sempre a determinare un intorno di tale punto, talmente piccolo da non contenere altri punti di F se non, appunto, il centro dell'intorno.*

Esempio 3 - L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali ha come punti di accumulazione … tutti i numeri reali!

- **TEOREMA**
  Se x_0 è un punto di accumulazione dell'insieme E, allora ogni intorno di x_0 contiene *INFINITI* punti di E.

Dimostrazione
Sia x_0 un punto di accumulazione di E. Fissiamo un intorno $I(x_0)$.
Per definizione di punto di accumulazione,
tale intorno conterrà almeno un punto di E, distinto da x_0;
chiamiamo x_1 questo punto.
Consideriamo ora l'intorno di centro x_0 e raggio $|x_1 - x_0|$:
essendo x_0 punto di accumulazione di E,
tale intorno dovrà contenere un altro punto di E, distinto da x_0;
indichiamolo con x_2.
Osserviamo che x_2 apparterrà anche all'iniziale $I(x_0)$.
Andiamo ora a considerare
l'intorno di centro x_0 e raggio $|x_2 - x_0|$:
in esso esisterà un ulteriore punto x_3 di E
(e x_3 apparterrà pure all'iniziale $I(x_0)$); ecc. ecc.
Insomma, il procedimento può essere iterato in modo da trovare in $I(x_0)$ tanti elementi di E quanti se ne desiderano.



*In virtù di questo teorema, molti testi definiscono direttamente "punto di accumulazione di un insieme E", un punto tale che in ogni suo intorno cadano **infiniti** punti di E.*

- Definizione - Un punto di E, che non sia di accumulazione per E, viene detto "**PUNTO ISOLATO**" di E.
  I punti dell'insieme F dell'Esempio 2 sono tutti isolati.
  Invece l'insieme (a,b) dell'Esempio 1 non ha punti isolati.

5. INSIEMI LIMITATI E ILLIMITATI; MASSIMO, MINIMO, ESTREMO SUPERIORE, ESTREMO INFERIORE

L'intervallo $(-1, 7)$ è limitato sia inferiormente che superiormente.
Invece l'intervallo $(4, +\infty)$ è limitato inferiormente ma non superiormente.
L'insieme degli x tali che $|x| \geq 5$ è **IL**limitato sia inferiormente che superiormente.
L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ è illimitato superiormente, mentre è limitato inferiormente.
L'insieme degli interi relativi $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ è illimitato sia inferiormente che superiormente.

DEFINIZIONI

- Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice "**SUPERIORMENTE LIMITATO**" se ammette un "**limitante superiore**", ossia se esiste un numero $k \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in E,\ x \leq k$
- Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice "**INFERIORMENTE LIMITATO**" se ammette un "**limitante inferiore**", ossia se esiste un numero $k \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in E,\ x \geq k$
- Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice "**LIMITATO**" se è limitato sia inferiormente che superiormente.

E' ovvio che
se un insieme E ammette un limitante superiore k, allora ne ammette infiniti (tutti i numeri $\geq k$);
se un insieme E ammette un limitante inferiore k, allora ne ammette infiniti (tutti i numeri $\leq k$).

Sinonimo di "limitante superiore (inferiore)" è "maggiorante (minorante)"

Un insieme E è superiormente (inferiormente) illimitato quando, comunque grande si fissi il numero positivo M, esiste sempre un elemento di E maggiore di M (minore di $-M$)

- Il **TEOREMA DI BOLZANO**

  Si dimostra che **un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ che sia limitato e contenga infiniti punti, deve per forza ammettere almeno un punto di accumulazione (appartenente o no all'insieme).**

  Questa proposizione è attribuita a Bernard Bolzano (Praga 1781-1848)

  - Se un insieme numerico E è illimitato superiormente (inferiormente), allora si conviene che $+\infty$ ($-\infty$) sia punto di accumulazione per E.
    Con questa convenzione, potremmo riformulare il precedente Teorema di Bolzano scrivendo che "qualunque insieme numerico E avente infiniti elementi ammette almeno un punto di accumulazione, che può trovarsi al finito o all'infinito, e appartenere o no all'insieme"
  - Alcuni testi chiamano "teorema di Bolzano" un altro enunciato, quello che noi denomineremo "teorema di Darboux" o "dei valori intermedi".
    Questi matematici! Si mettessero un po' più d'accordo!

- **Massimo e minimo di un insieme**

  Consideriamo un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$.

  - Se esiste un elemento $\bar{x} \in E$, tale che, $\forall x \in E$, risulti $x \leq \bar{x}$, allora si dice che $\bar{x}$ è il **MASSIMO** di E.
  - Se esiste un elemento $\bar{\bar{x}} \in E$, tale che, $\forall x \in E$, risulti $x \geq \bar{\bar{x}}$, allora si dice che $\bar{\bar{x}}$ è il **MINIMO** di E.

I due simboli $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$
si leggono rispettivamente:
"x segnato" e "x segnato due volte".
Servono per indicare
valori SPECIFICI, *non* generici,
della variabile x.

Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, che sia finito (cioè: costituito da un numero finito di elementi), ammette sempre sia un minimo che un massimo; ma se E è infinito, ciò può anche non avvenire.
Esempi:

- ✓ L'insieme $F = \left\{\frac{1}{k},\ con\ k = 1, 2, 3, 4, ...\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$

  è dotato di MASSIMO (il numero 1), ma, sebbene sia inferiormente limitato, non è dotato di minimo!
- ✓ L'intervallo semiaperto $[a, b)$ ha come minimo il numero a, ma non ammette massimo.
- ✓ L'insieme $\mathbb{N}$ ha come minimo 0 e (non essendo superiormente limitato) non ammette massimo.

- **Estremo superiore, estremo inferiore di un insieme**

  In matematica, un concetto PIU' GENERALE del concetto di massimo (o, rispettivamente, di minimo) è il concetto di "estremo superiore" (rispettivamente, "estremo inferiore"). Introduciamolo con alcuni esempi, poi ne daremo la definizione.

  a) Abbiamo appena osservato che l'insieme $\mathrm{F} = \left\{\frac{1}{k},\ con\ k = 1, 2, 3, 4, ...\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$

  è dotato di massimo ($M = 1$), ma non di minimo (infatti, preso un qualsivoglia elemento di F, esistono sempre in F elementi ancora più piccoli di quello considerato).
  Tuttavia il numero 0 (che NON appartiene ad F)
  occupa, nei confronti degli elementi di F, una posizione molto particolare.
  Tutti gli elementi di F sono maggiori di 0, ma si avvicinano sempre più a 0, al crescere di *k*, affollandosi in prossimità dello 0 fino a "sfiorarlo", seppure non riescano a raggiungerlo.
  Lo 0 è un limitante inferiore dell'insieme F;
  ma fra i limitanti inferiori di F, è quello "più prossimo" agli elementi di F, perché ogni intorno destro di 0, anche se viene preso piccolo piccolo piccolo, contiene sempre dei punti di F.
  Diremo che il numero 0, sebbene non sia il minimo di F (perché non appartiene a F), è l' "estremo inferiore" dell'insieme F.

  b) L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
  ha come estremo inferiore 0 (che ne è anche il minimo), mentre il suo estremo superiore è $+\infty$

  c) L'intervallo chiuso $[a, b]$ ammette *a* come minimo, *b* come massimo
  (possiamo dire che *a* ne è l'estremo inferiore, che, appartenendo all'insieme, ne fa anche da minimo, mentre *b* ne è l'estremo superiore, che, appartenendo all'insieme, ne fa anche da massimo).

  d) L'intervallo aperto (a, b) non ha né massimo né minimo:
  ammette invece il punto *a* come estremo inferiore, il punto *b* come estremo superiore.

  e) L'insieme G dei numeri IRrazionali appartenenti all'intervallo $[0, 1]$ è privo sia di minimo che di massimo; ammette però 0 come estremo inferiore, 1 come estremo superiore.

  f) L'insieme $\mathrm{H} = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$ è illimitato sia inferiormente che superiormente, quindi non ha né minimo né massimo, ma ha come estremo inferiore $-\infty$ e come estremo superiore $+\infty$.

- DEFINIZIONE

  Sia $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}$, superiormente limitato.
  Si dice "**ESTREMO SUPERIORE**" di E quel numero *L*, se esiste, tale che:
  I. *L* sia un limitante superiore per E, ossia $\forall x \in \mathrm{E},\ x \le L$;
  II. comunque piccolo si fissi un $\varepsilon > 0$, esiste sempre almeno un elemento *x* di E tale che $L - \varepsilon < x \le L$

  Nel caso poi che E sia superiormente illimitato, si dice che "l'estremo superiore di E è $+\infty$"

Un TEOREMA estremamente interessante, la cui dimostrazione omettiamo perché dipende da considerazioni piuttosto fini sulla definizione di numero reale, afferma che:

- (IMPORTANTE): **OGNI insieme numerico $\mathbf{E} \subseteq \mathbb{R}$ ammette estremo superiore (finito o infinito).**

TEOREMI

- **L'estremo sup. di un insieme numerico E, nel caso sia finito, è il minimo fra i limitanti superiori di E**
  (quindi l'insieme dei limitanti sup. di un insieme E, se non è vuoto, possiede sempre l'elemento minimo)
- **Un insieme numerico E ammette massimo se e solo se l'estremo sup. di E è finito e appartiene ad E. In tal caso, il massimo e l'estremo superiore coincidono.**

Del tutto analoga è la definizione di estremo inferiore di un insieme numerico E.

- Sia $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}$, inferiormente limitato.
  Si dice "**ESTREMO INFERIORE**" di E quel numero ℓ, se esiste, tale che:
  I. ℓ sia un limitante inferiore per E, ossia $\forall x \in \mathrm{E},\ x \ge \ell$;
  II. comunque piccolo si fissi un $\varepsilon > 0$, esiste sempre almeno un elemento *x* di E tale che $\ell \le x < \ell + \varepsilon$

Nel caso poi che E sia inferiormente illimitato, si dice che "l'estremo inferiore di E è $-\infty$"

TEOREMI

- (IMPORTANTE): ***OGNI* insieme numerico $\mathbf{E} \subseteq \mathbb{R}$ ammette estremo inferiore (finito o infinito).**
- **L'estremo inf. di un insieme numerico E, nel caso sia finito, è il massimo fra i limitanti inferiori di E**
  (quindi l'insieme dei limitanti inf. di un insieme E, se non è vuoto, possiede sempre l'elemento massimo).
- **Un insieme numerico E ammette minimo se e solo se l'estremo inf. di E è finito e appartiene ad E. In tal caso, il minimo e l'estremo inferiore coincidono.**

L'estremo inferiore di un insieme E viene indicato col simbolo **inf (E)**, l'estremo superiore con **sup (E).**

6. PUNTI INTERNI O ESTERNI AD UN INSIEME; PUNTI DI FRONTIERA PER UN INSIEME

Sia E un insieme numerico, e sia $x_0 \in \mathrm{E}$.

- **x_0 si dice INTERNO ad E se e solo se esiste un intorno completo di x_0, interamente incluso in E.**

$$x_0 \text{ INTERNO ad E} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \exists\, \mathrm{I}_{x_0} \;/\; \mathrm{I}_{x_0} \subseteq \mathrm{E}$$

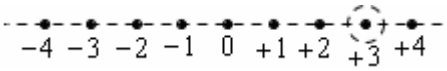
Se prendiamo come insieme E l'intervallo APERTO (a,b), vedremo che TUTTI i punti di E sono "interni". Sei d'accordo? Osserva la figura qui a fianco. Sia x un qualsivoglia punto di (a,b); indicata con δ la più piccola fra le distanze di x dagli estremi a, b dell'intervallo, qualsiasi intorno di centro x e raggio $\leq \delta$ è incluso in (a,b). Quindi x è interno ad (a,b). Dunque (importante): TUTTI i punti di un intervallo APERTO sono "INTERNI" all'intervallo.

TUTTI i punti di un intervallo APERTO sono INTERNI all'intervallo

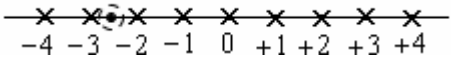
Se invece prendiamo come insieme E l'intervallo CHIUSO $[a,b]$, ci renderemo conto che i suoi punti "INTERNI" nel senso della definizione da noi posta sono tutti quelli STRETTAMENTE COMPRESI fra a e b, ossia sono i punti che costituiscono l'intervallo aperto (a,b). Invece gli estremi a, b NON sono punti "interni" all'insieme $[a,b]$.

Questa volta si considera l' intervallo CHIUSO $[a,b]$. Comunque piccolo prendiamo il raggio dell'intorno di centro a, una parte dell'intorno scapperà fuori dall'intervallo. Non esiste nessun intorno completo di a che sia interamente incluso nell'intervallo $[a,b]$. Quindi il punto a NON è interno all'intervallo considerato. E analogamente per b. Invece tutti gli altri punti dell'intervallo sono "INTERNI" ad esso.

Consideriamo l'insieme $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$
Constatiamo che NESSUN punto di $\mathbb{Z}$ è "interno".



Consideriamo invece il COMPLEMENTARE (rispetto a $\mathbb{R}$) dell'insieme $\mathbb{Z}$: TUTTI i suoi punti sono "interni".



Come è ben noto, tra due *QUALSIASI* punti dell'asse reale, cadono infiniti punti ad ascissa irrazionale e infiniti punti ad ascissa razionale. Pertanto nessun punto dell'insieme $\mathbb{Q}$ è "interno" a $\mathbb{Q}$, e nessun punto dell'insieme $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ è "interno" a $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Sia E un insieme numerico.

- **Il punto x_0, non appartenente a E, si dice ESTERNO ad E se e solo se esiste un intorno completo di x_0, privo di intersezione con E.**

$$x_0 \text{ ESTERNO ad E} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \exists\, \mathrm{I}_{x_0} \;/\; \mathrm{I}_{x_0} \cap \mathrm{E} = \varnothing$$

Un punto è perciò esterno ad E se e solo se è interno al complementare di E, cioè all'insieme $\mathbb{R} - \mathrm{E}$.

- **Il punto x_0 (appartenente o non appartenente ad E) si dice DI FRONTIERA per E se e solo se qualsiasi intorno completo di x_0 interseca tanto l'insieme E quanto il suo complementare.**

$$x_0 \text{ DI FRONTIERA per E} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \forall\, \mathrm{I}_{x_0},\ \mathrm{I}_{x_0} \cap \mathrm{E} \neq \varnothing \wedge \mathrm{I}_{x_0} \cap (\mathbb{R} - \mathrm{E}) \neq \varnothing$$

Se $\mathrm{E} = (a,b)$, i punti interni di E sono tutti i punti di (a,b); i punti esterni ad E sono tutti i punti di $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$; i punti di frontiera di E sono il punto a e il punto b.

Consideriamo l'insieme $\mathrm{F} = \left\{\frac{1}{k},\ con\ k = 1, 2, 3, 4, ...\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$.

F non ha punti interni. I punti esterni di F sono tutti i punti che non appartengono a F, tranne il punto 0. L'insieme dei punti di frontiera di F è $\mathrm{F} \cup \{0\}$.

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali non ha né punti interni, né punti esterni. Tutti i numeri reali sono punti di frontiera per $\mathbb{Q}$.

7. INSIEMI APERTI, INSIEMI CHIUSI, INSIEMI NE' APERTI NE' CHIUSI

Sia E un insieme numerico, sia cioè $E \subseteq \mathbb{R}$.

- **Si dice che E è un insieme "APERTO" se tutti i suoi punti sono interni.**

Esempi

- Ogni intervallo aperto (a, b) (dove l'aggettivo "*aperto*" è usato qui per indicare "privato degli estremi") è anche un insieme "*aperto*" nel senso della definizione appena posta.
  Infatti abbiamo osservato in precedenza che ogni punto di un intervallo aperto (a, b) è interno ad (a, b).
- Invece un intervallo chiuso $[a, b]$ (qui l'aggettivo "chiuso" è usato per indicare "estremi inclusi") NON è un insieme "aperto", nel senso sopra specificato, perché non tutti i suoi punti sono interni: infatti, a e b non lo sono.
- Il complementare rispetto a $\mathbb{R}$ dell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi è un insieme aperto

In matematica, oltre che di insiemi "aperti", si parla anche di insiemi "chiusi".
"Chiuso", però, in questa accezione, NON è il contrario di "aperto"!!!
Si pone infatti la seguente definizione:

- **Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice "CHIUSO" se non ha punti di accumulazione, oppure, nel caso ne abbia, questi appartengono tutti all'insieme stesso**

Esempi

- Ogni intervallo chiuso $[a, b]$ (dove l'aggettivo "*chiuso*" è usato qui per indicare "estremi inclusi") è anche un insieme "*chiuso*" nel senso della definizione appena posta.
  Infatti i punti di accumulazione di $[a, b]$ sono per l'appunto tutti e soli i punti di $[a, b]$
- Invece l'intervallo aperto (a, b) (l'aggettivo "aperto" è qui usato nel senso di "privato degli estremi") NON è un insieme "chiuso" nel senso sopra precisato, perché ammette come punti di accumulazione anche gli estremi a, b, che non appartengono all'intervallo.
- $F = \left\{\frac{1}{k},\ con\ k = 1, 2, 3, 4, ...\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$
  non è chiuso, perché non contiene quello che è il suo unico punto di accumulazione, ossia il punto 0;
  e non è nemmeno aperto, come abbiamo visto in precedenza.
- $G = F \cup \{0\} = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$ è un insieme chiuso.
  L'unico suo punto di accumulazione (il punto 0) appartiene infatti all'insieme.
- L'insieme dei numeri Naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5,...\}$ è chiuso perché *non ha* punti di accumulazione.

L'esempio dell'insieme F mostra che esistono insiemi che non sono né "aperti" né "chiusi";
d'altronde, un intervallo con un estremo incluso e l'altro escluso, come $[a, b)$, non è né "aperto" né "chiuso".

L'insieme $\mathbb{R}$ e l'insieme vuoto sono gli unici due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$
aventi la proprietà di essere, simultaneamente, sia "aperti" che "chiusi".

Si potrebbe dimostrare il seguente **TEOREMA:**

un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è chiuso se e solo se il suo complementare è aperto.

8. ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE, MASSIMO E MINIMO (RELATIVI O ASSOLUTI) DI UNA FUNZIONE

- **Estremo superiore, estremo inferiore di una funzione su di un insieme**
  Massimo e minimo assoluti di una funzione su di un insieme

Data una funzione $y = f(x)$, detto D il suo dominio, e indicato con E un sottoinsieme di D ($E \subseteq D$),
quando parliamo di "ESTREMO SUPERIORE (risp.: INFERIORE) DELLA f SULL'INSIEME E", intendiamo riferirci all'estremo superiore (risp.: inferiore) dell'insieme $f(E)$, dove il simbolo $f(E)$ indica l'insieme delle immagini dei punti di E attraverso la f (in altre parole: l'insieme dei valori assunti dalla $f(x)$, al variare di x in E).
[NOTA – I concetti di estremo superiore e inferiore di un insieme numerico sono stati trattati a pagina 6]

Dunque:

$$L = \text{ESTREMO SUPERIORE della funzione } f \text{ sull'insieme } \mathrm{E} \subseteq \mathrm{D} \overset{def.}{\Leftrightarrow} L = \sup\left[f(\mathrm{E}) \right] = \sup_{x \in \mathrm{E}} f(x)$$

$$\ell = \text{ESTREMO INFERIORE della funzione } f \text{ sull'insieme } \mathrm{E} \subseteq \mathrm{D} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \ell = \inf\left[f(\mathrm{E}) \right] = \inf_{x \in \mathrm{E}} f(x)$$

Quando diciamo semplicemente " l'estremo superiore (risp. inferiore) della $f(x)$ " ,
sottintendiamo di prendere E = D ,
cioè sottintendiamo che l'insieme di riferimento sia l'intero dominio della funzione.

Analogamente, si dirà "MASSIMO (risp.: MINIMO) DELLA $f(x)$ IN E,
il massimo (risp.: il minimo), *QUALORA ESISTA*, dell'insieme $f(\mathrm{E})$.
Si preferisce, tuttavia, parlare di "MASSIMO ASSOLUTO" (risp.: "MINIMO ASSOLUTO")
per evitare possibili equivoci con la locuzione "massimo relativo" (risp. "minimo relativo"),
che ha un altro significato di cui ci occuperemo successivamente.

Se si scrive " massimo (risp.: minimo) assoluto per la funzione f ",
senza citare un particolare insieme,
si intende che l'insieme di riferimento sia l'intero dominio della f (ossia: E = D).

E' importante l'osservazione seguente:
affermare che una funzione $f(x)$ ammette come massimo assoluto, su di un insieme E, un certo numero M ,
comporta che $M \in f(E)$;
infatti, il massimo di un insieme è l'estremo superiore dell'insieme,
QUALORA QUESTO SIA FINITO ED APPARTENGA ALL'INSIEME.
Ma se $M \in f(E)$, ciò significa che M è immagine, attraverso la f , di almeno un punto di E,
cioè che M è un valore che viene EFFETTIVAMENTE ASSUNTO dalla f ,
in corrispondenza di un certo x' appartenente ad E.

In definitiva, possiamo scrivere che

$$M \text{ è il massimo assoluto di } f(x) \text{ sull'insieme } \mathrm{E} \subseteq \mathrm{D} \Leftrightarrow \exists x' \in \mathrm{E} \ / \ f(x') = M \ \wedge \ \forall x \in \mathrm{E},\ f(x) \le M = f(x')$$

Riguardo all'ascissa x' che "genera" il massimo assoluto, essa viene detta
"punto di massimo assoluto per la f su E".

Insomma:

- ♪ **"MASSIMO ASSOLUTO" è un'ORDINATA,**
- ♫ **"PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO" è l'ASCISSA a cui corrisponde quell'ordinata (tale ascissa può eventualmente non essere unica).**

Analogamente per il minimo:
affermare che una funzione $f(x)$ ammette come minimo assoluto, su di un insieme E, un certo numero m,
comporta che $m \in f(E)$;
infatti, il minimo di un insieme è l'estremo inferiore dell'insieme,
QUALORA QUESTO SIA FINITO ED APPARTENGA ALL'INSIEME.
Ma se $m \in f(E)$, ciò significa che m è immagine, attraverso la f , di almeno un punto di E,
cioè che m è un valore che viene EFFETTIVAMENTE ASSUNTO dalla f ,
in corrispondenza di un certo x'' appartenente ad E.
In definitiva, possiamo scrivere che

$$m \text{ è il minimo assoluto di } f(x) \text{ su } \mathrm{E} \subseteq \mathrm{D} \Leftrightarrow \exists x'' \in \mathrm{E} \ / \ f(x'') = m \ \wedge \ \forall x \in \mathrm{E},\ f(x) \ge m = f(x'')$$

Riguardo all'ascissa x'' che "genera" il minimo assoluto, essa viene detta
"punto di minimo assoluto per la f su E".
Insomma: "minimo assoluto" è un'ordinata, "punto di minimo assoluto" è l'ascissa
a cui corrisponde quell'ordinata (tale ascissa può eventualmente non essere unica).

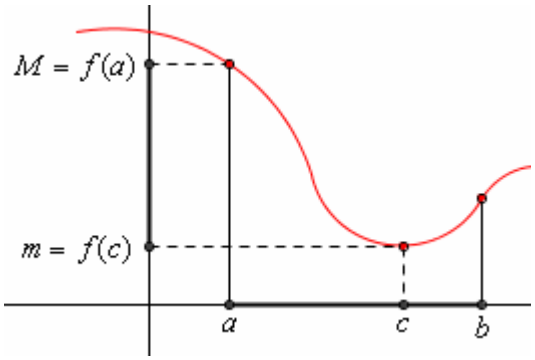
Una funzione $f(x)$ ammette sempre, su di un dato insieme E, estremo superiore e inferiore (eventualmente infiniti), ma potrebbe non ammettere massimo assoluto e/o minimo assoluto.

Gli esempi successivi dovrebbero chiarire bene quanto detto.

Nella figura qui a fianco,

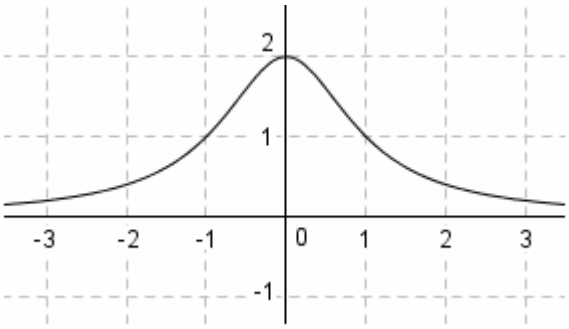
$M = f(a)$ è il massimo assoluto
per la funzione rappresentata,
sull'insieme $\mathrm{E} = [a, b]$.
a è il punto di massimo assoluto.

$m = f(c)$ è il minimo assoluto della f su $[a, b]$.
c è il punto di minimo assoluto.



La funzione $y = g(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$
rappresentata nella figura qui a fianco
ammette massimo assoluto sul suo dominio $\mathbb{R}$: $M = 2$.
Il punto di massimo assoluto è quindi l'ascissa $x = 0$.

Invece questa funzione
non ammette minimo assoluto nel suo dominio:
il suo estremo inferiore è 0,
che però non è un valore assunto dalla funzione,
quindi non ne è il minimo.
I valori assunti dalla funzione costituiscono
l'intervallo semiaperto $(0, 2]$: $f(\mathrm{D}) = (0, 2]$.



La funzione

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & per\ x \neq 0 \\ 1 & per\ x = 0 \end{cases}$$

ha come grafico una "parabola col buco".

L'insieme dei valori assunti dalla funzione sul suo dominio $\mathbb{R}$
è l'intervallo $(-\infty, 4)$.

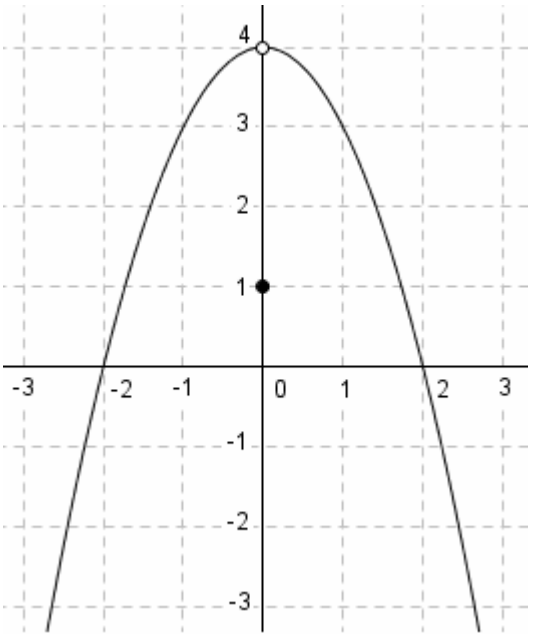
Abbiamo

$$\sup h(x) = 4, \quad \inf h(x) = -\infty,$$

e la funzione non ammette né massimo assoluto,
né minimo assoluto, sul suo dominio.

Invece la stessa funzione $h(x)$:

- sull'insieme $[1, 2]$ ha
  come massimo 3 e come minimo 0;
- sull'insieme $(1, 2]$ ha
  come estremo superiore 3 (ma non ha massimo),
  e come minimo 0;
- sull'insieme $(0, 1]$ ha
  come estremo superiore 4 (ma non ha massimo),
  e come minimo 3;
- sull'insieme $[0, 1]$ ha
  come estremo superiore 4 (ma non ha massimo),
  e come minimo 1.



- **Massimi e minimi relativi di una funzione**

Passiamo ora a descrivere cosa si intende per "punto di massimo (risp.: minimo) RELATIVO", di una funzione $y = f(x)$.

$c(\in \mathrm{D})$ punto di **MASSIMO RELATIVO** per la funzione $f(x) \overset{def.}{\Leftrightarrow} \exists \mathrm{I}_c$ *tale che* $\forall x \in \mathrm{I}_c \cap \mathrm{D},\ f(x) \le f(c)$

$c(\in \mathrm{D})$ punto di **MINIMO RELATIVO** per la funzione $f(x) \overset{def.}{\Leftrightarrow} \exists \mathrm{I}_c$ *tale che* $\forall x \in \mathrm{I}_c \cap \mathrm{D},\ f(x) \ge f(c)$

✓ Si dice che il valore $f(c)$ è un "massimo (minimo) relativo" per la funzione f. Dunque: quando si dice "PUNTO DI MASSIMO (MINIMO) relativo" si intende parlare di un'ASCISSA, mentre quando si dice "MASSIMO (MINIMO) relativo" ci si riferisce ad un'ORDINATA.

Nella figura qui a fianco,

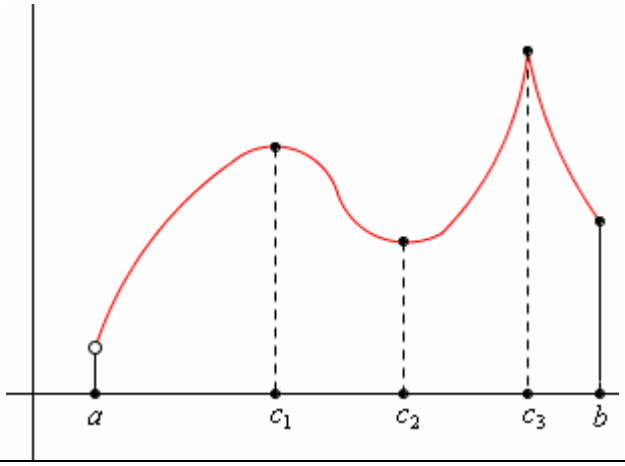
c_1 e c_3 sono punti di massimo relativo, e c_3 è anche il punto di massimo assoluto.

I massimi relativi sono $f(c_1)$ e $f(c_3)$; quest'ultima ordinata costituisce anche il massimo assoluto.

I punti di minimo relativo sono c_2 e b; i minimi relativi sono $f(c_2)$ e $f(b)$.

Non esiste un punto di minimo assoluto per la funzione rappresentata in figura: si ha soltanto un "estremo inferiore", che è poi, con espressione grossolana, l'ordinata del "buco" che si ha in corrispondenza dell'ascissa a.

La funzione proposta come esempio non è definita con $x = a$, dove abbiamo un "buco".



La funzione $y = sen\, x$ ammette infiniti punti di massimo relativo: tutte le ascisse

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k+1)\frac{\pi}{2},\quad k \in \mathbb{Z}.$$

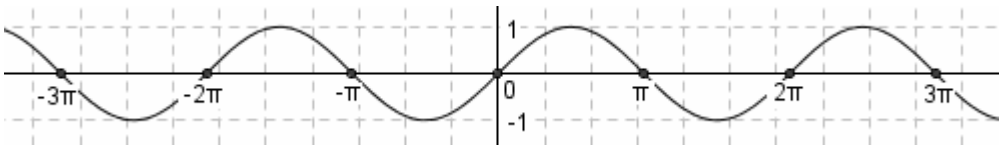
I corrispondenti massimi relativi valgono tutti 1.

Ammette anche infiniti punti di minimo relativo: le ascisse

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k-1)\frac{\pi}{2},\quad k \in \mathbb{Z}.$$

I corrispondenti minimi relativi valgono tutti -1.

Il massimo assoluto della funzione sul suo dominio è 1 (e viene assunto infinite volte!).
Il minimo assoluto è -1, che viene assunto infinite volte.

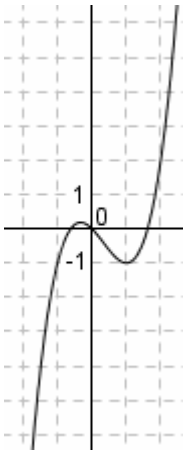


La funzione $y = x^3 - x^2 - x$, raffigurata qui a fianco, non ammette né massimo assoluto, né minimo assoluto (ammette come estremo superiore $+\infty$ e come estremo inferiore $-\infty$), ma ammette un massimo relativo e un minimo relativo.

Si dimostra che:

il punto di massimo relativo è $x = -\frac{1}{3}$ (il massimo relativo è $y = \frac{5}{27}$);

il punto di minimo relativo è $x = 1$ (il minimo relativo è $y = -1$)



Potremmo dire che
"massimo relativo" e "minimo relativo" sono concetti di carattere "**LOCALE**",
mentre "massimo assoluto" e "minimo assoluto" sono concetti di carattere "**GLOBALE**".

ESERCIZI

Considera gli insiemi seguenti; in relazione ad essi risponderai alle sottostanti domande 1) … 6).

$A = \left\{ \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{5}, \dots \right\}$ $\quad B = \left\{ \begin{array}{l} \textit{numeri decimali assoluti con} \\ \textit{al massimo 3 cifre dopo la virgola} \end{array} \right\}$ Es. 14,951; 7,8; 155,0

$C = \{4{,}1;\ 4{,}01;\ 4{,}001;\ 4{,}0001;\ 4{,}00001; \dots\}$ $\quad D = \{4{,}1;\ 4{,}11;\ 4{,}111;\ 4{,}1111;\ 4{,}11111; \dots\}$

$E = (0, 1]$ $\quad F = (0, 1] \cup [2, 3)$ $\quad G = (0, 1) \cup \{2\}$ $\quad H = \{1,\ 2\}$

$I = \{\textit{quadrati perfetti}\} = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$

$L = \{\textit{reciproci dei quadrati perfetti}\} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots\right\}$

$M = \{\textit{numeri razionali dell'intervallo } (0, 1)\}$ $\quad N = \{\textit{numeri irrazionali dell'intervallo } (0, 1)\}$

1) Determina i punti di accumulazione di A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N

2) Per ciascuno degli insiemi A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N, stabilisci se è
I) inferiormente limitato II) superiormente limitato

3) Per ciascuno degli insiemi A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N, determina, se esiste,
I) il minimo m II) il massimo M

4) Per ciascuno degli insiemi A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N, determina
I) l'estremo inferiore ℓ II) l'estremo superiore L

5) Per ciascuno degli insiemi A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N, determina
I) l'insieme dei punti interni II) l'insieme dei punti esterni III) l'insieme dei punti di frontiera

6) Per ciascuno degli insiemi A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N,
stabilisci se è aperto, o chiuso, oppure né aperto né chiuso

---

7) L'intersezione fra i due intorni circolari di centro $x = 3$ e raggi $r_1 = 0{,}1$; $r_2 = 0{,}01$ è …

8) L'intervallo $E = (1, 2)$ è un intorno del punto $x = \sqrt{2}$ ed è anche un intorno del punto $x = \sqrt{3}$.
Qual è il massimo raggio che può avere:
I) un intorno circolare di $\sqrt{2}$, contenuto in E? II) un intorno circolare di $\sqrt{3}$, contenuto in E?

9) Se $S \subseteq \mathbb{R}$, da quale relazione insiemistica sono legati i tre insiemi
$I = \{\textit{punti interni di } S\}$; $E = \{\textit{punti esterni di } S\}$; $F = \{\textit{punti di frontiera di } S\}$?

Considera le funzioni seguenti; in relazione ad esse risponderai alle domande sottostanti.

$a(x) = y = \sqrt{x}$ $\quad b(x) = x^2 - 2x$ $\quad c(x) = |x - 2|$ $\quad d(x) = \frac{1}{x}$ $\quad e(x) = 1 + x^2$ $\quad f(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$ $\quad g(x) = \cos 2x$

10) Per ciascuna delle funzioni a, b, c, d, e, f, g,
determina l'estremo inferiore ℓ e l'estremo superiore L (su tutto il dominio)

11) Per ciascuna delle funzioni a, b, c, d, e, f, g,
determina, se esistono, il minimo m e il massimo M (su tutto il dominio)

RISPOSTE

1)

A: l'unico punto di accumulazione è lo 0; B: non ha punti di accumulazione

C: l'unico punto di accumulazione è il 4; D: l'unico punto di accumulazione è il numero $4{,}\bar{1} = \frac{41-4}{9} = \frac{37}{9}$

E: i punti di accumulazione sono tutti e soli quelli dell'intervallo $[0, 1]$
F: i punti di accumulazione sono tutti e soli quelli dell'insieme $[0, 1] \cup [2, 3]$
G: i punti di accumulazione sono tutti e soli quelli dell'intervallo $[0, 1]$
H: non ha punti di accumulazione; I: non ha punti di accumulazione; L: l'unico punto di accumulazione è lo 0
M: i punti di accumulazione sono tutti e soli quelli dell'intervallo $[0, 1]$
N: i punti di accumulazione sono tutti e soli quelli dell'intervallo $[0, 1]$

2)

Insieme	Inferiormente limitato?	Superiormente limitato?	Insieme	Inferiormente limitato?	Superiormente limitato?
A	Sì	Sì	G	Sì	Sì
B	Sì	No	H	Sì	Sì
C	Sì	Sì	I	Sì	No
D	Sì	Sì	L	Sì	Sì
E	Sì	Sì	M	Sì	Sì
F	Sì	Sì	N	Sì	Sì

3)

Insieme	Minimo m	Massimo M	Insieme	Minimo m	Massimo M
A	-1	$+1$	G	*non esiste*	2
B	0	*non esiste*	H	1	2
C	*non esiste*	4,1	I	1	*non esiste*
D	4,1	*non esiste*	L	*non esiste*	1
E	*non esiste*	1	M	*non esiste*	*non esiste*
F	*non esiste*	*non esiste*	N	*non esiste*	*non esiste*

4)

Insieme	Estremo inf. ℓ	Estremo sup. L	Insieme	Estremo inf.	Estremo sup.
A	-1	$+1$	G	0	2
B	0	$+\infty$	H	1	2
C	4	4,1	I	1	$+\infty$
D	4,1	$4,\bar{1}$	L	0	1
E	0	1	M	0	1
F	0	3	N	0	1

5)

Insieme	Insieme dei punti interni	Insieme dei punti esterni	Insieme dei punti di frontiera
A	$\varnothing$	$\mathbb{R} - A - \{0\}$	$A \cup \{0\}$
B	$\varnothing$	$\mathbb{R} - B$	B
C	$\varnothing$	$\mathbb{R} - C - \{4\}$	$C \cup \{4\}$
D	$\varnothing$	$\mathbb{R} - D - \{4,\bar{1}\}$	$D \cup \{4,\bar{1}\}$
E	$(0, 1)$	$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$	$\{0, 1\}$
F	$F = (0, 1) \cup (2, 3)$	$(-\infty, 0) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$	$\{0, 1, 2, 3\}$
G	$(0, 1)$	$(-\infty, 0) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$	$\{0, 1, 2\}$
H	$\varnothing$	$\mathbb{R} - H$	H
I	$\varnothing$	$\mathbb{R} - I$	I
L	$\varnothing$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\{0\}$
M	$\varnothing$	$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$	$[0, 1]$
N	$\varnothing$	$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$	$[0, 1]$

6) A: né aperto né chiuso; B: chiuso; C: né aperto né chiuso; D: né aperto né chiuso;
E: né aperto né chiuso; F: né aperto né chiuso; G: né aperto né chiuso; H: chiuso;
I: chiuso; L: né aperto né chiuso; M: né aperto né chiuso; N: né aperto né chiuso

7) E' l'intorno di centro 3 e raggio $r_2 = 0,01$ 8) I) $\sqrt{2} - 1$ II) $2 - \sqrt{3}$ 9) $I \cup E \cup F = S$

10), 11)

Funzione	Estremo inf. ℓ	Estremo sup. L	Minimo m	Massimo M
a	0	$+\infty$	0	*non esiste*
b	-1	$+\infty$	-1	*non esiste*
c	0	$+\infty$	0	*non esiste*
d	$-\infty$	$+\infty$	*non esiste*	*non esiste*
e	1	$+\infty$	1	*non esiste*
f	$-\infty$	3	*non esiste*	*non esiste*
g	-1	1	-1	1

9. CONCETTO DI FUNZIONE

Definizione - **Si ha una funzione quando si hanno due grandezze variabili, legate fra loro in modo che ad ogni valore di una di esse (variabile indipendente) corrisponde UNO E UN SOLO valore dell'altra (variabile dipendente).**

Di norma, la variabile indipendente si indica con la lettera x, e la variabile dipendente con y, ma ciò non è assolutamente "obbligatorio". Esempi di funzione: $y = 2x - 3 = f(x)$; $y = x^2 = g(x)$

La scrittura $y = f(x)$ si legge " y uguale f di x " e significa:
"ho una funzione, che ho indicato col simbolo f , nella quale la variabile indipendente è stata indicata col simbolo x e la dipendente con y ".

$$\underset{\text{var. dip.}}{y} = \underset{\text{nome della funzione}}{f}\,(\underset{\text{var. indip.}}{x})$$

Nella accezione più generale, la variabile indipendente e la dipendente potrebbero assumere i loro valori in due insiemi ("insieme di partenza" per la *x* e "insieme di arrivo" per la *y*) *qualsiasi*, ma noi nel seguito ci occuperemo esclusivamente di funzioni "reali di variabile reale", oppure di "successioni".

Una **funzione** si dice "**reale di variabile reale**" se il suo insieme di partenza e quello di arrivo sono entrambi $\mathbb{R}$.

Osserviamo che il *primo* aggettivo "reale" (quello riferito al sostantivo "funzione") ha il ruolo di affermare che l'insieme di *arrivo* è $\mathbb{R}$
(infatti **sovente si usa dire "funzione" quando a stretto rigore si dovrebbe dire "variabile dipendente"**), mentre il *secondo* aggettivo "reale" (quello riferito al sostantivo "variabile", che sta qui per "variabile indipendente") è impiegato per dire che l'insieme di *partenza* è $\mathbb{R}$.

Una **successione** è una funzione il cui insieme di *partenza* è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.
Noi qui ci occuperemo esclusivamente di **successioni "reali"**, cioè il cui insieme di *arrivo* sia $\mathbb{R}$.

Si dice "dominio" (D) o "campo di esistenza" (C.E.) di una funzione, l'insieme dei valori che è possibile attribuire alla variabile indipendente, affinché esista il corrispondente valore della variabile dipendente.

Esempi

Funzione	Dominio
$y = \frac{1}{x}$	$\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = x^2 - x - 2$	$\mathbb{R}$
$y = \sqrt{x-5}$	$\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 5\} = [5, +\infty)$

Occorre dunque un PICCOLO RITOCCO ALLA NOSTRA DEFINIZIONE.
Avevamo iniziato il discorso affermando che

> **« si ha una FUNZIONE quando ci sono due grandezze variabili, legate fra loro in modo che ad OGNI valore di una di esse (variabile indipendente) corrisponde UNO E UN SOLO valore dell'altra (variabile dipendente) ».**

Ma più precisamente, QUELL' "OGNI" VA INTERPRETATO.

> **Si deve intendere « AD OGNI VALORE DELLA VARIABILE INDIPENDENTE …**
> **… PRESO DA UN OPPORTUNO INSIEME DI RIFERIMENTO (il "dominio", appunto) ».**

A volte, poi, per determinare il "dominio" di una funzione, occorre badare, oltre che al puro aspetto del calcolo, anche a considerazioni di carattere "contestuale".

Prendiamo ad esempio la funzione $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = f(r)$ *legata al volume della sfera.*

Dal punto di vista della pura Algebra, alla lettera r potremmo assegnare anche valori <0*;*
ma dal punto di vista dell'interpretazione geometrica, questi non avrebbero senso e dunque è più corretto dire che il dominio di questa funzione è l'insieme dei valori di r maggiori di 0
(o ≥ 0 *, se si accetta l'idea di una sfera di raggio* 0*, che si ridurrebbe ad un punto, e avrebbe volume nullo).*

IN DEFINITIVA, per "DOMINIO" di una funzione si intenderà

1) l'insieme dei valori che è possibile attribuire alla variabile indipendente, affinché esista il corrispondente valore della variabile dipendente …

2) … o in certi casi un insieme più "ristretto" di questo, quando
- **intervengano ulteriori limitazioni legate al contesto nel quale la funzione viene applicata**
- **oppure si intenda comunque per qualsiasi motivo ridurre il campo entro cui si suppone varii la *x*.**

Se non si danno ulteriori esplicite specificazioni, si intende sempre la parola "dominio" nel significato 1).

- **Una funzione si dice "INIETTIVA" se a valori distinti di *x* corrispondono sempre valori distinti di *y***
  - $y = f(x)\ \textit{iniettiva} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2,\ \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

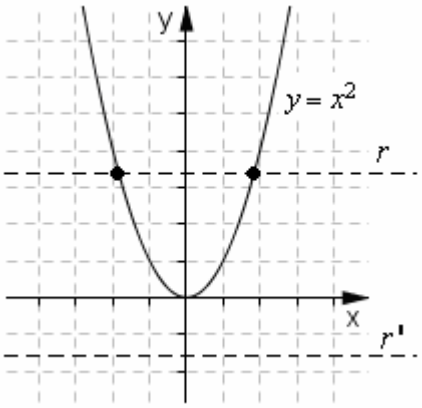
  o anche, in modo equivalente:
  - $y = f(x)\ \textit{iniettiva} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2,\ \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- **Una funzione si dice "SURIETTIVA" se ogni valore di *y* è il corrispondente di almeno un valore di *x***
  - $y = f(x)\ \textit{suriettiva} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \forall y \in \mathbb{R},\ \exists x\ \textit{tale che}\ \ y = f(x)$

GRAFICAMENTE, è ben facile riconoscere se una funzione è iniettiva o è suriettiva!

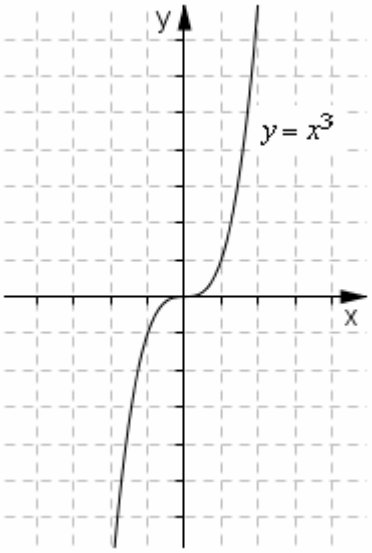
- **INIETTIVA: NESSUNA retta orizzontale interseca il grafico PIÙ DI UNA volta;**
- **SURIETTIVA: QUALSIASI retta orizzontale interseca il grafico ALMENO UNA volta.**

Evidentemente, per amore di brevità ci prendiamo la licenza di scrivere "orizzontale" in luogo di "parallela all'asse *x* ", "verticale" anziché "parallela all'asse *y* "

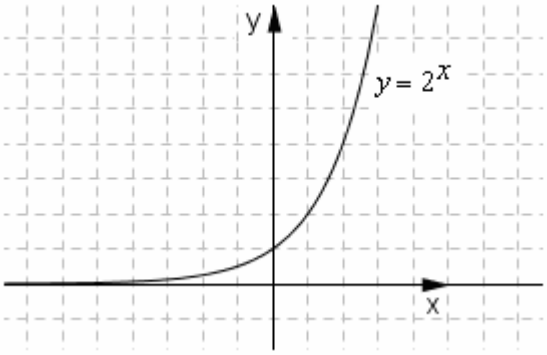
Ad esempio, la funzione $y = x^2$
non è iniettiva
(esistono rette orizzontali,
come la *r* in figura,
che intersecano il grafico più di una volta)
e *non* è neppure suriettiva
(esistono rette orizzontali,
come la *r'* in figura,
che non intersecano mai il grafico) …



… invece la funzione $y = x^3$
è sia iniettiva che suriettiva …



… e, infine, la funzione $y = 2^x$
è iniettiva ma *non* suriettiva.



10. DETERMINAZIONE DEL DOMINIO DI UNA FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE; DOMINI DELLE FUNZIONI FONDAMENTALI

TIPO DI FUNZIONE	DOMINIO
Polinomiale: $\boldsymbol{y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}$	$\mathbb{R}$
Esempio $y = f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 11x - 1$ ha come dominio tutto $\mathbb{R}$	*In un SOFTWARE MATEMATICO, potenza = accento circonflesso:* $x^2 = x \wedge 2$
Fratta: $\boldsymbol{y = f(x) = \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}}$	L'insieme dei valori di x per cui il denominatore esiste ed è $\neq 0$: $\beta(x) \neq 0$
Esempi $y = f(x) = \dfrac{1}{2x^3}$ ha come dominio l'insieme dei valori di x per cui è $2x^3 \neq 0;\ x \neq 0$. Perciò $\mathrm{D} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 3}$ ha come dominio l'insieme dei valori di x per cui è $x - 3 \neq 0;\ x \neq 3$. Perciò $\mathrm{D} = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ $y = f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 4}$ ha come dominio l'insieme dei valori di x per cui è $x^2 - 4 \neq 0;\ x \neq \pm 2$. $\mathrm{D} = \mathbb{R} - \{\pm 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$	*In un SOFTWARE MATEMATICO, OCCHIO ALLE PARENTESI!* $\dfrac{1}{2x^3}$ *va scritta come* $1/(2x \wedge 3)$ *perché la scrittura* $1/2x \wedge 3$ *indicherebbe invece* $\dfrac{1}{2}x^3$! *Ancora:* $\dfrac{x^2 - 4}{x - 3}$ *va scritta come* $(x \wedge 2 - 4)/(x - 3)$
Radicale con indice pari: $\boldsymbol{y = f(x) = \sqrt{\alpha(x)}}$ o più in generale $\boldsymbol{\sqrt[2n]{\alpha(x)},\ n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}}$	L'insieme dei valori di x per cui il radicando esiste ed è ≥ 0: $\alpha(x) \geq 0$
Esempi $y = f(x) = \sqrt{3 - 2x}$ ha come dominio l'insieme dei valori di x per cui è $3 - 2x \geq 0;\ 2x - 3 \leq 0;\ x \leq \dfrac{3}{2}$. Il dominio è perciò $\mathrm{D} = \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$ $y = f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 2}}$ $\quad \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 2} \geq 0;\ \ -3 \leq x < -2 \vee x \geq -1$ Il dominio è perciò $\mathrm{D} = [-3, -2) \cup [1, +\infty)$	*In un SOFTWARE MATEMATICO:* $\sqrt[4]{x^3}$ *va scritta come* $x \wedge (3/4)$ $\sqrt{x}$ *va scritta come* $x \wedge (1/2)$ *oppure come* $sqrt(x)$ *(in Inglese, radice quadrata = square root).* *Occhio alle parentesi!* $x \wedge 3/4$ *produrrebbe invece* $\dfrac{x^3}{4}$*!!!*
Radicale con indice dispari: $\boldsymbol{y = f(x) = \sqrt[3]{\alpha(x)}}$ o più in generale $\boldsymbol{\sqrt[2n+1]{\alpha(x)},\ n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}}$	Coincide con l'intero dominio di $\alpha(x)$
Esempio $y = f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x - 4}}$ ha come dominio l'insieme dei valori di x per cui è $x \neq 4$. Perciò $\mathrm{D} = \mathbb{R} - \{4\} = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$	*In un SOFTWARE MATEMATICO, per indicare questa funzione si scriverebbe* $(x \wedge 2/(x - 4)) \wedge (1/3)$.
Esponenziale con base costante: $\boldsymbol{y = f(x) = e^{\alpha(x)}}$ oppure $\boldsymbol{y = f(x) = a^{\alpha(x)}\ (a \in \mathbb{R}, a > 0)}$	Coincide con l'intero dominio di $\alpha(x)$
Esempio $y = f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ha come dominio l'insieme dei valori di x per cui è $\dfrac{1}{x} \neq 0;\ x \neq 0$. Perciò $\mathrm{D} = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$	*In un SOFTWARE MATEMATICO, l'esponenziale con base "e" si indica con EXP: es.,* $\exp(1/x)$. *"e" è il "numero di Nepéro":* $e = 1{,}718\ldots$

Logaritmica (con base del logaritmo costante): $\boldsymbol{y = f(x) = \ln \alpha(x) = \log_e \alpha(x)}$ oppure $\boldsymbol{y = f(x) = \log_a \alpha(x)\ (a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1)}$	L'insieme dei valori di x per cui l'argomento del logaritmo esiste ed è >0: $\alpha(x) > 0$

Esempi

$y = f(x) = \ln \dfrac{x}{x+2}$ $\quad \dfrac{x}{x+2} > 0;\ \ x < -2 \vee x > 0$

Perciò $\mathrm{D} = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

$y = f(x) = \ln\left(3 - \sqrt{x}\right)$ $\quad 3 - \sqrt{x} > 0;\ \ 0 \le x < 9$

Perciò $\mathrm{D} = [0, 9)$

In un SOFTWARE MATEMATICO, il logaritmo "naturale" cioè quello che ha per base il "numero di Nepéro" $e = 2{,}71828...$ *può essere indicato in modi diversi. Ad esempio, in GEOGEBRA si usa* ln *oppure* log. *Sempre in GEOGEBRA, il simbolo* lg *indica invece il logaritmo in base 10 e il simbolo* ld *il logaritmo in base 2.*

Per la complicata questione della simbologia utilizzata in matematica sui logaritmi, ti rimando al capitolo apposito.

FUNZIONI GONIOMETRICHE: SENO, COSENO, TANGENTE, COTANGENTE

$\boldsymbol{y = \sin \alpha(x)}$ (oppure $\boldsymbol{y = \mathrm{sen}\, \alpha(x)}$)	Coincide con l'intero dominio di $\alpha(x)$
$\boldsymbol{y = \cos \alpha(x)}$	Coincide con l'intero dominio di $\alpha(x)$
$\boldsymbol{y = \mathrm{tg}\, \alpha(x)}$ (oppure $\boldsymbol{y = \tan \alpha(x)}$)	$\alpha(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\boldsymbol{y = \mathrm{cotg}\, \alpha(x)}$ (oppure $\boldsymbol{y = \cot \alpha(x)}$)	$\alpha(x) \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Nella funzione "seno", e nelle altre funzioni goniometriche, si intende sempre che l'argomento sia un angolo, o arco, misurato in *radianti*

(*ricordiamo che MISURARE UN ANGOLO IN RADIANTI significa assumere come misura dell'angolo la lunghezza dell'arco corrispondente, calcolata prendendo come unità di misura il raggio*).

Se proprio si volessero utilizzare invece i gradi, si impiegherebbero scritture tipo $\sin x°$.

In GEOGEBRA il simbolo scelto per il seno è sin( ) (latino *sinus*, inglese *sine*).

Si hanno poi i simboli cos( ), tan( )

mentre la cotangente non è utilizzata (si può sempre rimpiazzarla col reciproco della tangente)

Esempi: $y = f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ $\quad \mathrm{D} = \mathbb{R}$ $\qquad y = f(x) = \sin \ln x$ *che sta per* $\sin(\ln x)$ $\quad \mathrm{D}:\ x > 0$

$y = f(x) = \mathrm{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ $\quad \mathrm{D}:\ 2x - \dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad 2x \neq \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad 2x \neq \dfrac{5}{6}\pi + k\pi \quad x \neq \dfrac{5}{12}\pi + k\dfrac{\pi}{2}$

FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE: ARCO SENO, ARCO COSENO, ARCO TANGENTE

$\boldsymbol{y = \arcsin \alpha(x)}$	Sulle macchinette calcolatrici troviamo i tre simboli $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$; occhio però, qui abbiamo uno "*pseudo*-esponente", che significa "funzione inversa" e non "reciproco"!	$-1 \le \alpha(x) \le 1$
$\boldsymbol{y = \arccos \alpha(x)}$		$-1 \le \alpha(x) \le 1$
$\boldsymbol{y = \mathrm{arctg}\, \alpha(x)}$		Coincide con l'intero dominio di $\alpha(x)$

Esempi

$y = f(x) = \arcsin\left(x^2 - 4x\right)$

$-1 \le x^2 - 4x \le 1$

$\begin{cases} x^2 - 4x \ge -1 \\ x^2 - 4x \le 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \le 2 - \sqrt{3} \vee x \ge 2 + \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{5} \le x \le 2 + \sqrt{5} \end{cases}$

$2 - \sqrt{5} \le x \le 2 - \sqrt{3} \ \vee\ 2 + \sqrt{3} \le x \le 2 + \sqrt{5}$

da cui $\mathrm{D} = \left[2 - \sqrt{5}, 2 - \sqrt{3}\right] \cup \left[2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{5}\right]$

$y = f(x) = \mathrm{arctg}\sqrt{4 - x}$

$4 - x \ge 0;\ x \le 4$

da cui $\mathrm{D} = (-\infty, 4]$

In GEOGEBRA, i simboli per le funzioni goniometriche inverse sono: asin( ); acos( ); atan( )

$\arcsin(x^2 - x)$ si legge: "arco seno di $(x^2 - x)$", ma il suo significato è: "quell'arco, compreso fra $-\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}$, il cui seno è uguale al valore di $(x^2 - x)$".

Puoi trovare approfondimenti sulle tre funzioni goniometriche inverse alla fine del paragrafo sull' "inversione di una funzione".

Potenza con esponente intero positivo: $y = f(x) = [\alpha(x)]^n$ con $n > 0$ intero	Stesso dominio di $\alpha(x)$
Potenza con esponente intero negativo: $y = f(x) = [\alpha(x)]^{-n}$ con $n > 0$ intero	$\alpha(x) \neq 0$
Potenza con esponente nullo: $y = f(x) = [\alpha(x)]^0$	$\alpha(x) \neq 0$
Potenza con esponente non intero, costante e positivo: $y = f(x) = [\alpha(x)]^h$ con $h > 0$ non intero (razionale o irrazionale)	$\alpha(x) \geq 0$

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{def.}{=} \sqrt[n]{a^m}\ , \quad \text{es.} \quad a^{\frac{3}{4}} \overset{def.}{=} \sqrt[4]{a^3}, \quad 3^{\frac{1}{2}} \overset{def.}{=} \sqrt{3}\ .$$

Una potenza con esponente *irrazionale* s, ossia della forma a^s *con* $s \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$,
è uguale a quel numero y che è compreso fra i valori delle potenze, aventi la stessa base e il cui esponente è:
I) un'approssimazione razionale per difetto di s; II) un'approssimazione razionale per eccesso di s. Insomma,

$$a^{\frac{m}{n}} < a^s < a^{\frac{p}{q}},\ con\ \frac{m}{n} < s < \frac{p}{q}\ \left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\right)\ (supponiamo\ anche\ a \neq 1 : 1^s = 1, \forall s \in \mathbb{R})$$

Ad esempio, si ha $\sqrt{2} = 1{,}41421356...$ quindi $3^{\sqrt{2}}$ è quel numero tale per cui

$$3^{1,4} = 3^{\frac{14}{10}} = \sqrt[10]{3^{14}} < \boxed{3^{\sqrt{2}}} < 3^{1,5} = 3^{\frac{15}{10}} = \sqrt[10]{3^{15}};\quad 3^{1,41} = 3^{\frac{141}{100}} = \sqrt[100]{3^{141}} < \boxed{3^{\sqrt{2}}} < 3^{1,42} = 3^{\frac{142}{100}} = \sqrt[100]{3^{142}};\ \ ...$$

Potenza con esponente non intero, costante e negativo: $y = f(x) = [\alpha(x)]^{-h}$ con $h > 0$ non intero (razionale o irrazionale)	$\alpha(x) > 0$
Potenza con base ed esponente variabili: $y = f(x) = [\alpha(x)]^{\beta(x)}$	$\alpha(x) > 0 \ \vee\ \begin{cases} \alpha(x) = 0 \\ \beta(x) > 0 \end{cases}$

E' noto che una potenza a esponente frazionario corrisponde a un radicale: $a^{\frac{m}{n}} \overset{def.}{=} \sqrt[n]{a^m}$; $a^{-\frac{m}{n}} \overset{def.}{=} \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Tuttavia, mentre, ad esempio, nella scrittura $\sqrt[3]{a}$ la lettera a può assumere valori di segno qualsiasi, invece se scriviamo $a^{1/3}$ intenderemo che debba essere $a \geq 0$.

Con gli esponenti frazionari, infatti, si intende sempre che la base della potenza sia positiva (≥ 0 per i frazionari positivi, > 0 per i frazionari negativi), altrimenti si avrebbero gravi inconvenienti: ad esempio, per la scrittura $(-8)^{\frac{1}{3}}$ si potrebbero scrivere entrambe le catene

$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$; $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = +2$ … che evidentemente si contraddicono fra loro!

Questa restrizione (positività della base) viene ovviamente estesa anche agli esponenti irrazionali (basti pensare a come questi ultimi sono stati definiti, a partire da situazioni con esponente razionale …) **e, nel caso delle funzioni con base ed esponente entrambi variabili, per omogeneità resta in vigore pure nel caso fortuito che l'esponente $\beta(x)$ assuma valore intero.**

E' poi ovvio che nel caso la base della potenza sia 0, l'esponente non potrà essere né $= 0$ né < 0: infatti

- com'è noto, l'operazione 0^0 è "indeterminata", quindi rientra fra le operazioni "illegal", "non eseguibili";
- poiché un esponente negativo "caccia la base a denominatore, con esponente che viene reso positivo", con base 0 ed esponente <0 si creerebbe uno 0 a denominatore: "illegal operation".

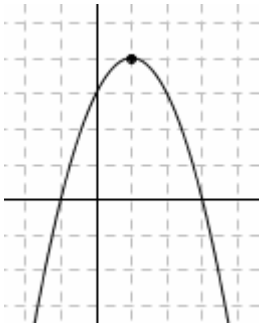
Esempi

$(x-1)^{\frac{1}{5}}, (x-1)^{\frac{1}{4}}, (x-1)^{\sqrt{3}}$	$\sqrt[5]{x-1}$	$\sqrt[4]{x-1}$	$(x-1)^{-\frac{1}{5}}$	$(x-1)^{x+1}$
$x-1 \geq 0;\ x \geq 1$ $D = [1, +\infty)$ In una potenza con esponente non intero, si suppone sempre la base non negativa	$D = \mathbb{R}$ Un radicale con indice dispari è calcolabile qualunque sia il segno del radicando	$x-1 \geq 0;\ x \geq 1$ $D = [1, +\infty)$ Un radicale con indice pari è calcolabile (in $\mathbb{R}$) solo se il radicando è ≥ 0	$x-1 > 0;\ x > 1$ $D = (1, +\infty)$ Qui, essendo l'esponente < 0, va anche escluso che la base sia $= 0$	$x-1 > 0 \vee \begin{cases} x-1 = 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$ $x > 1 \vee \begin{cases} x = 1 \\ x > -1 \end{cases} (x = 1)$ quindi $x \geq 1$ $D = [1, +\infty)$

11. DETERMINAZIONE DEL CODOMINIO

Supponiamo ora che sia assegnata una funzione e che sia richiesto di DETERMINARNE IL CODOMINIO
(= l'insieme dei valori effettivamente assunti dalla variabile dipendente).
Spesso si può rispondere ad un quesito di questo tipo semplicemente tracciando una bozza del grafico della funzione in esame.

ESEMPIO 1: trovare il codominio della funzione $y = -x^2 + 2x + 3$.



Poiché sappiamo (essendo il secondo membro un'espressione di II° grado) che il grafico è una parabola, potremmo disegnare questa parabola, tenendo conto che:

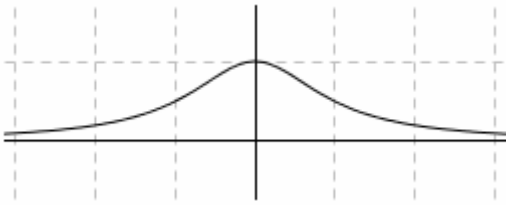
- $x_V = -\dfrac{b}{2a} = 1 \rightarrow \quad y_V = y(1) = -1 + 2 + 3 = 4$
- la concavità è rivolta verso il basso (essendo <0 il coefficiente di x^2)

e andare a vedere quali sono i valori effettivamente assunti dalla *y*:
si tratta dei valori $y \le 4$, ossia il codominio risulta essere l'intervallo $C = (-\infty, 4]$

ESEMPIO 2: determinare il codominio della funzione $y = f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Facile tracciare il grafico di questa funzione:

- il dominio è tutto $\mathbb{R}$ (infatti il denominatore non si può mai annullare);
- con $x = 0$ abbiamo $y = 1$;
- per valori opposti di *x* abbiamo lo stesso valore di *y*,
  cioè, per ogni *x*, $f(-x) = f(x)$, ad es. $f(-2) = f(2)$ …
  quindi il grafico sarà simmetrico rispetto all'asse verticale;
- quando *x*, a partire da 0, cresce,
  la quantità $1 + x^2$ cresce e quindi il suo reciproco decresce,
  schiacciandosi verso lo zero per valori positivi.



Il grafico è dunque quello rappresentato in figura, da cui emerge che
l'insieme dei valori effettivamente assunti dalla *y*, ossia il codominio, è l'intervallo $(0, 1]$

Un altro metodo per determinare il codominio
è basato su passaggi algebrici anziché sul tracciamento di grafici.

Il codominio è l'insieme dei valori di *y* che hanno almeno una controimmagine;
quindi prenderemo l'equazione che definisce la funzione
e cercheremo di risolverla rispetto a *x*,
per trovare la legge che permetta di ritornare da *y* a *x* …
insomma, proveremo ad INVERTIRE la funzione …
fatti i vari passaggi, ad un certo punto risulterà chiaro
quali sono i valori di *y* per i quali si può risalire a *x*,
insomma: ad un certo punto si capirà quali sono i valori di *y* che hanno almeno una controimmagine.
L'insieme di questi valori di *y* costituirà il codominio della funzione.

Beninteso: se troveremo che qualche valore di *y* ha PIU' DI UNA controimmagine, allora ne dedurremo
che la funzione non è invertibile non essendo iniettiva (perlomeno, sul dominio considerato);
ma il nostro scopo non è qui di stabilire se la funzione sia invertibile o no,
il nostro scopo è di determinare il codominio!

ESEMPIO 3: individuare il codominio della funzione $y = \dfrac{x-2}{x-7}$.

$$y = \frac{x-2}{x-7} \;\rightarrow\; xy - 7y = x - 2 \;\; (x \ne 7) \;\rightarrow\; xy - x = 7y - 2; \;\; \boxed{x(y-1) = 7y - 2}$$

Ora, **quest'ultima equazione si può risolvere rispetto a *x* solo per** $\boxed{y \ne 1}$; in tal caso, si ottiene

$$x = \frac{7y-2}{y-1}$$

Abbiamo stabilito così che il codominio della funzione (= l'insieme dei valori effettivamente assunti da y = l'insieme dei valori di y che hanno almeno una controimmagine) è $\boxed{C = \mathbb{R} - \{1\}}$

ESEMPIO 4: determinare il codominio della funzione $\boxed{y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

$$y = \frac{1}{1+x^2} \;\rightarrow\; 1+x^2 = \frac{1}{y} \;\; (y \neq 0) \;\rightarrow\; x^2 = \frac{1}{y} - 1; \;\; \boxed{x^2 = \frac{1-y}{y}}$$

A questo punto, possiamo risalire a x soltanto se il 2° membro è maggiore o uguale a 0, ossia $\boxed{\frac{1-y}{y} \geq 0}$.

Risolvendo la disequazione, si ottiene $\boxed{0 < y \leq 1}$:
perciò sono dotati di controimmagine tutti e soli i valori di y tali che $0 < y \leq 1$,
e ciò significa che il codominio della nostra funzione è l'intervallo $\boxed{C = (0, 1]}$.

Osserviamo che ogni valore di y appartenente a C ha DUE controimmagini: $x^2 = \frac{1-y}{y} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1-y}{y}}$

Questo ci dice che la funzione considerata non è iniettiva, quindi non è invertibile …
… Ma a noi non interessava la questione se la funzione in esame fosse o non fosse invertibile:
ci interessava soltanto trovare i valori di y che avevano almeno una controimmagine,
e ormai abbiamo riconosciuto trattarsi dell'intervallo $C = (0, 1]$.

Se poi fossimo interessati anche all'*inversione* della funzione,
potremmo dire che è invertibile soltanto qualora si vada a *restringere l'insieme di partenza*
ad un intervallo nel quale ogni *y* del codominio abbia UNA SOLA controimmagine.
Ad esempio, se imponiamo a x di essere positiva, ossia se assumiamo come insieme di partenza
soltanto l'intervallo $[0, +\infty)$ anziché tutto $\mathbb{R}$, il doppio segno davanti alla radice se ne andrà, e avremo

$$x \in [0, +\infty) \quad x^2 = \frac{1-y}{y} \rightarrow x = \sqrt{\frac{1-y}{y}} \;.$$

Ogni y del codominio $C = (0, 1]$ avrà così UNA SOLA controimmagine, e la funzione risulterà invertibile.
Perciò possiamo dire che la funzione $y = 1/(1+x^2)$
stabilisce una corrispondenza biunivoca fra l'insieme $[0, +\infty)$ e l'insieme $(0, 1]$.

ESERCIZI (risposte a pag. 28). a) Determina il **dominio** delle funzioni seguenti:

1) $y = 3x - 2$ 2) $y = -x^2 + x$ 3) $y = x^3$ 4) $y = x^4 + 2$ 5) $y = 1/(x-3)$

6) $y = \frac{x-2}{x-4}$ 7) $y = \sqrt{x}$ 8) $y = \sqrt[3]{x}$ 9) $y = \frac{x}{x^2-4}$ 10) $y = \frac{x^2-x}{x^2-x-2}$

11) $y = \frac{x}{2(1+x^2)}$ 12) $y = x + \sqrt{4-x}$ 13) $y = \sqrt{x^2-9}$ 14) $y = \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ 15) $y = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2-4}}$

16) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x-5}$ 17) $y = \sqrt{(x-2)(x-5)}$ 18) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-5}$ 19) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt[3]{x-5}$

20) $y = \frac{x-5}{4\sqrt{x-2}}$ 21) $y = x\sqrt{\frac{x-2}{x-5}} + \frac{1}{x}$ 22) $y = e^{3x-1}$ 23) $y = e^{\sqrt{x}}$ 24) $y = e^{\frac{x-2}{x-1}}$ 25) $y = e^{\sqrt[3]{x^2-1}}$

26) $y = \ln(x^2-4)$ 27) $y = x + \ln\frac{x+3}{x}$ 28) $y = \ln(x+3) - \ln x$ 29) $y = \ln(\ln x)$ 30) $y = \ln(10-x) + \sqrt{x}$

31) $y = (x-5)\sqrt{\ln x - 2}$ 32) $y = \frac{x}{\log_2 x}$ 33) $y = \sin x + \cos\frac{x}{2}$ 34) $y = tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 35) $y = \sqrt{tg\frac{x}{3}}$

36) $y = \frac{1}{tg^2 x - 1}$ 37) $y = tg\frac{1}{x}$ 38) $y = \frac{2+\cos x}{\cos x}$ 39) $y = \ln\sin x$ 40) $y = \sin\ln x$ 41) $y = \sqrt{\ln x}$

42) $y = \sqrt{\cos x}$ 43) $y = \sin^2 x + \mathrm{tg}^2 x$ 44) $y = 2\arcsin(x-1)$ 45) $y = \arcsin\frac{1}{x-3}$

46) $y = \mathrm{arctg}\frac{1}{x+3}$ 47) $y = \frac{1}{\log_7 x - 1}$ 48) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin\ln x}}$ 49) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{e^x - 3}$ 50) $y = \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{x-1}}$

51) $y = \left(\frac{x-4}{x+5}\right)^{\frac{1}{3}}$ 52) $y = \sqrt[3]{\frac{x-4}{x+5}}$ 53) $y = \left(\frac{x-4}{x+5}\right)^{\sqrt{2}}$ 54) $y = x^{x-3}$ 55) $y = \ln(e^x - 1)$ 56) $y = \sqrt[4]{\ln x - 1}$

b) Determina il **codominio** delle precedenti funzioni 1), 2), 3), 4), 5), 6), 7), 8), 9), 10), 11), 22), 23), 39), 40), 41)

12. COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Per "**COMPOSIZIONE**" (si dice anche "prodotto" … ma NON, evidentemente, nel senso di "moltiplicazione"!) **DI DUE FUNZIONI**, si intende la loro "**APPLICAZIONE SUCCESSIVA**". Vediamo subito un esempio.

La funzione "TRIPLO" prende un numero e me lo triplica.
La funzione "QUADRATO" prende un numero e me lo eleva al quadrato.

Se parto da un numero x e applico successivamente
PRIMA la funzione "TRIPLO" E POI, AL NUMERO OTTENUTO, la funzione "QUADRATO",
così facendo ho "composto" le due funzioni considerate.

$$x \xrightarrow{3(\bullet)} 3x \xrightarrow{(\bullet)^2} 9x^2$$

Osserviamo subito che **la composizione di due funzioni non è commutativa**:
se, ad esempio, a partire dal numero x,
applicassi PRIMA la funzione "QUADRATO" e POI la funzione "TRIPLO", otterrei:

$$x \xrightarrow{(\bullet)^2} x^2 \xrightarrow{3(\bullet)} 3x^2$$ che è un risultato diverso dal precedente.

In generale:

se ho una funzione $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ (A insieme di partenza, B insieme di arrivo)
e una seconda funzione $g : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$,
allora posso, preso un numero $x \in \mathrm{A}$, applicargli
♪ dapprima la funzione f, ottenendo il numero $f(x) \in \mathrm{B}$,
♫ poi a questo numero $f(x)$ applicare la funzione g, pervenendo al numero definitivo $g(f(x)) \in \mathrm{C}$

$f : \mathrm{A} \to \mathrm{B} \quad g : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$

$$\underbrace{x \xrightarrow{f} \underbrace{f(x)}_{y} \xrightarrow{g} \overset{y}{\underbrace{g(f(x))}_{z}}}_{\text{la funzione composta } g \circ f,\ \text{è quella che fa passare direttamente da } x \text{ a } z}$$

La funzione composta, quella che fa saltare direttamente da x a $z = g(f(x))$,
viene di solito indicata col simbolo $g \circ f$.

VIENE SCRITTA PER PRIMA LA FUNZIONE CHE VIENE APPLICATA PER ULTIMA!
E questo perché tale scrittura si adatta meglio a passaggi come $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

ESEMPIO 1 $\quad f : x \to x - 1 \qquad g : x \to x^3$

- Se applico successivamente prima la f poi la g, ottengo: $x \xrightarrow{f} x - 1 \xrightarrow{g} (x-1)^3$
  La funzione composta $g \circ f$ prende dunque "in input" x e restituisce "in output" il numero $(x-1)^3$;
  vale a dire, $g \circ f$ è la funzione tale che $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-1)^3$
- Se applico successivamente prima la g poi la f, ottengo: $x \xrightarrow{g} x^3 \xrightarrow{f} x^3 - 1$
  La funzione composta $f \circ g$ prende dunque "in input" x e restituisce "in output" il numero $x^3 - 1$;
  vale a dire, $f \circ g$ è la funzione tale che $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^3 - 1$

ESEMPIO 2 $\quad f(x) = \dfrac{x+1}{x+2} \qquad g(x) = 3x \qquad g \circ f = ? \qquad f \circ g = ?$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 3 \cdot \frac{x+1}{x+2} = \frac{3x+3}{x+2}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = \frac{3x+1}{3x+2}$$

ESERCIZI (Risposte a pag. 28) - Considera le funzioni $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad g(x) = x + 1 \quad h(x) = 2x \quad q(x) = x^2$.

1) $(f \circ g)(x) = ?$ 2) $(g \circ f)(x) = ?$ 3) $(f \circ h)(x) = ?$ 4) $(h \circ f)(x) = ?$ 5) $h(q(x)) = ?$

6) $q(h(x)) = ?$ 7) $g(g(x)) = g^2(x)$? Osserva lo "pseudo-esponente": g^2 abbrevia $g \circ g$ 8) $(g(x))^2$? 9) $f(f(x)) = f^2(x)$?

13. FUNZIONI CRESCENTI O DECRESCENTI (= MONOTÒNE) SU DI UN INTERVALLO

Sia f una funzione reale di variabile reale (cioè: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$); indichiamone il dominio con D.
Sia poi I un intervallo, incluso nel dominio della funzione: $\mathrm{I}\subseteq\mathrm{D}$.

Si pongono allora le seguenti definizioni:

$$f \text{ STRETTAMENTE CRESCENTE su } \mathrm{I} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \left(\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I},\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\right)$$

$$f \text{ STRETTAMENTE DECRESCENTE su } \mathrm{I} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \left(\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I},\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\right)$$

$$f \text{ CRESCENTE IN SENSO LATO (= non decrescente) su } \mathrm{I} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \left(\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I},\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)\right)$$

$$f \text{ DECRESCENTE IN SENSO LATO (= non crescente) su } \mathrm{I} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \left(\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I},\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)\right)$$

f strettamente crescente	f strettamente decrescente	f crescente in senso lato	f decrescente in senso lato

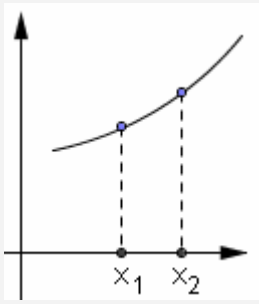
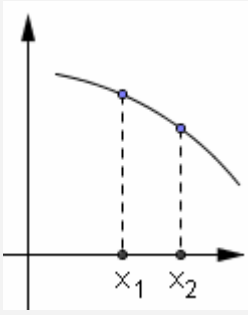
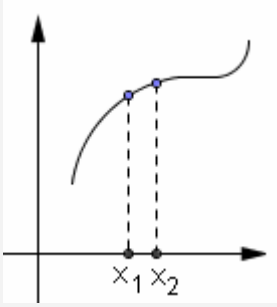
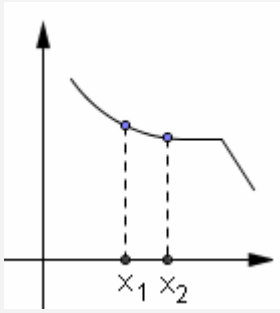

			

grafico saliente	grafico discendente	grafico saliente con eventuali tratti orizzontali	grafico discendente con eventuali tratti orizzontali

OSSERVAZIONI

a) Se una funzione è strettamente crescente (risp.: decrescente) in un intervallo, allora è anche corretto (seppure meno preciso) affermare che, su quell'intervallo, essa è crescente (risp.: decrescente) *in senso lato*.

b) Le funzioni aventi carattere crescente o decrescente su di un intervallo si dicono "**monotòne**" (l'accento si può scrivere o non scrivere) su quell'intervallo.

c) **Una funzione, che sia strettamente monotona su di un intervallo, è certamente iniettiva (e, quindi, invertibile) su quell'intervallo**
(= valori della variabile indipendente distinti hanno sempre immagini distinte).

Si può anche dire: condizione sufficiente (sebbene non necessaria) affinché una funzione sia iniettiva su di un intervallo, è che sia ivi monotona in senso stretto.

ESERCIZI (Risposte a pag. 28)
Ciascuna delle funzioni seguenti è monotona su tutto l'insieme specificato a fianco (oppure, se tale insieme non è specificato, su tutto il suo dominio). Stabilisci se è "strettamente crescente", "strettamente decrescente", "crescente in senso lato", o "decrescente in senso lato".

1) $y=\sqrt{1-x^3}$ 2) $y=\cos x$ *su* $[0,\pi/2]$ 3) $y=|x|-|x-1|$ 4) $y=1-e^{2x}$ 5) $y=\ln(4-3x)$ 6) $y=x^{-\frac{3}{4}}$

14. FUNZIONI PARI O DISPARI

Sia f una funzione reale di variabile reale (cioè: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$); indichiamone il dominio con D.
Si pongono allora le seguenti definizioni:

$$f \text{ è una funzione PARI} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathrm{D},\ f(-x) = f(x)$$

$$f \text{ è una funzione DISPARI} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathrm{D},\ f(-x) = -f(x)$$

Una funzione assegnata potrà essere, a seconda dei casi: pari, o dispari, oppure ancora … né pari, né dispari.

ESEMPI:

- $y = f(x) = x^3 - 5x \quad D = \mathbb{R} \quad \boxed{f(-x) =} (-x)^3 - 5(-x) = -x^3 + 5x = -\left(x^3 - 5x\right) = \boxed{-f(x)} \rightarrow f$ *è* $\boxed{DISPARI}$
- $y = f(x) = |x| \quad D = \mathbb{R} \quad \boxed{f(-x) =} |-x| = |x| = \boxed{f(x)} \rightarrow f$ *è* $\boxed{PARI}$
- $y = f(x) = 2^x \quad D = \mathbb{R}$

  $\boxed{f(-x) =} 2^{-x}$ *che è* $\boxed{\text{diverso sia da } f(x) \text{ che da } -f(x)} \rightarrow f$ *non è* $\boxed{NE'\ PARI,\ NE'\ DISPARI}$

Esempi notevoli di funzioni PARI sono:

- $y = x^{2k}$, *con* $k \in \mathbb{Z}$ *ossia le potenze con esponente intero relativo PARI*
- $y = |x|$
- $y = \cos x$

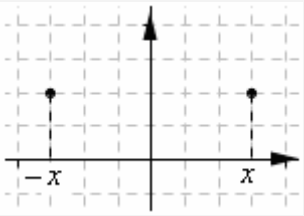
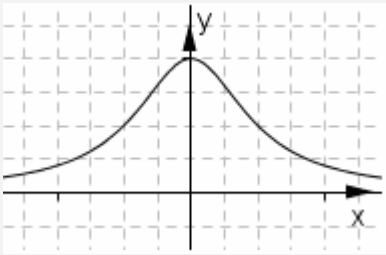
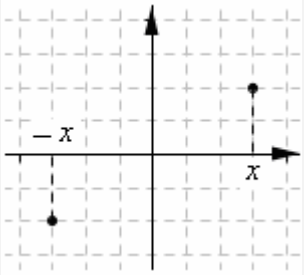
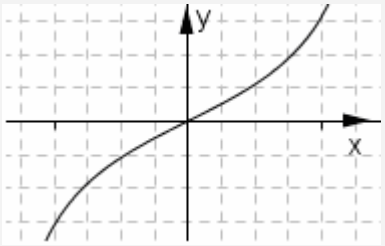
E' evidente poi che una somma, una differenza, o più in generale, una combinazione lineare, di funzioni pari, è ancora una funzione pari.

Esempi notevoli di funzioni DISPARI sono:

- $y = x^{2k+1}$, *con* $k \in \mathbb{Z}$ *ossia le potenze con esponente intero relativo DISPARI*
- $y = \sqrt[2k+1]{x}$, *con* $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ *ossia le radici con indice dispari*
- $y = \sin x$

E' evidente poi che una somma, una differenza, o più in generale, una combinazione lineare, di funzioni dispari, è ancora una funzione dispari.

Invece per una **radice con indice pari** $\boldsymbol{y = \sqrt[2k]{x}}$ **non ha senso neppure chiedersi se sia pari o se sia dispari**, dato che comunque, non potendo essere $x < 0$, non è possibile assegnare a x valori fra loro opposti. Quindi **di una radice con esponente pari diremo che è una funzione "né pari, né dispari"**.

Poiché se una funzione è **PARI**, allora a valori opposti di x corrisponde sempre LO STESSO valore di y, se una funzione è pari allora il suo **grafico** risulta **simmetrico rispetto all'asse verticale**; e viceversa.		
Poiché se una funzione è **DISPARI**, allora a valori opposti di x corrispondono sempre VALORI OPPOSTI di y, se una funzione è dispari allora il suo **grafico** risulta **simmetrico rispetto all'origine**; e viceversa.		

Ribadiamo che, **se il dominio di una funzione NON è simmetrico rispetto all'ascissa 0, allora evidentemente è già *escluso a priori* che la funzione possa essere pari, o dispari**.

Abbiamo già puntualizzato questo in relazione alle funzioni della forma $y = \sqrt[2k]{x}$.

Per fare ora un altro esempio, prendiamo la funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$.

Essa ha come dominio $\mathbb{R} - \{1, 2\}$; bene, poiché tale dominio non presenta simmetria rispetto all'ascissa 0, *non ha senso* chiedersi se per caso la funzione sia pari, o sia dispari: essa certamente non è **né pari, né dispari**.

ESERCIZI (Risposte a pag. 28)

Per ciascuna delle seguenti funzioni, stabilisci se è pari, o dispari, oppure né pari né dispari:

1) $y = x^2 + 2\cos x$ 2) $y = 2x^3 - 4x^5$ 3) $y = x + |x|$ 4) $y = e^{|x|-1}$ 5) $y = \sin^2 x$ 6) $y = \cos^3 x$ 7) $y = \sqrt{|x|}$

8) $y = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$ 9) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ 10) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4x}$ 11) $y = |\ln x|$ 12) $y = \ln\left(|x| - x^2\right)$ 13) $y = \sin x + \cos x$

15. INVERSIONE DI UNA FUNZIONE NUMERICA

Consideriamo la funzione $y = x^3 + 1 = f(x)$.

E' possibile ora, se si sceglie un valore di *y*, risalire al valore di *x* che ha generato quell' *y* ? Proviamoci.

$$y = x^3 + 1$$
$$x^3 + 1 = y$$
$$x^3 = y - 1$$
$$x = \sqrt[3]{y-1}$$

Ecco fatto! La legge $x = \sqrt[3]{y-1}$ è chiamata "**funzione inversa**" della $y = x^3 + 1$ e indicata col simbolo f^{-1} .

Questa legge, questa "funzione inversa", permette di "tornare indietro":
a partire da *y*, si può risalire a quella che era la sua controimmagine *x* nella funzione diretta.

Dunque:

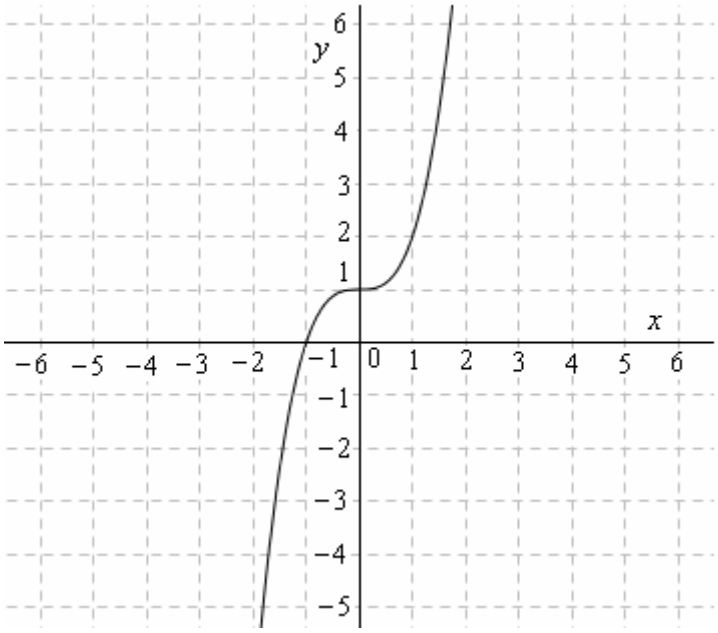
$$y = x^3 + 1 = f(x)$$
$$x = \sqrt[3]{y-1} = f^{-1}(y) \quad \textit{funzione inversa della } f$$

Supponiamo ora di voler *rappresentare la funzione inversa appena ricavata, su di un riferimento cartesiano*.

Tutto sommato, la rappresentazione *ce l'abbiamo già*, se abbiamo tracciato il grafico della funzione diretta!

Sì, perché se noi anziché guardare il grafico dal solito punto di vista, ruotiamo il foglio di 90° in senso antiorario, avremo la *y* in orizzontale e la *x* in verticale, quindi potremo seguire, al variare di *y*, come varia *x*, col solo fastidio che, contrariamente alle nostre abitudini, la variabile indipendente (che qui è *y*) assume valori crescenti allorquando ci spostiamo con lo sguardo verso *sinistra* e non verso *destra*.

Se guardo da qui, vedo sostanzialmente il grafico della funzione inversa $x = \sqrt[3]{y-1}$ col solo inconveniente che la variabile indipendente y cresce quando muovo lo sguardo nel verso opposto a quello al quale sono abituato.



Se guardo DA QUI, vedo normalmente la funzione diretta $y = x^3 + 1$

D'altra parte, potremmo anche decidere di considerare la funzione inversa come funzione "a sé stante", svincolata dalla funzione "diretta" dalla quale eravamo partiti.
In questo caso, poiché la consuetudine è di indicare la variabile indipendente col simbolo *x* e la dipendente con *y*, procederemo ad uno **scambio di variabili**.

Vediamo di spiegarci meglio. Nel nostro esempio,
eravamo partiti dalla funzione diretta $y = x^3 + 1 = f(x)$ e approdati alla funzione inversa $x = \sqrt[3]{y-1} = f^{-1}(y)$.
Bene! La f^{-1} è dunque quella "macchinetta" che, quando "ingoia" un numero,
poi "sputa fuori" il numero ottenuto sottraendo 1 al numero di partenza ed estraendo una radice cubica.
Se ora, anziché indicare il numero di partenza con *y* e quello di arrivo con *x*,
indichiamo il numero di partenza con *x* e quello di arrivo con *y*, e scriviamo dunque $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$,
la macchinetta resta sempre la stessa,
la legge che fa passare dalla variabile indipendente alla dipendente non cambia affatto!

In una funzione, quello che importa è il LEGAME
fra la variabile indipendente e la variabile dipendente,
non hanno importanza i NOMI che si riservano alle due variabili!

Ad esempio, le uguaglianze

$$x = \sqrt[3]{y-1}; \quad y = \sqrt[3]{x-1}; \quad z = \sqrt[3]{t-1}$$

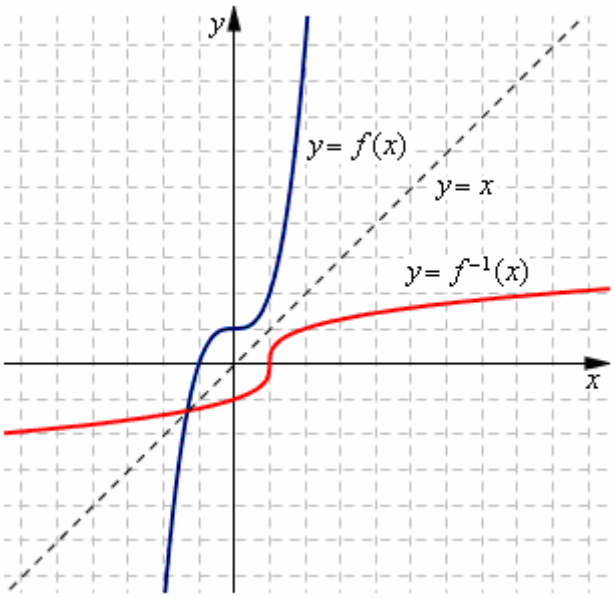
ecc. ecc. ...

definiscono TUTTE LA STESSA FUNZIONE !!!

Pertanto, quando noi partiamo dall'uguaglianza $y = f(x)$ per "invertirla",
isolando x al primo membro e ricavando così l'equazione della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$,
se lo riteniamo opportuno (a volte la convenienza c'è, altre volte no),
possiamo scambiare i nomi delle due variabili
scrivendo la stessa funzione inversa sotto la forma $y = f^{-1}(x)$.

Se la funzione inversa f^{-1} è stata scritta sotto la forma $y = f^{-1}(x)$, allora,
qualora noi andiamo a rappresentarla sullo stesso riferimento cartesiano
nel quale avevamo tracciato il grafico della funzione diretta $y = f(x)$,
potremo notare una cosa interessante e curiosa:

I due grafici, quello della funzione diretta f
e quello dell'inversa f^{-1} "scritta a variabili scambiate",
sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante!!!



Ciò è dovuto al fatto che un certo punto (a,b) appartiene al grafico della $y = f^{-1}(x)$
se e solo se la coppia (a,b) è tale che $b = f^{-1}(a)$;
ma ciò avviene se e solo se $a = f(b)$ e perciò se e solo se il punto (b,a) appartiene al grafico della $y = f(x)$.

Pertanto i singoli punti della curva grafico di $y = f^{-1}(x)$ si possono ottenere
partendo da ciascun punto del grafico della $y = f(x)$, e scambiandone le coordinate;
il che equivale, come sappiamo, a simmetrizzare quel punto rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

Naturalmente, UNA FUNZIONE PUÒ ESSERE INVERTITA SOLO SE È INIETTIVA
(= a valori diversi di x, corrispondono sempre valori diversi di y =
= non c'è nessun valore di y che abbia più di una controimmagine)

IMPORTANTE: una funzione *numerica* è iniettiva se e solo se,
rappresentandola su di un riferimento cartesiano,
si osserva che non c'è nessuna retta parallela all'asse delle x,
che intersechi il grafico in più di un punto).

Spesso, una funzione $f(x)$ non è iniettiva considerandola su tutto il suo dominio, ma è "iniettiva su di un intervallo"; allora, si finisce per invertirla soltanto su tale intervallo.
ESEMPIO:

$y = f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ non è, evidentemente, iniettiva sul suo dominio $\mathbb{R}$; ma lo è su $[0, +\infty)$.

Si può perciò invertire su $[0, +\infty)$ ottenendo:

$$y = \frac{1}{1+x^2}\ (x \geq 0); \quad 1+x^2 = \frac{1}{y}; \quad x^2 = \frac{1}{y} - 1; \quad x^2 = \frac{1-y}{y}; \quad x = \sqrt{\frac{1-y}{y}}$$

Giova tener presente, a proposito di questo discorso,
che se una funzione è strettamente monotona (= strettamente crescente, oppure strettamente decrescente) su tutto un intervallo, allora è certamente iniettiva (e quindi invertibile) su quell'intervallo.

Componendo una funzione f con la sua inversa f^{-1}, si ottiene la cosiddetta "funzione identica" $I(x) = x$.

ESERCIZI (risposte a pag. 28)

I) Per ciascuna delle funzioni seguenti:
   a) ricava l'espressione della funzione inversa
   b) scambia i nomi delle variabili
   c) rappresenta f ed f^{-1} su di uno stesso riferimento cartesiano, per constatare la simmetria delle due curve rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante

1) $y = 2x - 3$ 2) $y = x^2$ *su* $[0, +\infty)$ 3) $y = x^2$ *su* $(-\infty, 0]$ 4) $y = x^2 - 2x$ *su* $[1, +\infty)$ 5) $y = 4 - x$

6) $y = x^5 - 5$ 7) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ 8) $y = x^2 - 2$; *su quale intervallo è invertibile?* 9) $y = x^2 - 4x + 3$; *su quale intervallo è invertibile?*

II) Verifica, per ciascuna delle seguenti coppie di funzioni (una inversa dell'altra), che componendole nei due ordini possibili si ottiene sempre la funzione identica $y = x$

10) $y = f(x) = 3x - 2,\ y = g(x) = \dfrac{x+2}{3}$ 11) $y = e^x,\ y = \ln x$ 12) $y = \dfrac{x}{x-2},\ y = \dfrac{2x}{x-1}$ 13) $y = \sin x,\ y = \arcsin x$

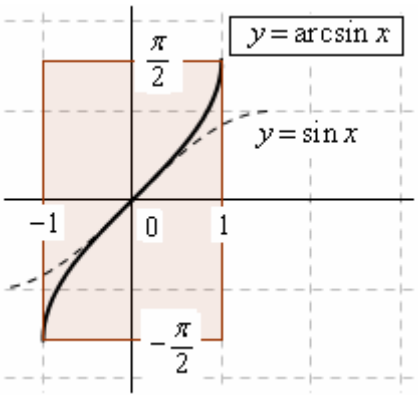
16. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE (= le inverse delle funzioni goniometriche)

La funzione $y = \operatorname{sen} x$ non è iniettiva se definita su tutto $\mathbb{R}$; tuttavia, diventa iniettiva qualora si restringa il suo dominio ad un opportuno intervallo.
Si conviene, al fine di invertire la funzione, di pensarla sull'intervallo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
(nel quale è crescente, quindi iniettiva, quindi invertibile).
La funzione ottenuta invertendo $y = \operatorname{sen} x$ su questo intervallo, viene indicata col simbolo arc sen .
Dunque:

$$y = \sin x, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ e\ y \in [-1, 1]$$

$$x = \arcsin y, \quad y \in [-1, 1]\ e\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

oppure, **scambiando le variabili**: $\boxed{\mathbf{y = \arcsin x},\ x \in [-1, 1]\ e\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$



Si legge "arco seno di x", ma il significato è "l'arco, fra quelli dell'intervallo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, il cui seno è uguale a x"

Qualche esempio: $\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$; $\arcsin 0 = 0$;

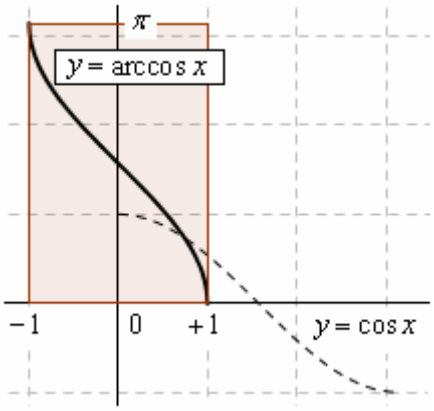
$\arcsin \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$; $\arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$; $\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$; $\arcsin 0{,}8 \simeq 0{,}927$ (*poco più di* 53°)

La funzione $y = \cos x$ non è iniettiva se definita su tutto $\mathbb{R}$;
ma lo diventa restringendone il dominio a un opportuno intervallo.
Si conviene, per l'inversione, di pensarla sull'intervallo $[0, \pi]$.
La funzione ottenuta invertendo $y = \cos x$ su questo intervallo
viene indicata col simbolo arc cos .
Dunque:

$$y = \cos x, \qquad x \in [0, \pi] \ e \ y \in [-1, 1]$$

$$x = \arccos y, \quad y \in [-1, 1] \ e \ x \in [0, \pi]$$

o, scambiando le variabili, $\boxed{\boldsymbol{y = \arccos x}, \ x \in [-1, 1] \ e \ y \in [0, \pi]}$



Esempi:

$$\arccos(-1) = \pi; \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi; \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2};$$

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}; \quad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}; \quad \arccos 1 = 0;$$

$$\arccos 0{,}3 \simeq 1{,}266 \ \ (1{,}266 \ \textit{radianti} = \textit{circa} \ 72{,}5°)$$

L' "arco coseno di x" è
"l'arco,
fra quelli dell'intervallo $[0, \pi]$,
il cui coseno è uguale a x"

Questo paragrafo conferma che i grafici di una funzione
e della rispettiva inversa a variabili scambiate
sono simmetrici l'uno dell'altro
rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante

E infine, per invertire la funzione $y = \operatorname{tg} x$, la si pensa ristretta all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, sul quale è iniettiva.

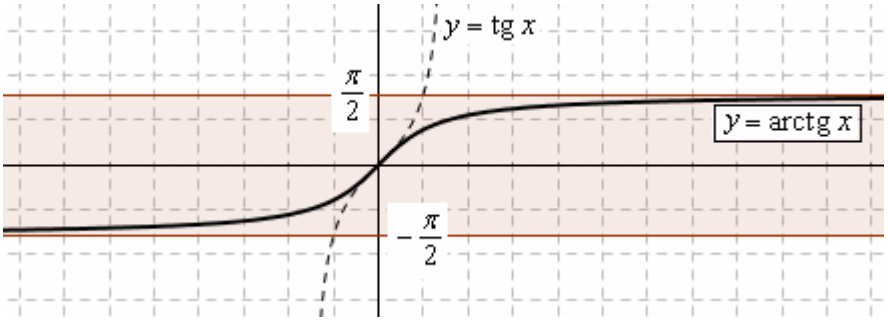
La funzione ottenuta invertendo $y = \operatorname{tg} x$ su questo intervallo "standard", si indica col simbolo arctg (o arctan).

$$y = \operatorname{tg} x, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ e \ y \in (-\infty, +\infty)$$

$$x = \operatorname{arctg} y, \quad y \in (-\infty, +\infty) \ e \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Come sempre, invertendo una funzione
dominio e codominio
si scambiano fra loro!

oppure,
a variabili scambiate: $\boxed{\boldsymbol{y = \operatorname{arctg} x}, \ x \in (-\infty, +\infty) \ e \ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$



L' "arco tangente di x" è
"l'arco,
fra quelli dell'intervallo
$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
la cui tangente è uguale a x"

Esempi:

$$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}; \quad \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}; \quad \operatorname{arc\,tg} 0 = 0;$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}; \quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}; \quad \operatorname{arctg} 10 \approx 1{,}47 \ \ (1{,}47 \ \textit{radianti} = \textit{poco più di} \ 84°)$$

La funzione "arco tangente" è definita su tutto $\mathbb{R}$,
e i suoi valori vanno da $-\pi/2$ (escluso) a $+\pi/2$ (escluso).

Si dice che le due rette $y = \pm\pi/2$,
alle quali il grafico si avvicina al tendere di x a $\pm\infty$,
sono gli "**asintoti orizzontali**" della funzione.

RISPOSTE

Esercizi di pag. 20 (dominio, codominio)

a) Il dominio è (s'intende che *k*, ove compare, sia un intero relativo arbitrario: $k \in \mathbb{Z}$):

1, 2, 3, 4) $D = \mathbb{R}$ 5) $x \neq 3 : D = \mathbb{R} - \{3\}$ 6) $x \neq 4 : D = \mathbb{R} - \{4\}$ 7) $x \geq 0 : D = [0, +\infty)$ 8) $D = \mathbb{R}$

9) $x \neq \pm 2 : D = \mathbb{R} - \{+2, -2\}$ 10) $x \neq -1 \wedge x \neq 2 : D = \mathbb{R} - \{-1, +2\}$ 11) $D = \mathbb{R}$ 12) $x \leq 4 : D = (-\infty, 4]$

13) $x \leq -3 \vee x \geq 3 :\ D = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ 14) $-2 < x \leq 0 \vee x > 2$ *ossia* $D = (-2, 0] \cup (2, +\infty)$

15) $x \neq \pm 2 : D = \mathbb{R} - \{+2, -2\}$ 16) $x \geq 2 \wedge x \neq 5, \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 5 \end{cases} : D = [2, +\infty) - \{5\} = [2, 5) \cup (5, +\infty)$

17) $x \leq 2 \vee x \geq 5 : D = (-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$ 18) $x \geq 2 \wedge x \geq 5$, *cioè* $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 5 \end{cases}$ *che porta a* $x \geq 5 : D = [5, +\infty)$

19) $x \geq 2 : D = [2, +\infty)$ 20) $x > 2 : D = (2, +\infty)$

21) $\dfrac{x-2}{x-5} \geq 0 \wedge x \neq 0$ *ossia* $x \leq 2 \vee x > 5 \wedge x \neq 0$: $D = (-\infty, 2] \cup (5, +\infty) - \{0\}$ *oppure* $D = (-\infty, 0) \cup (0, 2] \cup (5, +\infty)$

22) $D = \mathbb{R}$ 23) $x \geq 0$ 24) $x \neq 1$ 25) $D = \mathbb{R}$ 26) $x^2 - 4 > 0,\ x < -2 \vee x > 2$ 27) $\dfrac{x+3}{x} > 0,\ x < -3 \vee x > 0$

28) $\begin{cases} x+3>0 \\ x>0 \end{cases}$, *quindi* $x > 0$ 29) $\ln x > 0$, *perciò* $x > 1$ 30) $\begin{cases} 10-x>0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, *ossia* $0 \leq x < 10$

31) $\ln x - 2 > 0$, *perciò* $x > e^2$ 32) $\log_2 x \neq 0$, *cioè* $x \neq 1$ 33) $D = \mathbb{R}$ 34) $x - \dfrac{\pi}{4} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \ x \neq \dfrac{3}{4}\pi + k\pi$

35) $tg\,\dfrac{x}{3} \geq 0,\ \ 0 + k\pi \leq \dfrac{x}{3} < \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \ 3k\pi \leq x < \dfrac{3}{2}\pi + 3k\pi$ 36) $tg^2\, x \neq 1$, $tg\, x \neq \pm 1,\ \ x \neq k\dfrac{\pi}{4} \wedge x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

37) $\dfrac{1}{x} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi = \dfrac{(2k+1)\pi}{2},\ \ x \neq \dfrac{2}{(2k+1)\pi}$ *ossia* $x \neq \pm\dfrac{2}{\pi}, \pm\dfrac{2}{3\pi}, \pm\dfrac{2}{5\pi}, \pm\dfrac{2}{7\pi}, \ldots$

38) $\cos x \neq 0 : x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ 39) $\sin x > 0 : 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ 40) $x > 0$ (*esistenza del logaritmo*)

41) $\ln x \geq 0,\ x \geq 1$ 42) $\cos x \geq 0,\ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ 43) $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (*esistenza della tangente*)

44) $-1 \leq x - 1 \leq 1$, *ossia* $0 \leq x \leq 2$ 45) $-1 \leq \dfrac{1}{x-3} \leq 1$ *ossia* $x < 2 \vee x > 4$ 46) $x \neq -3$ 47) $x > 0 \wedge x \neq 7$

48) $\sin \ln x > 0,\ 2k\pi < \ln x < \pi + 2k\pi,\ e^{2k\pi} < x < e^{\pi + 2k\pi}$ 49) $x \geq 1 \wedge x \neq \ln 3$ 50) $x \neq 1$

51) $x < -5 \vee x \geq 4$ 52) $x \neq -5$ 53) $x < -5 \vee x \geq 4$ 54) $x > 0$ 55) $x > 0$ 56) $\ln x - 1 \geq 0,\ x \geq 1$

b) Il codominio, nei vari casi, è:

1) $\mathbb{R}$ 2) $\left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right]$ 3) $\mathbb{R}$ 4) $[2, +\infty)$ 5) $\mathbb{R} - \{3\}$ 6) $\mathbb{R} - \{4\}$ 7) $[0, +\infty)$ 8) $\mathbb{R}$

9) $\mathbb{R}$ *perché* $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$; $x^2 y - 4y = x\ (x \neq \pm 2)$ $x^2 y - x - 4y = 0$; $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 16y^2}}{2y}\ (y \neq 0)$;

ora, x è sempre ricavabile in quanto $\Delta \geq 0\ \forall x$ *e nel caso* $y = 0$ *si ottiene* $x = 0$

10) $\left[-\dfrac{1}{8}, 1\right)$ *perché* $y = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - x - 2}$; $x^2 y - xy - 2y = x^2 - x$ *con* $(x-2)(x+1) \neq 0$ *ossia* $x \neq 2,\ x \neq -1$;

$x^2 y - x^2 - xy + x - 2y = 0$; $x^2(y-1) - x(y-1) - 2y = 0$; $x = \dfrac{y - 1 \pm \sqrt{(y-1)^2 + 8y(y-1)}}{2(y-1)}\ (y \neq 1)$;

ora, $\Delta \geq 0$ *per* $y \leq -\dfrac{1}{8} \vee y \geq 1$ *mentre nel caso* $y = 1$ *l'equazione è impossibile* 11) $\left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$

22) *L'esponente assume tutti i valori reali, la y assume quindi tutti i valori reali* > 0. $C = (0, +\infty)$

23) *L'esponente assume tutti i valori reali* ≥ 0, *la y assume quindi tutti i valori reali* ≥ 1. $C = [1, +\infty)$

39) $y = \ln \sin x$; $e^y = \sin x$; $-1 \leq e^y \leq 1$; $e^y \leq 1$; $y \leq 0$. *Dunque codominio* $= C = (-\infty, 0]$

40) $y = \sin \ln x$; $-1 \leq y \leq 1$ *e tutti i valori dell'intervallo vengono assunti da y, al variare di x.* $C = [-1, 1]$

41) $\ln x$ *assume tutti i valori reali, in particolare tutti i valori* ≥ 0, *quindi altrettanto* $\sqrt{\ln x}$. $C = [0, +\infty)$

Esercizi di pag. 21 (composizione di funzioni)

1) e 2) $(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{x+1}$ $\quad (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = f(x) + 1 = \dfrac{1}{x} + 1$

3) e 4) $(f \circ h)(x) = f\left(h(x)\right) = \dfrac{1}{h(x)} = \dfrac{1}{2x}$ $\quad (h \circ f)(x) = h\left(f(x)\right) = 2f(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x}$

5) e 6) $h\left(q(x)\right) = 2 \cdot q(x) = 2x^2$ $\quad q\left(h(x)\right) = \left[h(x)\right]^2 = \left(2x\right)^2 = 4x^2$

7) e 8) $g\left(g(x)\right) = g^2(x) = ?$ *Qui il "2" è uno "PSEUDOesponente", ossia NON significa "elevamento al quadrato", bensì "applicazione successiva 2 volte"*

$g\left(g(x)\right) = g\left(x+1\right) = \left(x+1\right) + 1 = x + 2$

$\left(g(x)\right)^2$ *è invece il classico "elevamento al quadrato":* $\left(g(x)\right)^2 = \left(x+1\right)^2 = x^2 + 2x + 1$

9) $f\left(f(x)\right) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{1/x} = x$ *Perciò in questo caso la funzione* $f\left(f(x)\right) = f^2(x)$ *risulta essere la "funzione identica".*

Esercizi di pag. 22 (funzioni monotone)

1) strettamente decrescente 2) strettamente decrescente 3) crescente in senso lato
4) strettamente decrescente 5) strettamente decrescente 6) strettamente decrescente

Esercizi di pag. 23 (funzioni pari, dispari, né pari né dispari)

1) pari 2) dispari 3) né pari né dispari 4) pari 5) pari 6) pari 7) pari
8) dispari 9) pari 10) né pari né dispari 11) né pari né dispari 12) pari 13) né pari né dispari

Esercizi di pag. 26 (inversione di funzioni; la funzione inversa è già scritta "a variabili scambiate")

1) $y = \dfrac{x+3}{2}$ 2) $y = \sqrt{x}$ 3) $y = -\sqrt{x}$ 4) $y = 1 + \sqrt{1+x}$ 5) $y = 4 - x$ 6) $y = \sqrt[5]{x+5}$ 7) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$

8) $y = \sqrt{x+2}$ (invertendo su $[0, +\infty)$) oppure $y = -\sqrt{x+2}$ (invertendo su $(-\infty, 0]$)

9) $y = 2 + \sqrt{1+x}$ (invertendo su $[2, +\infty)$) oppure $y = 2 - \sqrt{1+x}$ (invertendo su $(-\infty, 2]$)

10)

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 2 = \cancel{3} \cdot \frac{x+2}{\cancel{3}} - 2 = x \cancel{+2} \cancel{-2} = x;$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+2}{3} = \frac{3x \cancel{-2} \cancel{+2}}{3} = \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = x$$

11)

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = e^{g(x)} = e^{\ln x} = x$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \ln f(x) = \ln e^x = x$$

12)

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)-2} = \frac{\dfrac{2x}{x-1}}{\dfrac{2x}{x-1} - 2} = \frac{\dfrac{2x}{x-1}}{\dfrac{\cancel{2x} \cancel{-2x} + 2}{x-1}} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{x-1}} \cdot \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{2}} = x$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{2f(x)}{f(x)-1} = \frac{2 \cdot \dfrac{x}{x-2}}{\dfrac{x}{x-2} - 1} = \frac{\dfrac{2x}{x-2}}{\dfrac{\cancel{x} \cancel{-x} + 2}{x-2}} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{x-2}} \cdot \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{2}} = x$$

13)

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sin(\arcsin x) = x$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \arcsin(\sin x) = x$$