Giancarlo Zilio

# *Chi ha paura della matematica?*

www.chihapauradellamatematica.org

## Volume 1

- Le basi dell'Aritmetica e dell'Algebra
- Il calcolo letterale
- Insiemi
- Percentuali
- Proporzioni
- Logica
- Equazioni e sistemi di 1° grado
- Geometria euclidea (prima parte)
- Numeri in base diversa da dieci
- Approssimazioni, errori, incertezze
- Riferimento cartesiano e grafici
- Relazioni e funzioni
- Vettori
- Velocità
- Problemi vari e "creativi"

www.chihapauradellamatematica.org
"Chi ha paura della matematica?"
Volume 1
Quest'opera è distribuita con Licenza
Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale.

# SIMBOLOGIA

| | |
|---|---|
| $>,\ \geq,\ <,\ \leq,\ \neq$ | "Maggiore di", "maggiore o uguale di", "minore di", "minore o uguale di", "diverso da" |
| $\equiv$ | "Coincidente con" |
| $\approx$ | "Uguale circa a", "pressappoco uguale a" |
| $\doteq$ | "Equivalente a" (fra superfici) |
| , . | Per separare, in un numero, la parte intera da quella decimale, si utilizzerà in genere la virgola, che sarà in certi casi sostituita dal punto (all'anglosassone): ciò avverrà quando verranno riportati materiali in Inglese, o nei capitoli di Goniometria e Linguaggio Pascal. |
| $\{\ \ \}$ | Una coppia di graffe può essere impiegata per indicare un insieme.<br>E l'ordine degli elementi in un insieme è irrilevante: $\{\text{Roma, Milano}\} = \{\text{Milano, Roma}\}$ |
| $(...,...)$ | Una coppia di tonde può essere utilizzata, oltre che nel simbolo di "intervallo" (vedi), anche per indicare una coppia *ordinata*, o più in generale una sequenza *ordinata*.<br>Ad esempio, la scrittura $(-5, 4)$ può rappresentare la coppia ordinata che ha per 1° elemento $-5$ e per 2° elemento $4$, ed è $(-5, 4) \neq (4, -5)$ |
| $\in$ | "Appartiene a", "è contenuto in". Si usa per un elemento rispetto a un insieme. Negazione: $\notin$ |
| $\subseteq$ | "E' incluso in", "è sottoinsieme di". Si usa per un insieme rispetto a un altro insieme. |
| $\subset$ | "E' incluso strettamente in". Questo simbolo compare di rado; serve per mettere in risalto che un dato sottoinsieme non coincide con l'insieme più grande, non lo riempie del tutto. |
| $\cap,\ \cup,\ -,\ \bar{}$ | Operazioni fra insiemi: intersezione, unione, differenza insiemistica, complementazione |
| $\wedge,\ \vee,\ \bar{}$ | Operazioni logiche: "et" (congiunzione), "vel" (disgiunzione), "non" (negazione) |
| $\exists,\ \exists!$ | "Esiste" (quantificatore esistenziale); con il punto esclamativo: "esiste uno e un solo" |
| $\forall$ | "Per ogni", "per qualsiasi", "qualunque sia" (quantificatore universale) |
| / o anche : | "Tale che, tali che" (gli stessi simboli, naturalmente, indicano anche frazione o divisione) |
| $\rightarrow,\ \leftrightarrow$ | Implicazione e biimplicazione "materiale" e, in senso più generale, abbreviazioni di<br>SE … ALLORA … oppure QUINDI, DI CONSEGUENZA ($\rightarrow$);<br>SE … ALLORA … E VICEVERSA ($\leftrightarrow$).<br>Ma possono anche indicare semplicemente "corrispondenza", "rimando", o "orientamento". |
| $\Rightarrow,\ \Leftrightarrow$ | Implicazione logica, doppia implicazione (o biimplicazione) logica. SE … ALLORA … ($\Rightarrow$),<br>SE … ALLORA … E VICEVERSA ($\Leftrightarrow$), *per qualsiasi valore delle lettere coinvolte*. |
| $\varnothing,\ \{\}$ | Entrambi i simboli indicano l'insieme vuoto, l'insieme senza elementi |
| $\mathbb{R}$ = insieme dei numeri "reali" | Comprende sia i numeri interi che quelli con la virgola (tanto i finiti quanto gli illimitati, periodici o non periodici), sia quelli positivi che quelli negativi (e anche, ovviamente, lo 0).<br>E' l'insieme dei numeri che sono rappresentabili su di una "number line", ossia su di una retta dotata di "origine", orientamento e unità di misura.<br>L'insieme dei numeri reali senza segno (="assoluti") si indica invece con $\mathbb{R}_a$. |
| $\mathbb{N}$ = insieme dei numeri "naturali" | I numeri "naturali" sono: 0, 1, 2, 3, 4, 5, … Lo stesso simbolo, ma asteriscato, è utilizzato per indicare il medesimo insieme, privato dello 0: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ |
| $\mathbb{Z}$ = insieme degli interi relativi | $\mathbb{Z} = \{ ..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ... \}$ |
| $\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri "razionali"<br>$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ = insieme dei numeri "irrazionali" | Dal latino "*ratio*" che significa "*rapporto, quoziente*", i numeri razionali sono i numeri frazionari o che, comunque, si possono portare sotto forma di frazione, intesa come "quoziente fra due numeri interi". Ad esempio, i numeri con la virgola finiti o illimitati *periodici* sono razionali, gli illimitati *non* periodici non lo sono (sono "irrazionali").<br>Si intende che il simbolo $\mathbb{Q}$ indichi i razionali *relativi* (sia positivi, che negativi);<br>il simbolo usato per indicare l'insieme dei razionali assoluti (=senza segno) è $\mathbb{Q}_a$. |
| $\mathbb{R}^*, \mathbb{N}^*, ...$ | L'asterisco * indica che dall'insieme va tolto lo 0. Es. $\mathbb{R}^* = \{\text{numeri reali non nulli}\}$ |
| $\infty$ | Infinito |
| $(a, b)\ [a, b]$<br>$[a, b)\ (a, b]$ | Intervalli. La parentesi tonda indica che quell'estremo è escluso, la quadra che è incluso.<br>Ad esempio, $[2, 5)$ indica tutti i numeri reali compresi fra 2 (incluso) e 5 (escluso).<br>$(-\infty, 0)$ è l'insieme dei numeri reali $< 0$ ("strettamente negativi", negativi in senso stretto)<br>$(-\infty, 0]$ è l'insieme dei numeri reali $\leq 0$ (negativi o nulli, negativi in senso lato)<br>$(0, +\infty)$ è l'insieme dei numeri reali $> 0$ ("strettamente positivi", positivi in senso stretto)<br>$[0, +\infty)$ è l'insieme dei numeri reali $\geq 0$ (positivi o nulli, positivi in senso lato)<br>$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ |
| $\times$ | Prodotto cartesiano di insiemi; anche per l'ordinaria moltiplicazione, al posto di "$\cdot$" |
| $\parallel\ \perp$ | "Parallela a"; "perpendicolare a" (fra rette) |

# *Chi ha paura della matematica?*

Matematica gioiosa e solidale

Se dai alle stampe un volume di
“Chi ha paura della matematica?”
sei moralmente tenuto
a compensare l’autore
attraverso
una piccola offerta in solidarietà
... anche direttamente a un povero per strada.

Questo progetto rientra infatti nella “filosofia” del cosiddetto
Careware o Charityware o Helpware:
visita il sito
www.chihapauradellamatematica.org
per i particolari.

*Buono studio!!!*



”Chi ha paura della matematica?” di G.Z.
è distribuito con Licenza
Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale

**Numeri e operazioni** pagg. 1-39
**Numeri relativi** 40-67
**Percentuali** 68-71
**Cenni sull'operazione di radice** 72-73
**Cenni di logica (parte 1)** 74-78
**Insiemi** 79-99
**Calcolo letterale: monomi e polinomi** 100-141
**Equazioni e problemi** 142-171
**Inversione di formule** 172-173
**Proporzioni e proporzionalita'** 174-189
**Problemi in piu' incognite - sistemi di equazioni** 190-213
**Teorema di Pitagora - aree - problemi geometrici di 1° grado** 214-219
**Scomposizione in fattori ( = fattorizzazione) di un polinomio** 220-243
**Frazioni algebriche** 244-269
**Geometria** 270-349
**Cenni di logica (parte 2)** 350-377
**Equazioni fratte e letterali** 378-399
**Sistemi (seconda parte)** 400-413
**Numeri in base diversa da dieci** 414-419
**Approssimazioni, errori, incertezze** 420-427
**Il riferimento cartesiano; le funzioni e il loro grafico** 428-467
**Relazioni e funzioni** 468-485
**Primo incontro coi vettori** 486-495
**Velocita'** 496-503
**Problemi vari e "creativi"** 504-515

## L'INDICE NEL DETTAGLIO

### NUMERI E OPERAZIONI

1. Numeri interi 1
2. Multipli e divisori; divisibilità; numeri primi 2, 3
3. Massimo Comun Divisore (M. C. D.) 4
4. minimo comune multiplo (m.c.m.) 5
5. Frazioni 6, 7
6. Numeri con la virgola 8, 9, 10, 11
7. Operazioni e loro proprietà 12, 13, 14
8. Le potenze:
   A) Definizione di "potenza" 15 B) Proprietà delle potenze 16, 17 C) Gli esponenti 1 e 0 18
9. Le priorità nello svolgimento delle operazioni e l'uso delle parentesi nelle espressioni 19
10. Esercizi
    A) Su divisibilità e numeri primi 20, 21, 22, 23
    B) Sulle frazioni 24, 25, 26, 27
    C) Sulle proprietà di operazioni e potenze 28
    D) Su operazioni, proprietà, parentesi 29, 30
    E) Riflessioni sugli errori più frequenti 31, 32
    F) Espressioni 33
11. Varie (algoritmo di Euclide, ecc.) 34, 35
12. Quesiti tratti da gare matematiche 36, 37, 38, 39

## NUMERI RELATIVI


1. I numeri relativi: cosa sono e a cosa servono 40
2. La “number line” 40, 41
3. Somma, differenza, questioni varie riguardanti i segni 42, 43, 44, 45
4. Prodotto di numeri relativi 46, 47
5. Il reciproco (o “inverso”) di un numero relativo; il quoziente di due numeri relativi 48
6. Potenze di numeri relativi 49
7. Potenze ad esponente negativo 50, 51
8. Notazione “esponenziale” o “scientifica” 52, 53
9. Esercizi
   54, 55, 56, 57, 58, 59
   60, 61 (espressioni varie)
   62, 63 (numeri indicati con lettere)
10. Numeri e operazioni in 50 domande 64, 65
11. Due righe di storia 66, 67


## PERCENTUALI


Fare una percentuale 68, 69

♫ *Matematica e Problemi della Realtà: percentuali* 70, 71


## CENNI SULL’OPERAZIONE DI RADICE


Che cos’è l’operazione di radice;
due identità fondamentali;
anticipazioni 72
Esercizi di base sui radicali 73


## CENNI DI LOGICA (PARTE 1)


1. Proposizioni e connettivi logici 74, 75
2. Proposizioni logicamente equivalenti 75, 76
3. … E l’implicazione? 76
4. Simboli logici di uso comune 76

Esercizi 77, 78


## INSIEMI


1. Che cos’è un “insieme” 79
2. Insiemi numerici rilevanti 80
3. Definizione per elencazione o per proprietà caratteristica 81
4. Insiemi unitari, insieme vuoto 82
5. Sottoinsiemi 82
6. Insieme delle parti 82
7. Diagrammi di Venn 83
8. Intersezione 84
9. Unione 85
10. Esercizi (sottoinsiemi, intersezione, unione) 86, 87
11. Differenza di due insiemi 88
12. Insieme universo, complementazione 88
13. Figure riassuntive 89
14. Proprietà delle operazioni insiemistiche 89
15. Insiemi infiniti 90, 91
16. Esercizi vari sugli insiemi 92, 93, 94, 95, 96

Risposte agli altri esercizi del capitolo 97, 98, 99

## CALCOLO LETTERALE: MONOMI E POLINOMI


1. Espressioni algebriche; significato delle lettere in Algebra 100
   Esercizi 101, 102, 103
2. Definizione di monomio, grado di un monomio 104
3. Operazioni con monomi 105, 106
4. Esercizi sui monomi 107, 108
5. Espressioni varie con monomi 109
6. Definizione di polinomio, suo grado 110
7. Operazioni con polinomi 110, 111, 112
8. Espressioni con esponenti letterali 113
9. Il quoziente di due polinomi
   A) Premessa: la "divisione intera" 114
   B) La divisione fra due polinomi 115
   C) Teorema del Resto, regola di Ruffini 116, 117
10. Espressioni varie con polinomi 118

11a. Esercizi (espressioni con polinomi) 118, 119. Verifiche di identità 119
11b. Esercizi (divisione di polinomi) 120
11c. Esercizi (teorema del Resto, regola di Ruffini) 121

12. Quadrato di un binomio 122, 123
13. Prodotto (a+b)(a-b) 124
14. Quadrato di un trinomio e, più in generale, di un polinomio 125
15. Cubo di un binomio 126
16. n-esima potenza di un binomio 127, 128, 129
17. Complementi sui prodotti notevoli 130, 131
    Ricapitolazione dei principali prodotti notevoli 131
18. Espressioni con prodotti notevoli; verifiche di identità 132 … 135
    Identità da verificare 136, 137
♫ *Matematica e Problemi della Realtà: prodotti notevoli* 138, 139
19. La congettura di Goldbach, la formula di Gauss, quadrati magici 140, 141


## EQUAZIONI E PROBLEMI


1. Esempi di problemi a una incognita 142 … 147
2. Problemi a una incognita: indicazioni generali 148
3. Il mondo delle equazioni è molto vario. Identità 149
4. Cosa è possibile fare in un'equazione? 150
5. Il concetto di "equazioni equivalenti" 151
6. I Principi di Equivalenza delle equazioni 152, 153
7. Esercizi sulle equazioni 154, 155, 156, 157
8. Una rassegna di problemi: 158 … 169
9. Quesiti tratti da gare matematiche 170
10. Due righe di storia 171


## INVERSIONE DI FORMULE


Cos'è una "formula"; inversione di una formula; esercizi 172, 173


## PROPORZIONI E PROPORZIONALITA'


1. Proporzioni 174, 175, 176, 177
2. Proporzionalità diretta e inversa 178, 179
   Problemi del "tre semplice" e del "tre composto" 180 … 183

♫ *Matematica e Problemi della Realtà: rapporti e proporzioni* 184, 185

3. I grafici della proporzionalità diretta e inversa 186, 187
4. Proporzionalità rispetto al quadrato e all'inverso del quadrato; esempi vari 188, 189

## PROBLEMI IN PIU' INCOGNITE - SISTEMI DI EQUAZIONI


1. I sistemi di equazioni e il metodo di "sostituzione" 190, 191
2. La risoluzione di un problema con più di una incognita: considerazioni generali 192
3. Altri esempi svolti (sostituzione) 192, 193
4. Sistemi a due incognite: il metodo di "riduzione" (o di "addizione e sottrazione") 194, 195
5. Sistemi con più di due incognite: metodo di sostituzione 196
6. Sistemi con più di due incognite: metodo di riduzione 197
7. Esercizi (sostituzione e riduzione) 198, 199
8. Il metodo del "confronto" 200
9. Determinanti 201
10. Metodo di Cramer 202, 203
11. Esercizi vari sui sistemi 204, 205
12. Problemi da risolvere con 2 o più incognite 206 … 210
13. Quesiti a risposta multipla su equazioni e sistemi 211
14. Problemi vari, a una o più incognite 212, 213


## TEOREMA DI PITAGORA IN BREVE; AREE DELLE SUPERFICI; PROBLEMI GEOMETRICI DI 1° GRADO


Il Teorema di Pitagora in breve, Aree e volumi in breve 214, 215, 216
Problemi geometrici di 1° grado 217, 218; Esercizi (problemi geometrici di 1° grado) 219


## SCOMPOSIZIONE IN FATTORI ( = FATTORIZZAZIONE) DI UN POLINOMIO


1. Riconoscimento di prodotti notevoli 220, 221
2. Raccoglimento a fattor comune 222, 223
3. Raccoglimenti parziali 224, 225
4. Scomposizione di un trinomio di secondo grado:
   A) speciale 226
   B) non speciale 227
   C, D) varianti 228
   Un unico procedimento per il trinomio "speciale" e il "non speciale"? 228
   Esercizi 229
   Il problema generale della fattorizzazione di un trinomio di 2° grado 229
5. Scomposizione di una differenza di quadrati non banale 230, 231
   Il "metodo del completamento del quadrato" 230
6. Scomposizione di una somma e differenza di due potenze di ugual grado 232, 233, 234, 235
7. Scomposizione in fattori col metodo di Ruffini 236, 237; 238 (esercizi)
8. Divisibilità; formule relative a una somma o differenza di due potenze di ugual grado 238, 239
9. Scomposizioni "a blocchi" 240
10. Scomposizioni in cui occorre raccogliere un polinomio 241
11. Esercizi vari sulla fattorizzazione, simulazioni di verifiche 242, 243


## FRAZIONI ALGEBRICHE


1. Semplificazione 244, 245
2. Moltiplicazione, divisione, potenza 246, 247
3. Polinomi opposti 248, 249
4. Somma algebrica 250, 251, 252, 253
5. Segno "meno" davanti a un polinomio 254
6. Polinomi opposti a denominatore 255
7. Le "condizioni di esistenza" 256, 257
8. Espressioni (esempi svolti) 258, 259, 260, 261
9. Esercizi sulle frazioni algebriche 262, 263, 264, 265
10. Simulazioni di verifiche 265
11. Identità con frazioni algebriche 266 … 269

## GEOMETRIA

Cap. 1: INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA

1.1 Concetti primitivi e definiti 270
1.2 Assiomi e teoremi 271
1.3 Angoli; congruenza; somma di segmenti e di angoli 272, 273, 274
1.4 Assiomi su uguaglianze, disuguaglianze, somme e differenze 275
1.5 Dimostriamo i primi teoremi 276
1.6 Aiuto per il ripasso 277

Cap. 2: I TRIANGOLI

2.1 Generalità 278
2.2 Il freeware GeoGebra 279, 280, 281
2.3 I "Criteri di Uguaglianza"; il triangolo isoscele:
1° Criterio 282
2° Criterio 283
Teoremi sul triangolo isoscele 284, 285
3° Criterio 286
2.4 Il Teorema dell'Angolo Esterno in forma debole 287
2.5 Disuguaglianze fra gli elementi di un triangolo 288, 289
2.6 Le "costruzioni con riga e compasso"; i tre "problemi classici" 290
Alcune semplici costruzioni geometriche 291, 292
2.7 Aiuto per il ripasso, esercizi 293

Cap. 3: PERPENDICOLARI E PARALLELE

3.1 Rette perpendicolari 294
3.2 Cenni di storia: Eudosso, Euclide, Archimede 295
3.3 Rette parallele 296, 297, 298, 299
3.4 Angoli dei triangoli e dei poligoni 300, 301
3.5 Cenni alle Geometrie non Euclidee 302, 303
3.6 Alcuni teoremi sul triangolo rettangolo 304, 305
3.7 Aiuto per il ripasso, esercizi 306, 307

Cap. 4: DISTANZE, LUOGHI GEOMETRICI, QUADRILATERI PARTICOLARI

4.1 Distanze e proiezioni 308
4.2 Luoghi geometrici 309, 310, 311
4.3 Parallelogrammi in generale 312, 313
4.4 Parallelogrammi particolari: rettangolo 314, rombo 315, quadrato 316
4.5 Trapezi 317
4.6 Testi dinamici in GeoGebra 318, 319
4.7 Luoghi in GeoGebra 319
4.8 Aiuto per il ripasso, esercizi 320, 321

Cap. 5: FASCIO DI PARALLELE, PUNTI NOTEVOLI

5.1 Fascio di rette parallele 322
5.2 Punti medi e parallele 323
5.3 Punti notevoli di un triangolo 324, 325
5.4 Aiuto per il ripasso, esercizi, il buon Talete 326, 327

GEOMETRIA: ESERCIZI

Cap. 2: 328, 329, 330, 331, 332, 333
Disuguaglianze: 334, 335
Cap. 3: 336, 337, 338, 339, 340, 341
Cap. 4: 342, 343, 344, 345
Cap. 5: 346, 347
Esercizi di ricapitolazione 348, 349

## CENNI DI LOGICA (PARTE 2)


5. Una tavola di verità anche per l'implicazione?
   Il processo alla "tavola delle controversie" 350, 351, 352, 353
6. Biimplicazione materiale 353
7. Nuove equivalenze logiche notevoli 354, 355
8. Tautologie e contraddizioni 356
9. Proposizioni "aperte" 357
10. Corrispondenze fra Logica e Insiemi 358, 359
11. Implicazione e biimplicazione "logica" 360, 361
12. Condizione sufficiente, necessaria, nec. e suff. (CS, CN, CNS); se, soltanto se, se e solo se (SSE).
    La Prima Legge delle Inverse 362, 363, 364, 365
13. Regole di inferenza 366, 367
14. Quantificatori 368, 369
15. Controllo validità con quantificatori 370, 371, 372
    Aristotele e i sillogismi 373, 374, 375
16. Risposte ai quesiti di Logica 376, 377


## EQUAZIONI FRATTE E LETTERALI


1. Equazioni fratte 378, 379
2. Equazioni letterali 380, 381, 382
   Esercizi sulle equazioni letterali 383
   Esercizi sui problemi letterali 384, 385
3. "Discussione" delle equazioni letterali 386, 387, 388
   Esercizi 389, 390; soluzioni 391, 392, 393
4. Equazioni letterali fratte 394, 395
   Esercizi 396, 397
   Altri esercizi: equazioni con denominatori letterali; problemi con discussione 398, 399


## SISTEMI (SECONDA PARTE)


1. Sistemi impossibili e indeterminati 400, 401
2. Non tante equazioni quante incognite 402, 403
3. La risoluzione grafica di un sistema lineare in due incognite 404, 405
4. Sistemi letterali 406, 407, 408, 409
5. Esercizi su: paragrafi 1 e 2 410; sistemi letterali 411, 412
   problemi che conducono a un sistema letterale 413


## NUMERI IN BASE DIVERSA DA DIECI


1. Modi alternativi di contare 414, 415
2. Trasformazione da base dieci a un'altra base 416
3. Ricapitolazione teorica; approfondimenti 417
4. Il sistema esadecimale ( = in base sedici) 417
5. Operazioni coi numeri in base diversa da dieci 418
6. Esercizi 419


## APPROSSIMAZIONI, ERRORI, INCERTEZZE


1. Perché, e come, approssimare 420, 421
2. L'errore "assoluto" nell'approssimazione 422
3. L'errore "relativo" nell'approssimazione 423
4. Errori e incertezze 423
5. L' "incertezza relativa" 423
6. La "propagazione" delle incertezze 424
7. Esercizi 425 e (risposte) 426
8. Ordine di grandezza 427

## RIFERIMENTO CARTESIANO; LE FUNZIONI E IL LORO GRAFICO


1. Il riferimento cartesiano 428, 429
2. Introduzione al concetto di funzione 430, 431
3. Il "dominio" di una funzione; precisazioni 431
4. Il grafico di una funzione 432, 433
5. Funzioni lineari: rette 434 … 438
6. Complementi sulla retta; distanza fra due punti, punto medio … ; due formule 439 … 448
7. Esercizi 449 … 453
8. Funzioni quadratiche: parabole 454, 455
9. Funzioni della proporzionalità inversa: iperboli 455
10. Risoluzione grafica di un'equazione o di un semplice sistema 456 … 459

♫ *Matematica e Problemi della Realtà: funzioni lineari* 460 … 467


## RELAZIONI E FUNZIONI


1. Prodotto cartesiano di due insiemi 468
2. Relazioni 468, 469, 470, 471
3. Predicati 472
4. Proprietà di una relazione interna 472, 473
5. Relazioni di equivalenza 474
6. Classi di equivalenza 474
7. Insieme quoziente 475
8. Partizione di un insieme 475
9. Relazioni d'ordine 476; esercizi 477
10. Ripasso del concetto di funzione 478
11. Una "funzione" non è altro che un caso particolare di relazione 478, 479
12. Terminologia sulle relazioni e sulle funzioni 480, 481, 482
13. Relazione inversa; corrispondenze biunivoche 482
14. Funzione reale di variabile reale 483
    Risposte agli esercizi 484
15. Esercizi sull'intero capitolo 485


## PRIMO INCONTRO COI VETTORI


1. Definizione di vettore 486
2. Somma, differenza, vettori componenti 486, 487
3. Grandezze scalari e grandezze vettoriali 488
4. Prodotto di un vettore per uno scalare 488
5. Versori, componenti cartesiane 488, 489
6. Prodotto scalare di due vettori 490
7. Prodotto vettoriale (o "esterno") 491
8. Prodotto "misto" 492
9. Riferimenti cartesiani in 3 dimensioni 493
10. Esercizi 494, 495


## VELOCITA'


La velocità 496 … 503


## PROBLEMI VARI E "CREATIVI"


"Matematica Senza Frontiere" 504
"Giochi di Archimede" 504 … 511
Problemi tratti dal "Progetto Polymath" 512, 513
Problemi tratti dal "Liber Abaci" di Fibonacci 513
Problemi tratti da "NRICH" (Cambridge) 514, 515




# NUMERI E OPERAZIONI

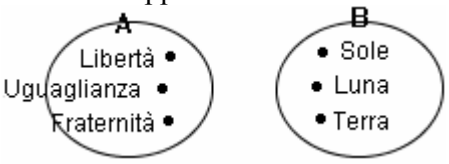
MA CHE COS'E' UN "NUMERO"?

Rispondere in modo esauriente a questa domanda sarebbe davvero impegnativo:
richiederebbe una trattazione ad alto livello, e un gran bel malloppo di pagine!
Accontentiamoci di dare solo qualche idea, senza pretendere di entrare nei particolari.

Ci occuperemo prima di tutto degli interi.

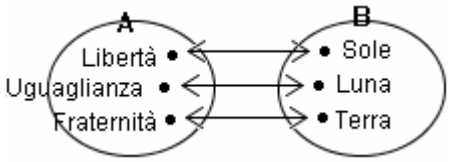
## 1. NUMERI INTERI

Consideriamo la coppia di insiemi sotto raffigurata:

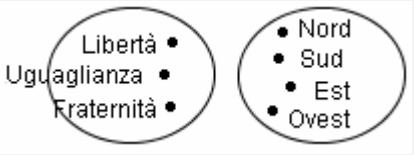



L'insieme A e l'insieme B **sono molto diversi** l'uno dall'altro **in quanto alla natura dei loro elementi**;
tuttavia, a ben guardare, **"qualcosa" in comune ce l'hanno**:
**possono** infatti **essere posti in "CORRISPONDENZA BIUNIVOCA"**,
**come l'insieme delle ASOLE e l'insieme dei BOTTONI di una stessa camicia**: ossia,
**ad OGNI elemento di A si può far corrispondere UNO E UN SOLO elemento di B, E VICEVERSA**.

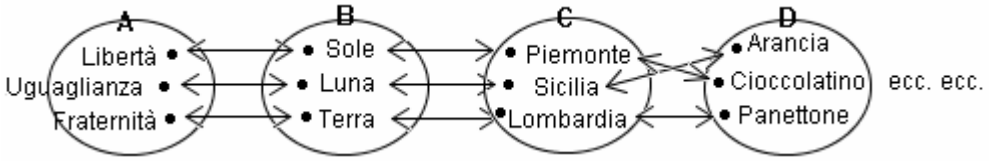
Ad esempio, possiamo associare le "asole"
ai "bottoni" secondo lo schema seguente:




**CONTROESEMPIO**
Invece NESSUNA
corrispondenza biunivoca
sarebbe possibile fra
QUESTI due insiemi ! →




E' evidente che **ci sono infiniti altri insiemi che hanno la proprietà**
**di poter essere posti in corrispondenza biunivoca con A o con B:**




ecc. ecc.



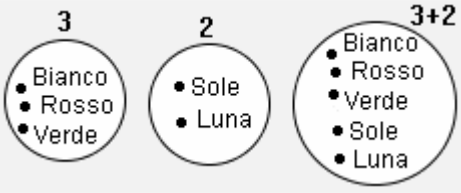

Bene!

♥ **Si dice "numero intero" quell'entità astratta, quel "quid", che è comune a tutti gli insiemi,**
**che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un insieme dato**
(**purché questo non sia infinito**: vedi l'interessante approfondimento a pagina 90).

Nel caso degli insiemi A, B, C, D, ecc., sopra considerati,
l' "entità astratta" che li accomuna è chiamata "il numero 3".

♥ Cosa si intende, ora, per "**somma**" di numeri interi?
"Somma" deve sempre richiamarci l'idea di "totale".
**Sia** dunque **X un insieme con un certo numero n di elementi; Y un altro insieme, con m elementi.**
**Supponiamo che X, Y siano "disgiunti"**
( = non ci sia nessun elemento che appartenga contemporaneamente ad entrambi).
Creiamo ora un nuovo insieme Z nel quale mettiamo sia gli elementi di X, sia anche gli elementi di Y.
Si dice che l'insieme Z è l' "unione" degli insiemi X, Y, e si scrive $Z = X \cup Y$ (leggi: "X unione Y").

**Si definisce "somma" degli interi n ed m, e si indica con n+m,**
**l'intero che è associato all'insieme unione $X \cup Y$ .**
Ad esempio, la "somma" $3+2$ è pensata come quel numero →
che è individuato dall'unione di una coppia di insiemi *disgiunti*,
il primo dei quali "rappresenti" il numero 3 e l'altro il numero 2.




♥ L'operazione di **moltiplicazione** fra interi è concepita come una "**somma ripetuta**":
**$4 \cdot 3 = 4+4+4$ (3 addendi, ciascuno uguale a 4)**

♥ **Sottrazione** e **divisione** vengono poi definite come le **inverse dell'addizione e della moltiplicazione**:
**$a-b=c$ se accade che $c+b=a$; $a:b=c$ se accade che $c \cdot b = a$**

## 2. MULTIPLI E DIVISORI; DIVISIBILITA'; NUMERI PRIMI

- **Cosa sono i "multipli" di un intero *x*? Sono i numeri: $x$, $2x$ $(=2\cdot x)$, $3x$, $4x$, ...**
  Ad esempio, i multipli di 5 sono: 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...
- **Cosa sono i "divisori" di un intero *x*?**
  **Sono quegli interi che sono contenuti un numero intero di volte in *x*;**
  in altre parole, **sono quegli interi *y* per i quali la divisione $x : y$ ha resto 0** (NOTA)
  Ad esempio, i divisori di 12 sono: 1, 2, 3, 4, 6 e 12 .
- **Cosa significa affermare che un intero *x* è "divisibile" per un altro intero *y*?**
  **Significa dire che la divisione $x : y$** (NOTA) **dà come resto 0**; insomma,
  che ***y* è contenuto un numero intero di volte in *x*, ossia** che ***x* è multiplo di *y*.**
- **Sono** quindi **del tutto EQUIVALENTI le espressioni verbali**:
  **"*x* è divisibile per *y*" ; "*y* è divisore di *x*" ; "*x* è multiplo di *y*".**
  **"ESSERE MULTIPLO DI" o "ESSERE DIVISIBILE PER", è la stessa cosa!**

NOTA
Questo discorso si riferisce, come è ovvio, alla "divisione intera" (pagg. 14 e 114), quella in cui dividendo e divisore sono interi, e si ottengono un quoziente intero e un resto, eventualmente nullo.

Valgono i seguenti **Criteri di Divisibilità**:

**CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 2**
**Un intero è divisibile per 2 se e solo se termina con cifra pari. I numeri pari sono 0, 2, 4, 6, eccetera (anche lo 0 è considerato pari: vedi la riflessione all'inizio della pag. seguente); i dispari sono 1, 3, 5, 7, ecc.**

**CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 3**
**Un intero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre è divisibile per 3**
Vedi gli esempi qui a destra.

$\boxed{520458}$
$5+2+0+4+5+8=\boxed{24}$
24 *è divisibile per* 3;
*quindi* 520458
*è divisibile per* 3

$\boxed{1357}$
$1+3+5+7=\boxed{16}$
16 *NON è divisibile per* 3;
*quindi* 1357
*NON è divisibile per* 3

**CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 4**
**Un intero è divisibile per 4 se e solo se il gruppo formato dalle ultime due cifre è 00, oppure è divisibile per 4**

**CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 5**
**Un intero è divisibile per 5 se e solo se termina con 0 o con 5**

**CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 6**
**Un intero è divisibile per 6 se e solo se è divisibile sia per 2 che per 3**

**CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 9**
**Un intero è divisibile per 9 se e solo se la somma delle sue cifre è divisibile per 9**

**CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 10**
**Un intero è divisibile per 10 se e solo se termina con 0**

**CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 25**
**Un intero è divisibile per 25 se e solo se termina con: 00, 25, 50 o 75**

**CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 11**
**Un intero è divisibile per 11 se e solo se, sommandone le cifre di posto dispari (la prima, la terza, …) poi sommandone le cifre di posto pari (la seconda, la quarta, …) e infine sottraendo i due numeri così ottenuti, si ottiene 0 o un multiplo di 11**

Esempi:

$\boxed{48257}$
$4+2+7=13$
$8+5=13$
$13-13=\boxed{0}$
*quindi* 48257
*è divisibile per* 11

$\boxed{9091929}$
$9+9+9+9=36$
$0+1+2=3$
$36-3=\boxed{33}$
33 *è multiplo di* 11, *quindi*
9091929 *è divisibile per* 11

$\boxed{1234}$
$1+3=4$
$2+4=6$
$6-4=\boxed{2}$
2 *NON è multiplo di* 11, *quindi*
1234 *NON è divisibile per* 11

**CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 7**
**Per stabilire se un intero è divisibile per 7, se ne sopprime l'ultima cifra in coda, la si raddoppia e si sottrae il risultato dal numero privato della "coda". Il numero dato è divisibile per 7 se e solo se il numero ottenuto dal procedimento (che è eventualmente "iterabile", cioè ripetibile) è 0 o un multiplo di 7.**

Esempi:

$\boxed{294}$ $29\not{4}-$
$8\ =$
$\boxed{21}$ *che è multiplo di* 7;
*quindi* 294 *è divisibile per* 7

$\boxed{2598}$ $259\not{8}-$
$16\ =$
$24\not{3}$
$6$
$\boxed{18}$ *No*, 2598 *NON è divisibile per* 7

♥ **La comunità matematica è concorde nel considerare anche lo "zero" (0) come un numero PARI.**

Questa scelta è opportuna per tutta una serie di motivi.
Fra i tanti, ne citiamo qui uno solo, di carattere "pratico".
In certi giorni, in determinate città, per limitare l'inquinamento atmosferico viene consentito di circolare solo alle vetture con "targhe dispari", in altri solo alle vetture con "targhe pari".
La finalità è di far sì che in quei giorni venga utilizzata soltanto la metà (circa) dei veicoli abitualmente in uso.
E' chiaro che considerare lo 0 "pari" è pienamente conforme alla logica e all'obiettivo, in questo contesto.

♥ **Si dice "numero primo" un intero, maggiore di 1, divisibile solo per sé stesso e per l'unità.**

L'elenco dei numeri primi inizia con: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, ...

Osserviamo che **il 2 è l'unico numero primo pari**: gli altri numeri primi, dopo il 2, sono ovviamente tutti dispari (ogni numero pari è divisibile per 2, quindi, se non si tratta proprio del 2, non può essere primo).

❑ **Perché mai il numero 1 non viene fatto rientrare fra i numeri primi?**

Non è conveniente accettare il numero 1 nell'insieme dei numeri primi, sebbene 1 sia un numero intero divisibile solo per sé stesso e per l'unità.

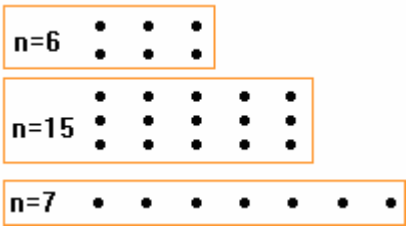
Una delle ragioni è che se noi considerassimo 1 come un numero primo, allora la scomposizione in fattori primi di qualsiasi intero conterrebbe sempre il banale fattore 1 … che barba!

Ma più che altro, si osserva che, escludendo 1 dall'insieme dei primi,
**la scomposizione di un qualsiasi numero intero non nullo in fattori primi è sempre unica**
(come si potrebbe dimostrare: **"Teorema Fondamentale dell'Aritmetica"**),
mentre se anche 1 venisse considerato primo, tale unicità cadrebbe, in quanto, ad esempio,
avremmo $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$, ma anche $50 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, ma anche $50 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, ecc. ecc.

❑ **Rappresentiamo un intero n con n puntini**:

**se n NON è primo** (la negazione di "primo" è "**composto**"),
il gruppo di puntini che rappresenta n può assumere una conformazione "**rettangolare**", con base e altezza contenenti più di un puntino;

**se n è primo, tale forma rettangolare non è realizzabile**
a meno di ridurre l'altezza, o la base, a un puntino solo.




❑ **Ma … la sequenza dei numeri primi va avanti all'infinito, oppure prima o poi si arresta?**

Il grande Euclide di Alessandria, intorno all'anno 300 a.C., lasciò nel libro XI della sua famosissima opera, chiamata "Elementi", la prima dimostrazione scritta del fatto che **i numeri primi sono infiniti**.
Ecco qui di seguito una rielaborazione - sostanzialmente fedele all'originale, ma rivista con mentalità e simbologia "moderne" - di questa dimostrazione.

Se, ragionando per assurdo, si avesse soltanto un numero finito di numeri primi, cosa accadrebbe?
Accadrebbe che ce ne sarebbe uno più grande di tutti gli altri.
Indichiamo allora con P questo numero, l'ultimo numero primo della sequenza, il maggiore fra tutti.

Consideriamo ora il numero (un numerone gigantesco, che chiameremo N) ottenibile moltiplicando fra loro tutti i numeri primi, dal più piccolo (il 2) fino al più grande (P):
$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot P$ .

Osserviamo che questo numeraccio N sarà quindi divisibile sia per 2, che per 3, che per 5, … , che per P.

Se aumentiamo N di una unità, otterremo il numero N+1, che ci riserverà però una grandissima sorpresa.
Infatti N+1:

- non può avere 2 come divisore perché è maggiore di 1 unità rispetto a N, che è divisibile per 2;
- non può avere 3 come divisore perché è maggiore di 1 unità rispetto a N, che è divisibile per 3;
- non può avere 5 come divisore perché è maggiore di 1 unità rispetto a N, che è divisibile per 5;
- …
- non può avere P come divisore perché è maggiore di 1 unità rispetto a N, che è divisibile per P.

Quindi N+1 non è divisibile per nessuno dei numeri primi da 2 fino a P e pertanto due sono i casi:

♪ o N+1 è un numero primo … ma allora non era vero che P fosse il più grande fra i numeri primi;

♫ oppure N+1 non è primo, ma allora ammette come divisore qualche numero primo *maggiore* di P e, di nuovo, non era vero che P fosse il più grande fra i numeri primi.

Dunque la supposizione che esista un numero primo maggiore di tutti gli altri …
non sta in piedi, ci porta a una *contraddizione*.
Non può pertanto esistere un numero primo che sia maggiore di tutti gli altri:
la sequenza dei numeri primi non può avere termine, i numeri primi sono infiniti.

## 3. MASSIMO COMUN DIVISORE (M.C.D.)

**Il "massimo comun divisore" fra due (o più) interi, è il più grande fra i loro divisori comuni.**

Es. Cerchiamo il massimo comun divisore fra 96 e 60.
Scriviamo i divisori di 96 e quelli di 60, evidenziando i divisori comuni:

*Divisori di* 96 : $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ 8 $\boxed{12}$ 16 24 32 48 96

*Divisori di* 60 : $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 5 $\boxed{6}$ 10 $\boxed{12}$ 15 20 30 60

I divisori comuni a 96 e 60 sono dunque: 1, 2, 3, 4, 6 e 12;
ma fra questi, il più grande è 12, quindi $\text{M.C.D.}(96, 60) = 12$

**Nella pratica, per cercare il M.C.D. il metodo più svelto - nei casi semplici - è di elencare mentalmente, a ritroso, i divisori di uno dei numeri dati (conviene scegliere il più piccolo) per arrestarsi non appena si incontra un numero che sia divisore anche dell'altro (o degli altri).**

Ad esempio:

- per determinare il M.C.D. fra 24 e 40, elenchiamo a ritroso i divisori di 24:
  24, $\underset{\substack{\text{la}\\ \text{metà}}}{12}$ , $\underset{\substack{\text{la}\\ \text{terza}\\ \text{parte}}}{8}$ *STOP!* 8 *è anche divisore di* 40*; quindi* $\text{M.C.D.}(24, 40) = 8$
- per determinare il M.C.D. fra 12, 30 e 64, elenchiamo a ritroso i divisori di 12:
  12, 6, 4, 3, 2 *STOP!* 2 *è anche divisore di* 30 *e* 64*; quindi* $\text{M.C.D.}(12, 30, 64) = 2$

**C'è anche una regola meccanica**
per cercare il M.C.D.:
**basta scomporre i numeri dati in fattori primi, poi prendere soltanto i fattori comuni, ciascuno una sola volta e con l'esponente più basso.**
La regola è valida anche se i numeri sono più di due.
Esempi:

$\text{M.C.D.}(60, 96) = ?$

$60 = \boxed{2^2} \cdot \boxed{3} \cdot 5$

$96 = 3 \cdot 2^5$

$\text{M.C.D.}(60, 96) =$

$= \boxed{2^2 \cdot 3} = 12$

$\text{M.C.D.}(32, 36, 40) = ?$

$32 = 2^5$

$36 = \boxed{2^2} \cdot 3^2$

$40 = 5 \cdot 2^3$

$\text{M.C.D.}(32, 36, 40) =$

$= \boxed{2^2} = 4$

Illustriamo con un esempio
lo **schema per la scomposizione di un intero in fattori primi**

| | |
|---|---|
| **42900** | 2 |
| 21450 | 2 |
| 10725 | 3 |
| 3575 | 5 |
| 715 | 5 |
| 143 | 11 |
| 13 | 13 |
| 1 | |

**42900 =**
**$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13$**

Il procedimento consiste nel domandarsi se il numero dato è divisibile per 2; in caso affermativo si scrive 2 sulla colonna di destra, mentre sulla colonna di sinistra si riporta il quoziente. Sul quoziente ottenuto si itera ( = ripete) il procedimento. Se non c'è divisibilità per 2, si prova per 3, per 5, per 7, … Ci si arresta quando, a forza di divisioni successive, sulla colonna di sinistra si ottiene 1.

Poiché qualsiasi intero è divisibile per 1, fra i divisori comuni a due o più interi, 1 compare senz'altro; se poi 1 è l'*unico* divisore comune fra gli interi considerati, quindi è anche il loro M.C.D., si dirà che gli interi in questione sono "*primi fra loro*".

Definizione - ♥ **Due interi sono detti "primi fra loro" se non ammettono divisori comuni, a parte il divisore "banale" 1; in altre parole, se il loro M.C.D. è 1.** Ad esempio, 15 e 32 sono primi fra loro.
Osserva che due numeri "primi fra loro" non devono per forza essere "primi"! Non c'entra!

**ESERCIZI** Calcola, col metodo che ti sembra più opportuno, il M.C.D. delle seguenti famiglie di interi.

**1)** (12, 16)
**2)** (75, 50)
**3)** (31, 62)
**4)** (28, 45)
**5)** (96, 64)
**6)** (216, 360)
**7)** (8, 10, 12, 15)
**8)** (8, 16, 24, 32)
**9)** (75, 90)
**10)** (18, 30, 54)
**11)** (144, 120)
**12)** (6, 9, 12)
**13)** (225, 3750)
**14)** (539, 308)
**15)** (1296, 1458)
**16)** (572, 364)
**17)** (675, 8704)
**18)** (961, 279)
**19)** (864, 1620, 2400)
**20)** (247, 299, 437)

**21)** I due numeri 637 e 1573 sono primi fra loro?

**22)** Trova il più piccolo numero non primo, che sia primo con 6.

**RISULTATI**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) 4 | 2) 25 | 3) 31 | 4) 1 |
| 5) 32 | 6) 72 | 7) 1 | 8) 8 |
| 9) 15 | 10) 6 | 11) 24 | 12) 3 |
| 13) 75 | 14) 77 | 15) 162 | 16) 52 |
| 17) 1 | 18) 31 | 19) 12 | 20) 1 |

21) No (sono entrambi divisibili per 13) 22) 25

## 4. MINIMO COMUNE MULTIPLO (m.c.m.)

**Il "minimo comune multiplo" fra due (o più) interi, è il più piccolo fra i loro multipli comuni.**

Es.

Cerchiamo il minimo comune multiplo fra 15 e 18.

Scriviamo i multipli di 15 e quelli di 18, evidenziando i multipli comuni:

*Multipli di* 15: 15 30 45 60 75 $\boxed{90}$ 105 120 135 150 165 $\boxed{180}$ 195 210 ...

*Multipli di* 18: 18 36 54 72 $\boxed{90}$ 108 126 144 162 $\boxed{180}$ 198 216 234 252 ...

I multipli comuni a 15 e 18 sono: 90, 180, 270, 360, …

E fra questi, il più piccolo è 90, quindi $\text{m.c.m.}(15, 18) = 90$

**Nella pratica, per cercare il m.c.m. - nei casi semplici - si elencano, mentalmente,**
**i successivi multipli di uno dei numeri dati (conviene scegliere il più grande!)**
**e ci si arresta non appena si incontra un numero che sia multiplo anche dell'altro (o degli altri)**.

Ad esempio:

- per determinare il m.c.m. fra 6 e 8, immaginiamo la sequenza dei multipli di 8:
  8, 16, 24 *STOP!* 24 *è anche multiplo di* 6*; quindi* $\text{m.c.m.}(6, 8) = 24$
- per determinare il m.c.m. fra 10, 12 e 15, immaginiamo la sequenza dei multipli di 15:
  15, 30, 45, 60 *STOP!* 60 *è anche multiplo di* 10 *e di* 12*; quindi* $\text{m.c.m.}(10, 12, 15) = 60$

**C'è anche una regola meccanica** per determinare il m.c.m.:
**basta scomporre i numeri dati in fattori primi, poi prendere**
**tutti i fattori trovati, comuni e non comuni, ciascuno una sola volta e con l'esponente più alto.**
La regola è valida anche se i numeri sono più di due. Ecco un paio di esempi:

$$\text{m.c.m.}(15,18) = ?$$
$$15 = 3 \cdot \boxed{5}$$
$$18 = \boxed{2} \cdot \boxed{3^2}$$
$$\text{m.c.m.}(15,18) = \boxed{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 90$$

$$\text{m.c.m.}(32, 36, 40) = ?$$
$$32 = \boxed{2^5}$$
$$36 = 2^2 \cdot \boxed{3^2}$$
$$40 = \boxed{5} \cdot 2^3$$
$$\text{m.c.m.}(32, 36, 40) = \boxed{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5} = 1440$$

**Se due interi sono "primi fra loro" ( = non hanno divisori comuni, a parte il divisore "banale" 1)**
**allora il loro m.c.m. è il prodotto dei numeri stessi**. Ad esempio, $\text{m.c.m.}(15, 32) = 15 \cdot 32 = 480$

**Una relazione notevole lega il M.C.D. e il m.c.m. di una coppia di interi a, b qualsiasi:**
**se li si moltiplica fra loro, il risultato di questa operazione è uguale al prodotto di a per b!**

$$\textbf{M.C.D.}(a, b) \cdot \textbf{m.c.m.}(a, b) = ab$$

♥ NOTA: nella scrittura ab, fra la lettera a e la lettera b è sottinteso il puntino di moltiplicazione: $ab = a \cdot b$. In effetti, tale puntino solitamente si tralascia nei casi in cui il numero che starebbe *a destra* del puntino è simboleggiato da una *lettera*: $2 \cdot x = 2x$, $x \cdot y = xy$; invece in $x \cdot 2$ o $2 \cdot 3$ NON sarebbe corretto ometterlo.

*Ad esempio, puoi verificare, per esercizio, che* $\text{M.C.D.}(4, 6) \cdot \text{m.c.m.}(4, 6) = 4 \cdot 6$

Di conseguenza, $\textbf{M.C.D.}(a, b) = \dfrac{ab}{\textbf{m.c.m.}(a, b)}$ e $\textbf{m.c.m.}(a, b) = \dfrac{ab}{\textbf{M.C.D.}(a, b)}$

**ESERCIZI** Calcola, col metodo che ti sembra più opportuno, il m.c.m. delle seguenti famiglie di interi.

**1)** (6, 9)
**2)** (11, 33)
**3)** (12, 16)
**4)** (75, 50)
**5)** (25, 20)
**6)** (72, 108)
**7)** (6, 8, 45)
**8)** (16, 24, 100)
**9)** (8, 10, 12, 15)
**10)** (8, 16, 24, 32)
**11)** (96, 64)
**12)** (216, 320)
**13)** (225, 3750)
**14)** (16, 20, 24)
**15)** (48, 120)
**16)** (375, 1250)

**17)** Se due numeri hanno per prodotto 2160 e per M.C.D. 12, qual è il loro m.c.m.?

**18)** Se Anna va a fare footing ogni 3 giorni e Bruno ogni 7, e quest'oggi si sono allenati entrambi, fra quanti giorni accadrà di nuovo che facciano allenamento tutti e due?

**RISULTATI**

1) 18 2) 33 3) 48 4) 150 5) 100 6) 216 7) 360 8) 1200
9) 120 10) 96 11) 192 12) 8640 13) 11250 14) 240 15) 240
16) 3750 17) 180 18) 21

# 5. FRAZIONI

*Per rappresentare quei casi, molto frequenti, in cui una data unità va suddivisa in più parti uguali, si utilizzano dei numeri di nuovo tipo: le frazioni.*
*Facciamo, senza pretese di completezza, alcune riflessioni su di esse.*

Ad esempio, la frazione $\frac{1}{4}$ descrive la fetta di torta che abbiamo ombreggiato qui a destra:




**$\frac{1}{4}$ esprime ciò che si ottiene suddividendo l'unità in 4 parti uguali, e prendendone una**.

**Col simbolo $\frac{3}{4}$ indichiamo un nuovo numero, che descrive le situazioni in cui una unità è stata suddivisa in 4 parti uguali, e si sono poi prese 3 di queste parti uguali**.




In generale, in una frazione $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ (per esigenze di spazio, scriveremo a volte $\mathbf{a/b}$)

- il numero **b** è il "**denominatore**" e dice **in quante parti uguali l'unità è stata suddivisa**,
- il numero **a** è il "**numeratore**" e dice **quante di queste parti sono state prese**.

**Data una frazione, se si moltiplicano per uno stesso intero sia il numeratore che il denominatore, si otterrà sempre una frazione uguale a quella di partenza (proprietà invariantiva)**.

Ad esempio, se prendo la frazione 3/4 e moltiplico per 2 sia "sopra" che "sotto",
ottengo quella frazione, 6/8,
che descrive il fatto di dividere l'unità in 8 parti (anziché 4),
prendendo poi 6 di quelle parti (anziché 3);
ogni parte è ora la metà rispetto alla suddivisione precedente,
ma in compenso, di queste "mezze fette", ne prendo il doppio,
quindi finisco per prendere la stessa porzione dell'unità che avevo preso prima.







Ma allora, **procedendo a ritroso, se una frazione è tale che si possano dividere per uno stesso intero sia il numeratore che il denominatore, tale "semplificazione" si potrà effettuare, perché la frazione così ottenuta sarà uguale a quella da cui si era partiti.**

Ad esempio, $\frac{6}{8} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{8}_{4}}$, $\frac{20}{30} = \frac{\cancel{20}^{2}}{\cancel{30}_{3}}$

Ha senso anche considerare frazioni col numeratore più grande del denominatore:
se compro una torta e ne lascio i 3/5 per la mamma,
e mia sorella compra un'altra torta uguale alla mia lasciandone i 4/5 alla mamma,
allora la mamma si troverà ad avere 7 fette, ciascuna uguale
alla quinta parte di una torta, ossia: si troverà ad avere 7/5 di torta.




**Un intero n equivale alla frazione $\mathbf{n/1}$**. Divido l'unità in una sola parte (quindi la lascio inalterata); poi prendo n oggetti uguali a quello ottenuto. Ho preso così n unità! $\mathbf{n/1 = n}$.

Quanto alla "**somma**" tra frazioni, essa dovrà, come coi numeri interi, avere il significato di "fare il totale".

Dunque, ad esempio, è ovvio che dovrà essere $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$

(divido l'unità in 7 parti uguali e ne prendo 2; poi divido un'altra unità in 7 parti uguali e ne prendo 4
– oppure, prendo altre 4 parti sempre dalla solita unità suddivisa in sette – ;
in totale, le parti che ho preso, a quale porzione di unità corrisponderanno?
Ovviamente, corrispondono a 6 "fette" ciascuna uguale alla settima parte dell'unità: 6 / 7 ).

Quindi, **quando le due frazioni hanno lo stesso denominatore, per sommarle è sufficiente conservare lo stesso denominatore, e prendere come numeratore la somma dei numeratori.**

**Se le frazioni da sommare *non* hanno lo stesso denominatore**, c'è qualche difficoltà in più, facilmente superabile.
Per meglio fissare le idee, ragioniamo su di un esempio.

Supponiamo di dover effettuare la somma $\frac{7}{4}+\frac{5}{6}$. Purtroppo le due frazioni non hanno lo stesso denominatore.

Se però riuscissimo a riscrivere ciascuna frazione, tramite la proprietà invariantiva, in modo da ottenere due nuove frazioni, rispettivamente equivalenti come valore alle due precedenti, ma aventi denominatori identici, allora potremmo effettuare la somma fra queste ultime, e sarebbe esattamente come sommare quelle di partenza.

Vogliamo, in definitiva, arrivare alla situazione $\frac{7}{4}+\frac{5}{6}=\frac{\cdots}{\Delta}+\frac{\cdots}{\Delta}$ dove "triangolino" dovrà essere un numero ricavato applicando a ciascuna frazione l'invariantiva, quindi moltiplicando il 4 per un certo intero, ma anche moltiplicando il 6 per un certo altro intero; perciò dovrà essere un multiplo comune del 4 e del 6.

Per comodità possiamo prendere $\Delta = 12 = \text{m.c.m.}(4,\ 6)$. E fare dunque così: $\frac{7}{4}+\frac{5}{6}=\frac{\cdots}{12}+\frac{\cdots}{12}$

Ora, quali due numeri dovremo mettere al posto dei puntini?

Ragioniamo. Se vogliamo trasformare la frazione $\frac{7}{4}$ in $\frac{\cdots}{12}$, utilizzando la proprietà invariantiva in modo che il valore della frazione non cambi, dovremo sostituire ai puntini quel numero che è ottenibile a partire dal 7 moltiplicandolo per lo stesso fattore che a partire dal 4 ci porta a ottenere il 12, ossia il 3 (osserviamo che 3 è il numero di volte in cui il 4 è contenuto nel 12, ossia è il risultato della divisione 12:4).

E allo stesso modo, se vogliamo trasformare la frazione $\frac{5}{6}$ in $\frac{\cdots}{12}$, al posto dei puntini dovremo metterci quel numero che è ottenibile a partire dal 5 moltiplicandolo per lo stesso fattore che a partire dal 6 ci porta a ottenere il 12, ossia il 2 (osserviamo che 2 è il numero di volte in cui il 6 è contenuto nel 12, ossia è il risultato della divisione 12:6).
Ricapitoliamo. Al posto dei puntini ci devono andare, rispettivamente, i risultati di $(12:4)\cdot 7$ e di $(12:6)\cdot 5$

e si giunge alla situazione $\boxed{\frac{7}{4}+\frac{5}{6}} = \frac{21}{12}+\frac{10}{12} = \boxed{\frac{\overset{\uparrow}{(12:4)\cdot 7}+\overset{\uparrow}{(12:6)\cdot 5}}{12}} = \frac{31}{12}$

Il secondo passaggio è stato cancellato perché nella pratica può essere saltato per brevità: quindi in definitiva

**per sommare due, o più, frazioni (o sottrarre due frazioni) si scrive una sola frazione, avente a denominatore il cosiddetto "minimo comun denominatore" (m. c. d.) ossia il m. c. m. dei denominatori iniziali e a numeratore la somma (la differenza) fra i numeri determinati "dividendo il denominatore comune per ogni denominatore, e moltiplicando il numero così ottenuto per «ciò che sta sopra»"**

La **moltiplicazione di una frazione per un intero** avrà ancora il significato di "somma ripetuta": $\frac{2}{3}\cdot 5=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$ $\left(\text{dunque è } \frac{2}{3}\cdot 5=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{1}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 1}\right)$

mentre per quanto riguarda la **moltiplicazione di una frazione per un'altra frazione**, osserviamo che ad es. $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}$ è come dire che prendo una porzione da $\frac{1}{4}$, la divido in $5$ parti uguali (ottenendo $\frac{1}{20}$), poi ne prendo $3$ (ecco $\frac{3}{20}$).

In generale, si vede che è "logico" fissare la **regola** $\boxed{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\cdot\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}}}$.

**La divisione fra due frazioni** (in particolare: fra un intero e una frazione, o viceversa), **si effettua moltiplicando la 1ª frazione per "la 2ª capovolta"**: es. $\frac{2}{5}:\frac{6}{7}=\frac{\cancel{2}}{5}\cdot\frac{7}{\cancel{6}_{3}}=\frac{7}{15}$. In situazioni semplici come $\frac{1}{3}:2=\frac{1}{3}:\frac{2}{1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$, il perché si capisce senza fatica: è ovvio che dividere per 2 una "fetta" da 1/3 significa ottenere una "fetta" da 1/6, dunque è corretto affermare che la divisione per $2 = 2/1$ equivalga alla moltiplicazione per 1/2.
Puoi ora cercare di riflettere per conto tuo sulle motivazioni della regola in altri casi meno elementari; vedi anche ⇨; noi comunque ci ritorneremo sopra più avanti, quando parleremo di "**reciproco**" in un contesto di "numeri relativi".

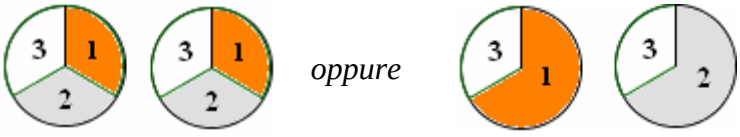
- **Un'ultima osservazione: una frazione $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ equivale sostanzialmente alla divisione $\mathbf{a:b}$.**

  Prendiamo infatti, ad esempio, la frazione $\frac{2}{3}$; essa equivale alla divisione $2:3$, perché

**A)** $\frac{2}{3}$ significa:
spezzo un'unità in 3 parti uguali,
poi prendo 2 di queste parti …



**B)** … ma la quantità così ottenuta è uguale a ciascuna di quelle che si avrebbero "dividendo 2 unità in 3 parti" (2:3), ossia prendendo 2 unità e ripartendo questo complesso in 3 parti uguali, con la finalità di "ripartire equamente la coppia di torte fra 3 persone".



## 6. NUMERI CON LA VIRGOLA

Tanto per fare un esempio, cosa significa $3,625$ ? Semplice: $\boxed{3,625 = 3+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}}$.

Insomma, **un numero con la virgola (si può usare la virgola, oppure, all'anglosassone, il "punto decimale") equivale ad una somma**: la somma fra un intero e una o più frazioni aventi a denominatore 10, 100, 1000, ecc.

Ma allora … **che dire di quei numeri che presentano, dopo la virgola, infinite cifre?** Ad esempio si ha

$$\underset{\substack{\textit{leggi:}\\ \textit{"1 virgola 3}\\ \textit{col 3 periodico"}}}{1,\overline{3}} = 1,333333... = 1+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\frac{3}{100000}+\frac{3}{1000000}+...$$

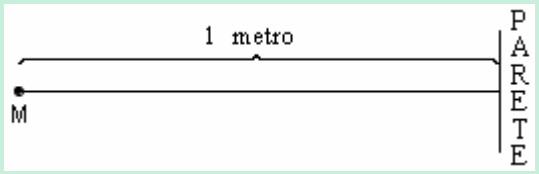
dove i puntini di sospensione indicano che la sequenza non termina, ma al contrario è illimitata;
e la situazione non è affatto banale, perché a questo punto **è spontaneo domandarsi:**
**ma avrà un senso una somma con infiniti addendi?**
**… e non dovrebbe, semmai, una tale somma, dare un risultato "infinito"?**

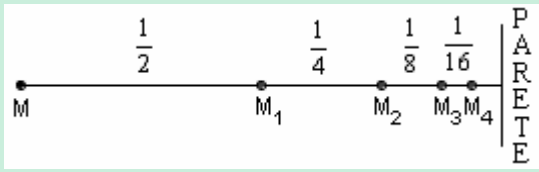
A riflettere su queste tematiche, ci aiuterà una marionetta programmata per muoversi in un modo molto speciale.

**Una diabolica marionetta puntiforme M si trova inizialmente alla distanza di 1 metro da una parete.**

Improvvisamente, comincia a muoversi a scatti, facendo **uno scatto al secondo**, e **ad ogni scatto percorrendo, in direzione della parete, uno spazio uguale alla META' della distanza che ancora la separa dalla parete.**

Primo scatto: 1/2 metro. Resta ancora 1/2 metro dalla parete.
Secondo scatto: metà del 1/2 metro restante, cioè 1/4 di metro. Resta ancora 1/4 di metro dalla parete.
Terzo scatto: metà di 1/4 di metro, cioè 1/8 di metro. E così via ...




**Dopo 10 "scatti",** la marionetta ha percorso un tragitto uguale a $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$ di metro;
quasi 1 metro, dunque (… e, in effetti, si trova ad appena 1/1024 di metro dalla parete).

**Dopo 1000 scatti** troveremo la marionetta straordinariamente vicina alla parete, parete che tuttavia non sarà ancora stata raggiunta, proprio perché ad ogni scatto la marionetta percorre **solo la metà** dello spazio che la separava dalla parete prima dell'istante dello scatto. In effetti dopo 1000 scatti la distanza percorsa dalla marionetta è uguale a metri

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{2^{1000}}=1-\frac{1}{2^{1000}}=1-\textit{una quantità davvero microscopica !!!}$$

Il movimento non ha una fine.
Però, **per esprimere il fatto che, fotografando la marionetta dopo un numero molto alto di "scatti", la si trova ad una distanza, dal punto di partenza, ESTREMAMENTE vicina a 1 metro (inferiore a 1 metro soltanto di "un soffio"), è del tutto ragionevole scrivere**

$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=1}$$

**La marionetta ci ha insegnato che UNA SOMMA DI INFINITI ADDENDI PUO' AVERE UN SENSO, E NON E' DETTA CHE ABBIA RISULTATO INFINITO!!!**

Ritornando ai nostri numeri con la virgola, **si può dimostrare che una somma come**

$$\mathbf{1+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\frac{3}{100000}+\frac{3}{1000000}+...=1,333333...}$$

**si comporta come la "somma della marionetta", cioè è "convergente"**
(= **tende ad un valore finito**, precisamente: ad un valore finito compreso fra 1 e 2)

**e non "divergente"**, come sarebbe invece ad esempio la somma $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...$

♥ **Queste riflessioni ci hanno fatto dunque comprendere il senso di una scrittura come 1,333333… , anche se tale scrittura sottintende una somma di infiniti addendi.**

**I numeri con la virgola, detti anche "decimali", si dividono in FINITI e ILLIMITATI;**
**fra questi ultimi distinguiamo i PERIODICI (semplici o misti) e gli ILLIMITATI NON PERIODICI.**

## ❑ Decimali FINITI

$$\boxed{3,625=}\ 3+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}=\frac{3000+600+20+5}{1000}=\boxed{\frac{3625}{1000}}=\frac{\cancel{3625}^{29}}{\cancel{1000}_{8}}=\frac{29}{8}$$

**Un decimale finito è trasformabile, molto facilmente, in frazione:**

**basta scrivere** $\left\langle \begin{array}{l} \textbf{a numeratore, il numero senza la virgola} \\ \textbf{a denominatore, 1 seguito da tanti 0 quante sono le cifre dopo la virgola} \end{array}\right.$

## ❑ Decimali PERIODICI

**Se un decimale ha, dopo la virgola, un gruppo di cifre che si ripete sempre uguale, illimitatamente, si dice che si tratta di un numero "periodico"**
**e *la cifra, o il gruppo di cifre, che si ripete*, prende il nome di "PERIODO".**
**Il periodo è indicato con una soprallineatura, o delimitato da parentesi: $1,\overline{3}$ oppure $1,(3)$.**

- **Se il periodo inizia subito dopo la virgola, si parla di periodico "SEMPLICE";**
- **se invece, dopo la virgola e prima del periodo, c'è un gruppo di cifre che *non* si ripete, si parla di periodico "MISTO" e *la cifra, o gruppo di cifre, che sta dopo la virgola e prima del periodo* prende il nome di "ANTIPERIODO".**

**Esempi:**

$1,\overline{3}=1,333333...$ è un periodico SEMPLICE. Il periodo è $3$.
$29,\overline{41}=29,414141...$ è un periodico SEMPLICE. Il periodo è $41$.
$29,4\overline{1}=29,411111...$ è un periodico MISTO. Il periodo è $1$ e l'antiperiodo è $4$.
$1,23\overline{456}=1,23456456456...$ è un periodico MISTO. Il periodo è $456$ e l'antiperiodo è $23$.

Un decimale periodico SEMPLICE è facilmente trasformabile in frazione.

Nell'esempio qui a fianco, abbiamo preso il numero $1,\overline{3}$, che abbiamo chiamato *x*.

Dunque $x=1,333333...=1,\overline{3}$.

Ora, se moltiplichiamo questo numero *x* per 10, otteniamo un nuovo numero, $10x$, che avrà la virgola spostata di un posto verso destra; tale nuovo numero sarà ancora periodico, con lo stesso periodo del numero iniziale!

$10x=13,33333...=13,\overline{3}$

Se a questo punto sottraiamo membro a membro le due uguaglianze precedenti (la $2^a$ meno la $1^a$: se a = b e c = d, evidentemente sarà anche c– a = d– b), visto che i due numeri in gioco hanno le stesse cifre dopo la virgola, per sottrazione le parti decimali si compenseranno e rimarrà soltanto la differenza fra le parti intere:

$10x-x=13,33333...-1,333333...$
$9x=13-1$ (*10 volte un numero meno lo stesso numero dà 9 volte quel numero*)
$9x=12$

$$\begin{array}{l} x=1,\overline{3} \\ \underline{10x=13,\overline{3}} \\ 10x-x=13,\overline{3}-1,\overline{3} \\ 9x=13-1 \\ 9x=12 \\ x=\dfrac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{9}_{3}} \end{array}$$

Quest'ultima è una semplice equazione ⇨; dividendo ambo i membri per 9 otteniamo

$\dfrac{\cancel{9}x}{\cancel{9}}=\dfrac{12}{9}$ cioè, semplificando, $x=\dfrac{4}{3}$.

Per controllare la correttezza del risultato ottenuto basta eseguire (vedi qui a destra →) la divisione $4:3$ verificando che il suo risultato è proprio $1,333333...$

$$\begin{array}{l|l} 4 & 3 \\ \underline{3} & 1,333... \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ 1... & \end{array}$$

ESERCIZIO

Prova a trasformare in frazione il periodico semplice $2,\overline{405}$ col metodo dell'equazione sopra illustrato.

Per quale potenza di 10 occorre moltiplicare, prima di sottrarre membro a membro?
Ragiona: noi vogliamo che dopo la moltiplicazione, quando si sottrarrà membro a membro, LA SOTTRAZIONE AVVENGA FRA DUE NUMERI CON LA STESSA PARTE DECIMALE, in modo che le due parti decimali uguali si elidano e rimanga una differenza fra interi.
Quindi la potenza di 10 per cui moltiplicare sarà in questo caso … (puoi cliccare qui ⇨ per la correzione)

Alla fine, effettua la verifica, ritornando, tramite divisione, dalla frazione ottenuta al numero decimale.

Con un decimale periodico MISTO si può fare pressappoco la stessa cosa; il procedimento però è più laborioso perché

a) occorre dapprima **moltiplicare per un'opportuna potenza di 10 allo scopo di ricondursi ad un periodico semplice** (nell'esempio qui a destra, moltiplichiamo per 100 perché desideriamo spostare la virgola a destra di 2 posti);

b) dopodiché si effettuerà **una seconda opportuna moltiplicazione in modo che il nuovo numero così ottenuto sia ancora periodico semplice, con lo stesso periodo del precedente** (nell'esempio, moltiplichiamo per 1000 perché desideriamo spostare la virgola a destra di altri 3 posti).

c) Soltanto a questo punto, avendo a disposizione **due numeri con la STESSA parte decimale,** si farà la **sottrazione membro a membro**.

$$x = 1,23\overline{456}$$

$$\text{a) } 100x = 123,\overline{456}$$

$$\text{b) } 100.000x = 123456,\overline{456}$$

$$\text{c) } 100.000x - 100x = 123456,\overline{456} - 123,\overline{456}$$

$$99900x = 123456 - 123$$

$$x = \frac{123456 - 123}{99900}$$

ESERCIZIO ( correzione ⇨) Prova a trasformare in frazione il periodico misto $1,2\overline{47}$ col metodo dell'equazione. Anche qui, alla fine, effettua la verifica, ritornando, tramite divisione, dalla frazione al decimale.

**REGOLA DI TRASFORMAZIONE**

Dal "metodo dell'equazione" è possibile ricavare una comoda regola pratica per la trasformazione in frazione dei numeri periodici, semplici o misti. La regola è la seguente:

**la "frazione generatrice" di un numero decimale periodico si può costruire scrivendo**

- **a numeratore, la differenza fra il numero scritto senza la virgola e senza il simbolo di periodo e il numero costituito da "tutte le cifre che stanno prima del periodo";**
- **a denominatore, tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti (se il periodico è misto) da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.**

Esempi: $3,\overline{21} = \frac{321-3}{99}$ $\quad 2,46\overline{8} = \frac{2468-246}{900}$ $\quad 7,20\overline{5} = \frac{7205-72}{990}$ $\quad 10,\overline{180} = \frac{10180-10}{999}$

## ESERCIZI SUI NUMERI CON LA VIRGOLA

**Determina la frazione generatrice dei seguenti decimali. E' richiesto, nel caso dei periodici, di procedere col metodo dell'equazione** (ovvio, puoi poi servirti anche della regola per controllare).

**Alla fine, un po' di pratica di calcolo! Esegui la divisione numeratore:denominatore per ritornare dalla frazione al decimale.**

NOTA
I **numeri con la virgola** sono anche detti "**decimali**".

NEI PAESI ANGLOSASSONI SI USA IL PUNTO AL POSTO DELLA VIRGOLA.

1) $1,25$ 2) $1,\overline{25}$ 3) $1,2\overline{5}$ 4) $0,00\overline{1}$ 5) $0,\overline{001}$ 6) $0,\overline{001}$ 7) $0,\overline{076923}$

8) $0,\overline{3}$ 9) $0,\overline{03}$ 10) $3,\overline{45}$ 11) $0,34\overline{5}$ 12) $1,\overline{142857}$ 13) $0,875$ 14) $0,01\overline{24}$

**RISULTATI** 1) 5/4 2) 124/99 3) 113/90 4) 1/900 5) 1/990 6) 1/999 7) 1/13 8) 1/3 9) 1/33 10) 38/11 11) 311/900 12) 8/7 13) 7/8 14) 41/3300

FRAZIONI E NUMERI CON LA VIRGOLA

Quando si trasforma una frazione, ridotta ai minimi termini (cioè: semplificata il più possibile), in numero con la virgola, si può dimostrare che il numero decimale ottenuto sarà:

I) finito, se nella scomposizione in fattori primi del denominatore non compaiono fattori diversi da 2 e da 5;
II) periodico semplice, se in tale scomposizione i fattori sono tutti diversi da 2 e da 5;
III) periodico misto nel caso restante, cioè qualora il denominatore abbia fra i suoi fattori primi almeno un fattore uguale a 2 o a 5, e almeno un fattore diverso sia da 2 che da 5.

a) Trasforma le seguenti frazioni in numero con la virgola, dopo aver previsto di che tipo sarà quest'ultimo:

$$\frac{7}{40};\ \frac{1}{24};\ \frac{13}{7};\ \frac{2}{9};\ \frac{14}{125};\ \frac{3}{150};\ \frac{65}{33};\ \frac{1}{14};\ \frac{1}{13};\ \frac{1}{26};\ \frac{1}{8}.$$

b) E viceversa, porta i numeri seguenti sotto forma di frazione, *riduci questa ai minimi termini*, dopodiché constata la validità dei tre punti I), II), III): $8,1\overline{4}$; $8,14$; $8,\overline{14}$; $0,012$; $19,\overline{8}$; $1,2\overline{463}$; $10,35$; $7,\overline{7}$; $2,\overline{09}$; $5,55$

## ❑ Decimali ILLIMITATI NON PERIODICI

**Quando io prendo una frazione**
**con l'intenzione di eseguire la divisione per trasformarla in decimale,**
**so già che ciascun "RESTO PARZIALE"**
**che otterrò nel corso del procedimento**
**sarà sempre MINORE DEL DIVISORE.**

Ad esempio, se mi propongo di trasformare in decimale la frazione 34/13,
so già in partenza che i resti parziali che si presenteranno potranno valere:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, oppure 12.

Per i resti parziali via via generati nell'algoritmo di divisione
(*algoritmo* = procedimento per risolvere un problema tramite un numero finito di passi:
clicca sulla freccia ⇨ per approfondimenti)
c'è quindi solo UN NUMERO LIMITATO DI POSSIBILITA'.
E di conseguenza
i resti parziali che si presenteranno non potranno essere tutti diversi fra loro:

- o accadrà di trovare come resto 0 (e allora la divisione avrà termine),
- oppure, qualora ciò non avvenga,
  prima o poi sarà OBBLIGATO a ripetersi
  un resto che era già uscito in precedenza.

```
34      |13
26      2,6153...
 80
 78
  20
  13
   70
   65
    50
    39
    110
    ....
```

*Fino a questo punto*
*i "resti parziali"*
*sono stati:*
*8, 2, 7, 5, 11*

*Vuoi andare avanti tu?*
*Prima o poi*
*PER FORZA dovrà*
*ripresentarsi un resto*
*già visto prima …!!!*
*(oppure,*
*comparire il resto 0).*

**Si verificherà,** insomma**, sicuramente o l'una o l'altra fra due eventualità:**

**I) esce come resto 0; allora il procedimento si arresta,**
**la divisione è terminata, ecco un bel decimale FINITO;**

**II) si ripresenta un resto che si era già presentato prima;**
**e allora nel quoziente torneranno a ripetersi le stesse cifre**
**che erano uscite a partire dalla comparsa precedente di quel resto.**
**Il decimale ottenuto è PERIODICO.**

**Ricapitolando: una FRAZIONE genera sempre un numero DECIMALE che è**

- **FINITO,**
- **oppure è PERIODICO;**

**… una frazione non potrà MAI essere equivalente ad un decimale ILLIMITATO NON PERIODICO.**

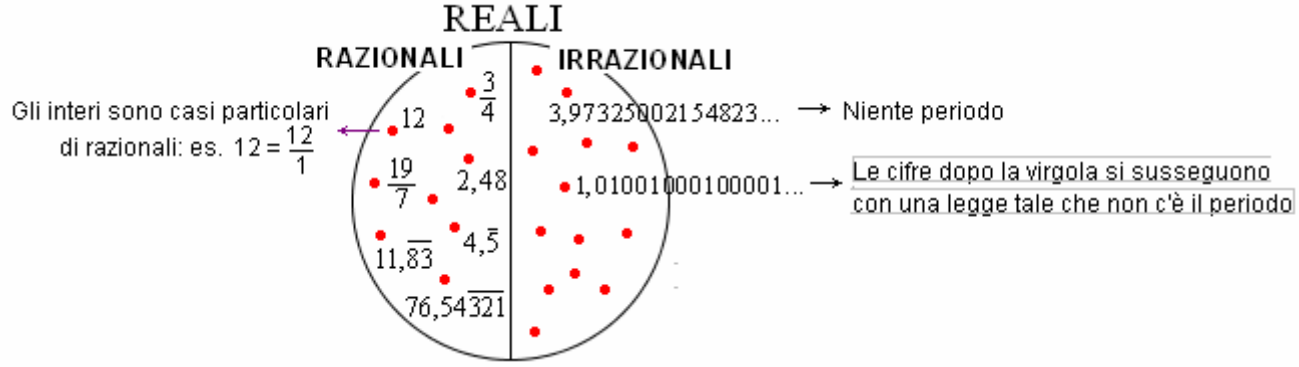
Ne consegue un fatto rilevante:
♥ **I DECIMALI ILLIMITATI NON PERIODICI NON SONO TRASFORMABILI IN FRAZIONE !!!**

♥ **ESISTONO perciò NUMERI CHE NON E' POSSIBILE ESPRIMERE**
**SOTTO FORMA DI FRAZIONE ( = RAPPORTO, QUOZIENTE FRA DUE INTERI).**
**ESSI VENGONO CHIAMATI NUMERI "IRRAZIONALI", mentre**
**QUELLI frazionari o comunque TRASFORMABILI IN FRAZIONE SONO DETTI "RAZIONALI".**
**L'aggettivo "razionale" deriva dal latino "*ratio*" = (in senso matematico) "rapporto", "quoziente".**

**DEFINIZIONE - Un numero è detto**

- **"RAZIONALE" se è esprimibile come frazione, ossia come "ratio", "rapporto", fra due interi;**
- **"IRRAZIONALE" in caso contrario.**

♥ **L'insieme di TUTTI i numeri, RAZIONALI E IRRAZIONALI, è detto "insieme dei numeri REALI"** ⇨




ESERCIZIO - Prova a trasformare in frazione, con l'apposita regola oppure col metodo dell'equazione,
il numero periodico $0,\overline{9} = 0,99999...$. Che numero ottieni? Sorpresa!!! Come spieghi il risultato? ⇨

## 7. OPERAZIONI E LORO PROPRIETA' (proprietà che sono valide per tutti i numeri reali!)

♥ PSST … MI RACCOMANDO … QUESTO PARAGRAFO E' DI IMPORTANZA **CAPITALE**!!!

### ❑ ADDIZIONE O SOMMA $\underset{\uparrow}{8}+\underset{\uparrow}{5}=\underset{\text{somma}}{13}$ (addendi)

a) **Proprietà commutativa dell'addizione**:
in una somma, è possibile mutare a piacimento l'ordine degli addendi, e il risultato non cambierà.
$8+5=5+8 \qquad 5+4+3+2+10=10+2+4+5+3$

b) **Proprietà associativa dell'addizione**:
data una somma di più addendi, è possibile, tramite coppie di parentesi,
associare liberamente gli addendi a gruppi, perché così facendo il risultato non cambierà.
$11+25+4=11+(25+4)=11+29=40$

c) **Proprietà dissociativa dell'addizione**:
data una somma di più addendi, alcuni dei quali raggruppati fra parentesi,
si possono sciogliere le parentesi, e il risultato non cambierà.
$5+(4+3)+(2+10)=5+4+3+2+10=24$

### ❑ MOLTIPLICAZIONE O PRODOTTO $\underset{\uparrow}{8}\cdot\underset{\uparrow}{5}=\underset{\text{prodotto}}{40}$ (fattori)

d) **Proprietà commutativa della moltiplicazione**:
in un prodotto, è possibile mutare a piacimento l'ordine dei fattori, e il risultato non cambierà.
$8\cdot5=5\cdot8 \qquad 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot10=10\cdot2\cdot4\cdot5\cdot3$

e) **Proprietà associativa della moltiplicazione**:
dato un prodotto di più fattori, è possibile, tramite coppie di parentesi,
associare liberamente i fattori a gruppi, perché così facendo il risultato non cambierà.
$11\cdot25\cdot4=11\cdot(25\cdot4)=11\cdot100=1100$

f) **Proprietà dissociativa della moltiplicazione**:
dato un prodotto di più fattori, alcuni dei quali raggruppati fra parentesi,
si possono sciogliere liberamente le parentesi, e il risultato non cambierà.
$5\cdot(4\cdot3)\cdot(2\cdot10)=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot10=1200$

g) **Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma:**
quando si deve moltiplicare
una somma per un numero (*vedi esempio qui a fianco*),
è possibile, volendo, moltiplicare per quel numero
ogni singolo addendo della somma,
poi addizionare i prodotti parziali così ottenuti.

$(5+4+3)\cdot2=5\cdot2+4\cdot2+3\cdot2=10+8+6=24$

$10\cdot(15+11)=10\cdot15+10\cdot11=150+110=260$

$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+1\right)\cdot24=\frac{1}{4}\cdot24+\frac{1}{3}\cdot24+1\cdot24=6+8+24=38$

$a\cdot(b+c+d+e)=ab+ac+ad+ae$ (NOTA)

**NOTA** - A 2° membro abbiamo tralasciato il puntino di moltiplicazione; clicca sulla freccia ⇨ per sapere *quando* si suole sottintenderlo, e comunque basati sugli esempi riportati nel riquadro a destra. Anche nei casi in cui di solito il puntino viene omesso, è però lecito scriverlo ugualmente specie se si desidera *dare risalto* all'idea di moltiplicazione.

h) **Proprietà distributiva generalizzata:**
quando si deve moltiplicare
una somma per un'altra somma (*vedi esempio a fianco*),
è possibile, volendo, moltiplicare
ciascun addendo della prima somma
per ciascun addendo della seconda,
poi addizionare i prodotti parziali così ottenuti.

$(2+3)\cdot(4+5)=2\cdot4+2\cdot5+3\cdot4+3\cdot5=\ldots=45$

$(a+b)\cdot(c+d+e)=ac+ad+ae+bc+bd+be$

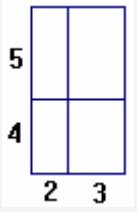
*Se ho 2 astucci, in ciascuno dei quali ci sono 5 penne, 4 matite e 3 gomme, per contare il numero totale degli oggetti posso procedere in due modi:*

*a)* *contare gli oggetti di ciascun astuccio* $5+4+3=12$
*poi moltiplicare per 2 il risultato* $(\underbrace{5+4+3}_{12})\cdot2$

*b)* *contare prima tutte le penne* $5\cdot2=10$
*poi tutte le matite* $4\cdot2=8$
*poi tutte le gomme* $3\cdot2=6$
*e infine sommare i numeri così ottenuti:* $\underbrace{5\cdot2}_{10}+\underbrace{4\cdot2}_{8}+\underbrace{3\cdot2}_{6}$

*Puntino … sì o no* ??? Esempi:
$7\cdot8,\ 3a,\ a\cdot3,\ xy,\ 5(x+2),\ (x+2)\cdot5$

*Per calcolare l'area di questo rettangolo posso procedere in due modi:*




*a)* *calcolare subito l'area totale* $(\underbrace{2+3}_{\text{base}})\cdot(\underbrace{4+5}_{\text{altezza}})$

*b)* *oppure calcolare le quattro aree parziali e poi sommarle:* $2\cdot4+2\cdot5+3\cdot4+3\cdot5$

- **SOTTRAZIONE** $\underset{\text{minuendo}}{\underset{\uparrow}{8}} - \underset{\text{sottraendo}}{\underset{\uparrow}{5}} = \underset{\text{differenza}}{3}$

**La sottrazione è definita come l'operazione inversa dell'addizione.**
**E' quell'operazione mediante la quale, dati due numeri,**
**se ne trova un terzo che addizionato al secondo dà come risultato il primo**:

$$\mathbf{a-b=c \quad se \ \ c \ \grave{e} \ tale \ che \ \ c+b=a}$$

La sottrazione NON gode
- né della proprietà commutativa $8-5 \neq 5-8$
- né della associativa/dissociativa $\underbrace{(10-7)-1}_{3-1=2} \neq \underbrace{10-(7-1)}_{10-6=4}$

Gode invece della seguente

i) **Proprietà invariantiva della sottrazione:**
in una sottrazione, è possibile, volendo, addizionare o sottrarre uno stesso numero ad entrambi i termini (minuendo e sottraendo), e il risultato non cambierà.

$$\underbrace{43-27}_{16} = \begin{cases} (43+3)-(27+3)=46-30=16 \\ (43-3)-(27-3)=40-24=16 \end{cases}$$

- **DIVISIONE** $\underset{\text{dividendo}}{\underset{\uparrow}{24}} : \underset{\text{divisore}}{\underset{\uparrow}{4}} = \underset{\text{quoziente}}{6}$

**E' definita come l'operazione inversa della moltiplicazione.**
**Tramite la divisione, dati due numeri, se ne trova un terzo che moltiplicato per il secondo dà come risultato il primo**:

$$\mathbf{a:b=c \quad se \ \ c \ \grave{e} \ tale \ che \ \ c \cdot b=a}$$

La divisione NON gode
- né della proprietà commutativa $24:4 \neq 4:24$
- né della associativa/dissociativa $\underbrace{(48:8):2}_{6:2=3} \neq \underbrace{48:(8:2)}_{48:4=12}$

Gode invece delle seguenti

**NOTA** - Abbiamo visto che una divisione fra due interi e una frazione sostanzialmente si equivalgono.
Ciò in matematica porta a usare la linea di frazione per indicare divisione, anche con termini non interi.

*La parola "frazione" è quindi usata a volte in senso "stretto" (=termini interi, paragrafo 5), a volte in senso"lato" (frazione=divisione, termini qualsiasi).*

j) **Proprietà invariantiva della divisione (o delle frazioni in senso "lato", vedi NOTA qui sopra):**
in una divisione (o in una frazione), è possibile, volendo, moltiplicare o dividere per uno stesso numero (purché diverso da 0! La divisione per 0 è una operazione "non eseguibile", vedi pagina successiva) entrambi i termini (dividendo e divisore; numeratore e denominatore), e il risultato non cambierà.

$$\underbrace{30:6}_{5} = \begin{cases} (30\cdot 2):(6\cdot 2)=60:12=5 \\ (30:2):(6:2)=15:3=5 \end{cases} \qquad 3{,}2:0{,}8=(3{,}2\cdot 10):(0{,}8\cdot 10)=32:8=4 \qquad \frac{21}{28}=\frac{\cancel{21}^{\,3}}{\cancel{28}_{\,4}} \left[\begin{matrix}21:7\\28:7\end{matrix}\right]$$

k) **Proprietà distributiva del quoziente rispetto alla somma:**
quando si deve dividere una somma per un numero,
è possibile, volendo, dividere per quel numero ciascun addendo della somma,
poi addizionare i quozienti parziali così ottenuti.

$$(15+21+36):3=15:3+21:3+36:3=5+7+12=24 \qquad \frac{40+12}{16}=\frac{40}{16}+\frac{12}{16}$$

$$(a+b):c=a:c+b:c \ \ o\ anche \ \ \frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c} \qquad \textbf{OCCHIO!!! Invece } \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a+b}} \overset{\text{DIVERSO DA}}{\neq} \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}+\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}} \textbf{ !!!!}$$



l) **"Per moltiplicare, o dividere, un prodotto per un numero …"**
**… basta moltiplicare, o dividere, per quel numero, UNO SOLO A SCELTA fra i fattori del prodotto.**
In particolare,
**quando si deve dividere un prodotto per uno dei suoi fattori, basta sopprimere quel fattore.**

$$(7\cdot 5\cdot 4)\cdot 2 = \begin{cases} 14\cdot 5\cdot 4 \\ 7\cdot 10\cdot 4 \\ 7\cdot 5\cdot 8 \end{cases} \qquad (10\cdot 12):2 = \begin{cases} 5\cdot 12 \\ 10\cdot 6 \end{cases} \qquad (7\cdot 5\cdot 3):5=7\cdot 1\cdot 3=7\cdot 3$$

## ❑ LA "DIVISIONE INTERA"

Così viene chiamata la divisione fra due interi, quando non si accetta un risultato frazionario, ma si vuole invece un "quoziente intero" e un resto (vedi pagina 114 per approfondimenti).

Se a, b sono due interi (con $b \neq 0$), e si intende che il simbolo "**:**" indichi DIVISIONE INTERA, allora

♥ **$a : b = c$ quando è $c \cdot b + r = a$, con $r < b$ (a, b, c, r interi, $b \neq 0$)**
**divisione intera**

Notare l'**IMPORTANTISSIMA** condizione **$r < b$ : il resto dev'essere sempre minore del divisore**.
Ad esempio, è giusto scrivere che $23 : 5 = 4$ (col resto di 3) perché $4 \cdot 5 + 3 = 23$, ed è $3 < 5$.

## ❑ LA "LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO"

Prende il nome di "legge di annullamento del prodotto" la proposizione ( = affermazione) seguente:

♥ **"Se almeno uno dei fattori di un prodotto è 0, allora il prodotto vale 0;**
**e viceversa, se un prodotto è uguale a 0, allora sarà uguale a 0 almeno uno dei fattori".**

## ❑ GLI "ELEMENTI NEUTRI" DELLA SOMMA E DEL PRODOTTO

Si dice che **lo zero ( 0 ) è "l'elemento neutro** ( = ininfluente ) **della somma"**
per indicare che, sommato a qualsiasi numero, lo lascia invariato: $\forall x,\ x + 0 = x$ ($\forall$ significa "per ogni").

Si dice che il numero **1 è "l'elemento neutro del prodotto"**
per indicare che, moltiplicato per qualsiasi numero, lo lascia invariato: $\forall x,\ x \cdot 1 = x$.

**In relazione al prodotto, 0 si comporta invece da "elemento assorbente"**, perché $\forall x,\ x \cdot 0 = 0$.
Osserviamo a proposito che **l'operazione di addizione non possiede alcun "elemento assorbente"**.

## ❑ IL PROBLEMA DELLA DIVISIONE PER ZERO

La **divisione** (stiamo ora parlando della divisione "ordinaria", NON della "divisione intera") è definita come **l'operazione inversa della moltiplicazione**, ossia come l'operazione per cui, dati due numeri a, b, si trova quel terzo numero c il quale, se moltiplicato per b, restituisce come risultato a.

**$a : b = c$** se c è quel numero tale che **$c \cdot b = a$**

♥ Consideriamo ora, ad esempio, la divisione $1 : 0$.
Essa "ci chiede" di determinare un numero tale che, moltiplicato per 0, dia come risultato 1;
ma un numero siffatto NON ESISTE, in quanto ogni numero, quando viene moltiplicato per 0, dà sempre risultato 0 e quindi non potrà mai dare 1.
Perciò l'operazione $1 : 0$ è IMPOSSIBILE, ossia PRIVA DI RISULTATO.
E' ovvio che alla stessa conclusione saremmo giunti considerando le operazioni 5:0; 7:0; 4,21:0; …

♥ Se invece consideriamo l'operazione $0 : 0$, questa "ci chiede" di determinare un numero tale che, moltiplicato per 0, dia come risultato 0; ma QUALSIASI numero gode di questa proprietà!
Perciò l'operazione $0 : 0$ è INDETERMINATA, nel senso che non ha un risultato ben determinato, ma potrebbe avere **infiniti** risultati, perché qualunque numero potrebbe "pretendere" di esserne il risultato.

♥ Infine, 0:1=0 (operazione "normale"; esiste uno e un sol numero che moltiplicato per 1 dia 0, ed è lo 0)



**RIASSUNTO**

**Indicato con a un qualsiasi numero non nullo,**

$$a : 0 = \frac{a}{0} = \text{IMPOSSIBILE}$$
$$0 : 0 = \frac{0}{0} = \text{INDETERMINATA}$$
$$0 : a = \frac{0}{a} = 0$$

**operazioni "non eseguibili", in inglese "ILLEGAL" (= illecite)**

## ❑ 1/0 UGUALE "INFINITO" ???

Forse da qualche parte ti sarà capitato di leggere che $\frac{1}{0} = \infty$ (il simbolo $\infty$ sta per "infinito").

*La scrittura* $1/0 = \infty$ *va correttamente interpretata.*
Essa compare nello studio dei "limiti" (a livello pre-universitario), e comunque, semplificando un poco, si può dire che è sostanzialmente un modo conciso per esprimere il concetto seguente:

**Se prendiamo una frazione che abbia 1 a numeratore, e facciamo "tendere a zero il denominatore", ossia facciamo assumere al denominatore valori piccolissimi, vicinissimi a zero, allora il risultato assumerà valori grandissimi, "tendenti a infinito".**

$$\frac{1}{0,1} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 1 \cdot 10 = 10 \qquad \frac{1}{0,01} = 100 \qquad \frac{1}{0,001} = 1000 \qquad \frac{1}{0,000001} = 1000000 \qquad \text{ecc. ecc.}$$

# 8. LE POTENZE

## A) DEFINIZIONE DI "POTENZA"

$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^{5 \rightarrow \textit{esponente}}_{\searrow \textit{base}}$ (leggi: "7 alla quinta", "7 elevato alla quinta")

Altri esempi:

$11 \cdot 11 \cdot 11 = 11^3$

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

**DEFINIZIONE**

♥ **Si dice "POTENZA" un particolare prodotto, nel quale i fattori sono tutti uguali fra loro: precisamente, si hanno tanti fattori tutti uguali alla "BASE" ( = il numero che viene moltiplicato per sé stesso più volte) quante sono le unità dell' "ESPONENTE" ( = il numero che indica quanti sono i fattori in gioco).**

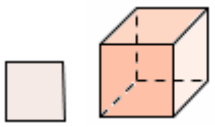
Quando l'esponente è 2, anziché dire "alla seconda" si può anche dire "al quadrato";
e quando l'esponente è 3, anziché dire "alla terza" si può anche dire "al cubo".

$7^2 = \begin{cases} 7 \text{ "alla seconda"} \\ 7 \text{ "al quadrato"} \end{cases}$

$7^3 = \begin{cases} 7 \text{ "alla terza"} \\ 7 \text{ "al cubo"} \end{cases}$

*La ragione di tale terminologia sta nel fatto che*

- *l'area di un quadrato si ottiene elevando alla seconda la misura del lato,*
- *il volume di un cubo si ottiene elevando alla terza la misura del lato.*



$A = \ell^2$ $V = \ell^3$

## QUESITI: APPLICAZIONI DELLE POTENZE (risposte a pag. 17)

**a) Se volessi essere sicuro di indovinare tutte le partite sulla schedina del Totocalcio dovrei giocare tutte le "colonne" che teoricamente possono "uscire". Quante sono?**

*Una schedina del Totocalcio riporta 13 partite (versione "classica") o 14 partite (Totocalcio "moderno"), per ciascuna delle quali lo scommettitore può scegliere fra 3 pronostici, indicati con*

- *"1" (vittoria della squadra che gioca "in casa")*
- *"X" (pareggio)*
- *"2" (vittoria della squadra che gioca "fuori casa").*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Cagliari-Milan | **2** |
| 2 | Juventus-Napoli | **X** |
| 3 | Inter-Lazio | **X** |
| 4 | Roma-Sampdoria | **1** |
| … | … | **…** |

*Evidentemente, il quesito avrà due risposte diverse a seconda che si pensi*

*I) al Totocalcio "classico" a 13 partite*
*II) oppure alla versione più recente con 14 partite*

**b) In quanti modi diversi è possibile scrivere un BYTE ( = sequenza di 8 BIT)?**

*Un "qualcosa" che possa trovarsi in due, e solo due, condizioni distinte, prende il nome di BIT (**BIT = Binary digIT = cifra binaria**).*
*Le due condizioni, i due "stati" in questione vengono di solito indicati come "stato 0" e "stato 1".*
*Possiamo allora dire che un "bit" è una cifra che può assumere soltanto due valori: il valore 0, oppure il valore 1.*

*Il termine "byte" (leggi: bàit) indica, come dicevamo, una sequenza di 8 bit.*
*Quindi, ad esempio, la sequenza 10010101 è un byte.*
*Ancora: 00110001 è un byte; 11111111 è un byte.*

Questo

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | **1** | **0** | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** |

è un esempio di byte

*Clicca sulla freccia* ⇨
*se desideri approfondire il ruolo del bit e del byte nel mondo dei **computer**.*

**c) La distanza della Terra dalla galassia di Andromeda ⇨ è di km 21000000000000000000 circa. E' possibile scrivere questo numero in forma più "compatta"?**

## B) PROPRIETA' DELLE POTENZE ( ♥ paragrafo **FONDAMENTALE**!!! )

1) $5^4 \cdot 5^3 = (5\cdot5\cdot5\cdot5)\cdot(5\cdot5\cdot5) \overset{\text{proprietà dissociativa}}{=} 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5 = 5^7$ Quindi $\boxed{5^4 \cdot 5^3} = 5^7 = \boxed{5^{4+3}}$

**Proprietà ADDITIVA DEGLI ESPONENTI** $\boxed{\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}}$

**Il prodotto di due potenze aventi la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base, e per esponente la somma degli esponenti.**

Dimostrazione (NOTA):

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{m\ fattori}\cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\ fattori} \overset{\text{dissociativa}}{=} \underbrace{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ fattori}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ fattori}}_{m+n\ fattori} = a^{m+n}$$

La proprietà continua a valere anche con più di due fattori. Es. $7^5 \cdot 7^2 \cdot 7^3 = 7^{10}$

NOTA
La catena riportata all'inizio non è una vera "dimostrazione" perché si riferisce a un caso specifico; una "dimostrazione" deve invece avere carattere generale.

2) $7^6 : 7^2 = \dfrac{7^6}{7^2} = \dfrac{7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7}{7\cdot7} \overset{\text{proprietà invariantiva}}{=} \dfrac{\cancel{7}\cdot\cancel{7}\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7}{\cancel{7}\cdot\cancel{7}} = 7\cdot7\cdot7\cdot7 = 7^4$ Quindi $\boxed{7^6 : 7^2} = 7^4 = \boxed{7^{6-2}}$

**Proprietà SOTTRATTIVA DEGLI ESPONENTI** $\boxed{\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}}$ **opp.** $\boxed{\mathbf{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}}$ **(m > n)**

**Il quoziente di due potenze aventi la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base, e per esponente la differenza degli esponenti.**

Dimostrazione: $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m\ fattori}}{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ fattori}} \overset{\text{proprietà invariantiva}}{=} \dfrac{\overbrace{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\ldots\cdot\cancel{a}}^{n\ fattori\ se\ ne\ vanno\ldots}\ \overbrace{\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{sopravvivono\ m-n\ fattori}}{\underbrace{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\ldots\cdot\cancel{a}}_{n\ fattori}} = a^{m-n}$

3) $\left(5^4\right)^3 = 5^4\cdot5^4\cdot5^4 \overset{\text{additiva degli esponenti}}{=} 5^{4+4+4} = 5^{12}$

oppure:

$$\left(5^4\right)^3 = \left(5\cdot5\cdot5\cdot5\right)^3 = \left(5\cdot5\cdot5\cdot5\right)\cdot\left(5\cdot5\cdot5\cdot5\right)\cdot\left(5\cdot5\cdot5\cdot5\right) \overset{\text{dissociativa}}{=} 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5 = 5^{12}$$

Quindi: $\boxed{\left(5^4\right)^3} = 5^{12} = \boxed{5^{4\cdot3}}$

**Proprietà MOLTIPLICATIVA DEGLI ESPONENTI** $\boxed{\mathbf{\left(a^m\right)^n = a^{mn}}}$

**La potenza di una potenza è una potenza che ha per base la stessa base, e per esponente il prodotto degli esponenti.**

Dimostrazione 1

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\ldots\cdot a^m}_{n\ fattori} \overset{\text{additiva degli esponenti}}{=} a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n\ addendi}} = a^{m\cdot n}$$

La proprietà si può "iterare" (=applicare ripetutamente).

Es. $\left[\left(5^2\right)^3\right]^2 = 5^{12}$

Dimostrazione 2

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{m\ fattori}{}^n =$$

$$= \underbrace{\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{m\ fattori}\cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{m\ fattori}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{m\ fattori}}_{n\ gruppi} \overset{\text{diss.}}{=}$$

$$= \underbrace{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ fattori}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ fattori}\cdot\ldots\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ fattori}}_{n\ gruppi\ di\ m\ fattori\ ciascuno\ =\ m\cdot n\ fattori} = a^{m\cdot n}$$

4) $(7\cdot5)^3=(7\cdot5)\cdot(7\cdot5)\cdot(7\cdot5) \overset{\text{dissociativa}}{=} 7\cdot5\cdot7\cdot5\cdot7\cdot5 \overset{\text{commutativa}}{=} 7\cdot7\cdot7\cdot5\cdot5\cdot5 \overset{\text{associativa}}{=} (7\cdot7\cdot7)\cdot(5\cdot5\cdot5)=7^3\cdot5^3$

Quindi $\boxed{(7\cdot5)^3=7^3\cdot5^3}$

**Proprietà relativa alla POTENZA DI UN PRODOTTO** $\boxed{(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n}$

**La potenza di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori.**

Dimostrazione: $(a\cdot b)^n=\underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)}_{n\ fattori\ (a\cdot b)} \overset{\text{dissociativa}}{=} \underbrace{a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot\ldots\cdot a\cdot b}_{n\ fattori\ a,\ n\ fattori\ b} =$

$\overset{\text{commutativa}}{=} \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ fattori\ a}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ fattori\ b} \overset{\text{associativa}}{=} (\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ fattori\ a})\cdot(\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ fattori\ b})=a^n\cdot b^n$

I fattori possono essere anche più di due. Es. $(3\cdot5\cdot7)^2=3^2\cdot5^2\cdot7^2$

5) $(7:5)^3=\left(\frac{7}{5}\right)^3=\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{5}=\frac{7\cdot7\cdot7}{5\cdot5\cdot5}=\frac{7^3}{5^3}=7^3:5^3$ Quindi: $\boxed{(7:5)^3=7^3:5^3}$

**Proprietà relativa alla POTENZA DI UN QUOZIENTE** $\boxed{(a:b)^n=a^n:b^n \text{ opp. } \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}$

**La potenza di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze del dividendo e del divisore.**

Dimostrazione: $(a:b)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\ fattori\ a/b}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\ fattori\ a}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ fattori\ b}}=\frac{a^n}{b^n}=a^n:b^n$

6) La proprietà 6) è l'inversa della 4): $\boxed{a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n}$

Non c'è quindi bisogno di dimostrazione, perché è già stata dimostrata la 4), che è poi la stessa uguaglianza, seppure scritta al rovescio

**IL PRODOTTO DI DUE (o più) POTENZE CON LO STESSO ESPONENTE**
**è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente, e per base il prodotto delle basi.**

7) La proprietà 7) è l'inversa della 5): $\boxed{a^n:b^n=(a:b)^n,\quad \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n}$

**IL QUOZIENTE DI DUE POTENZE CON LO STESSO ESPONENTE**
**è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente, e per base il quoziente delle basi.**

**OSSERVAZIONE IMPORTANTE**
**Non c'è nessuna proprietà delle potenze che si possa applicare**
nel caso di una SOMMA
o di una DIFFERENZA
di potenze !!!



**OCCHIO**, quindi, a non applicare … proprietà inesistenti !!!

$2^3+2^4=8+16=24$

$2^3+10^3=8+1000=1008$

Sarebbe GRAVE ERRORE svolgere il calcolo diversamente da così !

**RISPOSTE AI QUESITI DI PAG. 15** Clicca sulla freccia per la **motivazione delle risposte** ⇨

a) $3^{13}=1594323$ se le partite sono 13, $3^{14}=4782969$ se le partite sono 14.

b) $2^8=256$ c) $21000000000000000000\ \text{km}=21\cdot10^{18}\ \text{km}=2{,}1\cdot10^{19}\ \text{km}$

# C) L'ESPONENTE 1, L'ESPONENTE 0

## ❑ L'ESPONENTE 1 $\boxed{5^1 = ?}$

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$
$5^2 = 5 \cdot 5$
$5^1 = \mathbf{5}$ (*abbiamo diviso ancora una volta per* 5)

♥ **Definizione: un numero elevato all'esponente 1 è uguale a sé stesso, cioè resta invariato**

$\boxed{\mathbf{a^1 = a \quad \forall a}}$ (leggi: $a$ elevato all'esponente 1 è uguale ad $a$, qualunque sia $a$)

La definizione data, oltre che apparire la più "logica", è anche l'unica che permetta di conservare pure per il "nuovo" esponente 1, la validità delle sette proprietà che sussistono per gli esponenti maggiori di 1. Infatti, se voglio formulare la definizione di $a^1$ in modo che continuino a valere le "vecchie" proprietà, allora, in particolare, avrò bisogno che sia corretto scrivere:

$$a^1 = a^{4-3} = \frac{a^4}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a$$

Insomma, la definizione $a^1 = a$ è l'unica che sia compatibile con la proprietà sottrattiva degli esponenti: se si scegliesse un'altra definizione, la sottrattiva degli esponenti cesserebbe di valere per l'esponente 1.

**Si può poi dimostrare che la definizione posta è compatibile non solo con la "sottrattiva degli esponenti", ma anche con TUTTE le altre proprietà**.

## ❑ L'ESPONENTE 0 $\boxed{5^0 = ?}$

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$
$5^2 = 5 \cdot 5$
$5^1 = 5$
$5^0 = \mathbf{1}$ (*abbiamo diviso ancora una volta per* 5)

♥ **Definizione:**
**un numero (che non sia lo 0; vedremo dopo il perché di questa eccezione) elevato all'esponente 0 è uguale a 1**

$\boxed{\mathbf{a^0 = 1 \quad \forall a \neq 0}}$ (leggi: $a$ elevato all'esponente 0 è uguale a 1, per ogni $a$ diverso da 0)

Tale definizione è l'unica che permetta di estendere anche all'esponente 0, le proprietà già dimostrate valide per gli esponenti 1, 2, 3, 4, …
Infatti, se voglio formulare la definizione di $a^0$ in modo che continuino a valere le "vecchie" proprietà, allora, in particolare, dovrò poter scrivere:

$$a^0 = a^{4-4} = \frac{a^4}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = 1$$

**Si può poi dimostrare che la definizione posta è compatibile non solo con la "sottrattiva degli esponenti", ma anche con TUTTE le altre proprietà.**

Abbiamo anticipato che la definizione ha un'eccezione: infatti

♥ **l'operazione $0^0$ è considerata "INDETERMINATA"**

Per comprendere il motivo di questa scelta da parte dei matematici, consideriamo le due sequenze:

$4^0 = 1 \quad 3^0 = 1 \quad 2^0 = 1 \quad 1^0 = 1 \rightarrow \quad 0^0 = \mathbf{1???}$
$0^4 = 0 \quad 0^3 = 0 \quad 0^2 = 0 \quad 0^1 = 0 \rightarrow \quad 0^0 = \mathbf{0???}$

… come si vede, c'è ambiguità!

Osserviamo che in questo caso particolarissimo NON è possibile sciogliere l'indecisione attraverso la richiesta che continui a valere la sottrattiva degli esponenti, in quanto una catena che iniziasse, ad esempio, con $0^4 / 0^4$ non potrebbe essere scritta, perché conterrebbe uno 0 $(0^4 = 0)$ a denominatore (*illegal* operation).

# 9. LE PRIORITA' NELLO SVOLGIMENTO DELLE OPERAZIONI E L'USO DELLE PARENTESI NELLE ESPRESSIONI

Se siamo in presenza di una serie indicata di operazioni da svolgere, ossia di una "**espressione**", dobbiamo rispettare alcune **regole di priorità** sulle quali la comunità dei matematici ha stabilito un accordo.

♥ **Quando non compare alcuna parentesi, si intende che vadano svolte:**
   **a) innanzitutto le potenze;**
   **b) poi le moltiplicazioni e le divisioni, nell'ordine in cui si presentano;**
   **c) e infine le addizioni e le sottrazioni, nell'ordine in cui si presentano.**

- Facciamo un esempio. Se mi viene data l'espressione $4+18:2\cdot 3^2$
  - io innanzitutto svolgo la potenza: $4+18:2\cdot 9$
  - poi la divisione, che precede la moltiplicazione: $4+9\cdot 9$
  - poi la moltiplicazione: $4+81$
  - e infine la somma: $85$
- Ecco un altro esempio, svolto "in catena":

$$40-7+2^3\cdot 3-3 \underset{\substack{\textit{prima}\\ \textit{la}\\ \textit{potenza}}}{=} 40-7+8\cdot 3-3 \underset{\substack{\textit{poi}\\ \textit{la}\\ \textit{moltiplicazione}}}{=} 40-7+24-3 \underset{\substack{\textit{poi le addizioni}\\ \textit{e sottrazioni}\\ \textit{nell'ordine}}}{=} 33+24-3=57-3=54$$

♥ **Quando compaiono delle parentesi, si svolgeranno:**
   **a) prima i calcoli entro le parentesi tonde, fino ad ottenere un numero solo;**
   **b) poi i calcoli entro le parentesi quadre, fino ad ottenere un numero solo;**
   **c) infine i calcoli entro le parentesi graffe, fino ad ottenere un numero solo.**

**Naturalmente, all'interno di una parentesi valgono fra le operazioni le stesse regole di priorità che abbiamo elencato all'inizio.**

Se si opera esclusivamente coi numeri assoluti ( = senza segno),
non appena all'interno di una parentesi si sarà ottenuto un numero solo, la parentesi si potrà eliminare (con l'unica eccezione del caso in cui il numero sia frazionario e la parentesi elevata a potenza).

- Esempio: $8+100:[4+3\cdot(5+2)]=8+100:[4+3\cdot 7]=8+100:[4+21]=8+100:25=8+4=12$.

**Una volta eliminate le tonde interne a una quadra, la quadra stessa si potrebbe, volendo, trasformare in tonda (e un'eventuale graffa contenente soltanto tonde in quadra) …** quindi, tornando all'es. precedente, avremmo anche potuto scrivere $8+100:[4+3\cdot(5+2)]=8+100:(4+3\cdot 7)=$ *ecc.*

♥ Va detto che quello che abbiamo qui sopra brevemente descritto NON è l'unico modo di mandar via le parentesi in una espressione. Infatti, è piuttosto frequente che una parentesi venga eliminata per effetto dell'applicazione di una proprietà delle operazioni.
Ad esempio, la proprietà distributiva permette di scrivere $3\cdot(100+8)=3\cdot 100+3\cdot 8=300+24=324$;
e ancora: una proprietà delle potenze autorizza a scrivere $(5\cdot 3)^2=5^2\cdot 3^2=25\cdot 9=225$.

♥ Inoltre, ovviamente, le proprietà commutative dell'addizione e della moltiplicazione permettono, di fronte ad addizioni ripetute, o a moltiplicazioni ripetute, di non seguire l' "ordine in cui si presentano" i termini ma di andare invece, in questi casi, nell'ordine che più si desidera.

**ESERCIZI** Puoi andare agli **svolgimenti** cliccando sulla freccia ⇨

**1)** $2+3+4\cdot 5$ **2)** $(2+3+4)\cdot 5$ **3)** $24+12:6:2$ **4)** $24+12:(6:2)$ **5)** $(24+12):6:2$

**6)** $8:2^2+30:3\cdot 2$ **7)** $(8:2)^2+30:(3\cdot 2)$ **8)** $18-10-3\cdot 2$ **9)** $18-(10-3)\cdot 2$

**10)** $45-[(3+4)\cdot 5]$ **11)** $[45-(3+4)]\cdot 5$ **12)** $100-\{20-[3^2-2\cdot(3+1)]+7\}:2+3$

**13)** $\frac{3}{50}+\left[2-\left(\frac{1}{2}+1\right):\frac{5}{4}\right]^2$ **14)** $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{2}{3}$ **15)** $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}$ **16)** $6-2\cdot 3+\{16:[1+(3+2):5]\}^2$

**17)** $2+3\cdot 4+5\cdot 6$ **18)** $(2+3)\cdot(4+5)\cdot 6$ **19)** $(2+3)\cdot(4+5\cdot 6)$

**20)** $(15-10)-4$ **21)** $15-(10-4)$ **22)** $15+10+4$ **23)** $15+(10+4)$

**24)** $16:8:2$ **25)** $16:(8:2)$ **26)** $16\cdot 8\cdot 2$ **27)** $16\cdot(8\cdot 2)$

**RISULTATI**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1)** 25 | **2)** 45 | **3)** 25 | **4)** 28 | **5)** 3 | **6)** 22 | **7)** 21 | **8)** 2 | **9)** 4 |
| **10)** 10 | **11)** 190 | **12)** 90 | **13)** 7/10 | **14)** 11/45 | **15)** 3/10 | **16)** 64 | **17)** 44 | **18)** 270 |
| **19)** 170 | **20)** 1 | **21)** 9 | **22)** 29 | **23)** 29 | **24)** 1 | **25)** 4 | **26)** 256 | **27)** 256 |

# 10. ESERCIZI

## A) ESERCIZI SU DIVISIBILITA', MULTIPLI, DIVISORI, NUMERI PRIMI ECC. (risposte a pag. 23)

1) VERO O FALSO?

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) $3:0=0$ | V F | d) Il numero 0 è pari | V F | g) Il numero 1 è primo | V F |
| b) $0:3=0$ | V F | e) Il numero 1 è dispari | V F | h) 0 divide ogni numero | V F |
| c) $0:0=1$ | V F | f) Il numero 0 è primo | V F | i) 1 divide ogni numero | V F |

2) VERO O FALSO?

Se $m \cdot n = p$ (essendo $m$, $n$, $p$ tre interi non nulli), allora

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a) $n$ è multiplo di $p$ | V F | c) $n$ è divisore di $p$ | V F | e) $p$ è divisibile per $n$ | V F |
| b) $p$ è multiplo di $n$ | V F | d) $n$ è divisibile per $p$ | V F | f) $p:m=n$ | V F |

| | |
|---|---|
| g) Se $a$ è divisibile per $b$, allora è divisibile anche per tutti i divisori di $b$ | V F |
| h) Se un intero è divisibile sia per 6 che per 8, allora è certamente divisibile per 48 | V F |
| i) Due numeri entrambi primi sono sempre anche primi fra loro | V F |
| l) Se $a$ è primo con $b$ e $b$ è primo con $c$, allora $a$ sarà certamente primo con $c$ | V F |

### VERIFICARE SE UN INTERO E' PRIMO, SENZA SPRECARE CALCOLI

Supponiamo di prendere un intero $n$ con l'intenzione di verificare se è primo o se non lo è.
E supponiamo di aver constatato che:
2 non è divisore di $n$; 3 non è divisore di $n$; 5 non lo è; … nessun numero primo $\le \sqrt{n}$ è divisore di $n$.
Allora ti dico che sarebbe inutile continuare:

***n*, se non ha divisori primi ≤ della sua radice quadrata, è CERTAMENTE un numero primo!**

Infatti: se un intero $n$ ha un divisore proprio (NOTA) *d maggiore* della sua radice quadrata, allora ammette di certo anche un altro divisore proprio, ossia $n:d$, che è *minore* di $\sqrt{n}$; quindi, se non si è trovato nessun divisore proprio di $n$ che sia $\le \sqrt{n}$, si può essere certi che $n$ non ha alcun divisore proprio: se infatti, per assurdo, ne avesse uno $> \sqrt{n}$, se ne sarebbe già dovuto trovare un altro $< \sqrt{n}$.

NOTA: i divisori "propri" di un intero sono quelli "non banali", ossia diversi da 1 e dal numero stesso.

La ricerca dei divisori propri di $n$ si può poi limitare ai soli divisori primi, perché se un intero ha un divisore proprio $k$ non primo, certamente ha anche uno o più divisori primi inferiori a $k$.

♥ Ad esempio, per concludere che 97 è un numero primo basta aver verificato che non è divisibile per nessuno dei numeri 2, 3, 5, 7. Infatti, il tentativo successivo sarebbe per 11, ma 11 supera già $\sqrt{97} = 9,...$

3) Per verificare se sia primo il 1231, la ricerca di eventuali divisori potrà limitarsi ai numeri primi non superiori a …..

### IL "CRIVELLO DI ERATOSTENE"

Un modo semplice per ricavare l'elenco dei numeri primi non superiori ad un dato intero $n$ è il seguente.
Si scrivono gli interi da 2 a $n$, poi dallo schema

- si cancellano tutti i multipli di 2 (escluso il 2);
- si cerca il primo numero successivo al 2 non ancora cancellato, ossia il 3, e se ne cancellano tutti i multipli (escluso il 3);
- si cerca il il primo numero successivo al 3 non ancora cancellato, ossia il 5, e se ne cancellano tutti i multipli (escluso il 5);
- si cerca il primo numero successivo al 5 non ancora cancellato, e se ne cancellano tutti i multipli (escluso il numero stesso);
- …

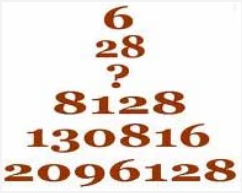
Ciò che resta al termine del procedimento è l'elenco dei numeri primi cercato.

4) Serviti di questo metodo e dello schema che segue, per determinare i numeri primi non superiori a 125:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 |
| 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |
| 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 110 | 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 |

5) Per ciascuno degli interi che seguono, stabilisci se è divisibile per:
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13
a) 378 b) 825 c) 420 d) 988 e) 14641 f) 84 g) 5929 h) 437 i) 318 l) 1000001

**NUMERI "PERFETTI"**
**Si dice "perfetto" un intero, che sia uguale alla somma dei suoi divisori, inclusa l'unità ma escluso il numero stesso.**
Ad esempio, sono numeri perfetti $6 = 1+2+3$ e $28 = 1+2+4+7+14$.




6) Il numero perfetto successivo a 28 è compreso fra 495 e 500. Quanto vale? .....

**DIVISIONE INTERA, CON RESTO**

♥ In Informatica, ma anche in Matematica, si utilizzano due "operatori" specifici, DIV e MOD, per indicare rispettivamente il **quoziente intero** (**DIV**) e il **resto** (**MOD**) della **divisione intera**.
E' fondamentale tener presente che **il resto è sempre minore del divisore!**
Esempi: 13 DIV 5 = 2; 13 MOD 5 = 3; 12 DIV 3 = 4; 12 MOD 3 = 0; 7 DIV 8 = 0; 7 MOD 8 = 7

7) a) 7 DIV 3 = ... 7 MOD 3 = ... b) 18 DIV 3 = ... 18 MOD 3 = ... c) 2 DIV 4 = ... 2 MOD 4 = ...
d) 89 DIV 7 = ... 89 MOD 7 = ... e) 5 DIV 1 = ... 5 MOD 1 = ... f) 5 DIV 0 = ... 5 MOD 0 = ...
g) Se si sa che $a$ MOD $b = 0$, si può dire che $b$ è …… di $a$
h) $x$ DIV 29 = 7, $x$ MOD 29 = 15. $x$ = ? i) 73 DIV $y = 6$, 73 MOD $y = 1$. $y$ = ?
l) The Centre for Education in Math. and Computing, www.cemc.uwaterloo.ca, Pascal Contest 2011
When the integer N is divided by 60, the remainder (*resto*) is 49.
When N is divided by 15, the remainder is: 0? 3? 4? 5? 8?

8) Nella dispensa di un asilo sono rimasti 60 cioccolatini, 72 biscotti e 24 piccole crostate.
Si decide di "far fuori" questo materiale, prossimo alla scadenza, distribuendo ai bambini più meritevoli un "kit" formato da $x$ crostatine + $y$ cioccolatini + $z$ biscotti (tutti i "kit" dovranno essere fra loro identici), e ci si chiede:
quale sarà il massimo numero di kit realizzabili in tale modo?

9) Una cometa periodica si presenta a distanza di esattamente 56 anni, e un'altra a distanza di 48.
Se quest'anno le due comete si sono mostrate simultaneamente, fra quanti anni l'evento si ripresenterà?

10) Se ci sono tre funi di lunghezza 126, 168 e 140 cm, e si desidera tagliarle in modo da ottenere il numero più piccolo possibile di pezzi di ugual lunghezza (senza buttar via alcun pezzo di corda), quale sarà questo numero minimo?

11) Anna e Bruno sono due pazientissimi operatori in un call center.
Hanno a disposizione lo stesso interminabile elenco di numeri telefonici fra cui scegliere quelli da comporre, e Anna ha deciso di selezionare una persona ogni 12, mentre Bruno intende prendere un nominativo ogni 20. Se in questo modo la persona al posto $x$ dell'elenco viene interpellata sia da Anna che da Bruno, anche la persona al posto $x + y$ sarà contattata 2 volte …
Quanto vale, al minimo, $y$ ?

12) Se si sa che il mcm e il MCD di due numeri valgono, rispettivamente, 72 e 6, ma i due numeri in gioco NON sono 72 e 6, di che numeri si tratta?

13) Rebecca has 20 table tennis balls and 16 table tennis paddles.
She wants to sell packages of balls and paddles bundled together.
What is the greatest number of packages she can sell with no leftover balls or paddles?
(dal sito http://tulyn.com)

14) Ho guarnito il mio albero di Natale con 4 festoni luminosi.
Nei festoni, le lampadine mandano un lampo di luce a intervalli di: 5, 6, 8 e 10 secondi rispettivamente.
Se alle ore 23 in punto hanno emesso la loro luce simultaneamente,
quante altre volte accadrà la stessa cosa entro le 24?

15) Si vuole lastricare un rettangolo di cortile di metri 3,90 X 2,34, utilizzando piastre di porfido quadrate, il cui lato sia di lunghezza (in cm) intera, e il più lungo possibile.
Quanti $cm^2$ misurerebbe la superficie occupata da ciascuna piastra?

16) Una bicicletta per bambini ha la ruota anteriore di raggio 20 cm, e quella posteriore di raggio 12 cm.
Se ad un certo istante la valvola per gonfiare le ruote si trova, in entrambe, nella stessa posizione (ad es., in alto), dopo quanti giri della ruota più grande si verificherà nuovamente la stessa situazione?

**QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA** (risposte a pag. 23)

**Riconosci l'affermazione esatta, che è una e una sola, fra quelle proposte.**




1) Posso dire con sicurezza che un numero è divisibile per 6:
   a) se so che la somma delle sue cifre è divisibile per 6
   b) se so che è pari, e la somma delle sue cifre è un multiplo di 9
   c) se so che le ultime sue due cifre formano un numero divisibile per 6
   d) in nessuno dei casi precedenti

2) Quale fra i seguenti numeri NON è multiplo sia di 4, che di 5, che di 6?
   a) 1234560 b) 7654320 c) 4321000 d) 1425360

3) Se due interi $a$, $b$ sono primi fra loro,
   allora una sola delle seguenti affermazioni è FALSA. Quale?
   a) il loro M.C.D. è 1
   b) il loro m.c.m. è uguale al loro prodotto
   c) la frazione $a/b$ non è semplificabile
   d) almeno uno di essi deve essere un numero primo

4) Riconosci l'unica affermazione FALSA.
   Se $p$ è un numero primo, allora:
   a) il successivo di $p$ non è mai un numero primo
   b) il quadrato di $p$ ha sempre 3 divisori
   c) $p$ ha tanti divisori quanti ne ha un altro qualsiasi numero primo

5) In quanti modi il numero 10230 è esprimibile come prodotto di 4 interi, tutti diversi da 1?
   a) 7 b) 8 c) 9 d) 10

6) Il M.C.D. di tre numeri, tutti diversi fra loro, è 3. Allora certamente:
   a) nessuno dei tre numeri è primo
   b) almeno uno ha un divisore primo diverso da 3
   c) i tre numeri sono tutti dispari
   d) i tre numeri non sono tutti pari

7) Il m.c.m. di due interi è 216. Allora una delle seguenti affermazioni è FALSA. Quale?
   a) I due numeri non possono essere entrambi dispari
   b) I due numeri possono non essere entrambi pari
   c) Uno dei due numeri deve essere multiplo di 4
   d) Uno dei due numeri deve essere multiplo di 6

8) Una sola fra le seguenti terne di numeri ha per m.c.m. 72 e per M.C.D. 1. Quale?
   a) 8, 9, 36 b) 3, 18, 72 c) 8, 18, 72 d) 4, 9, 18

9) Si sa che Andrea ha 5 volte gli anni di Bruno, e 3 volte gli anni di Carlo.
   Se Carlo ha meno di 15 anni, quanti anni può avere, al massimo, Bruno?
   a) 4 b) 5 c) 6 d) nessuna delle risposte precedenti è corretta

10) Per quale intero, al minimo, devo moltiplicare il numero 91,
    se voglio che il risultato della moltiplicazione sia un multiplo di 98?
    a) 7 b) 14 c) 28 d) 49

11) Un intero $a$, quando viene diviso per 24, dà come resto 5.
    Se $b$ è il più piccolo multiplo di 12 maggiore di $a$, allora la differenza $b-a$ vale:
    a) 5 b) 7 c) 19 d) Non si può determinare con sicurezza

12) Nel numero 99986x4, determina la cifra mancante sapendo che il numero stesso è divisibile per 12.
    a) x = 0 b) x = 4 c) Il problema è impossibile
    d) Non si può determinare con certezza, c'è più di un valore possibile per x

13) Nel seguente numero: 52x34866, il simbolo x indica la terza cifra da sinistra.
    Determina x in modo che il numero sia divisibile per 33.
    a) x = 3 b) x = 4 c) Il problema è impossibile
    d) Non si può determinare con certezza, c'è più di un valore possibile per x

14) Fra i numeri $n$ di quattro cifre tali che $n^2+7$ è divisibile per 7, qual è il più piccolo?
    a) 1001 b) 1007 c) 1008 d) 1010

**RISPOSTE, RISULTATI DEGLI ESERCIZI SULLA DIVISIBILITA' E SUI NUMERI PRIMI**

1) a) F La divisione, in matematica, è intesa come l'operazione inversa della moltiplicazione.
Il motivo per cui, ad esempio, si ha $28:4=7$,
è che il 7, se venisse moltiplicato per 4, restituirebbe il 28!
$28:4=7$ per il fatto che $7\cdot 4=28$.
Insomma, $a:b=c$ se, e soltanto se, risulta $c\cdot b=a$.
Consideriamo ora l'operazione $3:0$.
$3:0=?$
Dovremmo trovare un numero che moltiplicato per 0 dia 3 … ma non lo troveremo mai!
Un numero siffatto non esiste, perché qualsiasi numero, moltiplicato per 0, dà sempre e soltanto 0.
Allora l'operazione $3:0$ è IMPOSSIBILE, è priva di risultato!
Non c'è nessun numero che possa, diciamo così, "pretendere di esserne il risultato".
b) V
c) F L'operazione $0:0$ è considerata "non eseguibile", perché sarebbe "indeterminata",
in quanto qualunque numero potrebbe "pretendere di esserne il risultato".
Infatti $a:b=c$ quando $c\cdot b=a$,
ma nel caso della $0:0$ *qualunque* numero, moltiplicato per 0 (divisore), darebbe 0 (dividendo)!
d) V, il numero 0 è considerato "pari" e) V f) F g) F, un numero primo deve essere maggiore di 1
h) F "Divide" significa "è divisore di": ma la divisione per 0 è operazione "non eseguibile" i) V

2) a) F b) V c) V d) F e) V f) V
g) V h) F. Controesempi: 24, 72, ... i) V l) F. Controesempio: $a=15, b=16, c=35$

3) Non superiori a 35

4) L'elenco dei numeri primi non superiori a 125 è il seguente: 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31
37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113

5) Dopo aver risposto utilizzando i Criteri di divisibilità, o, nel caso del divisore 13, effettuando direttamente la divisione, un modo per controllare la correttezza delle risposte date è di prendere una calcolatrice per constatare se, dividendo, si ottiene un intero oppure un numero con la virgola.

6) $496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$

7) a) $7\ \text{DIV}\ 3=2\quad 7\ \text{MOD}\ 3=1$ b) $18\ \text{DIV}\ 3=6\quad 18\ \text{MOD}\ 3=0$
c) $2\ \text{DIV}\ 4=0\quad 2\ \text{MOD}\ 4=2$ d) $89\ \text{DIV}\ 7=12\quad 89\ \text{MOD}\ 7=5$
e) $5\ \text{DIV}\ 1=5\quad 5\ \text{MOD}\ 1=0$ f) 5 DIV 0, 5 MOD 0 non sono eseguibili
g) Se $a\ \text{MOD}\ b=0$, si può dire che $b$ è divisore di $a$
h) $x=7\cdot 29+15=218$ i) $6\cdot y+1=73\rightarrow y=12$ l) 4

8) 12 kit al massimo, ciascuno con 5 cioccolatini, 6 biscotti, 2 crostatine

9) Fra 336 anni

10) $9+12+10=31$ pezzi da 14 cm ciascuno

11) $y$ vale al minimo 60

12) 18 e 24

13) 4

14) $3600:120=30$ volte

15) 6084 $cm^2$

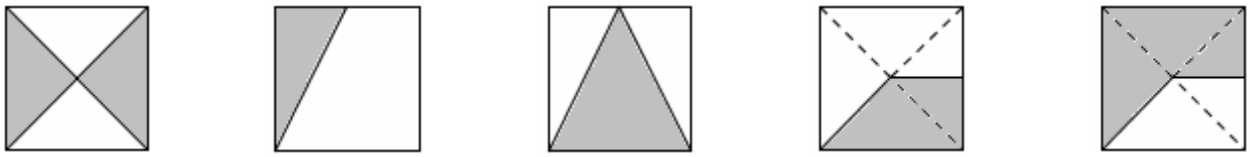
16) Dopo 3 giri della ruota più grande

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA di pagina 22

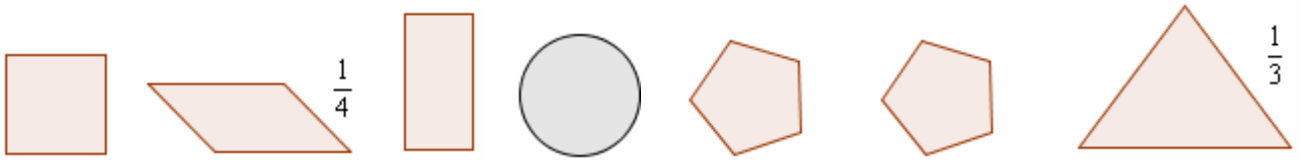
1) b) (essere multiplo di 9 implica essere multiplo di 3 … )
2) c) (4321000 non è divisibile per 3, quindi neppure per 6)
3) d) 4) a) il successivo di 2 (che è un numero primo) è 3, altro numero primo 5) d) 6) d) 7) d) 8) a)
9) c) Se il triplo dell'età di Carlo è uguale a 5 volte l'età di Bruno, allora il triplo dell'età di Carlo dovrà essere un numero divisibile per 5, quindi l'età di Carlo stessa dovrà essere divisibile per 5.
Il più grande numero <15 divisibile per 5 è 10;
Carlo potrà dunque, al massimo, avere 10 anni, Andrea 30 anni, Bruno 6 anni.
10) b) 11) b) 12) d) (x potrebbe valere 0 oppure 6) 13) c)
14) a) $n^2+7$ è divisibile per 7 se e solo se $n^2$ è divisibile per 7. Ed $n^2$ è divisibile per 7 se e solo se lo è $n$.
Allora si tratta di cercare il più piccolo numero di 4 cifre divisibile per 7, che risulta essere 1001.

**B) ESERCIZI SULLE FRAZIONI** (risposte a pag. 27)

1) Scrivi a quale frazione del quadrato corrisponde la parte ombreggiata:

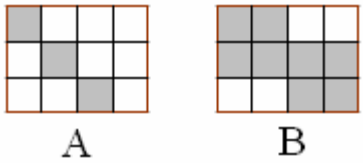


2) Considera le figure seguenti, e con la matita ombreggia, per ciascuna figura, la frazione di essa scritta accanto:

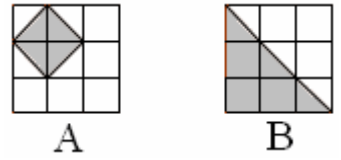



$\frac{1}{8}$ (come fare per un risultato perfetto?) $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{10}$ (c'è il modo di procedere con buona precisione: come?)

3) Con riferimento alla figura qui a fianco:
   a) la parte ombreggiata del rettangolo A, che frazione di A rappresenta?
   b) la parte ombreggiata del rettangolo A, che frazione della parte chiara di A rappresenta?
   c) la parte ombreggiata del rettangolo B, che frazione di B rappresenta?
   d) le due parti ombreggiate, che frazione rappresentano l'una dell'altra?



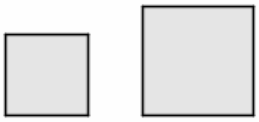

4) Con riferimento alla figura qui a fianco:
   a) la parte ombreggiata del rettangolo A, che frazione di A rappresenta?
   b) la parte ombreggiata del rettangolo A, che frazione della parte chiara di A rappresenta?
   c) la parte ombreggiata del rettangolo B, che frazione di B rappresenta?
   d) le due parti ombreggiate, che frazione rappresentano l'una dell'altra?




5) Sapendo che il segmento in figura è i 5/8 di un altro segmento s, determina graficamente s.



6) Se un segmento è i ¾ di un altro, il quadrato costruito sul primo che frazione rappresenta del quadrato costruito sul secondo? Perché?



7) Semplifica il più possibile, ossia "riduci ai minimi termini":

$\frac{48}{32}=\frac{...}{...}$; $\frac{18}{60}=\frac{...}{...}$; $\frac{6}{72}=\frac{...}{...}$; $\frac{56}{98}=\frac{...}{...}$; $\frac{264}{110}=\frac{...}{...}$; $\frac{87}{29}=\frac{...}{...}=...$; $\frac{96}{128}=\frac{...}{...}$; $\frac{169}{65}=\frac{...}{...}$; $\frac{22}{121}=\frac{...}{...}$; $\frac{56}{64}=\frac{...}{...}$

8) Riempi i puntini: $\frac{3}{4}=\frac{...}{20}$; $\frac{1}{7}=\frac{3}{...}$; $\frac{2}{5}=\frac{...}{20}$; $\frac{3}{11}=\frac{15}{...}$; $\frac{7}{6}=\frac{...}{12}$; $2=\frac{...}{30}$; $\frac{2}{3}=\frac{...}{57}$; $\frac{18}{45}=\frac{...}{30}$; $\frac{...}{24}=\frac{5}{6}$; $\frac{28}{12}=\frac{...}{15}$

**Confronto di due frazioni**

Per confrontare due frazioni, le si può trasformare entrambe in numeri con la virgola, eseguendo la divisione; oppure, le si porta allo stesso denominatore
(il minimo comune denominatore, o comunque un multiplo comune ai due denominatori;
dopodiché, la frazione col numeratore più piccolo sarà la minore fra le due).

Ad es., per confrontare le due frazioni $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$, si considera che $\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$ e $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$ e se ne conclude che $\frac{2}{5}>\frac{1}{3}$.

E' chiaro che a volte basta una semplice osservazione: dovendo confrontare $\frac{37}{36}$ e 1, capiamo subito che $\frac{37}{36}>1$ se osserviamo, banalmente, che una frazione il cui numeratore supera il denominatore è più grande dell'unità.

Ancora:

$\frac{6}{7}<\frac{7}{8}$, perché $\frac{6}{7}=1-\frac{1}{7}$ e $\frac{7}{8}=1-\frac{1}{8}$, ma $\frac{1}{7}>\frac{1}{8}$ quindi togliendo $\frac{1}{7}$ dall'unità resterà meno che togliendole $\frac{1}{8}$.

9) Ciò premesso, metti in ordine crescente i numeri seguenti: a) $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}$ b) $\frac{7}{10}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$ c) $2, \frac{7}{4}, \frac{11}{6}$

- ESEMPI GUIDATI su **somme e differenze di frazioni**:

a) $\frac{11}{12}-\frac{5}{8}=\frac{\overset{24:12\cdot 11}{22}\ -\ \overset{24:8\cdot 5}{15}}{\underset{\text{m.c.m.}(12,8)}{24}}=\frac{7}{24}$ b) $3-\frac{7}{10}+\frac{1}{5}=\frac{\overset{10:1\cdot 3}{30}\ -\ \overset{10:10\cdot 7}{7}\ +\ \overset{10:5\cdot 1}{2}}{\underset{\text{m.c.m.}(1,10,5)}{10}}=\frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{10}_{2}}=\frac{5}{2}$

$3\downarrow\frac{3}{1}$

la frazione va semplificata, se possibile!

c) $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+\frac{1}{12}=\frac{\overset{12:3\cdot 1}{4}\ +\ \overset{12:6\cdot 5}{10}\ +\ \overset{12:12\cdot 1}{1}}{\underset{\text{m.c.m.}(3,6,12)}{12}}=\frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{12}_{4}}=\frac{5}{4}$

la frazione va semplificata, se possibile!

10) ESERCIZI GUIDATI su somme e differenze di frazioni:

a) $\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{\dots+\dots}{24}=\frac{41}{24}$ b) $\frac{1}{15}+\frac{5}{6}=\frac{\dots+\dots}{30}=\dots=\frac{9}{10}$ c) $\frac{7}{4}-\frac{1}{8}=\frac{\dots-\dots}{8}=\frac{13}{8}$ d) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=\frac{\dots+\dots-\dots}{12}=\frac{5}{12}$

e) $3-\frac{2}{7}=\frac{\dots-\dots}{7}=\frac{19}{7}$ f) $\frac{1}{3}+1-\frac{1}{4}=\frac{\dots+\dots-\dots}{12}=\frac{13}{12}$ g) $\frac{3}{10}+\frac{1}{4}=\frac{6+\dots}{\dots}=\frac{11}{20}$ h) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{\dots+\dots+1}{\dots}=\dots=1$

11) ESERCIZI (somme e differenze di frazioni):

a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$ b) $\frac{7}{5}-\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{7}{6}$ d) $\frac{7}{22}-\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$ f) $4+\frac{3}{10}$ g) $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$ h) $2-\frac{3}{5}-\frac{1}{10}-\frac{4}{15}$

i) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$ l) $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}+\frac{1}{12}$ m) $0,\overline{5}+0,\overline{05}$ n) $0,04+\frac{4}{25}$ o) $\frac{1}{30}+0,1\overline{2}$ p) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$

- ESEMPI (**prodotti e quozienti di frazioni**):

a) $\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}=\frac{35}{48}$ b) $\frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{5}{\cancel{55}}}\cdot\frac{\cancel{33}^{3}}{\cancel{8}_{2}}=\frac{9}{10}$ c) $\frac{1}{\cancel{15}_{3}}\cdot\frac{\cancel{5}^{1}}{6}=\frac{1}{18}$ d) $\overset{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{5}{\cancel{6}_{3}}=\frac{10}{3}$ e) $\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{8}_{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{5}=\frac{1}{5}$

f) $\frac{3}{25}:\frac{21}{10}=\frac{\cancel{3}}{\underset{5}{\cancel{25}}}\cdot\frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{21}_{7}}=\frac{2}{35}$ g) $12:\frac{14}{5}=\overset{6}{\cancel{12}}\cdot\frac{5}{\cancel{14}_{7}}=\frac{30}{7}$ h) $\frac{\cancel{30}^{15}}{\cancel{16}_{8}}:12=\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{8}\cdot\frac{1}{\cancel{12}_{4}}=\frac{5}{32}$

12) ESERCIZI (prodotti e quozienti di frazioni):

a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}$ b) $\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{6}$ c) $\frac{19}{9}\cdot\frac{2}{7}$ d) $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{6}$ e) $26\cdot\frac{2}{13}$ f) $\frac{1}{8}\cdot 24\cdot\frac{11}{6}$ g) $\frac{15}{10}\cdot\frac{1}{2}$ h) $\frac{41}{200}\cdot 40$ i) $\frac{3}{5}:\frac{4}{15}$

l) $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ m) $\frac{23}{6}:\frac{46}{9}$ n) $7:\frac{42}{11}$ o) $\frac{42}{11}:7$ p) $\frac{12}{30}:\frac{9}{25}$ q) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}:\frac{1}{8}$ r) $\frac{18}{5}:\frac{2}{15}:\frac{6}{7}$ s) $\frac{18}{5}:\frac{2}{15}\cdot\frac{6}{7}$

PROBLEMI CON LE FRAZIONI

13) Un commerciante disponeva di 45 scatole di marmellata.
Ma ne ha vendute 1/5 la settimana scorsa, e questa settimana ha venduto ancora 1/3 delle rimanenti.
Quante gliene restano?
NOTA: molto sovente, in Matematica, la particella “di” significa “moltiplicato per”:
ad esempio, 1/3 “di” un numero equivale a dire 1/3 “moltiplicato per” quel numero.

14) Scolo ¼ di una bottiglia di vino, poi ancora i 2/5 della parte restante.
Quale frazione di bottiglia rimane per le successive bevute?
a) i 9/20? b) i 13/20? c) i 7/20? d) i 3/10?

15) Gianni compra per una festa 48 paste di cui 1/3 sono ciambelle, mentre i ¾ delle paste rimanenti son bignole. Poiché le paste che restano sono delle sfoglie, e una ciambella costa euro 0,40, una bignola 0,35 e una sfoglia 0,30, quanto spende Gianni in totale?

16) Ho piantato nel mio giardino rose, viole e tulipani. Se le rose sono 1/3 delle viole e le viole a loro volta 1/3 dei tulipani, dimmi quanti sono questi ultimi, sapendo che i fiori sono in totale 65.

17) Se i 3/4 di una distanza A equivalgono a 2/3 di una distanza B, quale frazione della distanza B si può dire che A rappresenti?

18) Pierino ha già speso i 5/6 della sua paghetta, e gli rimangono 5 euro. A quanto ammontava la paghetta?

DALLA PARTE FRAZIONARIA ALL'INTERO

**Supponiamo che i 3/5 di un sacco di cemento pesino kg 21. Quanto peserà il sacco intero?**

Peserà **kg** $\dfrac{\mathbf{21}}{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}} = \mathbf{21}\cdot\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} = \mathbf{35}$.

Infatti, se i $\frac{3}{5}$ del sacco pesano 21 kg, $\frac{1}{5}$ del sacco peserà $21:3=7$ kg

per cui il sacco intero avrà per peso kg $5\cdot(21:3)=\dfrac{5\cdot 21}{3}=\dfrac{21}{\frac{3}{5}}$.

Si sarebbe potuto procedere anche con una semplicissima "equazione": $\underbrace{\frac{3}{5}x=21}_{0{,}6\cdot x=21} \rightarrow x=\dfrac{21}{\frac{3}{5}}$

ESEMPIO

Sono un idraulico, e ho richiesto a un mio cliente un anticipo del $30\%=\dfrac{30}{100}=\dfrac{3}{10}$

sull'ammontare complessivo del mio lavoro. Il cliente mi ha quindi versato 840 euro.
Quanto dovrà ancora darmi, come saldo, a lavoro ultimato?

$\text{In tutto}=\dfrac{840}{\frac{3}{10}}=840\cdot\dfrac{10}{3}=2800$ euro; ancora da versare $=2800-840=1960$ euro.

Oppure:

$\text{frazione del prezzo ancora da versare}=1-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}$; ed essendo $\dfrac{7}{10}=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{7}{3}$, ancora da versare $=840\cdot\dfrac{7}{3}=1960$

19) In un piccolo cinema di periferia entrano 48 persone, e restano così ancora liberi i 3/5 dei posti. Quanti sono questi in totale?

20) Ho dato $\frac{1}{5}$ di una tavoletta di cioccolato a una collega, poi ho mangiato i $\frac{2}{3}$ di ciò che rimaneva, e ne è rimasto un pezzo lungo 4 cm. Quanto era lunga in origine la tavoletta?

21) Ho delle caramelle, delle quali i 5/12 sono alla frutta, i 2/5 alla menta, le 22 restanti al latte-e-miele. Quante sono in totale le caramelle?

22) In una scuola superiore, alla fine dell'anno scolastico, i promossi sono i 3/5 del totale, e gli alunni che devono colmare un debito formativo sono 1/3 del totale. Si domanda che frazione del totale rappresentano i respinti, e, sapendo che questi ultimi sono in numero di 18, quanti sono gli studenti promossi senza debito.

23) Una compagnia di bambini organizza una lotteria nella quale il 1° premio equivale a 1/4 della somma raccolta attraverso la vendita dei biglietti, il 2° premio a 1/8 di tale somma, mentre il rimanente viene suddiviso in 10 premi di consolazione da 30 centesimi l'uno. Determinare l'ammontare del 1° premio.

**Anselmo, presidente di un club di tifosi, compera, per conto degli iscritti al club, 24 biglietti per una partita di calcio. Successivamente però altre 4 persone si dichiarano interessate alla partita e quindi Anselmo va alla ricerca di altri biglietti, rivolgendosi ai bagarini, i quali nel frattempo hanno praticato un rincaro di 1/3 per via delle tante richieste.**
**Se in totale spende 1320 euro, determina il costo del biglietto prima e dopo il rincaro.**

Problemi come questo si risolvono molto agevolmente se si conoscono i rudimenti del calcolo letterale e se si sa impostare e risolvere una *equazione*.
Ma anche senza equazioni, ce la possiamo cavare, ad esempio, così:
se il biglietto senza rincaro fosse costato 1 euro, la spesa totale sarebbe stata di euro

$24+4\cdot\left(1+\dfrac{1}{3}\right)=24+4\cdot\dfrac{4}{3}=24+\dfrac{16}{3}=\dfrac{72+16}{3}=\dfrac{88}{3}$ $(=29{,}333...)$;

… ma poiché si sono spesi invece 1320 euro, il biglietto non costava (prima del rincaro) 1 euro,

ne costava invece $\dfrac{1320}{\frac{88}{3}}=1320\cdot\dfrac{3}{88}=45$.

Il costo iniziale del biglietto era dunque di 45 euro, dopo il rincaro di $45\cdot\left(1+\dfrac{1}{3}\right)=60$ euro.

24) Se l'età di Andrea è attualmente 1/3 di quella di sua madre Barbara, e la somma di queste due età è 48 anni, fra 6 anni quale frazione dell'età di Barbara rappresenterà l'età di Andrea?
a) sempre 1/3 b) 1/2 c) 3/7 d) 11/21

25) Un club conta 280 iscritti, ma le femmine sono solo i 3/4 dei maschi.
Quante donne e quanti uomini ci sono nel club?

26) Fra i partecipanti a una selezione, i 2/3 sono stati respinti e solo 1/18 promossi "con lode".
Se il numero dei respinti supera di 286 unità quello dei promossi con lode,
quanti sono stati i promossi "senza lode"?

27) Se un rubinetto è in grado di riempire una vasca in 2 ore, e un altro in 4 ore,
tenendoli aperti entrambi in quanto tempo si riempirà la vasca?
(Indicazione: il 1° rubinetto, in 1 ora, che frazione dell'intera vasca riempie? E il 2°? Quindi …)

28) Se un rubinetto è in grado di riempire una vasca in 1/2 ora, e un altro in 1/4 d'ora,
tenendoli aperti entrambi in quanto tempo si riempirà la vasca?

29) Se un rubinetto è in grado di riempire una vasca in *a* ore, e un altro in *b* ore,
tenendoli aperti entrambi in quanto tempo si riempirà la vasca?

30) Una squadra di 5 braccianti è in grado di portare a termine una vendemmia in 3 giorni.
Se al posto dei 5 braccianti lavorassero i loro 13 bambini, ultimerebbero la vendemmia in 2 giorni.
La giornata lavorativa è di 10 ore.
E se adulti e piccoli vendemmiassero assieme, in quante ore si finirebbe il lavoro?

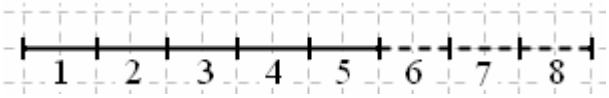
## RISPOSTE AGLI ESERCIZI SULLE FRAZIONI

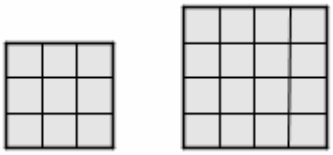
1) 1/2, 1/4, 1/2, 3/8, 5/8

2) Nel parallelogrammo, tracciare le due diagonali; i 4 triangoli ottenuti hanno tutti la stessa estensione, perché han tutti ugual base e uguale altezza, per cui ciascuno di essi è 1/4 del parallelogrammo.
Nel triangolo, dividere un lato in 3 parti uguali e congiungere i due punti di suddivisione col vertice opposto; i 3 triangoli ottenuti hanno tutti la stessa estensione, in quanto hanno ugual base e la medesima altezza; per cui ciascuno di essi sarà la terza parte del triangolo dato.

3) a) 3/12=1/4 b) 3/9=1/3 c) 8/12=2/3 d) la prima i 3/8 della seconda, la seconda gli 8/3 della prima

4) a) 4/18=2/9 b) 4/14=2/7 c) 1/2 d) la prima, i 4/9 della seconda; la seconda, i 9/4 della prima

5) 


6) I $\frac{9}{16}$: 

7) $\frac{48}{32}=\frac{3}{2}$; $\frac{18}{60}=\frac{3}{10}$; $\frac{6}{72}=\frac{1}{12}$; $\frac{56}{98}=\frac{4}{7}$; $\frac{264}{110}=\frac{12}{5}$; $\frac{87}{29}=\frac{3}{1}=3$; $\frac{96}{128}=\frac{3}{4}$; $\frac{169}{65}=\frac{13}{5}$; $\frac{22}{121}=\frac{2}{11}$; $\frac{56}{64}=\frac{7}{8}$

8) $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$; $\frac{1}{7}=\frac{3}{21}$; $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$; $\frac{3}{11}=\frac{15}{55}$; $\frac{7}{6}=\frac{14}{12}$; $2=\frac{60}{30}$; $\frac{2}{3}=\frac{38}{57}$; $\frac{18}{45}=\frac{12}{30}$; $\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$; $\frac{28}{12}=\frac{35}{15}$

9) a) $\frac{5}{7}<\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{5}<\frac{2}{3}<\frac{7}{10}$ c) $\frac{7}{4}<\frac{11}{6}<2$

10) a) $\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{20+21}{24}=\frac{41}{24}$ b) $\frac{1}{15}+\frac{5}{6}=\frac{2+25}{30}=\frac{\cancel{27}^{9}}{\cancel{30}_{10}}=\frac{9}{10}$ c) $\frac{7}{4}-\frac{1}{8}=\frac{14-1}{8}=\frac{13}{8}$ d) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=\frac{6+8-9}{12}=\frac{5}{12}$

e) $3-\frac{2}{7}=\frac{21-2}{7}=\frac{19}{7}$ f) $\frac{1}{3}+1-\frac{1}{4}=\frac{4+12-3}{12}=\frac{13}{12}$ g) $\frac{3}{10}+\frac{1}{4}=\frac{6+5}{20}=\frac{11}{20}$ h) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3+2+1}{6}=\frac{\cancel{6}}{\cancel{6}}=1$

11) a) $\frac{19}{12}$ b) $\frac{17}{30}$ c) 3 d) $\frac{3}{44}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{43}{10}$ g) $\frac{1}{12}$ h) $\frac{31}{30}$ i) 0 l) $\frac{1}{6}$ m) $\frac{20}{33}$ n) $\frac{1}{5}$ o) $\frac{7}{45}$ p) $\frac{127}{64}$

12) a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{7}{6}$ c) $\frac{38}{63}$ d) $\frac{7}{9}$ e) 4 f) $\frac{11}{2}$ g) $\frac{3}{4}$ h) $\frac{41}{5}$ i) $\frac{9}{4}$ l) $\frac{3}{2}$ m) $\frac{3}{4}$ n) $\frac{11}{6}$ o) $\frac{6}{11}$ p) $\frac{10}{9}$ q) 1 r) $\frac{63}{2}$ s) $\frac{162}{7}$

13) 24 14) a) 15) 17 euro e 20 centesimi 16) 45 tulipani 17) A rappresenta gli 8/9 di B

18) 30 euro 19) 120 20) 15 cm 21) 120 22) 1/15; 162 23) 1 euro e 20 centesimi 24) c)

25) 120 donne e 160 uomini 26) 130 27) 4/3 di ora = 1 ora e 20' 28) 1/6 di ora = 10'

29) In un numero di ore dato da $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{ab}{a+b}$ 30) In 12 ore (1 giornata lavorativa + 2 ore)

## C) ESERCIZI SULLE PROPRIETA' DELLE OPERAZIONI E DELLE POTENZE

Puoi cliccare sulla freccia per la correzione di A) … Z) ⇨

**I) Per ciascuna espressioncina, a ogni passaggio, riconosci se è stata applicata qualche proprietà delle quattro operazioni o delle potenze; in caso affermativo, devi saperne dire il nome e descriverla.**

A) $43\cdot 21 = 43\cdot(20+1) = 860+43 = 903$

B) $105\cdot 107 = (100+5)(100+7) =$
$= 10000+700+500+35 =$
$= 10000+1200+35 = 11235$

C) $900:15 = (30\cdot 30):15 = 2\cdot 30 = 60$

D) $215:5 = (200+15):5 = 40+3 = 43$

E) $215:5 = \frac{215}{5} = \frac{215\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{430}{10} = 43$

F) $32\cdot 25 = 32\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 100\right) = \left(32\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot 100 = 8\cdot 100 = 800$

G) $1200:25 = 4800:100 = 48$

H) $997-239 = 1000-242 = 758$

I) $25\cdot 28 = 25\cdot(4\cdot 7) = 25\cdot 4\cdot 7 = 100\cdot 7 = 700$

J) $9{,}06:0{,}003 = 9060:3 = (9000+60):3 =$
$= 3000+20 = 3020$

K) $2^5\cdot 2^3:2^7 = 2^8:2^7 = 2^1 = 2$

L) $\left(2^4\right)^3:\left(2^3\right)^2 = 2^{12}:2^6 = 2^6 = 64$

M) $30^5 = (3\cdot 10)^5 = 3^5\cdot 10^5 =$
$= 243\cdot 100000 = 24300000$

N) $15^2\cdot 4^2 = (15\cdot 4)^2 = 60^2 = (6\cdot 10)^2 = 36\cdot 100 = 3600$

O) $8^4:2^8 = \left(2^3\right)^4:2^8 = 2^{12}:2^8 = 2^4 = 16$

P) $20^3:4^3 = 5^3 = 125$ Q) $\left(\frac{4}{11}\right)^7\cdot\left(\frac{11}{4}\right)^7 = 1^7 = 1$

R) $4^7\cdot 8^2 = \left(2^2\right)^7\cdot\left(2^3\right)^2 = 2^{14}\cdot 2^6 = 2^{20} = 1048576$

S) $\left(7^6+7^5\right):7^4 = 7^6:7^4+7^5:7^4 = 7^2+7 = 49+7 = 56$

T) $\frac{7^6\cdot 7^5}{7^4} = 7^6\cdot 7 = 7^7$ U) $2^4\left(2^6+2^8\right) = 2^{10}+2^{12}$

V) $25^4\cdot 4^3 = 25\cdot 25^3\cdot 4^3 = 25\cdot 100^3 = 25000000$

E), F), G) si riferiscono ad accorgimenti MOLTO UTILI PER IL **CALCOLO MENTALE**:

- dividere per 5 è come moltiplicare per 2 e poi dividere per 10 (o viceversa);
- moltiplicare per 5 è come dividere per 2 e poi moltiplicare per 10 (o viceversa);
- moltiplicare per 25 è come dividere per 4 e poi moltiplicare per 100 (o viceversa);
- dividere per 25 è come moltiplicare per 4 e poi dividere per 100 (o viceversa).

**II) Le espressioni W, X, Y, Z sono SBAGLIATE. Perché?**

W) $640:20:2 = 640:10 = 64$

X) $3+17\cdot 21 = 20\cdot 21 = 420$

Y) $(12\cdot 15):3 = (12:3)\cdot(15:3) = 4\cdot 5 = 20$

Z) $(4+6)(5+8) = 20+48 = 68$

**III) ESPRESSIONI CON POTENZE** (risultati a fondo pagina; **clicca sulla freccia per la correzione** ⇨)

1) $5^2\cdot 5^4:5^3$ 2) $5^2+5^4:5^3$ 3) $\left(5^2+5^4\right):5^3$ 4) $\left(7^4\right)^3:\left(7^5\right)^2$

5) $2^{16}:2^8:2^4$ 6) $2^{16}:\left(2^8:2^4\right)$ 7) $\frac{2^3\cdot 2^5\cdot 2^7}{2^2\cdot 2^4\cdot 2^6}$ 8) $\frac{2^3+2^5+2^7}{2^2+2^4+2^6}$

9) $\frac{2^8\cdot 2^4\cdot 2^2\cdot 2}{\left\{\left[\left(2^2\right)^2\right]^2\right\}^2}$ 10) $\frac{2^8\cdot 2^4:2^2\cdot 2}{2^8:2^4\cdot 2^2:2}$ 11) $\frac{2^8\cdot 2^4:\left(2^2\cdot 2\right)}{2^8:\left(2^4\cdot 2^2\right):2}$ 12) $\frac{2^8+2^4:2^2+2}{2^8:2^4+2^2:2}$

13) $\frac{1^2+2^2+3^2}{6^2}$ 14) $\frac{1^3+2^3+3^3}{6^3}$ 15) $\frac{1^4+2^4+3^4}{6^4}$ 16) $\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{6^2}$ 17) $\frac{1^3\cdot 2^3\cdot 3^3}{6^3}$ 18) $\frac{1^4\cdot 2^4\cdot 3^4}{6^4}$

**IV) Le espressioni seguenti (19, 20, 21, 22) possono essere svolte con grande comodità se le si imposta in modo opportuno, tenendo presenti le proprietà delle potenze. Come?** **Correzione** ⇨

19) $81^8:9^{15}$ 20) $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\cdot\left(\frac{12}{5}\right)^{10}$ 21) $\left(\frac{3}{5}\right)^7\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^9\cdot 3^3$ 22) $\frac{44^4}{22^3}$

**RISULTATI**

1) 125 2) 30 3) $26/5 = 5{,}2$ 4) 49 5) $2^4 = 16$ 6) $2^{12} = 4096$ 7) 8 8) 2 9) 1/2
10) $2^6 = 64$ 11) $2^8 = 256$ 12) 131/9 13) 7/18 14) 1/6 15) 49/648 16) 1 17) 1 18) 1
19) 9 20) 1024 21) 75 22) $2^5\cdot 11 = 32\cdot 11 = 352$

## D) ESERCIZI SULLE OPERAZIONI, COMPRESE LE POTENZE, E LE LORO PROPRIETA', NONCHE' SULL'USO DELLE PARENTESI (risposte a pag. 30)

1) Riempi i puntini, e dì quale proprietà è stata applicata:

a) $7\cdot(10+2)=70+...$ b) $(4+6)\cdot 5=...+30$ c) $(24+6):6=4+...$
d) $364:26=182:...$ e) $423-36=400-...$ f) $(10+1)(3+1)=30+...+...+...$

2) Scrivi il 2° membro, quando possibile.
Riconoscerai che ci sono invece tre casi nei quali si resta "bloccati" al 1° membro senza poter proseguire:

a) $a\cdot(b+c+d)=$ b) $(a+b+c)\cdot d=$ c) $\dfrac{a+b+c}{d}=$ d) $\dfrac{a}{b+c+d}=$

e) $(a+b+c)\cdot(d+e)=$ f) $\dfrac{a+b+c}{d+e}=$ g) $\dfrac{1}{a+b}=$

3) Il prodotto è distributivo rispetto alla somma quando la somma è a destra oppure anche a sinistra, mentre il quoziente è distributivo rispetto alla somma soltanto quando la somma è a ……

4)

I) Se scrivo $24:(2+4)=12+6$
a) sbaglio
b) applico una proprietà invariantiva
c) applico una proprietà distributiva

II) Se scrivo $(60+45):3=20+45$
a) sbaglio
b) applico una proprietà associativa
c) applico una proprietà distributiva

III) Se scrivo $5600:800=56:8$
a) sbaglio
b) applico una proprietà invariantiva
c) applico una proprietà distributiva

IV) Se scrivo $3701-347=3700-346$
a) sbaglio
b) applico una proprietà invariantiva
c) applico una proprietà distributiva

V) Se scrivo $(8+16):(4+2)=8:4+8:2+16:4+16:2$
a) sbaglio
b) applico una proprietà invariantiva
c) applico una proprietà distributiva

VI) Se scrivo $(8+16)\cdot(4+2)=8\cdot4+8\cdot2+16\cdot4+16\cdot2$
a) sbaglio
b) applico una proprietà invariantiva
c) applico una proprietà distributiva

VII) Se scrivo $a:b=(a+c):(b+c)$
a) sbaglio
b) applico una proprietà invariantiva
c) applico una proprietà distributiva

VIII) Se scrivo $a:b=(a\cdot c):(b\cdot c)$
a) sbaglio
b) applico una proprietà invariantiva
c) applico una proprietà distributiva

5) Riempi i puntini, e dì quale proprietà è stata applicata.
Nel caso non sia possibile applicare nessuna proprietà, esegui il calcolo.

a) $3^4\cdot3^2=...^{\cdots}$ b) $(3^4)^2=...^{\cdots}$ c) $3^4\cdot3=...^{\cdots}$ d) $3^4:3=...^{\cdots}$ e) $3^4\cdot2^4=...^{\cdots}$
f) $10^4:2^4=...^{\cdots}$ g) $3^4+3=...$ h) $3^4+2^4=...$ i) $10^4-2^4=...$ l) $5^3\cdot...^{\cdots}=5^{12}$
m) $(4\cdot10)^3=4^{\cdots}\cdot10^{\cdots}$ n) $(8:2)^4=8^{\cdots}:2^{\cdots}$ o) $10^6:10^{\cdots}=10^3$ p) $5^2\cdot5\cdot5^2=5^{\cdots}$ q) $\left[(2^2)^3\right]^4=2^{\cdots}$
r) $5^3:...^{\cdots}=5$ s) $7^4:...=7^3$ t) $(5^3)^{\cdots}=5^{12}$ u) $5^3\cdot...^{\cdots}=20^3$ v) $10^3:...^{\cdots}=5^3$

6) Si dice "**quadrato perfetto**" un intero, che sia uguale al quadrato di un altro intero.
Ad esempio, 144 è un "quadrato perfetto", perché $144=12^2$.
I primi quadrati perfetti sono:

$\mathbf{0}=0^2$, $\mathbf{1}=1^2$, $\mathbf{4}=2^2$, $\mathbf{9}=3^2$, $\mathbf{16}=4^2$, $\mathbf{25}=5^2$, $\mathbf{36}=6^2$, $\mathbf{49}=7^2$, $\mathbf{64}=8^2$, $\mathbf{81}=9^2$, $\mathbf{100}=10^2$.

Analogo è il significato della locuzione "**cubo perfetto**".

Per stabilire se un intero dato è un quadrato perfetto,
basta prendere la macchinetta calcolatrice ed estrarne la radice quadrata
(la radice quadrata di un numero è quel numero che elevato al quadrato dà come risultato il numero iniziale);
se in questo modo si ottiene un intero, la risposta è affermativa.

Fra i seguenti numeri, stabilisci quali sono quadrati o cubi perfetti, *senza però toccare la calcolatrice*.
Puoi procedere per tentativi, oppure ricorrere alla scomposizione in fattori primi: si avrà un quadrato perfetto quando nella scomposizione in fattori primi ciascun fattore compare con esponente pari, un cubo perfetto se …

a) 64 b) 216 c) 729 d) 4096 e) 324 f) 250 g) 2500 h) 1000000 i) 7529536 l) 85184

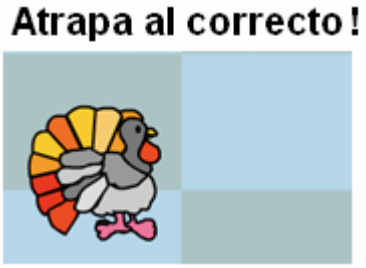
7) VERO O FALSO?

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) $3^0=0$ | V | F | f) $0^0=1$ | V | F | m) $3^3:3^3=3$ | V | F | r) $25^{25}:5^5=5^5$ | V | F |
| b) $1^0=1$ | V | F | g) $3^0=1$ | V | F | n) $(3^3)^3=3^{27}$ | V | F | s) $16^8:2^{32}=1$ | V | F |
| c) $1^3=3$ | V | F | h) $3^3\cdot3^3=3^9$ | V | F | o) $3^3+3^3=3^6$ | V | F | t) $\forall n,\ 2\cdot2^n=4^n$ | V | F |
| d) $3^1=1$ | V | F | i) $5^3-5^2=5$ | V | F | p) $3^{333}-3^{333}=0$ | V | F | u) $\forall n,\ 2^n:2^n=2$ | V | F |
| e) $0^0=0$ | V | F | l) $3^3:3^3=0$ | V | F | q) $(3333^3)^0=1$ | V | F | v) $\forall n,\ (2^n)^n=2^{2n}$ | V | F |

8) Introduci le parentesi, nel primo membro, affinché l'uguaglianza sia corretta.
Determina inoltre il valore esatto dell'espressione a primo membro, in assenza di parentesi.

a) $2+3\cdot4+5\cdot6+7=5\cdot4+5\cdot13$
b) $2+3\cdot4+5\cdot6+7=2+17\cdot6+7$
c) $2+3\cdot4+5\cdot6+7=2+3\cdot9\cdot6+7$
d) $2+3\cdot4+5\cdot6+7=19\cdot6+7$
e) $64:16:2+2=64:8+2$
f) $64:16:2+2=64:16:4$
g) $6+2^2:2=8^2:2$
h) $6+2^2:2=10:2$
i) $2\cdot2^2+2^3=2^3+2^4$

**QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA (riconosci l'unica risposta esatta)**




1) Se la divisione intera di *n* per 29 dà come quoziente 11 e come resto 7, allora *n* è uguale a
a) 200 b) 214 c) 312 d) 326

2) Quali delle seguenti uguaglianze equivale ad affermare che "dividendo *x* per 2, si ottiene quoziente *y* e resto 1"?
a) $x:2=y+1$ b) $x:2+1=y$ c) $2x+1=y$ d) $2y+1=x$

3) Il cubo della metà del quadrato di 6 è:
a) <1000 b) compreso fra 1000 e 5000 c) compreso fra 5000 e 10000 d) >10000

Per il fratellino/sorellina:
www.vedoque.com

4) Uno dei seguenti numeri è un cubo perfetto. Quale? a) 536 b) 8192 c) 16384 d) 32768

5) Cosa fa $\dfrac{10^{(4^3)}:(10^4)^3}{10^{43}}$? a) 100 milioni b) 1 miliardo c) 10 miliardi d) 100 miliardi

6) Con quanti zeri finali si scrive il numero "1 milione elevato a 1 milione"?
a) 12 b) 36 c) 46656 d) 6 milioni e) 6 mila miliardi f) 36 mila miliardi

7) Il termine "google" ha, in matematica, il significato di "1 seguito da cento zeri".
Con quanti zeri finali si scriverà la radice quadrata di 1 google, ossia il numero il cui quadrato è 1 google?
a) 10 b) 50 c) non termina, questo numero, con cifre 0

8) Il rapporto fra il cubo del triplo di un numero e il triplo del cubo dello stesso numero (non nullo) è:
a) 1 b) 3 c) 9 d) 27 e) dipende da quanto vale quel numero

9) $\dfrac{2^{1000}\cdot4^{500}}{16^{100}}=$ a) $2^{1600}$ b) 32 c) $4^{1400}$ d) $8^{1300}$ e) nessuno dei valori precedenti

10) Quanti interi di 4 cifre sono cubi perfetti? a) 11 b) 12 c) 13 d) 14

**RISPOSTE AGLI ESERCIZI SU OPERAZIONI E PARENTESI**

1) a) $70+14$ b) $20+30$ c) $4+1$ d) $182:13$ e) $400-13$ f) $30+10+3+1$

2) a) $ab+ac+ad$ b) $ad+bd+cd$ c) $\dfrac{a}{d}+\dfrac{b}{d}+\dfrac{c}{d}$ d) STOP e) $ad+ae+bd+be+cd+ce$ f) STOP g) STOP

3) soltanto quando la somma è a sinistra 4) I: a) II: a) III: b) IV: b) V: a) VI: c) VII: a) VIII: b)

5) a) $3^6$ b) $3^8$ c) $3^5$ d) $3^3$ e) $6^4$ f) $5^4$ g) 84 h) 97 i) 9984 l) $5^3\cdot5^9$ m) $4^3\cdot10^3$
n) $8^4:2^4$ o) $10^6:10^3$ p) $5^5$ q) $2^{24}$ r) $5^3:5^2$ s) $7^4:7$ t) $(5^3)^4$ u) $5^3\cdot4^3$ v) $10^3:2^3$

6) a) Q e C: $64=8^2=4^3$ b) C c) Q, C d) Q, C e) Q f) né Q né C g) Q h) Q, C i) Q, C l) C

7) a) F b) V c) F d) F e) F (operazione non eseguibile, perché "indeterminata") f) F: vedi quesito e) g) V h) F
i) F l) F m) F n) F o) F p) V q) V r) F s) V t) F: $2\cdot2^n=2^{n+1}$ u) F: $2^n:2^n=1$ v) F: $(2^n)^n=2^{(n^2)}=2^{n^2}$

8) a) $(2+3)\cdot4+5\cdot(6+7)=5\cdot4+5\cdot13$; *senza parentesi*: 51 b) $2+(3\cdot4+5)\cdot6+7=2+17\cdot6+7$ *s.p.*: 51
c) $2+3\cdot(4+5)\cdot6+7=2+3\cdot9\cdot6+7$ *s.p.*: 51 d) $(2+3\cdot4+5)\cdot6+7=19\cdot6+7$; *s.p.*: 51
e) $64:(16:2)+2=64:8+2$ *s.p.*: 4 f) $64:16:(2+2)=64:16:4$ *s.p.*: 4
g) $(6+2)^2:2=8^2:2$ *s.p.*: 8 h) $(6+2^2):2=10:2$ *s.p.*: 8 i) $2\cdot(2^2+2^3)=2^3+2^4$ *s.p.*: 16

Quesiti a Risposta Multipla: 1) d 2) d 3) c 4) d 5) b 6) d 7) b 8) c 9) a 10) b

## E) RIFLESSIONI SULLE OPERAZIONI, E SUGLI ERRORI PIU' FREQUENTI

(le risposte sono alla pagina seguente)

- SCEGLI IL RISULTATO ESATTO:

I) $4\cdot\frac{3}{5}=?$ $\quad a)\frac{12}{20}$ $b)\frac{12}{5}$ $c)\frac{3}{20}$

II) $\frac{7}{11}:2=?$ $\quad a)\frac{14}{11}$ $b)\frac{7}{22}$

III) $\frac{3^2}{7}=?$ $\quad a)\frac{9}{7}$ $b)\frac{9}{49}$

- GIUSTO O SBAGLIATO?

Metti una crocetta sulla risposta esatta:

IV) $\dfrac{\overset{5}{\cancel{25}}\cdot\overset{2}{\cancel{14}}}{11\cancel{55}\cdot\cancel{21}_{3}}$ $\quad$ G $\quad$ S

V) $\dfrac{\overset{5}{\cancel{25}}+\overset{2}{\cancel{14}}}{11\cancel{55}+\cancel{21}_{3}}$ $\quad$ G $\quad$ S

VI) $\dfrac{\overset{4}{\cancel{24}}+5}{\cancel{18}_{3}}$ $\quad$ G $\quad$ S

VII) $\dfrac{\cancel{33}^{3}}{\dfrac{5}{\cancel{22}^{2}}}$ $\quad$ G $\quad$ S

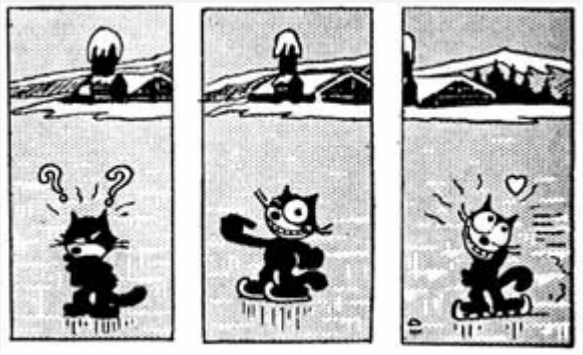
VIII) $\dfrac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{15}_{3}}:\dfrac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{35}_{7}}$ $\quad$ G $\quad$ S

IX) $\dfrac{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}{15}=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\cdot 15$ $\quad$ G $\quad$ S

X) $\dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}=\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{6}{5}\right)$ $\quad$ G $\quad$ S

XI) $\dfrac{4}{3+5}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{5}$ $\quad$ G $\quad$ S

XII) $\dfrac{8}{4+2}=8\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$ $\quad$ G $\quad$ S



- TROVA L'ERRORE, SE C'E'

XIII) $12\cdot\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}\right)\cdot 7-5\right]=12\cdot\left[\dfrac{28+21+12}{\cancel{84}12}\cdot\cancel{7}-5\right]=$

$=12\cdot\left[\dfrac{61}{12}-5\right]=\cancel{12}\cdot\dfrac{61-60}{\cancel{12}}=1$

XIV) $\left(\dfrac{10+\frac{1}{2}}{5+\frac{3}{2}}\right)^2=\left(\dfrac{\overset{2}{\cancel{10}}+\frac{1}{2}}{\underset{1}{\cancel{5}}+\frac{3}{2}}\right)^2=\left(\dfrac{\frac{4+1}{2}}{\frac{2+3}{2}}\right)^2=\left(\dfrac{\frac{\cancel{5}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{5}}{\cancel{2}}}\right)^2=1^2=1$

XV) $\dfrac{\frac{2^2}{3}-\frac{2}{3^2}}{\frac{1}{4^2-2^2-2+0^2}}=\dfrac{\frac{4}{3}-\frac{2}{9}}{\frac{1}{16+4-2}}=\dfrac{\frac{12-2}{9}}{\frac{1}{18}}=\dfrac{10}{\cancel{9}}\cdot\cancel{18}^{2}=20$

XVI) $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{6\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}=\dfrac{\frac{4-3}{12}}{\cancel{6}\cdot\frac{4+3}{\cancel{12}_{2}}}=\dfrac{\frac{1}{\cancel{12}_{6}}\cdot\frac{\cancel{2}}{1}}{\frac{7}{2}}=\dfrac{1}{\cancel{6}_{3}}\cdot\dfrac{\cancel{2}}{7}=\dfrac{1}{21}$

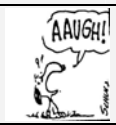
XVII) $\dfrac{\frac{1+\frac{1}{6}}{2}+\frac{1-\frac{1}{6}}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 12}=\dfrac{\frac{\frac{7}{6}}{2}+\frac{\frac{5}{6}}{2}}{2}=\left(\frac{7}{12}+\frac{5}{12}\right)\cdot\frac{1}{2}=\dfrac{\cancel{12}}{\cancel{12}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

XVIII) $\dfrac{4\cdot\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{42}-\frac{1}{14}\right)}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=\dfrac{4\cdot\frac{2+1-3}{42}}{\frac{4-1}{6}}=\dfrac{4\cdot\frac{0}{42}}{\frac{3}{6}}=\dfrac{0}{\frac{3}{6}}=0$

XIX) $\left(\dfrac{\frac{3}{2}+2\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{2}}{5}\right)^{10}=\left(\dfrac{\frac{3}{2}+\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{12}_{3}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{9}}{\cancel{2}}}{5}\right)^{10}=$

$=\left[\left(\frac{3}{2}+1\right)\cdot\frac{1}{5}\right]^{10}=\left(\dfrac{\cancel{5}}{2}\cdot\dfrac{1}{\cancel{5}}\right)^{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}$

**RISPOSTE**

| | |
|---|---|
| I) $4\cdot\frac{3}{5}=?$ $\quad a)\frac{12}{20}$ ~~$b)\frac{12}{5}$~~ $c)\frac{3}{20}$ | Infatti $4\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4\cdot3}{1\cdot5}=\frac{12}{5}$. D'altronde, 4 volte 3/5 equivale a 4 volte 3 fette da 1/5 ciascuna, cioè 12 fette da 1/5, ossia 12/5. |
| II) $\frac{7}{11}:2=?$ $\quad a)\frac{14}{11}$ ~~$b)\frac{7}{22}$~~ | Dividere per 2 equivale a moltiplicare per $\frac{1}{2}$. $\frac{7}{11}:2=\frac{7}{11}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{22}$ |
| III) $\frac{3}{7}^2=?$ $\quad$ ~~$a)\frac{9}{7}$~~ $b)\frac{9}{49}$ | In assenza di parentesi, l'esponente si riferisce soltanto al numero più vicino (in questo caso, al 3). Invece: $\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{9}{49}$, $\frac{3}{7^2}=\frac{3}{49}$ |
| IV) $\frac{\overset{5}{\cancel{25}}\cdot\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{3}{\cancel{55}}\cdot\underset{3}{\cancel{21}}}$ ~~G~~ $S$ | Tutti prodotti, si può semplificare (proprietà invariantiva) |
| V) $\frac{\overset{5}{\cancel{25}}+\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{3}{\cancel{55}}+\underset{3}{\cancel{21}}}$ $G$ ~~S~~   | Errore gravissimo. In una frazione, si può semplificare "sopra con sotto" soltanto se la semplificazione avviene (come nel IV)<br>FATTORE CON FATTORE, MAI ADDENDO CON ADDENDO! |
| VI) $\frac{\overset{4}{\cancel{24}}+5}{\underset{3}{\cancel{18}}}$ $G$ ~~S~~   | Altro erroraccio tremendo (vedi esercizio precedente) |
| VII) $\frac{\frac{\overset{3}{\cancel{33}}}{5}}{\frac{\cancel{22}^{2}}{7}}$ ~~G~~ $S$ | Giusto. In un quoziente fra due frazioni, si possono semplificare i due numeratori fra loro (così come i due denominatori fra loro).<br>Pensa infatti che trasformando in moltiplicazione si avrebbe: $\frac{\overset{3}{\cancel{33}}}{5}\cdot\frac{7}{\cancel{22}_{2}}$ |
| VIII) ~~G~~ $S$ | Giusto. Vedi esercizio precedente. |
| IX) $\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}{15}=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\cdot15$ $G$ ~~S~~ | Ma no! Sarebbe come a dire che la "diviso" e la "per" sono la stessa cosa!<br>Lo svolgimento corretto è invece: $\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}{15}=\frac{\frac{6+5}{30}}{\frac{15}{1}}=\frac{11}{30}\cdot\frac{1}{15}=\frac{11}{450}$ |
| X) $\frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}=\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{6}{5}\right)$ $G$ ~~S~~ | No, no, no.<br>"Capovolgere" una somma non equivale a capovolgere i singoli addendi!<br>Lo svolgimento esatto è invece: $\frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{9+10}{12}}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{19}{12}}=\frac{1}{7}\cdot\frac{12}{19}=\frac{12}{133}$ |
| XI) $\frac{4}{3+5}=\frac{4}{3}+\frac{4}{5}$ $G$ ~~S~~ | Sbagliatissimo "spezzare" la frazione in questo modo. $\frac{4}{3+5}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.<br>Invece sarebbe corretto spezzare se la somma fosse "sopra":<br>ad esempio $\frac{3+5}{4}=\frac{3}{4}+\frac{5}{4}$<br>Insomma, ricorda: $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ mentre $\frac{a}{b+c}\overset{\text{DIVERSO DA}}{\neq}\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$ |
| XII) $\frac{8}{4+2}=8\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$ $G$ ~~S~~ | Erroraccio del tipo X).<br>"Capovolgere" una somma non equivale a capovolgere i singoli addendi. |

XIII) Tutto giusto. Anche l'uso delle parentesi è corretto: quando si fa il denominatore comune, si ottiene una sola frazione, quindi è meglio evitare le parentesi (a meno che la frazione sia elevata ad esponente). E' vero, la quadra potrebbe diventare tonda, ma lasciare la quadra non è affatto un errore.

XIV) Errore iniziale: non si può semplificare il 10 "sopra" col 5 "sotto", perché sono addendi e non fattori.

XV) Sbagliato, per via di una distrazione: $-2^2$ deve diventare $-4$ e non $+4$

XVI) Errore nel "capovolgimento: $\frac{\frac{4-3}{12}}{2}$ deve diventare $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}$ e NON $\frac{1}{12}\cdot2$ XVII), XVIII), XIX) sono giuste

## F) ESPRESSIONI

1) $4+6\cdot 2+4$ 2) $6+5\cdot 4+3\cdot 2$ 3) $30-3\cdot 4-2$ 4) $13+12:2+1$ 5) $24:8+4-2\cdot 3$ 6) $(125-11\cdot 2-3):25$

7) $10+(8+3)\cdot(2+3)$ 8) $(10+8+3)\cdot 2+3$ 9) $4+2\cdot(5-3)\cdot(5+4):2$ 10) $(4+2\cdot 5-3)\cdot(5+4:2)$

11) $\left[(25-7-3):(1+4)+1\right]\cdot 2$ 12) $(12:4+15:3)\cdot 4+4$ 13) $2+\left[2+(112:4-2):2\right]\cdot(137-126)$

14) $3\cdot\left\{10\cdot\left[(4+2\cdot 10):2-2\right]+1\right\}$ 15) $(1+2\cdot 3)\left\{\left[(12+5\cdot 3):(4+5)-1\right]\cdot 2+3\right\}-9$ 16) $\left\{\left[(3+5\cdot 2)\cdot 2+4\right]:6+1\right\}\cdot 8$

17) $\left\{\left[(12+33):5-9\right]\cdot 234+3\right\}\cdot(7-2)$ 18) $\left\{6\cdot\left[150-(7+5)(2+5\cdot 2)\right]+4\right\}:(4\cdot 3-1-2\cdot 3)$

19) $\left\{\left[(4+8)(7+2):6-3\right]\cdot(1+2)+5\right\}:5$ 20) $12\cdot 3-2\cdot\left\{\left[(10+14\cdot 4+6\cdot 3):(2+2\cdot 5)-4\right]:3\right\}$

21) $1+2\cdot 3^2$ 22) $\left(2+5^2\right):3^2-3^1$ 23) $\left[\left(2^2+2^2\cdot 5\right)\cdot 2-3\right]:\left(2^3-3\right)$ 24) $\dfrac{\left[3\cdot 2^4-(3\cdot 2)^2\right]^2-11\cdot 2^2}{3^3-21:3}$

25) $15\cdot 10^2:\left(20^2+10^2\right)$ 26) $\left[\left(3+5^2\right):(1+2\cdot 3)+3^2\right]-3\cdot 4$ 27) $\left\{\left[(1+3)^2+5^2-1\right]\cdot 3-20\right\}:5^2-2^2$

28) $\left\{2\cdot\left[\dfrac{\left(5^4\right)^4:\left(5^3\right)^3}{5^3\cdot 5^3}+2^2\right]+2\right\}^4:4^4$ 29) $\left(\dfrac{3^5\cdot 4^5:12^3-10^2}{11}+1\right)^6:\left(5^4\cdot 5\right)$ 30) $\left[\left(\dfrac{5^4\cdot 6^4}{30^3}:6+5\right)^2\right]^5:1000^3-10$

31) $\dfrac{25}{24}\cdot\dfrac{16}{35}-\dfrac{1}{7}$ 32) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}$ 33) $3\cdot\dfrac{4}{5}-14\cdot\dfrac{1}{10}$ 34) $5-\dfrac{6}{5}:\dfrac{9}{35}+\dfrac{6}{5}:2+\dfrac{1}{15}$ 35) $1+3\cdot\dfrac{5}{7}-8:7$

36) $\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{2}{15}\right)\cdot\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{1}{7}\cdot 4+\dfrac{1}{4}$ 37) $\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{10}\right)$ 38) $\dfrac{2}{7}+\left(2-\dfrac{8}{7}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)$ 39) $\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{11}{15}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{5}{12}\right):\dfrac{3}{5}+1$

40) $\left[\dfrac{5}{18}\left(4-\dfrac{2}{5}\right)+\dfrac{1}{3}\right]\cdot\dfrac{3}{2}$ 41) $2\cdot\left[\left(\dfrac{1}{38}+\dfrac{1}{57}\right):\dfrac{5}{228}-\dfrac{3}{2}\right]-1$ 42) $18\cdot\dfrac{5}{24}-6\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}$ 43) $80\cdot\left(2:\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{2}:3+\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}\right)$

44) $\dfrac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}}{\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{5}}$ 45) $\dfrac{\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{3}}{2}$ 46) $\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{24}}$ 47) $\left(\dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}}{3}+1\right):5$ 48) $\dfrac{8}{\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{15}}$ 49) $\dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}}{14}+\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}}{8}$

50) $\left(\dfrac{\dfrac{2}{27}-\dfrac{1}{18}}{\dfrac{5}{6}}+\dfrac{1}{15}\right)\cdot\dfrac{9}{16}$ 51) $\dfrac{\dfrac{\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{3}}{5}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}}{\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}\right)\cdot\dfrac{24}{5}}$ 52) $\dfrac{\left(3-\dfrac{4}{3}-\dfrac{7}{12}\right)\cdot\left(1-\dfrac{17}{26}\right)+\dfrac{5}{8}}{\dfrac{3}{11}}-\dfrac{2}{3}$ 53) $\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{3}}-3$

54) $\dfrac{\left[\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{7}\right)\cdot 5-\dfrac{9}{7}\right]\cdot\dfrac{21}{2}-1}{40}+\dfrac{1}{2}$ 55) $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}\right):\left(1+\dfrac{1}{16}\right)+\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{2}}{3}$ 56) $\left[\dfrac{1}{24}\left(1+\dfrac{2}{3}\right)\left(3+\dfrac{3}{5}\right)+\dfrac{1}{8}\right]\cdot\dfrac{12}{5}+\dfrac{1}{10}$

57) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}\right)\cdot\dfrac{10}{29}}{1{,}5}$ 58) $\dfrac{\left[\left(\dfrac{1}{12}+0{,}0\overline{5}\right)\cdot 5-0{,}19\overline{4}\right]\cdot 3}{2}+2{,}25$ 59) $0{,}\overline{1}\cdot\left[\left(0{,}1\overline{6}+\dfrac{3}{4}\right)\cdot\dfrac{3}{22}+0{,}375\right]\cdot\dfrac{3}{2}-0{,}08\overline{3}$

60) $40\cdot\left[\dfrac{\left(0{,}0625\cdot 0{,}\overline{72}-\dfrac{1}{44}\right)\cdot 77}{4}+\dfrac{1}{16}\right]$ 61) $\left\{\left[\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right):\left(\dfrac{1}{5}-0{,}1\overline{6}\right)\cdot 0{,}15\right]+\dfrac{2}{3}\right\}:\left(2-0{,}\overline{3}\right)$ 62) $\dfrac{0{,}0\overline{2}-0{,}\overline{02}}{0{,}0\overline{02}}$

63) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{10+3^2}{6^2}$ 64) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\dfrac{3^2}{5}-\dfrac{3}{5^2}$ 65) $2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$ 66) $\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^6$

67) $\left(\dfrac{2^2}{3}-\dfrac{42}{70}\cdot\dfrac{15}{9}\right)^2+\dfrac{2^3}{9}$ 68) $\dfrac{\dfrac{3^2+1}{3^3}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^4-\left(\dfrac{1}{9}\right)^2}$ 69) $\dfrac{\dfrac{2^5-3^3}{75}+\dfrac{3}{4^2-2\cdot 3}}{\dfrac{22}{7^2-2^2}}$ 70) $\left[\left(\dfrac{5}{6}\right)^2+\dfrac{1}{2\cdot 3^2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right]\cdot\dfrac{2^3}{10}$

## RISULTATI

1) 20 2) 32 3) 16 4) 20 5) 1 6) 4 7) 65 8) 45 9) 22 10) 77 11) 8 12) 36 13) 167 14) 303
15) 40 16) 48 17) 15 18) 8 19) 10 20) 34 21) 19 22) 0 23) 9 24) 5 25) 3 26) 1 27) 0 28) $5^4=625$
29) 5 30) 0 31) 1/3 32) 5/9 33) 1 34) 1 35) 2 36) 1/3 37) 2 38) 1 39) 2 40) 2 41) 0 42) 3 43) 10
44) 85/69 45) 1/4 46) 2/7 47) 2/9 48) 15 49) 1/8 50) 1/20 51) 0 52) 3 53) 0 54) 1 55) 1 56) 1
57) 1/3 58) 3 59) 0 60) 20 61) 1 62) 1 63) 1 64) 51/25 65) 0 66) 1 67) 1 68) 2 69) 3/4 70) 1/2

# 11. VARIE ...

## IL GENIALE ALGORITMO (*) DI EUCLIDE PER IL CALCOLO DEL M.C.D.



Siano $a$, $b$ i due interi di cui vogliamo determinare il Massimo Comun Divisore.
Calcoliamo il resto $r$ della divisione intera $a:b$,
poi sostituiamo la coppia $(a, b)$ con la coppia $(b, r)$:
$a \leftarrow b$, $b \leftarrow r$ (cioè: $b$ prende il posto di $a$, e a sua volta $r$ prende il posto di $b$).
Si può dimostrare che il M.C.D. della "nuova" coppia coincide col M.C.D. della "vecchia".
Iteriamo ( = ripetiamo) il procedimento per la nuova coppia; prima o poi, poiché operando in questo modo il "$b$", nella sua evoluzione, diventa sempre più piccolo, si arriverà ad avere $b = 0$.
Quando ciò accadrà, essendo M.C.D. $(a, 0) = a$, il valore che avrà $a$ in quel momento sarà il M.C.D. cercato.
Esempio:

$a = 108,\ b = 84$
$108 : 84 = 1$ *col resto di* $24 \rightarrow r = 24$
$a = \cancel{108}\,84,\ b = \cancel{84}\,24$
$84 : 24 = 3$ *col resto di* $12 \rightarrow r = 12$
$a = \cancel{84}\,24,\ b = \cancel{24}\,12$
$24 : 12 = 2$ *con resto* $0 \rightarrow r = 0$
$a = \cancel{24}\,12,\ b = \cancel{12}\,0$
*Essendo* $b = 0$, *il procedimento termina*: $M.C.D. = a = 12$

Schematicamente:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a = 108,$ | $b = 84$ | $r = 24$ | |
| $a = 84,$ | $b = 24$ | $r = 12$ | |
| $a = 24,$ | $b = 12$ | $r = 0$ | |
| $a = 12,$ | $\boxed{b = 0}$ | *STOP* | |
| | | ↓ | |
| | | M.C.D. = 12 | |

(*) Un "**algoritmo**" (ne riparleremo, in modo più approfondito, nel Volume 2), è una **sequenza di istruzioni, di "passi", il cui scopo è la risoluzione di un problema di carattere generale**.
Le istruzioni di un algoritmo devono essere
- in numero finito, e concretamente eseguibili in un tempo finito;
- prive di ambiguità sia riguardo al contenuto che all'ordine di esecuzione.

**ESERCIZIO**

1) Serviti dell'Algoritmo di Euclide per determinare i seguenti M.C.D.
Ricontrolla i risultati mediante scomposizione in fattori.
a) M.C.D.(80, 35) b) M.C.D.(60, 135) c) M.C.D.(160, 104) d) M.C.D.(54, 144) e) M.C.D.(719, 520)

## LA DISTRIBUTIVA E IL RIPOSO DELLA MACCHINETTA




La proprietà distributiva è davvero utilissima per il *calcolo mentale*!
Supponi di dover svolgere la moltiplicazione $37 \cdot 102$.
Allora potrai costruire, nel tuo pensiero, la catena
$37 \cdot 102 = 37 \cdot (100 + 2) = 37 \cdot 100 + 37 \cdot 2 = 3700 + 74 = 3774$
dove, fra l'altro, l'operazione $37 \cdot 2$ potrà essere effettuata anch'essa, volendo, come $(35 + 2) \cdot 2 = 70 + 4 = 74$ oppure come $(30 + 7) \cdot 2 = 60 + 14 = 74$.

**ESERCIZIO**

2) Prova a svolgere a mente, col metodo appena illustrato, i calcoli che seguono:
$43 \cdot 12$ $(12 = 10 + 2)$; $41 \cdot 25$ $(41 = 40 + 1)$; $82 \cdot 11$; $44 \cdot 22$; $103 \cdot 72$; $25 \cdot 33$

**ESERCIZIO**

3) A ben guardare, anche in una "normale" moltiplicazione fatta per iscritto col noto schema, la proprietà distributiva gioca un ruolo essenziale …
Immagina ad esempio di svolgere l'operazione $654 \cdot 321$ (vedi qui a fianco →)
Ti sei mai chiesto a cosa si devono quei rientri verso sinistra
- del 1308 (un posto)
- e poi del 1962 (due posti)?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 6 | 5 | 4 × |
| | | 3 | 2 | 1 = |
| | | 6 | 5 | 4 |
| | 1 | 3 | 0 | 8 – |
| 1 | 9 | 6 | 2 | – – |
| 2 | 0 | 9 | 9 | 3 4 |

## LA BIZZARRA "ARITMETICA DELL'OROLOGIO"



Sono trascorse 3 ore dalle 11; che ora segna l'orologio del campanile adesso?
Nell' "aritmetica dell'orologio" $11 \oplus 3 = 2$.
A partire dalle ore 0, passano 5 turni di 4 ore ciascuno. Che ora segnano le lancette?
Nell' "aritmetica dell'orologio" $5 \otimes 4 = 8$.

**ESERCIZIO**

4) Spiega in che senso nell' "aritmetica dell'orologio" NON vale la "legge di annullamento del prodotto".

## FRAZIONI PROPRIE, IMPROPRIE, APPARENTI

Una frazione si dice

- "propria" se il suo numeratore è minore del denominatore, ossia se il suo valore è <1
- "impropria" se il suo numeratore è maggiore del denominatore, ossia se il suo valore è >1
- "apparente" se il suo numeratore è multiplo del denominatore (oppure è 0).
  Una frazione apparente equivale quindi a un numero intero.

NOTA

Va detto che, riguardo a queste semplici definizioni,
non tutti i libri scolastici in realtà dicono proprio le stesse cose.
Ad esempio, qualcuno afferma che sia da considerare "impropria" anche una frazione
col numeratore *uguale* al denominatore, quindi equivalente all'unità.
Per il nostro testo, e per altri, una frazione come (ad esempio) 14/7 è sia impropria che apparente, mentre
c'è chi per frazione "impropria" intende "con numeratore maggiore *e non multiplo* del denominatore".
E una frazione con numeratore 0, quindi di valore uguale a 0, andrà considerata anch'essa "apparente"?
Mah … Noi abbiamo fatto questa scelta, tuttavia consultando vari testi il "mistero" rimane, in quanto
si tende ad evitare di affrontare la questione.
D'altronde, abbiamo pure detto che per "multipli di 5" si devono intendere i numeri $5, 10, 15, 20$, ecc.
mentre da qualche parte si legge che fra i multipli di un intero c'è sempre anche lo 0
(cosa che, a nostro parere, sembra del tutto bislacca, tant'è vero che, se la si accettasse, per coerenza
si sarebbe costretti ad ammettere che il minimo comune multiplo fra due interi qualsiasi … è sempre 0!).
Ah, questi matematici …
… Si mettessero un po' d'accordo, eviterebbero qualche stress in più ai nostri poveri ragazzi!

**ESERCIZI** (*numero "assoluto" = numero "senza segno". Si contrappone a "relativo" = "con segno"*)

5) Per quali valori interi (assoluti) di $x$ la frazione $\frac{3+x}{6}$ è a) propria? b) impropria? c) apparente?

6) Per quali valori interi (assoluti) di $y$ la frazione $\frac{6}{3+y}$ è a) propria? b) impropria? c) apparente?

## PAROLE, ESPRESSIONCINE, PARENTESI (FORSE)

**ESERCIZI**

7) Scrivi, inserendo correttamente le parentesi *soltanto se strettamente necessario*,
le espressioni *aritmetiche* che corrispondono alle espressioni *verbali* seguenti:

a) "Somma al numero 58 il prodotto fra 13 e 14"
b) "Sottrai dal prodotto di 11 e 19, la somma fra 45 e 54"
c) "Addiziona il prodotto fra 13 e 12 col quoziente fra 24 e 4"
d) "Moltiplica 5 per la somma fra 7 e 9"
e) "Moltiplica la somma dei due numeri 12 e 8, per la differenza degli stessi numeri"
f) "Eleva al quadrato la somma dei quadrati dei numeri 2 e 3, e dividi il risultato per la somma fra 14 e 26"

**RISPOSTE**

3) Gli spostamenti verso sinistra della seconda riga di un posto,
e della terza di due, sono semplicemente dovuti al fatto che

$$654\cdot 321 = 654\cdot(300+20+1) = 654\cdot 300 + 654\cdot 20 + 654\cdot 1 = $$
$$= (654\cdot 3)\cdot\underbrace{100}_{*} + (654\cdot 2)\cdot\underbrace{10}_{**} + 654\cdot 1$$

* *moltiplicazione per* 100 : *spostamento di due posti a sinistra, come se si aggiungessero due zeri alla fine*

** *moltiplicazione per* 10 : *spostamento di un posto a sinistra, come se si aggiungesse uno zero alla fine*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 6 | 5 | 4 | × |
| | | | 3 | 2 | 1 | = |
| | | | 6 | 5 | 4 | |
| | | 1 | 3 | 0 | 8 | (0) |
| 1 | 9 | 6 | 2 | (0) | (0) | |
| 2 | 0 | 9 | 9 | 3 | 4 | |

4) La "legge di annullamento del prodotto", valida nella "normale" aritmetica, afferma che
*se il risultato di una moltiplicazione è 0, allora necessariamente almeno uno dei fattori deve essere 0.*
Invece *nell'aritmetica dell'orologio ciò non è vero* perché, ad esempio, è $3 \otimes 4 = 0$

5) a) 0, 1, 2 b) 4, 5, 6, 7 ecc. c) 3, 9, 15, 21 ecc. 6) a) 4, 5, 6, 7 ecc. b) 0, 1, 2 c) 0, 3

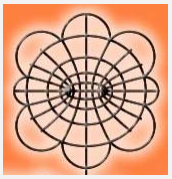
7) a) $58+13\cdot 14$ b) $11\cdot 19-(45+54)$ c) $13\cdot 12+24:4$ d) $5\cdot(7+9)$ e) $(12+8)\cdot(12-8)$ f) $(2^2+3^2)^2:(14+26)$

# 12. QUESITI TRATTI DA GARE MATEMATICHE

## su: NUMERI INTERI; LE QUATTRO OPERAZIONI

**Al termine della rassegna c'è in qualche caso una breve indicazione (ma cerca prima di farne a meno!); se visiti, cliccando sul link sottolineato, i siti da cui provengono i problemi, sovente troverai anche la risoluzione in dettaglio.**

**Le risposte, invece, per evitare che si possa "sbirciare", sono state messe a pagina 39.**



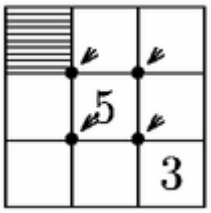
Olimpiada Mexicana de MATEMATICAS

*Il bel logo del carinissimo sito delle Olimpiadi Matematiche Messicane*

1) The Calgary Mathematical Association - Junior High School Mathematics Contest 2004

Sam thinks of a number, and whispers it (*lo dice in un orecchio*) to Sabrina.
Sabrina either adds 2 to the number or doubles it, and whispers the result to Susan.
Susan takes that number and either subtracts 3 or divides the number by 3.
The final result she announces is 10. What is the largest number Sam may have given Sabrina?

2) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios




Nel quadrato in figura si scrivono i numeri interi da 1 a 9 (senza ripetizione).
La somma dei quattro numeri intorno a ciascuno dei vertici indicati dalle frecce deve essere sempre 20. I numeri 3 e 5 sono stati già scritti.
Che numero va messo nella casella ombreggiata?
(a) 1 (b) 2 (c ) 4 (d) 7 (e) 9

3) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios

Alicia va al club ogni giorno; Beatriz ogni 2 giorni; Carlos ogni 3; Daniel ogni 4; Enrique ogni 5; Francisco ogni 6 e Gabriela ogni 7. Se oggi si trovano tutti al club, fra quanti giorni torneranno a trovarsi tutti assieme per la prima volta?
(a) 27 (b) 28 (c) 210 (d) 420 (e) 5040

4) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Final Round, 1999

Josh found the value of $3^{19}$ to be $3^{19} = 11a2261467$. He found all the digits (*digit* = *cifra*) correctly, except the third decimal digit which is denoted by *a*. The value of *a* is:
(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 6 (e) 7

5) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios

Se si svolge il prodotto di tutti i numeri dispari compresi tra 1 e 1994,
quale sarà la cifra delle unità del numero così ottenuto? (a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

6) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest, 2005 (Final)

Two operations * and $\odot$ are defined by the two tables below:

| * | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 1 |

| $\odot$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 6 | 5 |
| 3 | 2 | 6 | 4 |

(For example, $1 \odot 2 = 2$)

The value of $2 \odot (3 * 3)$ is: (a) 6 (b) 5 (c) 4 (d) 3 (e) 2

7) American Mathematics Competitions 2002

The dimensions of a rectangular box in inches (*inch* = *pollice*) are all positive integers and the volume of the box is $2002\ \text{in}^3$. Find the minimum possible sum in inches of the three dimensions.
(a) 36 (b) 38 (c) 42 (d) 44 (e) 92

8) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round 1998

In the following display each letter represents a digit:

| 3 | B | C | D | E | 8 | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

The sum of any three successive digits (*digit* = *cifra*) is 18. The value of H is:
(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 7 (e) 8

9) Kangourou 2004
Cinque bambini pensano ciascuno a un numero, che può essere 1, o 2, o 4.
Si calcola il prodotto dei cinque numeri.
Quale può essere il risultato ottenuto?
(a) 100 (b) 120 (c) 256 (d) 768 (e) 2048

10) British Columbia Colleges Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round 2010
The value of $(100+98+96+...+4+2)-(1+3+5+...+97+99)$ is:
(a) 0 (b) 50 (c) 100 (d) 147 (e) None of these

11) Kangourou 2000
Se $A+1=B+2=C-3=D+4=E-5$ qual è il maggiore?
(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

12) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios
Quanto vale la somma delle cifre del numero $N=10^{92}-92$?
(a) 1992 (b) 992 (c) 818 (d) 808 (e) 798

13) The Calgary Mathematical Association - Junior High School Mathematics Contest 2004
Beth buys $9 worth of oranges that sell for $0.75 each on Monday.
On Thursday she finds that the oranges are on sale at $0.25 each and buys another $9 worth.
What is the average cost (*costo medio*) per orange of the total number she bought?

14) British Columbia Colleges Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round 1997
If a man walks to work and rides back home (*va al lavoro a piedi e ritorna in auto*)
it takes him an hour and a half. When he rides both ways, it takes 30 minutes.
How long would it take him to make the round trip by walking?
(a) $2\frac{1}{2}$ hrs (b) $1\frac{1}{4}$ hrs (c) $1\frac{1}{2}$ hrs (d) $3\frac{1}{2}$ hrs (e) $2\frac{3}{4}$ hrs

15) British Columbia Colleges Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round 1999
La notazione $n!$ (si legge: "n fattoriale") è definita nel modo seguente: $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot2\cdot1$.
Ad esempio, $3!=3\cdot2\cdot1=6$.
La cifra delle unità nella somma $1!+2!+3!+...+1998!+1999!$ è uguale a:
(a) 0 (b) 3 (c) 4 (d) 6 (e) 9

16) Kangourou 2001
Una delle diagonali *d* divide un poligono di perimetro 31 cm in due poligoni di perimetro rispettivamente 21 cm e 30 cm. Allora la lunghezza di *d* è:
(a) 5 cm (b) 10 cm (c) 15 cm (d) 20 cm (e) non determinabile senza ulteriori informazioni

17) UK Junior Mathematical Olympiad 2011
Every digit of a given integer is either a 3 or a 4 with each occurring at least once
(*con ognuno che compare almeno 1 volta*).
The integer is divisible by both 3 and 4.
What is the smallest such integer?

18) Kangourou 2000
Se ogni lettera corrisponde ad una cifra differente, allora
$KANGAROO+10000\times AROO-10000\times KANG$ ("$\times$" indica l'ordinaria moltiplicazione) vale
(a) AROOAROO (b) AROOKANG (c) KANGKANG (d) KANGAROO (e) KAGANROO

**QUALCHE INDICAZIONE**

4) Il numero è multiplo di 9, e il criterio di divisibilità per 9 dice che …
7) $2002=2\cdot7\cdot11\cdot13$ per cui i modi per esprimerlo come prodotto di tre interi sono …
10) E' uguale a $(100-99)+(98-97)+...$ quindi …
12) Il numero termina con 08, e prima c'è una sequenza di tanti 9 … Quanti?
15) A partire dall'addendo $5!$ la cifra delle unità della somma non cambia più, perché …

**Risposte, NON ai quesiti precedenti ma a quelli delle pagg. 38-39 (su frazioni e potenze)**

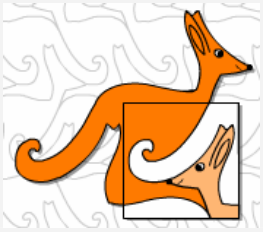
1) c 2) e 3) c 4) 3/5 5) b 6) b 7) d 8) b 9) c 10) d 11) e 12) c 13) d 14) c 15) b 16) e 17) c 18) d-a-c-b

# QUESITI TRATTI DA GARE MATEMATICHE

## su: FRAZIONI E POTENZE

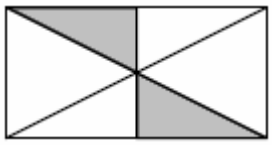
**Al termine della rassegna c'è in qualche caso una breve indicazione (ma cerca prima di farne a meno!); se visiti, cliccando sul link sottolineato, i siti da cui provengono i problemi, sovente troverai anche la risoluzione in dettaglio.**

**Le risposte, invece, per evitare che si possa "sbirciare", sono state messe a pagina 37.**



*Plus de 6 millions de participants au jeu-concours Kangourou des Mathématiques en 2011*

1) PRISM: Problem Solving for Irish Second level Mathematicians, 2007



The large rectangle has sides of length 1 and 2. The two shaded triangles are right-angled triangles. What is the total area of the shaded region?

(a) 1 (b) 0.25 (c) 0.5 (d) $\frac{11}{10}$ (e) $\frac{2}{\sqrt{17}}$

2) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios

Un pastello viene accorciato togliendo ogni volta la terza parte del pastello che si aveva prima di spezzarlo. Che frazione del pastello iniziale rimane dopo aver accorciato tre volte?

(a) 2/3 (b) 4/3 (c) 4/9 (d) 8/9 (e) 8/27

3) PRISM: Problem Solving for Irish Second level Mathematicians, 2006

John gives half his money to Emma, who then gives half of that to Séamus, who then gives half of that to John. What fraction of his original amount does John now have?

(a) 1/2 (b) 3/4 (c) 5/8 (d) 3/8 (e) 1/8

4) The Calgary Mathematical Association - Junior High School Mathematics Contest 2004

Mr. Smith pours a full cup of coffee and drinks 1/2 cup of it, deciding it is too strong and needs some milk. So he fills the cup with milk, stirs it, and tastes again, drinking another 1/4 cup. Once again he fills the cup with milk, stirs it, and finds that this is just as he likes it.

What ratio $\frac{\text{amount of coffee}}{\text{amount of milk}}$ does Mr. Smith like? (*ratio* = *rapporto*)

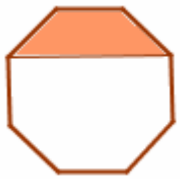
5) University of New Brunswick and Université de Moncton - Junior High School Mathematics Competition 1994



What fraction of the area of the regular hexagon is the shaded triangle?

(a) 1/4 (b) 1/3 (c) 3/8 (d) 5/12 (e) 1/2

6) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round, 1999



The figure to the right is a regular octagon.

What fraction of its area is shaded? (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{6}$ (e) $\frac{3}{8}$

7) Kangourou 2000

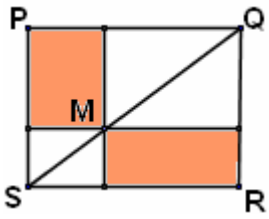
Charlie affitta la sua fiammante bicicletta agli amici nel modo seguente: per due tavolette di cioccolato quattro ore e per dodici caramelle tre ore. Mike dà a Charlie 1 tavoletta di cioccolato e 4 caramelle. Per quanto tempo potrà scorrazzare con la bicicletta di Charlie?

(a) Un'ora e mezza (b) 1 ora (c) 2 ore (d) 3 ore (e) 4 ore

8) Kangourou 2000

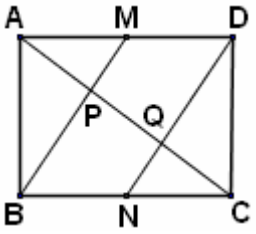
800 dobloni hanno lo stesso valore di 100 ducati. 100 dobloni hanno lo stesso valore di 250 talleri. Quanti ducati hanno lo stesso valore di 100 talleri? (a) 2 (b) 5 (c) 10 (d) 25 (e) 50

9) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios




In che rapporto stanno le aree delle due regioni grigie segnate nel rettangolo PQRS, se M è un punto qualunque della diagonale?
(*Questo problema fa parte della gara Canguro Animado*)
(a) Quella in alto è più grande (b) Quella in basso è più grande
(c) Sono uguali (d) Sono uguali solo se M è il punto medio della diagonale
(e) Non si hanno dati a sufficienza per rispondere

10) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios




Nel rettangolo della figura, M e N sono i punti medi di AD e BC, rispettivamente, e P e Q sono le intersezioni di AC con BM e ND. Supponendo che AD misuri 5 cm e AB 3 centimetri, di quanti centimetri quadrati è la superficie del quadrilatero MPQD?
(a) 2.75 (b) 3 (c) 3.25 (d) 3.75 (e) 4

11) University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition 1991

Trova il valore del prodotto dei 98 numeri $\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{4}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{98}\right)\left(1-\frac{2}{99}\right)\left(1-\frac{2}{100}\right)$

(a) 1/10 (b) 98/100 (c) 1/6 (d)1/582120 (e) 1/4950

12) University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition 1990

Two workers X and Y can do a job together in 4 hours.
If X alone takes 6 hours to do the job, then how long will it take Y alone to do the job?
(a) 8 h (b) 10 h (c) 12 h (d) 14 h (e) None of the previous answers

13) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios

L'addestratore più esperto del circo ha bisogno di 40 minuti per lavare un elefante. E suo figlio porta a termine lo stesso compito in 2 ore. Quanti minuti ci metterebbero i due a lavare 3 elefanti lavorando insieme? (a) 30 (b) 45 (c) 60 (d) 90 (e) 100

14) American Mathematics Competitions 2002

The ratio (*rapporto*) $\frac{(2^4)^8}{(4^8)^2}$ equals (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 2 (e) 8

15) PRISM: Problem Solving for Irish Second level Mathematicians, 2006

An amoeba is placed in a jar and each minute it doubles its size by splitting its cells in two. Suppose that the jar will be completely filled in 10 minutes. How long (in minutes) would it take to fill the jar if instead of one amoeba there had been two amoebas in it to start? (a) 10 (b) 9 (c) 5 (d) 1 (e) 6

16) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round, 2005

Given the following: I. even (*pari*) II. odd (*dispari*) III. a perfect square IV. a multiple of 5
then it is true that the product $21\times35\times15$ is:
(a) II & IV (b) I & IV (c) II & III (d) III & I (e) II, III, & IV

17) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios

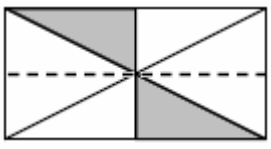
Quante cifre ha il prodotto $2^{1998}\times5^{2002}$? (a)1999 (b) 2000 (c) 2001 (d) 2002 (e) 2003

18) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round, 1997

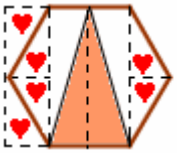
Metti in ordine crescente i numeri $a=2^{800}$, $b=3^{600}$, $c=5^{400}$, $d=6^{200}$

**QUALCHE INDICAZIONE**

1)



5)



6)



9) SPQ e SRQ sono uguali, e anche altri triangoli in figura sono tra loro uguali …

12) Se un tale ci mette 6 ore a fare un lavoro, che frazione di quel lavoro fa in 1 ora?

17) $5^{2002}=5^{1998}\times\ldots$ 18) $2^{800}=(\ldots)^{100}$ ecc.

**Risposte, NON ai quesiti precedenti ma a quelli di pag. 36-37 (su numeri interi e quattro operazioni)**

1) 28 2) d 3) d 4) d 5) c 6) d 7) b 8) d 9) c 10) b 11) e 12) c 13) 37.5 cents 14) a 15) b 16) b 17) 3444 18) a

# NUMERI RELATIVI

## 1. I NUMERI RELATIVI: COSA SONO E A COSA SERVONO

I **numeri SENZA SEGNO** (es. 3; 29; 1/4; 8,02; ...) vengono anche chiamati "numeri **ASSOLUTI**", mentre ai **numeri CON SEGNO** (es. –4; +7; –0,98; +5/6; ...) si dà il nome di "numeri **RELATIVI**".

I numeri relativi si dividono in:
**POSITIVI; NEGATIVI;** e lo **ZERO** ("neutro", cioè né positivo né negativo).

**A cosa servono i numeri relativi?** Servono **a descrivere le "GRANDEZZE ORIENTATE"**, cioè quelle grandezze **che possono variare in due sensi opposti a partire da un "livello zero"** (temperature, altitudini e depressioni, anni prima e dopo Cristo, cariche elettriche, bilanci finanziari, …)
**Per esprimere il valore di una grandezza di questo tipo, non è sufficiente un numero assoluto!**

- *Ad es., una temperatura misurata in gradi Celsius può essere più alta o più bassa rispetto allo "zero termico" convenzionale (che è poi la temperatura di passaggio dell'acqua dallo stato liquido allo stato solido). E' comodo associare il simbolo "+" all'idea di "sopra lo zero" e il "–" all'idea di "sotto lo zero": scriverò allora, a seconda dei casi, ad esempio, +7 °C, oppure –7 °C*
- *E se voglio indicare in modo rapido che una certa località di Israele (dove esiste una forte depressione della crosta terrestre) si trova ad un'altitudine di "35 m sotto il livello del mare", potrò segnare questa altitudine come –35 m (sottintendendo, naturalmente, che il livello del mare sia considerato come "livello zero")* ⇨

Soltanto "trafficando" effettivamente coi numeri relativi, ed impiegandoli nei vari rami della scienza (ad esempio la Fisica), ci si può rendere conto di quanto **enorme** sia la **varietà delle loro applicazioni.**

**Al posto di scrivere +7 per brevità si può scrivere semplicemente 7**
(a meno che motivi di chiarezza non suggeriscano di evitare l'abbreviazione).
Infatti **i numeri positivi vengono sostanzialmente identificati coi numeri assoluti**.

**Due numeri** entrambi positivi, o entrambi negativi, insomma: **dello stesso segno**, si dicono "**concordi**".
Ad esempio, –7 e –25 sono concordi; +5/4 e +1 sono concordi.

**Due numeri di segno diverso** si dicono "**discordi**": ad esempio, +89 e –6 sono discordi.

Due numeri come –4 e +4, che **differiscono solo per il segno**, si dicono "**opposti**".
Si può scrivere $0 = +0 = -0$, e quindi 0 è considerato l'opposto di sé stesso.

♥ **Si dice "VALORE ASSOLUTO" di un numero relativo, il numero stesso privato del suo segno.**
Ad esempio, il valore assoluto di –5 è 5, il valore assoluto di +1/3 è 1/3.
**In alternativa a "valore assoluto" si può dire "MODULO".**

Per indicare il valore assoluto di un numero relativo, si pone il numero entro **una coppia di stanghette verticali**.

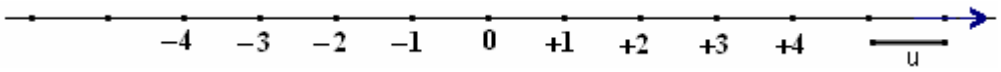
Esempi: $|-5| = 5$ $\left|+\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$ (*leggi: "valore assoluto di –5 uguale a 5", ecc.*)

Poiché i numeri assoluti coincidono sostanzialmente coi numeri positivi (5 = +5, 1/3 = +1/3) si può anche dire che

♥ **il valore assoluto di un numero relativo è**
- **il numero stesso, se questo è positivo o nullo;**
- **l'opposto del numero, se questo è negativo.**

## 2. LA "NUMBER LINE"

Quando si vuol dare una **rappresentazione grafica dell'insieme dei numeri relativi** (rappresentazione che evidenzi visivamente anche l'**ordinamento** di questo insieme), si ricorre al cosiddetto "**asse delle ascisse**".

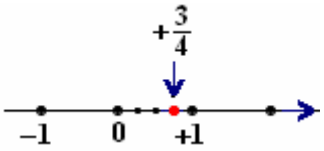



♥ Un "**asse delle ascisse**" (noi di norma preferiremo dire, all'inglese, "**NUMBER LINE**" ⇨)
è una retta, sulla quale sono stati fissati:
**a)** **un punto, detto "origine"**, solitamente indicato con la lettera **O** (**rappresenterà il numero "zero"**)
**b)** **un'unità di misura u** per le lunghezze
**c)** **e un verso di percorrenza da considerarsi come "verso positivo"**
*(di solito, salvo rare eccezioni, se la retta è orizzontale si suole assumere come verso positivo quello che va da sinistra verso destra, mentre se la retta è verticale quello che va dal basso verso l'alto).*

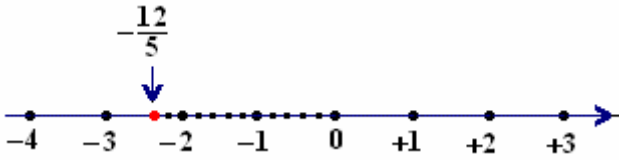
Se, a partire dall'origine e andando in verso *positivo*, noi riportiamo sull'asse delle ascisse tanti segmenti consecutivi tutti uguali all'*unità di misura*, le estremità di questi segmenti rappresenteranno gli *interi positivi*: +1, +2, +3, +4, ...
Se facciamo la stessa cosa sempre a partire dall'origine, ma in verso *negativo*,
le estremità dei segmenti disegnati rappresenteranno i numeri *interi negativi*: −1, −2, −3, −4, ...

Per rappresentare una **frazione**, occorrerà pensare di dividere l'unità di misura
in tante parti uguali quant'è il denominatore della frazione, e poi ... ma mi spiegherò con degli esempi.

Se vogliamo rappresentare la frazione **+3/4**, dovremo **dividere l'unità di misura in 4 parti uguali e prendere un segmento formato da 3 di queste parti.**
Tale segmento andrà riportato a partire dall'origine in **verso positivo**,
e la sua estremità rappresenterà, appunto, la frazione +3/4.




Per rappresentare il numero **−12/5** dovremo **dividere l'unità di misura in 5 parti uguali, poi considerare il segmento formato da 12 di questi segmentini,** e riportarlo a partire dall'origine in **verso negativo**.
L'estremità del segmento così disegnato rappresenterà, appunto, il numero −12/5.




La "number line" è di estrema utilità in un mucchio di questioni di interesse matematico.
Per ora, limitiamoci ad osservare che la rappresentazione sull'asse delle ascisse permette di **confrontare** agevolmente due numeri relativi assegnati, per stabilire qual è il maggiore e quale il minore:

♥ **FRA DUE NUMERI RELATIVI DATI, SI CONSIDERA MINORE QUELLO CHE, rappresentato su di una "*number line*" orizzontale** (NOTA)**, STA PIU' A SINISTRA**
NOTA: … *e orientata "in modo standard", cioè col verso di percorrenza positivo che va da sinistra a destra*

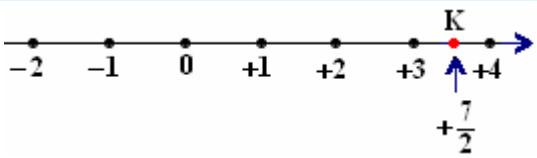
Se si pensa ad es. alle temperature (minore=più bassa) o agli anni prima e dopo Cristo (minore=precedente), si comprenderà agevolmente come questo ordinamento dell'insieme dei numeri relativi "vada d'accordo" con le applicazioni di questi stessi numeri alla descrizione delle grandezze orientate.

♥ **FRA DUE NUMERI ENTRAMBI NEGATIVI IL MINORE E' quello più lontano dall'origine, ossia QUELLO CHE HA VALORE ASSOLUTO MAGGIORE;**
e (davvero importante!)
♥ **IL VALORE ASSOLUTO o "modulo" DI UN NUMERO RELATIVO CORRISPONDE ALLA DISTANZA DALL'ORIGINE del punto che gli è associato sulla *number line*.**

Osserviamo che **ad ogni numero relativo corrisponde uno e un solo punto sull'asse delle ascisse, e viceversa ad ogni punto sull'asse delle ascisse corrisponde uno e un solo numero relativo.**
Si dice che c'è una "**corrispondenza biunivoca" fra i punti dell'asse delle ascisse ed i numeri reali relativi.**

**Preso un numero relativo *x*, il punto P corrispondente viene detto "punto immagine" del numero *x*. Il numero *x*, invece, viene detto "ascissa" del punto P.**

Nella figura qui a fianco, il numero +7/2 = +3,5
e il punto K si corrispondono: si dice quindi che
K è "il punto immagine" (o, più brevemente,"l'immagine")
del numero +7/2, mentre il numero +7/2 è "l'ascissa" del punto K.




**L'immagine del numero zero è l'origine; l'ascissa dell'origine è zero.**

**ESERCIZI** (vai alle risposte ⇨)

1) Qual è il minore fra tutti i numeri interi relativi, formati da tre cifre?
2) Qual è il minore fra tutti i numeri interi relativi, formati da tre cifre tutte diverse fra loro?
3) Qual è il maggiore fra tutti gli interi relativi, formati da tre cifre?
4) Qual è il maggiore fra tutti gli interi negativi, formati da tre cifre?
5) Sul quaderno, disegna un asse delle ascisse (unità di misura: *2 quadretti*) e, su di esso, rappresenta i seguenti numeri relativi: +3 −1/4 +2/3 −3/5 −3,5 27/4 −11/6
6) Fra i due numeri relativi −1,3 e $-1,\overline{3}$, qual è il minore?

# 3. SOMMA, DIFFERENZA, QUESTIONI VARIE RIGUARDANTI I SEGNI

## ❑ SOMMA

♥ La **somma di due numeri relativi**
è quell'operazione che si esegue interpretando
i **numeri positivi** come **soldi guadagnati**,
i **numeri negativi** come **soldi persi,**
e pensando a un **totale.**

| 1° *numero* $a$ | 2° *numero* $b$ | *somma* $a+b$ |
|---|---|---|
| $-7$ | $-5$ | $-12$ |
| $+4$ | $+11$ | $+15$ |
| $-20$ | $+6$ | $-14$ |
| $-8{,}1$ | $+10{,}3$ | $+2{,}2$ |

Con linguaggio più propriamente matematico, possiamo dire che

*Clicca sulla freccia* ⇨ *per una descrizione della regola in Inglese*

- **quando i due numeri sono CONCORDI (cioè, hanno lo stesso segno), la loro somma è quel numero che ha**
  - ♪ **come segno lo STESSO SEGNO degli addendi,**
  - ♫ **e come valore assoluto la SOMMA dei loro valori assoluti**

  es. $-15+(-6)=-21$ $+10+(+9)=+19$ $-3{,}6+(-2{,}31)=-5{,}91$

- **quando i due numeri sono DISCORDI (ossia, hanno segni opposti), la loro somma è quel numero che ha**
  - ♪ **come segno il SEGNO DELL'ADDENDO "PREVALENTE" ( = con val. ass. maggiore)**
  - ♫ **e come valore assoluto la DIFFERENZA fra i valori assoluti degli addendi**

  es. $-30+(+12)=-18$ $-9+(+25)=+16$ $+3{,}2+(-10{,}3)=-7{,}1$

- **la somma di due numeri opposti (come +5 e –5) è zero.**

Si può dimostrare che l'operazione così definita gode delle proprietà commutativa, associativa e dissociativa

Abbiamo dunque visto che per sommare due numeri relativi,
non sempre bisogna effettuare una somma nel senso usuale della parola,
perché se i due numeri sono discordi in realtà bisogna effettuare (fra i loro moduli) una *sottrazione*.
♥ Per questo motivo, quando si parla di somma di due o più numeri relativi,
anziché usare semplicemente la parola "somma"
si preferisce usare la locuzione "**SOMMA ALGEBRICA**": proprio per indicare che
non sempre si tratta di una "somma" nel senso in cui la parola "somma" è intesa comunemente.

♥ Ricordiamo, infine, che **un modo di eseguire mentalmente la somma algebrica** è il seguente:

→ **un addendo POSITIVO mi dice di "contare in AVANTI",**
ossia di **"PROCEDERE IN VERSO POSITIVO SULL'ASSE DELLE ASCISSE";**

← **un addendo NEGATIVO mi dice di "contare all'INDIETRO", di "scalare delle unità",**
cioè di **"PROCEDERE IN VERSO NEGATIVO SULL'ASSE DELLE ASCISSE".**

Ad esempio, eseguire la somma algebrica $-5+(-7)$ vuol dire partire dal primo addendo $(-5)$,
che si immagina rappresentato sull'asse delle ascisse, e poi spostarsi a *sinistra*
(dato che in questo caso il secondo addendo è *negativo*) di 7 unità. Si giunge così al numero $-12$.

Per **indicare la somma algebrica di due o più numeri relativi**, in teoria dovrei fare così:
se ad es. devo indicare la somma algebrica dei numeri $-4, -7, +20, -2$ dovrei scrivere
$-4+(-7)+(+20)+(-2)$,
cioè dovrei racchiudere ciascun numero relativo (ad eccezione, volendo, del primo) entro parentesi:
e questo perché **in Matematica si considera scorretto scrivere due segni uno di seguito all'altro**.
In pratica, però,

♥ **quando si vuole INDICARE LA SOMMA ALGEBRICA di due o più numeri relativi, si usa scrivere questi numeri relativi uno di seguito all'altro coi rispettivi segni, senza parentesi:**

$-4+(-7)+(+20)+(-2)=-4-7+20-2;$ $\quad -23+(+5)=-23+5;$ $\quad 12+(-68)=12-68$

In virtù di questa **convenzione**, di questo accordo fra i matematici, motivato da esigenze di brevità,
resta allora fissata la seguente **REGOLA**:

♥ **+ davanti a + dà +**
**+ davanti a – dà –**

**In breve: un segno + davanti a un altro segno lascia invariato quest'ultimo.**

## ❑ DIFFERENZA

*Sottrarre una perdita*
*è come aggiungere un guadagno,*
*e sottrarre un guadagno*
*è come aggiungere una perdita* ⇨

♥ **SOTTRARRE un numero relativo equivale ad ADDIZIONARE ALGEBRICAMENTE L'OPPOSTO di quel numero** ⇨

| 1° *numero* $a$ | 2° *numero* $b$ | *differenza* $a-b$ |
|---|---|---|
| $+8$ | $-10$ | $+8-(-10)=+8+10=+18$ |
| $-6$ | $-2$ | $-6-(-2)=-6+2=-4$ |
| $-4$ | $+3$ | $-4-(+3)=-4-3=-7$ |
| $+11$ | $+20$ | $+11-(+20)=+11-20=-9$ |

Resta dunque stabilita la **REGOLA**:

♥ **− davanti a + dà −**
**− davanti a − dà +**

**In breve: un segno − davanti a un altro segno muta quest'ultimo nel segno opposto.**

**APPROFONDIMENTO**

Dal punto di vista matematico, è più corretto presentare l'operazione di sottrazione fra numeri relativi **in modo astratto**, senza parlare di debiti e crediti. Vediamo come.

Innanzitutto, occorre ricordare che in Matematica
**la "sottrazione" è definita come l'operazione inversa dell'addizione.**

La sottrazione è dunque l'operazione mediante la quale, dati due numeri, se ne trova un terzo che addizionato al secondo dà come risultato il primo.

Insomma: $\mathbf{a-b=c}$ se c è tale che $\mathbf{c+b=a}$.

Vogliamo dimostrare che la differenza $\mathbf{a-b}$ è data dalla somma algebrica $\mathbf{a+b'}$ (**essendo b' l'opposto di b**, ossia essendo $\mathbf{b'+b=0}$).

**Dovremo far vedere che prendendo il numero $\mathbf{a+b'}$, e addizionandogli algebricamente b, si ottiene come risultato a.**

In effetti: $\mathbf{(a+b')+b=a+(b'+b)=a+0=a}$, come volevasi dimostrare.

## ❑ OSSERVAZIONI SU:

- **L'OPPOSTO DI UN NUMERO RELATIVO;**
- **LA REGOLA PER LO SCIOGLIMENTO DELLE PARENTESI PRECEDUTE DA UN SEGNO + O DA UN SEGNO −**

Nell'ambito di una sottrazione fra numeri relativi, il segno "−" di sottrazione provoca dunque l'effetto di cambiare il segno del numero che lo segue.

♥ Si è affermata allora, fra i matematici, l'abitudine di usare **IL SEGNO "−" davanti a un numero ANCHE AL DI FUORI DELL'OPERAZIONE DI SOTTRAZIONE,**
e precisamente **QUANDO SI VUOLE INDICARE L'OPPOSTO** del numero in questione.

Quindi avremo, per esempio, $-(-9)=+9$; $-(+1/4)=-1/4$ e così via.

In generale,
**per indicare l'opposto di un numero indicato con la lettera $a$, si userà il simbolo $-a$.**



**ATTENZIONE!**

♥ **Quando, in un'espressione letterale, si incontra il simbolo $-a$, non si deve pensare, vedendo il −, che tale simbolo rappresenti per forza un numero negativo:**

**$-a$ rappresenta l'opposto di $a$, per cui**

- **se $a$ è positivo, $-a$ è negativo,**
- **ma se $a$ è negativo, $-a$ è positivo.**

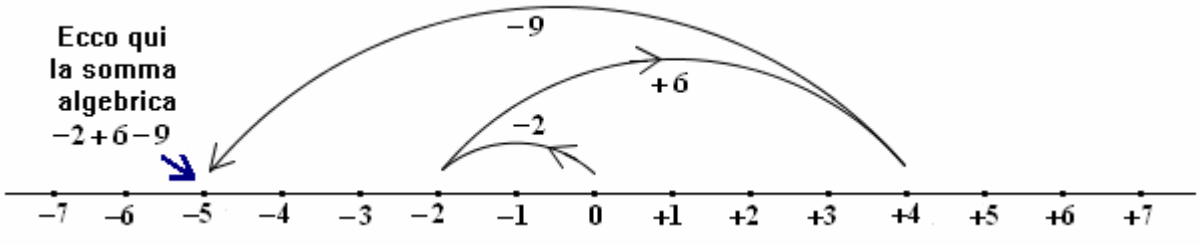
Ad esempio, per $a=-5$, avremo $-a=-(-5)=+5$

La scrittura $-(-2+6-9)$ indica
l'opposto del numero, che è il risultato della somma algebrica $-2+6-9$.
Ora, è facile convincersi che $\boxed{-(-2+6-9)=+2-6+9}$, ossia:

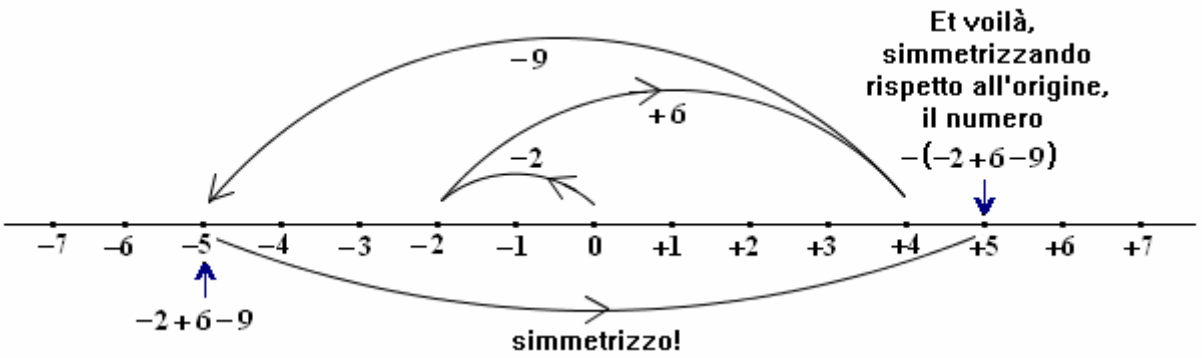
**"L'OPPOSTO DI UNA SOMMA ALGEBRICA**
**è uguale alla SOMMA ALGEBRICA DEGLI OPPOSTI".**

Un modo suggestivo per giustificare la verità di questa affermazione è il seguente
*(ci riferiremo per meglio fissare le idee all'esempio fatto,*
*ma ne verrà fuori un ragionamento di carattere generale).*

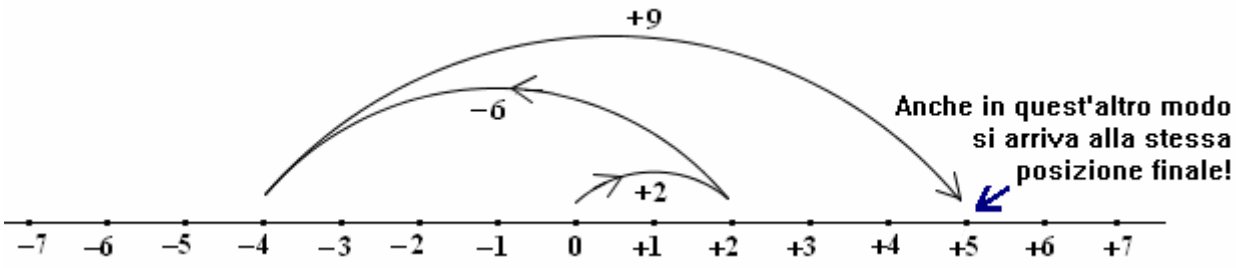
♪ Abbiamo visto che una somma algebrica si può pensare come effettuabile tramite successivi spostamenti sull'asse delle ascisse (verso destra, quando l'addendo è positivo, verso sinistra quando è negativo); quindi possiamo pensare di effettuare il calcolo $-2+6-9$ tramite tre saltelli successivi:
**sinistra 2 poi destra 6 poi sinistra 9** (s'intende: a partire dall'origine)




♪ Ora, a partire da $-2+6-9$, dobbiamo **passare all'opposto** $-(-2+6-9)$;
e fare l'opposto di un numero relativo significa, geometricamente,
prendere tale numero e passare al suo
**"simmetrico rispetto all'origine"**




♫ Però è evidente che **si arriverebbe alla stessa posizione finale** (nel nostro esempio, +5)
anche ricominciando da capo e prendendo i medesimi addendi, ma ciascuno col segno opposto,
cosicché ogni singolo movimento venga effettuato nel verso opposto: a partire dall'origine,
**destra 2 poi sinistra 6 poi destra 9**




Resta così acquisita la regola che dice:

**♥ SE UN SEGNO –, USATO PER INDICARE "L'OPPOSTO DI",**
**SI TROVA DAVANTI AD UNA PARENTESI CONTENENTE UNA SOMMA ALGEBRICA,**
**ALLORA E' LECITO SCIOGLIERE LA PARENTESI, CAMBIANDO TUTTI I SEGNI.**

## ❑ LA REGOLA PER LO SCIOGLIMENTO DI UNA PARENTESI, CONTENENTE UN NUMERO RELATIVO OPPURE UNA SOMMA ALGEBRICA, PRECEDUTA DA UN SEGNO + O DA UN SEGNO – ; UNA GIUSTIFICAZIONE ESAURIENTE E COMPLETA

**SE HO UN SEGNO – DAVANTI A UNA PARENTESI CHE CONTIENE UN NUMERO RELATIVO, OPPURE UNA SOMMA ALGEBRICA, POSSO SCIOGLIERE LA PARENTESI CAMBIANDO PERO' DI SEGNO TUTTI I NUMERI ENTRO PARENTESI.**

**SE HO UN SEGNO + DAVANTI A UNA PARENTESI CHE CONTIENE UN NUMERO RELATIVO, OPPURE UNA SOMMA ALGEBRICA, POSSO SCIOGLIERE LA PARENTESI SENZA CAMBIARE NESSUN SEGNO.**

La giustificazione della regola è piuttosto elaborata, e, contrariamente a quanto si sarebbe tentati di pensare, NON è già stata data, perché bisogna considerare **tutte** le diverse situazioni che si possono presentare; ora, nelle pagine precedenti, abbiamo già preso in esame qualcuno dei casi, ma non la totalità! Coraggio, dunque:

| | | |
|---|---|---|
| **A** | $-5+(-7)=-5-7$ | In questo caso, il + centrale indica somma algebrica e, come abbiamo già detto, la comunità dei matematici ha stabilito una convenzione secondo la quale, quando si vuole indicare la somma algebrica di due o più numeri relativi, si potranno scrivere questi numeri relativi uno di seguito all'altro coi rispettivi segni, senza introdurre parentesi. |
| **B** | $-5-(-7)=-5+7$ | In questo caso, il $-$ centrale indica sottrazione e, come abbiamo già visto, sottrarre un numero relativo equivale ad addizionare algebricamente l'opposto. Quindi $-5-(-7)=-5+(+7)$ ma anziché $-5+(+7)$ è possibile, per brevità, scrivere semplicemente $-5+7$ in virtù della convenzione appena ricordata al precedente punto A). |
| **C** | $-(-7)=+7$ | In questo caso, il $-$ davanti al $(-7)$ non è un $-$ di sottrazione, ma indica invece che "si vuole considerare l'opposto del numero $(-7)$"; e l'opposto di un numero relativo è il numero che si ottiene cambiando il segno e lasciando invariato il valore assoluto. |
| **D** | $+(-7)=-7$ | In questo caso, il + davanti al $(-7)$ non indica niente di particolare; ribadisce soltanto che si vuole considerare proprio il numero $(-7)$, senza passare all'opposto. Quindi, quando troviamo scritto $+(-7)$, potremo senza indugio scrivere semplicemente $-7$. |
| **E** | $+(-9+14-11)=-9+14-11$ | Vedi il precedente caso D): è la stessa cosa. |
| **F** | $-(-9+14-11)=+9-14+11$ | Il $-$ davanti alla parentesi indica qui "passaggio all'opposto"; e, come è stato ben spiegato nella pagina precedente, l'opposto di una somma algebrica è uguale alla somma algebrica degli opposti. |
| **G** | $-4+(-9+14-11)=$ $=-4-9+14-11$ | Il + davanti alla parentesi indica, in questo caso, somma algebrica; e abbiamo già puntualizzato che la somma algebrica gode delle proprietà associativa e dissociativa. La proprietà dissociativa è proprio quella che qui giustifica la possibilità di eliminare la parentesi, lasciando invariati i segni. |
| **H** | $-4-(-9+14-11)=$ $=-4+9-14+11$ | Il $-$ davanti alla parentesi indica, in questo caso, sottrazione; è noto che sottrarre un numero relativo equivale ad addizionare algebricamente l'opposto; e l'opposto di una somma algebrica (vedi pagina precedente) è uguale alla somma algebrica degli opposti. Quindi $-4-(-9+14-11)=-4+(+9-14+11)$; infine, $-4+(+9-14+11)=-4+9-14+11$, come già visto (caso G) |

Occhio al caso in cui la parentesi è elevata ad esponente, e preceduta dal segno $-$; qui è indispensabile tenere presente che l'elevamento a potenza ha la priorità.

Esempio: $-(-5)^2=-(+25)=-25$

# 4. PRODOTTO DI NUMERI RELATIVI

Per il prodotto, è stata fissata la seguente **REGOLA DEI SEGNI**:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **a)** | **+** | **moltiplicato** | **+** | **dà** | **+** |
| **b)** | **+** | **moltiplicato** | **–** | **dà** | **–** |
| **c)** | **–** | **moltiplicato** | **+** | **dà** | **–** |
| **d)** | **–** | **moltiplicato** | **–** | **dà** | **+** |
| **e)** | **inoltre, ogni numero relativo moltiplicato per 0 dà 0** | | | | |

♥ OSSERVAZIONE
Noterai che questa regola del "**segno moltiplicato segno**" finisce per coincidere con la regola, già acquisita, del "**segno davanti a segno**".
E' importante però comprendere che **si tratta di DUE REGOLE BEN DISTINTE CHE SI ASSOMIGLIANO, NON di UNA REGOLA SOLA!**

La **e)** è motivata dall'ovvia esigenza di conservare, per il numero 0, il ruolo di "**elemento assorbente**" per la moltiplicazione, che gli competeva nell'ambito dei numeri assoluti.

Giustifichiamo ora le **a), b), c), d)**
(per motivi di semplicità, ragioneremo su esempi specifici).

Per quanto riguarda la possibilità di *sottintendere* (in certi casi) *il puntino di moltiplicazione*, puoi cliccare sulla freccia ⇨

**a)** $(+5)\cdot(+3)=?$

Dato che i numeri positivi equivalgono sostanzialmente ai numeri assoluti (=senza segno), coerentemente dovrà essere $(+5)\cdot(+3)=5\cdot 3=15=+15$.

La regola "**+ moltiplicato + dà +**" resta così giustificata.

**c)** $(-5)\cdot(+3)=?$

Sempre per il fatto che i numeri positivi equivalgono sostanzialmente ai numeri assoluti, è "logico" che la moltiplicazione per $+3$ abbia lo stesso significato della moltiplicazione per $3$, la quale sta ad indicare una "somma ripetuta":
$(-5)\cdot(+3)=(-5)\cdot 3=(-5)+(-5)+(-5)=-15$

Abbiamo così giustificato anche la regola "**– moltiplicato + dà –**".

**b)** $(+5)\cdot(-3)=?$

E' del tutto spontaneo e sensato porre le varie definizioni in modo che le proprietà delle operazioni, inerenti ai numeri assoluti, non perdano la loro validità.
Allora, se non vogliamo rinunciare alla "commutativa della moltiplicazione", dovrà essere
$(+5)\cdot(-3)=(-3)\cdot(+5) \underset{\text{regola giustificata prima}}{=} -15$

e ciò giustifica la regola "**+ moltiplicato – dà –**"

**d)** $(-5)\cdot(-3)=?$

Consideriamo questa sequenza di operazioni:

$(-5)\cdot(+3)=-15$
$(-5)\cdot(+2)=-10$
$(-5)\cdot(+1)=-5$
$(-5)\cdot\ 0\ =\ 0$
$(\mathbf{-5})\cdot(\mathbf{-1})=\ \mathbf{?}$
$(\mathbf{-5})\cdot(\mathbf{-2})=\ \mathbf{?}$
$(\mathbf{-5})\cdot(\mathbf{-3})=\ \mathbf{?}$

Nello svolgere le prime tre operazioni della sequenza, abbiamo applicato una regola già acquisita ("– moltiplicato + dà –").
La quarta operazione è stata eseguita con la già motivata regola **e)**.
Riflettiamo, ora: ogni volta che il secondo fattore in gioco è diminuito di un'unità, il risultato "ha fatto un saltino", sulla *number line*, di 5 unità verso DESTRA.
E' quindi del tutto "logico" che i "punti interrogativi" vengano sciolti continuando a saltare verso DESTRA di 5 unità, e ottenendo perciò, rispettivamente, +5, +10 e +15.

Ecco così giustificata anche la regola "**– moltiplicato – dà +**"

D'altronde,

**la REGOLA DEI SEGNI sopra fissata è l'unica che consenta al prodotto fra numeri relativi, di godere di due fondamentali proprietà che già caratterizzavano il prodotto fra numeri assoluti: mi riferisco alla proprietà distributiva rispetto alla somma (che andrà qui pensata come somma algebrica), e alla proprietà commutativa.**

Infatti:

*a) + moltiplicato + dà +*

$(+4)\cdot(+6)=?$

Poiché **i numeri positivi devono potersi sostanzialmente identificare coi numeri assoluti** $(+4=4,\ +6=6)$, il risultato dev'essere per forza $+24=24$

*b) + moltiplicato − dà −*

$(+4)\cdot(+6)=?$

Consideriamo l'espressioncina $(+4)\cdot(+6-6)$.

- Si ha $(+4)\cdot(+6-6)=+4\cdot 0=0$.
- Applicando sulla stessa espressione la distributiva, si avrebbe:

$$(+4)\cdot(+6-6)=+4\cdot(+6)+(+4)\cdot(-6)=\underbrace{+24}_{\substack{\text{come già}\\ \text{stabilito}\\ \text{prima}}}+(+4)\cdot(-6)$$

Il risultato dovrà essere ancora 0, altrimenti saremmo costretti a dire che la distributiva non vale più; dunque,

$$+24+(+4)\cdot(-6)=0$$

E quest'ultima uguaglianza è corretta solo se si accetta il risultato

$$(+4)\cdot(-6)=-24.$$

Quindi la regola b) è l'unica compatibile con la conservazione della **distributiva**.

*c) − moltiplicato + dà −*

$(-4)\cdot(+6)=?$

Se si vuole che la moltiplicazione continui a godere della proprietà **commutativa**, si dovrà accettare che sia

$$(-4)\cdot(+6)=(+6)\cdot(-4)=\underbrace{-24}_{\substack{\text{regola già}\\ \text{motivata prima}}}$$

*d) − moltiplicato − dà +*

$$(-4)\cdot(+6-6)=\begin{cases}(-4)\cdot 0=0\\ (-4)\cdot(+6)+(-4)\cdot(-6)=\overbrace{-24}^{\text{vedi sopra}}+(-4)\cdot(-6)\end{cases}$$

per cui l'unica definizione compatibile con la **distributiva** è

$$(-4)\cdot(-6)=+24$$

Si può dimostrare che il prodotto fra numeri relativi, definito dalla regola dei segni di cui sopra, gode di TUTTE le proprietà che valgono per il prodotto fra numeri assoluti: commutativa, associativa-dissociativa, distributiva.

- **PRODOTTO DI PIU' FATTORI**

La seguente osservazione ci sarà molto utile quando, fra breve, parleremo di potenze di numeri relativi.

**Per un prodotto di più fattori, il segno del risultato dipende dal numero di fattori negativi in gioco:**

- ♥ **se il numero di fattori negativi è pari, il risultato sarà positivo, perché i segni "−" si compensano a coppie;**
- ♥ **se invece il numero di fattori negativi è dispari, il risultato sarà negativo, perché i segni "−" si compensano ancora a coppie, ma questa volta ne rimane uno "scompagnato".**

$$-\frac{3}{4}\cdot(-8)\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(+\frac{7}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\underset{\substack{\text{numero}\\ \text{pari}\\ \text{di fattori}\\ \text{negativi}}}{=}+\frac{21}{100};\qquad -\frac{1}{7}\cdot(+2)\cdot(-35)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot(-18)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\underset{\substack{\text{numero}\\ \text{dispari}\\ \text{di fattori}\\ \text{negativi}}}{=}-3$$

# 5. IL RECIPROCO (o "inverso") DI UN NUMERO RELATIVO IL QUOZIENTE DI DUE NUMERI RELATIVI

**Dato un numero relativo $a$, si dice "reciproco" di $a$ quel numero relativo che moltiplicato per $a$ dà come risultato +1.**

| Numero | Reciproco | |
|---|---|---|
| $-\frac{5}{2}$ | $-\frac{2}{5}$ | Infatti $-\frac{\cancel{2}}{\cancel{5}}\cdot\left(-\frac{\cancel{5}}{\cancel{2}}\right)=+1$ |
| $+\frac{3}{7}$ | $+\frac{7}{3}$ | |
| $-\frac{1}{5}$ | $-5$ | |
| $+3$ | $+\frac{1}{3}$ | |
| $-0,75=-\frac{75}{100}=-\frac{3}{4}$ | $-\frac{4}{3}$ | |

Si capisce che, **dato un numero razionale relativo, per farne il reciproco basterà**
- ♪ **scrivere il numero dato sotto forma di frazione (se già non lo è),**
- ♫ **poi "capovolgere" questa frazione, mantenendo invariato il segno che la precede**.

- ❑ Esistono due numeri relativi che hanno la proprietà di coincidere col proprio reciproco. Quali sono? ⇨
- ❑ Se ti chiedono "qual è il reciproco del numero 0", tu cosa rispondi? ⇨

♥ **Per effettuare una divisione fra due numeri relativi** (ossia, per trovarne il "quoziente") **basta moltiplicare il primo per il reciproco del secondo.**

Esempi: $+\frac{3}{5}:\left(-\frac{2}{7}\right)=+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{21}{10}$; $\qquad\frac{-3}{-\frac{1}{10}}=-3\cdot(-10)=+30$; $\qquad+\frac{1}{4}:3=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

La **giustificazione** di questa regola **ricalca la giustificazione data per la regola della sottrazione** (sottrarre significa addizionare algebricamente il numero opposto). Vediamo.

**La divisione è definita come l'operazione inversa della moltiplicazione**.
E' l'operazione mediante la quale, dati due numeri, se ne trova un terzo che, moltiplicato per il secondo, dà come risultato il primo. Es.: $30:6=5$ perché $5\cdot6=30$; $\quad+\frac{3}{5}:\left(-\frac{2}{7}\right)=-\frac{21}{10}$ perché $-\frac{21}{10}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=+\frac{3}{5}$.

Insomma: **$a:b=c$ quando $c\cdot b=a$**.

Noi vogliamo dimostrare che il quoziente **$a:b$** è dato dal prodotto **$a\cdot b'$**
(**essendo b' il reciproco di b**, ossia essendo **$b'\cdot b=+1$**).

**Dovremo far vedere che il prodotto $a\cdot b'$, se viene moltiplicato per b, dà come risultato a.**

Ma in effetti: **$(a\cdot b')\cdot b=a\cdot(b'\cdot b)=a\cdot(+1)=a$ C.V.D. (Come Volevasi Dimostrare)**

E' evidente che le stesse considerazioni danno la giustificazione generale della regola "divisione = moltiplicazione per il reciproco" anche nell'ambito dei numeri assoluti!

## COME SI INDICA IL RECIPROCO DI UN NUMERO (RELATIVO O ANCHE ASSOLUTO)

Consideriamo il numero $-\frac{5}{6}$. Se faccio l'operazione $\frac{1}{-\frac{5}{6}}$, che risultato ottengo? Ottengo $\frac{1}{-\frac{5}{6}}=1\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)=-\frac{6}{5}$.

Ora, $-\frac{6}{5}$ è il reciproco di $-\frac{5}{6}$. Si capisce immediatamente che questa osservazione si può generalizzare: dato un numero relativo $a$, il risultato dell'operazione $1/a$ è il reciproco di $a$. D'altronde (scusa l'insistenza) per il fatto che la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, la scrittura $1/a$, che equivale ad $1:a$, indica quel numero il quale moltiplicato per $a$ dà 1; ma questo è proprio, per definizione, il reciproco di $a$.

♥ **Perciò, in matematica, se si deve indicare il RECIPROCO di un numero $a$, si utilizza il simbolo $\frac{1}{a}$.**

# 6. POTENZE DI NUMERI RELATIVI

$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}$ (*un n° dispari di fattori negativi*!)

$\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = +\frac{1}{81}$ (*un n° pari di fattori negativi*!)

$\left(+\frac{1}{2}\right)^4 = \left(+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right) = +\frac{1}{16}$ ( *fattori tutti positivi*!)

$(+7)^3 = (+7)\cdot(+7)\cdot(+7) = +343$ ( *fattori tutti positivi*!)

OCCHIO!



$(-3)^2 = +9$ ma $-3^2 = -9$
Infatti, *in quest'ultimo caso*, l'esponente 2 si riferisce soltanto al 3, mentre il segno – è un "– di opposto" che si applica *alla fine*.

Quando eleviamo a potenza un numero relativo,
l'essenziale è che teniamo presente il significato dell'elevamento a potenza, che è sempre quello usuale:
**una potenza (con esponente >1) è un particolare prodotto, in cui i fattori sono tutti uguali**;
precisamente, è il prodotto di tanti fattori uguali alla "base" quante sono le unità dell' "esponente".

♥ **Per quanto riguarda il segno del risultato, basterà** allora **utilizzare l'osservazione sul prodotto di più fattori fatta al precedente paragrafo 4): dunque**

- **una potenza CON BASE NEGATIVA avrà risultato**
  - **NEGATIVO SE L'ESPONENTE (che dà il numero dei fattori) E' DISPARI**
  - **POSITIVO SE L'ESPONENTE (che dà il numero dei fattori) E' PARI**
- **mentre una potenza CON BASE POSITIVA equivale a un prodotto di fattori tutti positivi e quindi AVRA' SEMPRE RISULTATO POSITIVO, indipendentemente dalla parità o disparità dell'esponente.**

Sono sempre valide, poi, anche quando la base è un numero relativo, le definizioni
$a^1 = a$ ; $a^0 = 1$ ($a \neq 0$ : l'operazione $0^0$ si considera "indeterminata")

Sottolineiamo ancora, perché è un'osservazione banale ma davvero molto importante, che
♥ **qualsiasi numero non nullo (sia positivo che negativo), se viene elevato ad esponente PARI, dà sempre risultato POSITIVO.**

A questo proposito, anticipiamo una riflessione che sarà in seguito molto utile.

- Il valore dell'espressione $a+1$ potrà essere positivo, negativo o nullo a seconda del valore di $a$ : ad esempio, se $a=-7$ avremo $a+1=-7+1=-6$, mentre se $a=+2$ avremo $a+1=+2+1=+3$;
- invece **l'espressione $a^2+1$ assumerà sempre valore $>0$, per qualsiasi valore di $a$** : ad esempio, con $a=-7$ avremo $a^2+1=+49+1=+50$; con $a=+2$ avremo $a^2+1=+4+1=+5$; con $a=0$ avremo $a^2+1=0+1=+1$; ecc. ecc.

**ESERCIZI**

1) a) $(-3)^2=$ b) $(-3)^3=$ c) $(-3)^4=$ d) $(-3)^5=$ e) $(-3)^6=$ f) $-3^6=$ g) $(-3)^1=$ h) $(-3)^0=$

2) a) $(+10)^2=$ b) $(+10)^3=$ c) $(-10)^2=$ d) $(-10)^1=$ e) $(+10)^0=$ f) $-10^6=$ g) $(-10)^6=$

3) a) $\left(-\frac{4}{11}\right)^2=$ b) $\left(-\frac{5}{7}\right)^3=$ c) $\left(+\frac{1}{2}\right)^7=$ d) $(-1)^{114}=$ e) $\left(+\frac{1}{6}\right)^3=$ f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4=$ g) $\left(-\frac{2}{13}\right)^1=$

4) $(-2)^4+(+2)^4+(-2)^3+(+2)^3$ 5) $(-2)^3+(-3)^2+(-4)^1+(-5)^0$ 6) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3:\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{-3^2}{-2^3}$

7) $\frac{(-3)^2+1}{(-2)^2+1}$ 8) $\frac{-3^2+1}{-2^2+1}$ 9) $\frac{(-3)^3+1}{(-2)^3+1}$ 10) $\frac{-3^3+1}{-2^3+1}$ 11) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

12) $\left(-\frac{1}{3}\right)^5\left(-\frac{1}{3}\right)^4\cdot(-6)^9$ 13) $\left(-\frac{3}{4}\right)^7(-8)^7\left(-\frac{1}{6}\right)^7$ 14) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{10}:\left(-\frac{2}{3}\right)^9+\frac{5}{3}$ 15) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{10}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{10}-4^5$

**RISULTATI** 1) a) +9 b) −27 c) +81 d) −243 e) +729 f) −729 g) −3 h) +1 2) a) +100 b) +1000 c) +100 d) −10 e) +1 f) −1000000 g) +1000000 3) a) $+\frac{16}{121}$ b) $-\frac{125}{343}$ c) $+\frac{1}{128}$ d) +1 e) $+\frac{1}{216}$ f) $+\frac{81}{625}$ g) $-\frac{2}{13}$

4) 32 5) −2 6) 0 7) 2 8) $\frac{8}{3}$ 9) $\frac{26}{7}$ 10) $\frac{26}{7}$ 11) $\frac{7}{81}$ 12) $2^9=512$ 13) −1 14) 1 15) 0

# 7. POTENZE AD ESPONENTE NEGATIVO

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$

$5^2 = 5 \cdot 5$

$5^1 = 5$ "*un numero elevato a* 1 *è uguale a sé stesso*"

$5^0 = 1$ "*un numero non nullo, elevato a* 0, *dà* 1"

**$5^{-1} = ?$**

**$5^{-2} = ?$**

**$5^{-3} = ?$**

Ogni volta che l'esponente diminuisce di un'unità, il risultato viene diviso per 5 !
E' quindi "logico" che i "punti interrogativi" vengano sciolti continuando a dividere per 5 il risultato precedente.
Si ottiene così

$$\mathbf{5^{-1} = 5^0 : 5 = 1 : 5 = \frac{1}{5}}$$

$$\mathbf{5^{-2} = 5^{-1} : 5 = \frac{1}{5} : 5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}}$$

$$\mathbf{5^{-3} = 5^{-2} : 5 = \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}}$$

*Ascolta anche quest'altra considerazione.*
*Appare desiderabile che le potenze ad esponente negativo vengano introdotte in modo tale che si conservi, se possibile, la validità delle "vecchie" proprietà che sussistevano per gli esponenti positivi.*
*Alla luce di questo, dovrebbe essere, ad esempio,*

$$5^{-3} \cdot 5^3 = 5^{-3+3} = 5^0 = 1.$$

*Ma ciò si avrà solo se avremo posto la definizione* $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

Perveniamo allora "spontaneamente" alla seguente definizione:

$$\mathbf{a^{-n} \overset{def.}{=} \frac{1}{a^n} \overset{NOTA}{=} \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^n}_{\text{reci-proco di a}}}$$

( a *numero assoluto o relativo non nullo,*
n *intero positivo*)

NOTA
Infatti si può scrivere, ad esempio,

$$\frac{1}{5^3} = \frac{1^3}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

♥ **Una POTENZA AD ESPONENTE NEGATIVO si esegue facendo**

- **il reciproco della potenza avente la stessa base, ma esponente opposto**

oppure, equivalentemente, facendo

- **il RECIPROCO DELLA BASE e l'OPPOSTO DELL'ESPONENTE**



Esempi: $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} =$

$$\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{16}} = 1 \cdot \frac{16}{9} = \frac{16}{9}$$

*oppure*

$$\underbrace{\left(\frac{4}{3}\right)^2}_{\text{reci-proco di 3/4}} = \frac{16}{9}$$

$$\left(+\frac{7}{2}\right)^{-3} = \left(+\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{8}{343} \qquad \left(-\frac{3}{5}\right)^{-4} = \left(-\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^5 = -32 \qquad (+2)^{-10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$$

$$(-7{,}3)^{-2} = \left(-\frac{1}{7{,}3}\right)^2 = \frac{1}{53{,}29} = 0{,}0187\ldots$$

$$10^{-6} = \left(\frac{1}{10}\right)^6 = \frac{1}{1.000.000} = 0{,}000001$$

**Il numero 0 non può essere elevato ad esponente negativo**:
ciò infatti implicherebbe di far comparire 0 a denominatore (*illegal* operation).

Osserviamo che $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$;
quindi il reciproco di un numero $a$
si può indicare sia con $\frac{1}{a}$ che con $a^{-1}$.

| Numero | Reciproco | Opposto |
|---|---|---|
| **a** | $\mathbf{\frac{1}{a}}$ **oppure** $\mathbf{a^{-1}}$ | **−a** |

**Si può dimostrare che le potenze ad esponente intero negativo così introdotte godono anch'esse di TUTTE QUANTE le proprietà che abbiamo già visto valere per gli esponenti maggiori o uguali a 0.**

Qualche esempio

*additiva degli esponenti*: $a^{-3}\cdot a^{-5}=\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{a^5}=\frac{1}{a^8}=a^{-8}$ $\underbrace{-3-5}_{\text{somma algebrica}}=-8$

*additiva degli esponenti*: $a^{-3}\cdot a^{7}=\frac{1}{a^3}\cdot a^7=\frac{a^7}{a^3}=a^4$ $\underbrace{-3+7}_{\text{somma algebrica}}=+4$

*moltiplicativa degli esponenti*: $\left(a^{-2}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3}=\left(a^2\right)^3=a^6$ $(-2)\cdot(-3)=+6$

*sottrattiva degli esponenti*: $a^{-3}:a^{-5}=\frac{1}{a^3}:\frac{1}{a^5}=\frac{1}{a^3}\cdot a^5=\frac{a^5}{a^3}=a^2$ $-3-(-5)=+2$

*potenza di un prodotto*: $(ab)^{-4}=\frac{1}{(ab)^4}=\frac{1}{a^4b^4}=\frac{1}{a^4}\cdot\frac{1}{b^4}=a^{-4}\cdot b^{-4}$

## ESERCIZI

1) Esegui le seguenti **potenze a esponente negativo**.

a) $\left(-\frac{5}{11}\right)^{-2}=\ldots$ b) $\left(-\frac{3}{10}\right)^{-5}=\ldots$ c) $\left(+\frac{1}{2}\right)^{-4}=\ldots$ d) $\left(+\frac{3}{4}\right)^{-3}=\ldots$ e) $\left(-\frac{1}{10}\right)^{-5}=\ldots$ f) $(-14)^{-2}=\ldots$

g) $\left(+\frac{3}{7}\right)^{-3}=\ldots$ h) $\left(+\frac{1}{2}\right)^{-6}=\ldots$ i) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-4}=\ldots$ l) $(-5)^{-5}=\ldots$ m) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\ldots$

2) Esegui le operazioni a) … f) **applicando le proprietà delle potenze**. Qualche esempio dello stesso tipo:

$\left(-\frac{3}{7}\right)^{-10}:\left(-\frac{3}{7}\right)^{-12}=\left(-\frac{3}{7}\right)^{-10-(-12)}=\left(-\frac{3}{7}\right)^{2}=\frac{9}{49};$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5}:\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^{-8+5-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4}=\frac{81}{16}$

$\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right]^2=\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}\right]^2=\left(\frac{3}{4}\right)^{-6}=\left(\frac{4}{3}\right)^{6}=\frac{4096}{729};$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}\cdot 4^{-5}=\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4^2\right]^{-5}=(-2)^{-5}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{5}=-\frac{1}{32}$

a) $\left(-\frac{10}{3}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)^{-3}=\ldots$ b) $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^{2}\right]^{-5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{6}:\left(-\frac{3}{5}\right)^{-3}=\ldots$ c) $\left(-\frac{26}{33}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{22}{13}\right)^{-2}=\ldots$

d) $(+0,4)^{-5}\cdot(+0,4)^{5}:(+0,4)^{-1}=\ldots$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-20}:\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{7}=\ldots$ f) $\frac{(0,12)^{-5}\cdot(0,12)^{-5}}{\left[(0,12)^{-3}\right]^3}\cdot(0,12)^3=\ldots$

g) La seguente espressione equivale a una potenza di 10: quale? $(+0,05)^{-4}\cdot(-0,2)^{-4}:(-0,01)^{4}$

3) Completa la tabella sottostante:

| a | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | –1 | –1 | –1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 99 | 104 | –1 |
| $a^b$ | | | | | | | | | | | | | | | |

## RISULTATI

1) a) $\left(-\frac{5}{11}\right)^{-2}=\left(-\frac{11}{5}\right)^{2}=+\frac{121}{25}$ b) $\left(-\frac{3}{10}\right)^{-5}=\left(-\frac{10}{3}\right)^{5}=-\frac{100000}{243}$ c) $\left(+\frac{1}{2}\right)^{-4}=(+2)^4=+16$

d) $\left(+\frac{3}{4}\right)^{-3}=\left(+\frac{4}{3}\right)^{3}=+\frac{64}{27}$ e) $-100000$ f) $\frac{1}{196}$ g) $\frac{343}{27}$ h) 64 i) $\frac{625}{81}$ l) $-\frac{1}{3125}$ m) $\frac{8}{27}$

2) a) $\left(-\frac{10}{3}\right)^{-5}=-\frac{243}{100000}$ b) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-1}=-\frac{5}{3}$ c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}=\frac{9}{16}$ d) $(+0,4)^1=0,4$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$

f) $(0,12)^2=0,0144$ g) $(-0,01)^{-8}=\left(-\frac{1}{100}\right)^{-8}=(-100)^8=100^8=(10^2)^8=10^{16}$

3) –8 +4 –2 1 $-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{8}$ imp. imp. indet. 0 0 –1 +1 –1

## 8. NOTAZIONE "ESPONENZIALE" O "SCIENTIFICA"

**Le potenze di 10 ad esponente positivo si prestano bene ad esprimere i numeri grandissimi, mentre quelle ad esponente negativo ci aiutano a rappresentare i numeri piccolissimi:**

| | | |
|---|---|---|
| $10^{18}$ | *un miliardo di miliardi* | EXA |
| $10^{15}$ | *un milione di miliardi* | PETA |
| $10^{12}$ | *mille miliardi* | TERA |
| $10^{9}$ | 1.000.000.000 | GIGA (*Nota*) |
| $10^{6}$ | 1.000.000 | MEGA (*Nota*) |
| $10^{3}$ | 1000 | KILO (*Nota*) |
| $10^{2}$ | 100 | ETTO |
| $10^{1}$ | 10 | DECA |
| $10^{0}$ | 1 | |
| $10^{-1}$ | 0,1 | deci |
| $10^{-2}$ | 0,01 | centi |
| $10^{-3}$ | 0,001 | milli |
| $10^{-6}$ | 0,000001 | micro |
| $10^{-9}$ | 0,000000001 | nano |
| $10^{-12}$ | *un millesimo di miliardesimo* | pico |
| $10^{-15}$ | *un milionesimo di miliardesimo* | femto |
| $10^{-18}$ | *un miliardesimo di miliardesimo* | atto |

**NOTA (molto importante)**

**A volte, in un contesto INFORMATICO** (il discorso, comunque, è complicato: vedi questa PRECISAZIONE ⇨), **i prefissi KILO-MEGA-GIGA ecc. indicano valori un po' diversi da quelli della tabella qui a sinistra.** Poiché in Informatica sono fondamentali le potenze di 2 piuttosto che quelle di 10,

**il KILO tipico dell'Informatica non è esattamente 1000, ma è la potenza di 2 che più si avvicina a 1000, ossia $2^{10} = 1024$ ( = KILO binario). Analogamente per MEGA, GIGA ecc.**

♥ Schematizzando:

| | | In senso binario (computer) |
|---|---|---|
| KILO | $10^3$ | $2^{10} = 1024$ |
| MEGA | $10^6$ | $2^{20} = 1.048.576$ |
| GIGA | $10^9$ | $2^{30} = 1.073.741.824$ |
| … | … | … |

♥ **NOTAZIONE "ESPONENZIALE" o "SCIENTIFICA"**

E' una notazione standard, ampiamente utilizzata, nella quale il numero è sempre visto come **prodotto di un fattore compreso fra 1 e 10 ($1 \le a < 10$) per una potenza di 10**.

Esempi: $123000000000 = 1{,}23 \cdot 10^{11}$ $\quad 0{,}0024 = 2{,}4 \cdot 10^{-3}$

$30{,}7 = 3{,}07 \cdot 10$ $\quad 0{,}000000000000075 = 7{,}5 \cdot 10^{-14}$

♥ L'esponente va fissato tenendo presente che

**OGNI UNITÀ DELL'ESPONENTE CORRISPONDE A SPOSTARE LA VIRGOLA DI UN POSTO:**
**verso DESTRA → se l'esponente è POSITIVO,**
**verso SINISTRA ← se è NEGATIVO.**

**TABELLA A - Esempi di quantità fisiche espresse in notazione scientifica (valori approssimati)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Numero di Avogadro | $6{,}022 \cdot 10^{23}$ | Lunghezza di un batterio | $m\ 10^{-5}$ |
| Distanza della Terra dalla stella più vicina (Alpha Centauri) | $m\ 3{,}9 \cdot 10^{16}$ | Massa di un atomo di idrogeno | $kg\ 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ |
| Raggio della Terra | $m\ 6{,}37 \cdot 10^{6}$ | Massa di un protone | $kg\ 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ |
| Velocità della luce | $m/s\ 2{,}998 \cdot 10^{8}$ | Massa di un elettrone | $kg\ 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ |

**ESERCIZI**

1) Porta i seguenti numeri in notazione scientifica:
   a) 0,00000358 b) 358 c) 35800000000000 d) 35,8 e) 777,77 f) 7/125 g) 1/3 h) 123/4 i) $5^5$
2) Sul display di una calcolatrice scientifica, il risultato di un calcolo compare come 3.2 **−11** ; riscrivi il numero in notazione ordinaria (osserva che il "punto" è l'equivalente anglosassone delle nostra "virgola")
3) $1000^{-1000}$, scritto in notazione scientifica, è: a) $1 \cdot 10^{-3000}$ b) $1 \cdot 10^{-1000000}$ c) $1 \cdot 10^{-1000000000}$
4) Qual è il risultato dell'operazione $1{,}8 \cdot 10^{-10} : (4{,}5 \cdot 10^{-3})$, scritto in notazione scientifica?
   a) $4 \cdot 10^{4}$ b) $0{,}04 \cdot 10^{-6}$ c) $4 \cdot 10^{-8}$ d) $0{,}4 \cdot 10^{-7}$

5) Esegui queste operazioni fra numeri in notazione scientifica, scrivendo il risultato in notazione scientifica:

a) $(3{,}5\cdot10^{-4})\cdot(8\cdot10^{-7})$ b) $(3{,}5\cdot10^{-4}):(8\cdot10^{-7})$ c) $(3{,}5\cdot10^{-4})+(8\cdot10^{-7})$ d) $(8\cdot10^{-7})^2$

e) $(5{,}2\cdot10^{8})^2\cdot(8\cdot10^{-15})$ f) $(5{,}2\cdot10^{8})^2:(8\cdot10^{-15})$ g) $(4{,}12\cdot10^{-5})\cdot(7{,}8\cdot10^{6})$ h) $(3\cdot10^{-11}):(9\cdot10^{13})$

6) Quanti litri di acqua occorrerebbero per riempire una piscina quadrata di lato 1 km, e profonda 10 metri?

7) Un grande aereo può pesare $1{,}8\cdot10^5$ kg. Quanto pesa un colibrì, se il rapporto fra i due pesi è $6{,}4\cdot10^6$ ?

8) Serviti dei dati della TABELLA A (*nonché della calcolatrice!*) per rispondere ai quesiti sottostanti.
**Approssima pure i risultati trovati, ma portali sempre in notazione scientifica.**

a) Di quanti metri cubi è il volume della Terra? (*volume sfera* $= \frac{4}{3}\pi r^3$, con $\pi = 3{,}14159...$)

b) Quanti secondi ci sono in 1 anno "medio" (di 365,25 giorni)? Quanti ne ha vissuti un uomo di 70 anni?

c) Quanti kilometri percorre la luce in 1 anno? [Approfondimento: definizione di "anno luce" ⇨]

d) Quanti secondi impiega un raggio di luce proveniente dalla Terra, a raggiungere la stella più vicina? E a quanti anni corrisponde tale intervallo di tempo?

e) Quant'è lungo l'equatore terrestre? E quanti batteri in fila ci vorrebbero per fare un "trenino" di batteri lungo come l'equatore terrestre?

f) Quant'è la massa in grammi di una *mole* di idrogeno atomico, cioè di un numero di Avogadro di atomi di idrogeno? [Approfondimenti: I) differenza fra "massa" e "peso" ⇨ II) Il concetto di "mole" ⇨]

g) Calcola il rapporto fra la massa di un protone e la massa di un elettrone.

9) Chiaramente, nel concreto, un foglio di carta non si può ripiegare su sé stesso per troppe volte!
… Ma se fosse possibile farlo per 50 volte, che spessore si raggiungerebbe?
Rispondi tenendo presente che una risma da 500 fogli di carta per fotocopie è spessa 5 cm circa, e fai il calcolo: a) dapprima utilizzando l'approssimazione per difetto $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$
b) poi col valore esatto, servendoti, com'è ovvio, di una calcolatrice tascabile.

10) *Vediamo se riesci a cavartela con questo problema, che allo stato attuale delle tue conoscenze comporta un certo impegno (quanto varrà $r^3$ ?), e richiede anche di estrarre una radice cubica. Però ce la puoi fare! Lavora con cura e ricontrolla, prima di andare a sbirciare il risultato!!!*
La forma della Luna è pressoché sferica, e il suo volume è di circa $2{,}2\cdot10^{19}$ $m^3$. Gli abitanti della Terra sono $\approx 7\cdot10^9$ (anno 2012). Infine, la formula per la superficie della sfera è $S = 4\pi r^2$. Utilizzando queste informazioni, stabilisci, e scrivi in notazione scientifica, quante persone si avrebbero mediamente in ogni $km^2$ se tutta la popolazione terrestre si trasferisse sulla Luna.

**RISPOSTE**

1) a) $3{,}58\cdot10^{-6}$ b) $3{,}58\cdot10^{2}$ c) $3{,}58\cdot10^{13}$ d) $3{,}58\cdot10$ e) $7{,}7777\cdot10^{2}$ f) $0{,}056 = 5{,}6\cdot10^{-2}$
g) $0{,}3333... = 3{,}333...\cdot10^{-1}$ h) $30{,}75 = 3{,}075\cdot10$ i) $3125 = 3{,}125\cdot10^{3}$

2) Significa $3{,}2\cdot10^{-11} = 0{,}000000000032$ 3) a) perché $1000^{-1000} = (10^3)^{-1000} = 10^{-3\,\cdot\,1000} = 10^{-3000}$ 4) c)

5) a) $28\cdot10^{-11} = 2{,}8\cdot10^{-10}$ (il fattore 28 non andava bene perché non era compreso fra 1 e 10: allora ♥ **abbiamo diviso per 10 questo fattore e contemporaneamente moltiplicato per 10 l'altro**!)

b) $0{,}4375\cdot10^{3} = 4{,}375\cdot10^{2}$ c) $0{,}00035 + 0{,}0000008 = 0{,}0003508 = 3{,}508\cdot10^{-4}$

d) $64\cdot10^{-14} = 6{,}4\cdot10^{-13}$ e) $2{,}1632\cdot10^{3}$ f) $3{,}38\cdot10^{31}$ g) $3{,}2136\cdot10^{2}$ h) $3{,}333...\cdot10^{-25}$

6) $10^{10}$ litri (1 litro = 1 $dm^3$, e 1 $m^3$ = 1000 $dm^3$) 7) Circa $2{,}8\cdot10^{-2}$ kg = 28g

8) a) $\approx \frac{4}{3}\pi\cdot(6{,}37\cdot10^{6}\ m)^3 \approx \frac{4}{3}\cdot3{,}14\cdot258{,}5\cdot10^{18}\ m^3 \approx 1082\cdot10^{18}\ m^3 = \mathbf{1{,}082\cdot10^{21}\ m^3}$

b) $3600s\cdot24\cdot365{,}25 = 86400s\cdot365{,}25 = 31557600s = \mathbf{3{,}15576\cdot10^{7}}$ s. 70 anni $\approx 2{,}2\cdot10^{9}$ s

c) $\approx (2{,}998\cdot10^{8}\ m/s)\cdot(3{,}15576\cdot10^{7}\ s) \approx \mathbf{9{,}46\cdot10^{15}\ m = 9{,}46\cdot10^{12}\ km}$ **(1 "anno luce")**

d) $\approx (3{,}9\cdot10^{16}\ m) : (2{,}998\cdot10^{8}\ m/s) = (3{,}9 : 2{,}998)\cdot(10^{16} : 10^{8})s \approx \mathbf{1{,}3\cdot10^{8}\ s}$
$(1{,}3\cdot10^{8}\ s) : (3{,}15576\cdot10^{7}\ s) \approx 0{,}412\cdot10$ anni = **4,12 anni**

e) lunghezza equatore $\approx$ m $6{,}37\cdot10^{6}\cdot2\pi \approx$ m $6{,}37\cdot10^{6}\cdot6{,}28 \approx$ m $40\cdot10^{6} =$ **m $4\cdot10^{7}$**
$(m\ 4\cdot10^{7}) : (m\ 10^{-5}) =$ **$4\cdot10^{12}$** batteri in fila nel "trenino"

f) massa di 1 atomo di idrogeno $\approx$ kg $1{,}673\cdot10^{-27}$ = g $1{,}673\cdot10^{-27}\cdot10^{3}$ = g $1{,}673\cdot10^{-24}$
massa di 1 mole di idrogeno $\approx$ g $1{,}673\cdot10^{-24}\cdot6{,}022\cdot10^{23} \approx$ g $10{,}0748\cdot10^{-1} =$ **g 1,00748**

g) $\approx (kg\ 1{,}672\cdot10^{-27}) : (kg\ 9{,}109\cdot10^{-31}) \approx 0{,}18355\cdot10^{4} =$ **$1{,}8355\cdot10^{3}$**

9) a) $10^{14}$ mm = $10^{8}$ km!!! b) Circa $1{,}126\cdot10^{14}$ mm = $1{,}126\cdot10^{8}$ km 10) Circa 184 persone per $km^2$

## 9. ESERCIZI SUI NUMERI RELATIVI (risposte a pag. 58)

1) Un sommozzatore scende a 35 metri sotto il livello del mare, poi: risale di 12 metri, ridiscende di 25 metri, sale nuovamente di 18 metri. A che profondità si trova a questo punto?

2) Se la temperatura, a partire da +7° C, si abbassa di 5° per 3 volte di seguito, a quanti gradi si porta?

3) Al Casinò, l'irrequieto Calogero perde subito 10 gettoni, poi per 3 volte consecutive ne vince 5, poi ne punta 20 in un sol colpo ma disgraziatamente li perde.
Se ogni gettone è da 20 euro, qual è la sua situazione finanziaria ora?

4) Arturo ha guadagnato, giocando in Borsa, 2500 euro nel mese di Gennaio; a Febbraio ha però perso 1800 euro, in Marzo ha perso il doppio di quanto aveva perso in Febbraio, e in Aprile ha avuto un'altra perdita, tripla di quella di Marzo. Soltanto in Maggio ha poi guadagnato 800 euro.
Qual è la sua situazione finanziaria ora (fine Maggio), rispetto a inizio anno?
E quale espressione con numeri relativi la descrive?

5) Una pulce, essendo atterrata per caso su di una *number line*, in corrispondenza del punto di ascissa +1/2, compie una serie di 8 saltelli consecutivi, ciascuno di lunghezza 1/3, verso sinistra, poi, avendo visto un ragno, se la batte rapidamente saltando per 15 volte verso destra; ognuno di questi 15 salti, per il terrore, è di ampiezza doppia rispetto a ciascuno degli 8 salti precedenti. Stabilisci in corrispondenza di quale ascissa si trova ora la pulce, e a quale distanza dal punto di partenza.

6) Disegna sul tuo quaderno una **number line**, e su di essa, con l'unità di misura specificata fra parentesi, rappresenta i numeri relativi indicati. La correzione di a) è su carta, quelle di b), c), d), e) su Internet ⇨

a) $-3 \quad +3 \quad +\frac{3}{5} \quad -\frac{3}{5} \quad +\frac{20}{3}$ (u = 1 quadretto)
b) $-\frac{2}{3} \quad -\frac{3}{2} \quad +\frac{3}{2} \quad +3,2 \quad -\frac{32}{7}$ (u = 1 quadretto)
c) $+\frac{3}{4} \quad +\frac{13}{4} \quad -\frac{11}{4} \quad -\frac{11}{2} \quad -1,25$ (u = 1 quadretto)
d) $-\frac{9}{2} \quad -\frac{7}{4} \quad +\frac{15}{4} \quad +1,\overline{3} \quad +\sqrt{5}$ (u = 2 quadretti)
e) $-\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{2} \quad +\frac{13}{4} \quad -\frac{27}{8} \quad +2,2$ (u = 2 quadretti, *number line* verticale)

7) Svolgi le seguenti espressioncine nelle quali compare il simbolo di valore assoluto:

a) $|-3|+|-1|+|+2|+6$
b) $|-15|\cdot(-3)+(-15)\cdot|-3|$
c) $\frac{(-7+|8|)\cdot(|-5|-7)+2}{4}$
d) $\frac{|-5\cdot 7|+|-5|\cdot|7|}{|-6|-7}$

8) Alcune proprietà del simbolo di "valore assoluto" sono: $|a\cdot b|=|a|\cdot|b| \qquad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|} \qquad |a+b|\le|a|+|b|$

Ora: nella $|a+b|\le|a|+|b|$, in quali casi il simbolo "$\le$" (che significa "minore, o uguale") può diventare "$=$"?

9) Quanti sono gli interi relativi strettamente compresi fra $-13$ e $+3$?
("strettamente") vuol dire $-13<x<+3$ e NON $-13\le x\le+3$

10) Esegui le seguenti **somme algebriche**:

a) $-5-9=\ldots$
b) $-12+8=\ldots$
c) $+7-9=\ldots$
d) $-3+18=\ldots$
e) $+2+10=\ldots$
f) $-5-5=\ldots$
g) $-7+7=\ldots$
h) $+4-5=\ldots$
i) $-512+254=\ldots$
l) $-132+305=\ldots$
m) $-75-142=\ldots$
n) $+37+73=\ldots$
o) $-0,45-0,3=\ldots$
p) $+13,1-24,72=\ldots$
q) $+0,1-0,01=\ldots$
r) $-3,8+4,4=\ldots$
s) $0-0,5=\ldots$
t) $-0,41-0=\ldots$
u) $-0,4\overline{7}+1=\ldots$
v) $0,0\overline{4}-0,\overline{5}=\ldots$

11) Esegui le seguenti **somme algebriche tra frazioni**. Esempi:

$-\frac{7}{10}+\frac{1}{15}=\frac{-21+2}{30}=\frac{-19}{30}=-\frac{19}{30}$ $\qquad -\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{-2-3-1}{6}=\frac{-\cancel{6}^{1}}{\cancel{6}_{1}}=-1$ $\qquad \frac{5}{7}-3=\frac{5-21}{7}=\frac{-16}{7}=-\frac{16}{7}$

$+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{2-1}{8}=\frac{1}{8}$ $\qquad +\frac{3}{5}-\frac{11}{10}=\frac{6-11}{10}=\frac{-\cancel{5}^{1}}{\cancel{10}_{2}}=-\frac{1}{2}$ $\qquad -\frac{3}{10}+2-\frac{1}{6}=\frac{-9+60-5}{30}=\frac{+\cancel{46}^{23}}{\cancel{30}_{15}}=\frac{23}{15}$

a) $-\frac{3}{4}-\frac{4}{5}=\ldots$
b) $+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}=\ldots$
c) $-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}-\frac{3}{7}=\ldots$
d) $+3-\frac{5}{2}=\ldots$
e) $-4+\frac{11}{3}=\ldots$
f) $1-\frac{11}{12}-\frac{1}{4}=\ldots$
g) $-\frac{3}{5}+\frac{3}{10}-\frac{3}{2}+3=\ldots$
h) $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\ldots$

12) Esegui le seguenti **sottrazioni**. Esempi:

$-9-(-5)=-9+5=-4$ $\qquad -\frac{4}{3}-\left(+\frac{1}{5}\right)=-\frac{4}{3}-\frac{1}{5}=\frac{-20-3}{15}=-\frac{23}{15}$ $\qquad 5-\left(-\frac{1}{2}\right)=5+\frac{1}{2}=\frac{10+1}{2}=\frac{11}{2}$

a) $-7-(-3)=\ldots$ b) $+15-(-6)=\ldots$ c) $-1-(+5)=\ldots$ d) $-123-(-56)=\ldots$

e) $+8-(-5)=\ldots$ f) $10-(+123)=\ldots$ g) $-0,7-(-1,5)=\ldots$ h) $0-(-9,45)=\ldots$

i) $-\frac{3}{4}-\left(-\frac{4}{5}\right)=\ldots$ l) $1-\left(-\frac{4}{3}\right)=\ldots$ m) $+\frac{1}{2}-\left(+\frac{1}{4}\right)=\ldots$ n) $\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\ldots$

o) $\frac{3}{41}-\left(+\frac{4}{19}\right)=\ldots$ p) $-\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{6}\right)=\ldots$ q) $-\frac{5}{3}-\left(+\frac{2}{5}\right)=\ldots$ r) $6-\left(-\frac{11}{3}\right)=\ldots$

13) Esegui le seguenti **somme algebriche**. Esempi:

$(-4)+(-7)+(+1)-(-3)-(+5)=-4-7+1+3-5=-16+4=-12$

$-\frac{5}{12}-\left(-\frac{7}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{12}+\frac{7}{3}-\frac{1}{4}=\frac{-5+28-3}{12}=\frac{\cancel{20}^{\,5}}{\cancel{12}_{\,3}}=\frac{5}{3}$

a) $-5+(-3)-(-7)+(+2)=\ldots$

b) $3+(+8)+(-11)=\ldots$

c) $+19-(-33)+(-14)-(-1)=\ldots$

d) $-4+(-5)-(-6)=\ldots$

e) $0-(-13)+(+5)+(-9)-(-10)=\ldots$

f) $(-40)-(-21)+(-14)=\ldots$

g) $-\frac{4}{9}-\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-(-1)=\ldots$

h) $+4+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)=\ldots$

i) $-3-(+4,7)-(-0,9)=\ldots$

l) $2-\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)=\ldots$

m) $-\frac{3}{10}-\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{12}{5}\right)=\ldots$

n) $2,4-(-3,05)+(-7,45)=\ldots$

14) **Operazioni crociate**: riempi le caselle vuote

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | + | | = | −13 |
| − | | − | | − |
| 2 | + | 4 | = | |
| = | | = | | = |
| −10 | + | | = | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −13 | − | | = | |
| + | | − | | + |
| | + | −3 | = | −11 |
| = | | = | | = |
| | − | −6 | = | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −2 | + | | = | |
| + | | − | | + |
| −4 | − | | = | −5 |
| = | | = | | = |
| | + | | = | −4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | + | | = | 1 |
| + | | − | | + |
| | − | 0 | = | |
| = | | = | | = |
| −10 | + | | = | −4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −3 | + | | = | |
| − | | − | | − |
| −10 | + | | = | −16 |
| = | | = | | = |
| | + | −7 | = | |

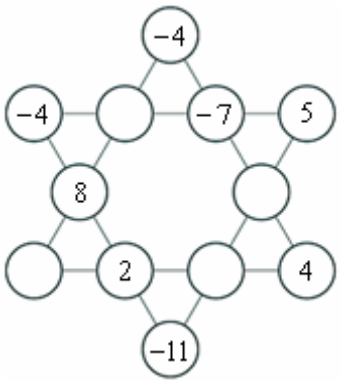
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −9 | + | 4 | = | |
| − | | − | | − |
| −9 | + | | = | |
| = | | = | | = |
| | + | 10 | = | |

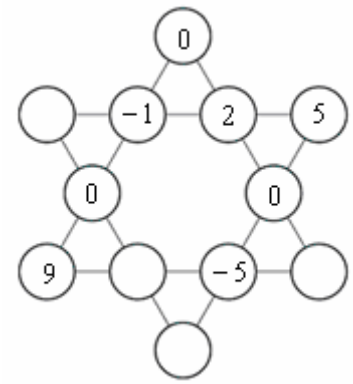
Questo delizioso sito merita la tua visita!!!

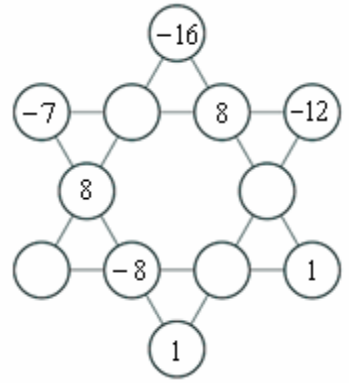


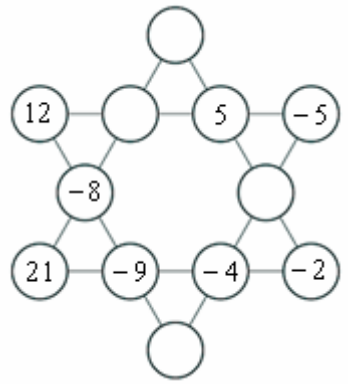
⇨

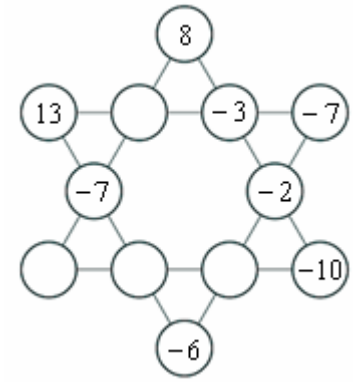
15) **Stelle magiche**: riempi i pallini vuoti (la somma algebrica su ogni linea deve essere sempre la stessa)

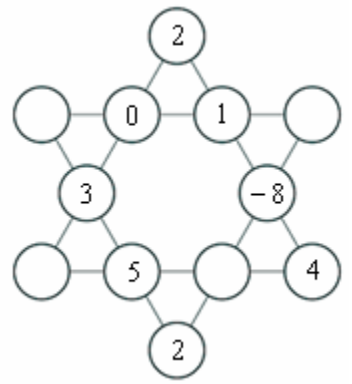


16) Esegui le seguenti **moltiplicazioni**. Esempi: $(+5)\cdot(-3)=-15$ $-\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\cdot\left(-\frac{\cancel{10}^{\,2}}{\cancel{9}_{\,3}}\right)\cdot\left(+\frac{1}{\cancel{4}_{\,2}}\right)=+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

a) $-7\cdot(-3)=\ldots$ b) $+15\cdot(-6)=\ldots$ c) $-1\cdot(+5)=\ldots$ d) $-20\cdot(-5)=\ldots$

e) $-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\ldots$ f) $+\frac{2}{3}\cdot\left(+\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=\ldots$ g) $-\frac{4}{10}\cdot(+5)=\ldots$ h) $-7\cdot\left(-\frac{4}{21}\right)\cdot\left(-\frac{15}{10}\right)=\ldots$

i) $\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-8)=\ldots$ l) $(+0{,}3)\cdot(+0{,}2)=\ldots$ m) $0\cdot(-9{,}45)=\ldots$ n) $-0{,}\overline{3}\cdot(-0{,}3)=\ldots$

17) Esegui le seguenti **divisioni**. Es. $+15:(-5)=-3$ $(-12):(-21)=+\frac{\cancel{12}^{\,4}}{\cancel{21}_{\,7}}=\frac{4}{7}$ $-\frac{3}{8}:\left(-\frac{9}{16}\right)=-\frac{\cancel{3}}{\cancel{8}}\cdot\left(-\frac{\cancel{16}^{\,2}}{\cancel{9}_{\,3}}\right)=\frac{2}{3}$

$-5:\left(-\frac{1}{2}\right)=-5\cdot(-2)=10$ $-\frac{4}{3}:\left(+\frac{5}{6}\right)=-\frac{4}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{6}^{\,2}}{5}=-\frac{8}{5}$ $\left(+\frac{4}{5}\right):\left(-\frac{8}{5}\right)=\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\cdot\left(-\frac{\cancel{5}}{\cancel{8}_{\,2}}\right)=-\frac{1}{2}$

a) $-4:(-5)=\ldots$ b) $-7:(+21)=\ldots$ c) $+72:(-8)=\ldots$ d) $-22:(-66)=\ldots$ e) $-\frac{3}{4}:\left(-\frac{4}{5}\right)=\ldots$ f) $0:(-3)=\ldots$

g) $+\frac{5}{6}:\left(-\frac{15}{2}\right)=\ldots$ h) $-\frac{1}{3}:\frac{1}{30}=\ldots$ i) $+\frac{3}{7}:\left(+\frac{12}{30}\right)=\ldots$ l) $-1{,}4:(-0{,}2)=\ldots$ m) $0{,}0\overline{2}:\left(-0{,}\overline{01}\right)=\ldots$

18) **Metti il segno di operazione giusto** al posto del rombo:

a) $(-5)\blacklozenge(-5)=-10$ b) $(-5)\blacklozenge(-5)=+1$ c) $(-5)\blacklozenge(-5)=0$ d) $(-5)\blacklozenge(-5)=+25$
e) $(-6)\blacklozenge(+3)=-3$ f) $(-6)\blacklozenge(+3)=-2$ g) $(-6)\blacklozenge(+3)=-9$ h) $(-6)\blacklozenge(+3)=-18$
i) $(-8)\blacklozenge 0=-8$ l) $(-8)\blacklozenge 1=-8$ m) $(-8)\blacklozenge 1=-9$ n) $(-8)\blacklozenge 0=$ impossibile o) $0\blacklozenge(-8)=0$

19) **Trova due interi relativi conoscendone la somma *s* e il prodotto *p***:

$s=-12,\ p=+20$ $s=-1,\ p=-20$ $s=+3,\ p=-18$ $s=0,\ p=-25$ $s=+30,\ p=-64$ $s=-13,\ p=+12$
$s=12,\ p=27$ $s=-14,\ p=40$ $s=-10,\ p=-96$ $s=-70,\ p=1000$ $s=-1,\ p=-552$ $s=1,\ p=-2$

20) **Completa le TABELLE**. Risposte a pag. 59; alla fine (NON prima), clicca qui ⇨ per alcune osservazioni

| a | $-6$ | $-6$ | $+6$ | $+6$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-5$ | $-3$ | $0$ | | | $+2$ | $-\frac{1}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | $-2$ | $+2$ | $-2$ | $+2$ | $+\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-5$ | $0$ | $-3$ | $+10$ | $-4$ | | | $-\frac{3}{4}$ |
| a + b | | | | | | | | | | | $-5$ | $-7$ | $+\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{12}$ | $-\frac{19}{12}$ |

| a | $-6$ | $-6$ | $+6$ | $+6$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-5$ | $-3$ | $0$ | | | $+\frac{1}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | $-2$ | $+2$ | $-2$ | $+2$ | $+\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-5$ | $0$ | $-3$ | $-6$ | $+5$ | | | $-\frac{3}{4}$ |
| a − b | | | | | | | | | | | $+1$ | $-9$ | $+\frac{4}{3}$ | $-2$ | $+\frac{7}{20}$ |

| a | $-6$ | $-6$ | $+6$ | $+6$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $1$ | $0$ | $+7$ | $-8$ | $+\frac{2}{3}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | $-2$ | $+2$ | $-2$ | $+2$ | $+\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | | | | | | | $-\frac{1}{6}$ | $+2$ |
| a · b | | | | | | | | $0$ | $0$ | $1$ | $-21$ | $+16$ | $-4$ | $+\frac{1}{24}$ | $-\frac{1}{3}$ |

| a | $-6$ | $-6$ | $+6$ | $+6$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $1$ | $0$ | $0$ | | | | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | $-2$ | $+2$ | $-2$ | $+2$ | $+\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $0$ | $0$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $+2$ | $-\frac{1}{12}$ | | |
| a : b | | | | | | | | | | | $6$ | $-5$ | $+8$ | $+\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

21) 5 amici si mettono d'accordo per giocare in Borsa in "società", ripartendo guadagni e perdite.
Se giorno dopo giorno il loro investimento subisce le seguenti variazioni: $+400\ -100\ -500\ -300\ -500$,
scrivi l'espressione che descrive quanto tocca a ciascuno dopo questi 5 giorni, e calcolane il valore.

22) Esegui le seguenti **potenze**. Esempi: $\left(-\frac{7}{9}\right)^2 = +\frac{49}{81}$ $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{64}$ $\left(+\frac{2}{3}\right)^4 = +\frac{16}{81}$ $\left(+\frac{5}{7}\right)^3 = +\frac{125}{343}$

a) $\left(-\frac{1}{10}\right)^3 = \ldots$ b) $\left(-\frac{6}{11}\right)^2 = \ldots$ c) $\left(+\frac{4}{5}\right)^2 = \ldots$ d) $\left(+\frac{3}{5}\right)^3 = \ldots$ e) $\left(-\frac{13}{12}\right)^2 = \ldots$ f) $\left(-\frac{16}{24}\right)^3 = \ldots$ g) $(+4)^4 = \ldots$

23) Esegui le seguenti operazioni **applicando le proprietà delle potenze**. Esempi:

$$\left(-\frac{4}{3}\right)^5 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^3 : \left(-\frac{4}{3}\right)^6 = \left(-\frac{4}{3}\right)^{5+3-6} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \qquad \left(+\frac{6}{7}\right)^5 \cdot \left(-\frac{14}{9}\right)^5 = \left[\left(+\frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{7}}\right)\cdot\left(-\frac{\cancel{14}^{\,2}}{\cancel{9}_{\,3}}\right)\right]^5 = \left(-\frac{4}{3}\right)^5 = -\frac{1024}{243}$$

$$\left(+\frac{1}{2}\right)^4 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = -\left(\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{1}{128}$$

$$\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^2\right]^5 : \left[\left(-\frac{2}{5}\right)^3\right]^3 : \left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right)^{10} : \left(-\frac{2}{5}\right)^9 : \left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right)^{10-9-1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^0 = 1$$

a) $\left(-\frac{1}{10}\right)^6 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) = \ldots$ b) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^3 : \left(-\frac{2}{3}\right)^7 = \ldots$ c) $\left(\frac{12}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{5}{16}\right)^3 = \ldots$ d) $(+0,2)^5 \cdot (+0,2)^5 : (+0,2)^7 = \ldots$

e) $\left[\left(-\frac{5}{2}\right)^4 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2\right]^3 : \left[\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^3\right]^4 = \ldots$ f) $\left[\frac{(-5)^2 \cdot (-5)^3}{(-5)^4}\right]^5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^5 = \ldots$ g) $\frac{\left(+\frac{3}{10}\right)^3 \left(+\frac{3}{10}\right)^3}{\left(+\frac{3}{10}\right)^2} = \ldots$

h) $(+5)^{12} : (-5)^9$ i) $(-10)^4 \cdot 10^3 \cdot (-10)^5$ l) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 : \left[\left(-\frac{3}{4}\right)^6 \cdot \left(+\frac{3}{4}\right)\right]$ m) $(-0,3)^3 \cdot (-0,2)^3 \cdot (-0,1)^3$

24) VERO O FALSO?

| | | |
|---|---|---|
| a) La differenza fra un numero relativo e il suo opposto è uguale al doppio di quel numero relativo | V | F |
| b) Il quoziente fra due numeri opposti (entrambi non nulli) è sempre $-1$ | V | F |
| c) Il prodotto fra un numero relativo e il suo opposto è uguale al quadrato di quel numero relativo | V | F |

25) Un intero relativo *x* ha un certo valore; si osserva che se questo valore diminuisse di 1 unità, il quadrato del numero crescerebbe di 15 unità. Strano, vero? Ma no! Determina, per tentativi, *x*!

26) Partendo da un numero *x* sulla *number line* lo elevo al quadrato, e in questo modo passo dall'altra parte rispetto all'origine. Poi sottraggo dal numero ottenuto 1 unità è mi ritrovo, rispetto all'origine, dalla stessa parte del numero iniziale. Cosa mi puoi dire di certo sul numero *x*?

27) Sottraggo dal cubo di $-5$ il quadrato di $-5$, addiziono algebricamente $-5$ al risultato e infine moltiplico per $-5$ il numero ottenuto. Scrivi l'espressione algebrica corrispondente a questa procedura, e calcolane il valore.

28) Quanti sono gli interi relativi *n* tali che $|n| < 5$ ? E quanti quelli tali che $|n| \le 5$ ?

29) VERO O FALSO?

| | | |
|---|---|---|
| a) Il quadrato di un numero reale negativo, è sempre maggiore del numero stesso | V | F |
| b) Il quadrato di un numero reale positivo, è sempre maggiore o uguale al numero stesso | V | F |
| c) La somma algebrica di un numero negativo col suo valore assoluto è 0 | V | F |
| d) La somma algebrica di un numero positivo col suo valore assoluto è uguale al doppio del numero | V | F |
| e) La distanza di due punti sulla number line, è sempre uguale al valore assoluto della differenza delle loro ascisse, prese in un ordine qualsiasi | V | F |
| f) L'ascissa del punto di mezzo di un segmento sulla number line, si può sempre ottenere sommando algebricamente le ascisse dei due estremi, poi facendo la metà del risultato | V | F |
| g) Il cubo di un numero reale negativo è sempre minore o uguale al numero stesso | V | F |

30) Scrivi il simbolo corretto ("< " o ">") al posto dei puntini:

a) $-25 \ \ldots\ -24$ b) $-\frac{15}{4} \ \ldots\ -\frac{19}{5}$ c) $+\frac{23}{41} \ \ldots\ -\frac{1}{19}$ d) $-0,02 \ \ldots\ -0,\overline{02}$ e) $(+0,12345678)^2 \ \ldots\ +0,12345678$

**RISPOSTE**

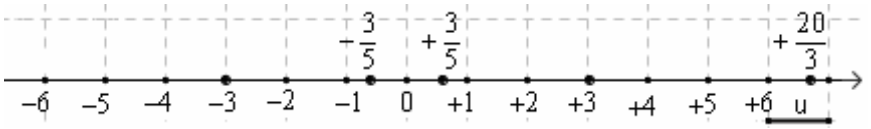
1) $-35+12-25+18=-30$. Si trova a 30 metri sotto la superficie. 2) $+7-5-5-5=-8$. 8° C sotto zero.

3) $-10+5+5+5-20=-15$. Sta perdendo $15\cdot 20=300$ euro.

4) $+2500-1800-3600-10800+800=-12900$.

5) $+\frac{1}{2}-\frac{8}{3}+\frac{30}{3}=+\frac{47}{6}$. La distanza dal punto di partenza è data da $\frac{47}{6}-\frac{1}{2}=\frac{44}{6}=\frac{22}{3}$.

6a)




7) a) 12 b) −90 c) 0 d) −70

8) Può diventare "=" quando a, b sono concordi (entrambi positivi o entrambi negativi), oppure quando almeno uno dei due numeri a, b è 0

9) 15 10) a) −14 b) −4 c) −2 d) 15 e) 12 f) −10 g) 0 h) −1 i) −258 l) $17\overline{3}$ m) −217 n) $110\overline{}$
o) −0,75 p) −11,62 q) 0,09 r) 0,6 s) −0,5 t) −0,41 u) $47/90=0,5\overline{2}$ v) $-23/45=-0,5\overline{1}$

11) a) $-\frac{31}{20}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{93}{70}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{3}$ f) $-\frac{1}{6}$ g) $\frac{6}{5}$ h) $\frac{1}{12}$

12) a) −4 b) 21 c) −6 d) −67 e) 13 f) −113 g) 0,8 h) 9,45
i) $\frac{1}{20}$ l) $\frac{7}{3}$ m) $\frac{1}{4}$ n) $\frac{3}{4}$ o) $-\frac{107}{779}$ p) $-\frac{1}{30}$ q) $-\frac{31}{15}$ r) $\frac{29}{3}$

13) a) 1 b) 0 c) 39 d) −3 e) 19 f) −33 g) $\frac{7}{18}$ h) $\frac{11}{3}$ i) −6,8 l) $\frac{13}{4}$ m) $-\frac{101}{30}$ n) −2

14)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −8 | + | −5 | = | −13 |
| − | | − | | − |
| 2 | + | 4 | = | 6 |
| = | | = | | = |
| −10 | + | −9 | = | −19 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −13 | − | −9 | = | −4 |
| + | | − | | + |
| −8 | + | −3 | = | −11 |
| = | | = | | = |
| −21 | − | −6 | = | −15 |

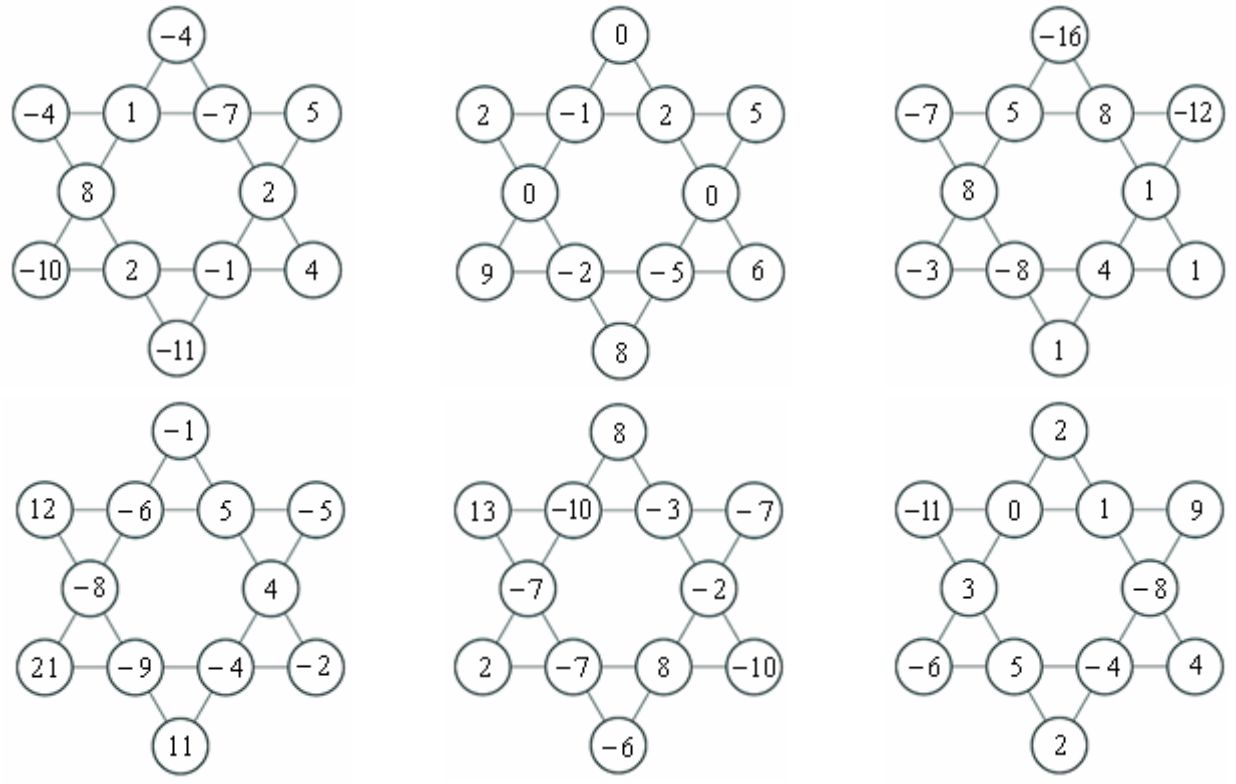
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −2 | + | 3 | = | 1 |
| + | | − | | + |
| −4 | − | 1 | = | −5 |
| = | | = | | = |
| −6 | + | 2 | = | −4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −5 | + | 6 | = | 1 |
| + | | − | | + |
| −5 | − | 0 | = | −5 |
| = | | = | | = |
| −10 | + | 6 | = | −4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −3 | + | −13 | = | −16 |
| − | | − | | − |
| −10 | + | −6 | = | −16 |
| = | | = | | = |
| 7 | + | −7 | = | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −9 | + | 4 | = | −5 |
| − | | − | | − |
| −9 | + | −6 | = | −15 |
| = | | = | | = |
| 0 | + | 10 | = | 10 |

15)



16) a) 21 b) $-90$ c) $-5$ d) 100 e) $\frac{3}{5}$ f) $-\frac{1}{15}$ g) $-2$ h) $-2$ i) 1 l) 0,06 m) 0 n) $\frac{1}{10}$

17) a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $-9$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{15}{16}$ f) 0 g) $-\frac{1}{9}$ h) $-10$ i) $\frac{15}{14}$ l) 7 m) $-\frac{11}{5}$

18) a) + b) : c) − d) · e) + f) : g) − h) · i) + o − l) · m) − n) : o) ·

19) $s=-12,\ p=+20 \to -2,-10$ $s=-1,\ p=-20 \to -5,+4$ $s=+3,\ p=-18 \to +6,-3$
$s=0,\ p=-25 \to +5,-5$ $s=+30,\ p=-64 \to +32,-2$ $s=-13,\ p=+12 \to -12,-1$
$s=12,\ p=27 \to 3,9$ $s=-14,\ p=40 \to -4,-10$ $s=-10,\ p=-96 \to -16,+6$
$s=-70,\ p=1000 \to -50,-20$ $s=-1,\ p=-552 \to -24,+23$ $s=1,\ p=-2 \to +2,-1$

20)

| a | $-6$ | $-6$ | $+6$ | $+6$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-5$ | $-3$ | 0 | $-15$ | $-3$ | $+2$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{5}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | $-2$ | $+2$ | $-2$ | $+2$ | $+\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-5$ | 0 | $-3$ | $+10$ | $-4$ | $-\frac{3}{2}$ | $+\frac{1}{3}$ | $-\frac{3}{4}$ |
| a + b | $-8$ | $-4$ | $+4$ | $+8$ | $-\frac{1}{6}$ | $+\frac{1}{6}$ | $-\frac{5}{6}$ | $-10$ | $-3$ | $-3$ | $-5$ | $-7$ | $+\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{12}$ | $-\frac{19}{12}$ |

| a | $-6$ | $-6$ | $+6$ | $+6$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-5$ | $-3$ | 0 | $-5$ | $-4$ | $+\frac{1}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | $-2$ | $+2$ | $-2$ | $+2$ | $+\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-5$ | 0 | $-3$ | $-6$ | $+5$ | $-1$ | $+\frac{4}{3}$ | $-\frac{3}{4}$ |
| a − b | $-4$ | $-8$ | $+8$ | $+4$ | $-\frac{5}{6}$ | $+\frac{5}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ | 0 | $-3$ | $+3$ | $+1$ | $-9$ | $+\frac{4}{3}$ | $-2$ | $+\frac{7}{20}$ |

| a | $-6$ | $-6$ | $+6$ | $+6$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 0 | $+7$ | $-8$ | $+\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | $-2$ | $+2$ | $-2$ | $+2$ | $+\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | indet. | 0 | imp. | $-3$ | $-2$ | $-6$ | $-\frac{1}{6}$ | $+2$ |
| a · b | $+12$ | $-12$ | $-12$ | $+12$ | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ | $+\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | 1 | $-21$ | $+16$ | $-4$ | $+\frac{1}{24}$ | $-\frac{1}{3}$ |

| a | $-6$ | $-6$ | $+6$ | $+6$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 0 | 3 | $-10$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | $-2$ | $+2$ | $-2$ | $+2$ | $+\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $+2$ | $-\frac{1}{12}$ | $-\frac{1}{4}$ | 3 |
| a : b | $+3$ | $-3$ | $-3$ | $+3$ | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | $+\frac{3}{2}$ | imp. | indet. | 0 | 6 | $-5$ | $+8$ | $+\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

21) $(+400-100-500-300-500):5=-1000:5=-200$. Vale a dire, ognuno dei 5 amici sta perdendo 200 euro.

22) a) $-\frac{1}{1000}$ b) $\frac{36}{121}$ c) $\frac{16}{25}$ d) $\frac{27}{125}$ e) $\frac{169}{144}$ f) $\left(-\frac{16}{24}\right)^3=\left(-\frac{2}{3}\right)^3=-\frac{8}{27}$ g) 256

23) a) $\left(-\frac{1}{10}\right)^7=-\frac{1}{10000000}$ b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3=-\frac{27}{64}$ d) $(+0,2)^3=0,008$

e) $\left(-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5=-\frac{1}{32}$ g) $\left(+\frac{3}{10}\right)^4=\frac{81}{10000}$

h) Nonostante le basi siano diverse, si può fare così: $(+5)^{12}:(-5)^9=5^{12}:(-5^9)=-(5^{12}:5^9)=-5^3=-125$

i) $(-10)^4\cdot 10^3\cdot(-10)^5=10^4\cdot 10^3\cdot(-10^5)=-10^{12}=-1\,000\,000\,000\,000$ l) 1 m) $(-0,006)^3=-0,000000216$

24) a) V b) V c) F (è uguale all'*opposto* del quadrato di quel numero relativo)

25) $x=-7$ 26) Che $x$ è strettamente compreso fra $-1$ e 0 27) $\left[(-5)^3-(-5)^2+(-5)\right]\cdot(-5)=+775$

28) Gli interi relativi $n$ tali che $|n|<5$ sono 9: $-4,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,+4$;
quelli tali che $|n|\le 5$ sono 11, perché bisogna aggiungere il $-5$ e il $+5$.

29) a) V b) F (se il n° sta fra 0 e 1, il suo quadrato è inferiore rispetto al n° iniziale: ad es., $0,3^2=0,09<0,3$)
c) V d) V e) V f) V g) F (se $x$ è compreso fra $-1$ e 0, ossia $-1<x<0$, allora $x^3>x$)

30) a) < b) > c) > d) > e) < : se $0<x<1$ ("$x$ compreso fra 0 e 1") si ha $x^2<x$. Ad esempio, $(1/2)^2=1/4<1/2$

## ESPRESSIONI VARIE CON NUMERI RELATIVI

(risultati alla pagina seguente; **clicca sulla freccia** per gli **svolgimenti**, e per alcune **osservazioni utili** ⇨)

1) $-11+15-7$

2) $-6-7+22$

3) $12-30-5+2$

4) $-2-4-8-16+3+5+7+16$

5) $+11-25+33-44+27$

6) $-10-9+8-7+6+5+4$

7) $-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$

8) $\frac{4}{3}-\frac{11}{2}+3$

9) $-\frac{3}{5}+\frac{7}{2}-2-\frac{1}{4}$

10) $\frac{25}{6}-4,\overline{5}$

11) $-\frac{23}{24}+4,5-\frac{5}{16}$

12) $-7+(-5+3-14)-(1-16+4)$



**SUG - GERI - MENTI DA AMICO!!!**

♥ DOPO ogni passaggio, rileggi sempre!

♥ PRIMA di ogni passaggio, domandati: "A questo punto, cosa devo fare? Cosa mi conviene fare?"

13) $-(-5+13)-(6-11)+(7-15)+12$

14) $-(-13)-(-10+24)+(7-11)+5$

15) $(-13-21+18)+(-11+21-14)-(+11-25+1)$

16) $+15-(-7-3+6)+(2-20)$

17) $-(-5+8-9)-(-7+3)+(-5-6+1)$

18) $+(-18-8+7)+(-3-5)-(-7+4)$

19) $-\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{6}+\frac{3}{2}-1\right)$

20) $-\frac{3}{4}+\left(-\frac{5}{6}+\frac{3}{2}-1\right)$

21) $\left(-1+\frac{7}{5}\right)+\left(-2+\frac{9}{10}\right)-\left(+4-\frac{7}{2}\right)$

22) $\frac{5}{4}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)$

23) $\left(\frac{5}{9}-\frac{1}{6}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(-2+\frac{1}{9}\right)-\frac{2}{3}$

24) $-\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{7}\right)$

25) $\frac{1}{6}-\left[3-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(2-\frac{1}{3}\right)\right]$

26) $-\left[4-\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]+\left[\frac{13}{4}-\left(2-\frac{3}{2}\right)\right]+\frac{5}{6}$

27) $\left[-\left(3+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{8}{3}+2\right)\right]-\left[-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)\right]-0,75$

28) $-0,5\overline{3}-\left[\left(0,2-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{2}-0,\overline{3}\right)\right]$

29) $-4,5-\{3,6-[-(-4,2+2,8)-(-3+0,7)]\}$

30) $4-[0,01-(-3,5-0,05)]-(0,03+2,09)$

31) $-8\cdot(-7)+(-6)\cdot(+5)+(+11)\cdot(-9)+(+4)\cdot(+13)$

32) $-5\cdot 4-3\cdot(-2)+2\cdot(-4)+(-3)\cdot(-5)+8$

33) $(-5-4)(-10+4)+5\cdot(-11)-(+3)(-2)$

34) $(+7-11-4)\cdot(-17+2+11)-(-13+5)$

35) $\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-1\right)+\frac{13}{5}$

36) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)$

37) $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right)\cdot 240$

38) $\left(-2+\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot(-12)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-3\right)+\frac{1}{4}$

39) $\left[1+\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]\cdot\frac{16}{9}-1$

40) $\frac{1}{2}\cdot\left(2+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}+2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{7}{4}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)$

41) $-2\cdot\left\{\left[-\frac{1}{8}-\left(1-\frac{5}{4}\right)\right]\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)-\frac{11}{24}\right\}$

42) $\left(-\frac{1}{2}+0,\overline{3}+0,1\overline{6}\right)\cdot\left(0,3-\frac{1}{2}\right)$

43) $\left[-\left(-0,\overline{2}\right)+4\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)\right]\cdot(-6)+\frac{1}{3}$

44) $(-5-9+2):(-11+8)+(-7+9+6)\cdot(-7+5)$

45) $2:\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)+(-4-6):(-3+1)$

46) $\left(\frac{11}{13}-\frac{13}{11}\right):\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)+25$

47) $\left(-2+\frac{3}{4}\right):\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{2}{3}-3\right)$

48) $\frac{8}{3}+\left[-\left(-\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\right]:(-0,75)$

49) $\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}-\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$

50) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{3}-1}{1+\frac{1}{2}}-\dfrac{7}{3}\cdot\left(-\dfrac{7}{3}\right)$

51) $-\dfrac{2}{15}+\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}+\dfrac{-1-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$

52) $\dfrac{-\frac{13}{72}}{-\frac{7}{9}-\frac{9}{7}}-3\cdot\dfrac{1+\frac{13}{16}}{5}$

53) $\dfrac{1}{2}:2+\dfrac{\frac{1}{3}}{3}+\dfrac{1}{4:\frac{1}{4}+\frac{5}{\frac{1}{5}}-43}+\dfrac{41}{36}$

54) $(-5)^3+(-3)^2+(+2)^5+(+3)^4$

55) $(-3)^5+(-4)^4+(+5)^3+(+6)^2+(-7)^1+(-8)^0$

56) $\dfrac{(-2)^0+(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^4+(-2)^5}{(-6)^2-\left[(+2)^3+(+2)^2+(+2)^1+(+2)^0\right]}$

57) $\dfrac{(-4)^2+(-3)^2}{\left[3+(-2)^3\right]^2}$

58) $\dfrac{-7^2+(-5)^2+(-2)^4}{(-2)^3}$

**OCCHIO!**
$(-7)^2=+49,$
MA $-7^2=-49$

59) $\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3+\left(-\dfrac{5}{9}\right)^2\right]\cdot(-3)^4$

60) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4\right]:\dfrac{3}{-2^4}+1$

61) $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3}\cdot(-31)-\dfrac{1}{2}$

62) $\dfrac{\left(-\frac{2}{5}\right)^8:\left(-\frac{2}{5}\right)^6}{4}:\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{10}\right)+0,6$

63) $\dfrac{\left(30^8\right)^2}{(-15)\cdot(-15)^5\cdot(-15)^{10}}:\left[\left(2^2\right)^3\right]^2$

64) $\dfrac{1}{\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\left(-\frac{1}{6}\right)^2\right]\cdot\left[(-2)^2+(-3)^2+(-4)^2+(-5)^2\right]}+2$

65) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^4\cdot\left(\dfrac{3}{7}\right)^5:\left(-\dfrac{3}{7}\right)^7+\dfrac{40}{-7^2}$

66) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

67) $\left(5^{-2}+5^{-1}\right):\left(5^1+5^2\right)\cdot5^3$

68) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-3}+\left(+\dfrac{3}{10}\right)^{-2}+\dfrac{1}{72}$

69) $\left(+\dfrac{2}{3}\right)^{-3}+(-2)^{-2}:2+2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$

70) $-3^{-4}+(-9)^{-2}$

71) $\left(-\dfrac{4}{5}\right)^{-2}-(-2)^{-4}-2^{-1}$

72) $\dfrac{(-3)^{-2}+(-2)^{-3}}{4^{-2}}-\dfrac{3^2-2}{2^3+1}$

73) $\dfrac{10^{-1}+10^3}{-10^{-2}-10^2}$

74) $\dfrac{10^{-1}\cdot10^3}{10^{-2}\cdot10^2}$

75) $\dfrac{1}{12}-\left(-\dfrac{12}{11}\right)^{-5}\cdot\left(-\dfrac{12}{11}\right)^{-4}\cdot\left[\left(-\dfrac{12}{11}\right)^2\right]^4$

76) $3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-5}\cdot\dfrac{3}{4}-1$

77) $\dfrac{4^{-2}\cdot4^{-4}\cdot4^{-4}}{8^{-1}\cdot8^3\cdot\left(8^4\right)^{-3}}$

78) $\left(+\dfrac{7}{6}\right)^{-5}\cdot\left(-\dfrac{9}{14}\right)^{-5}\cdot\left(+\dfrac{1}{12}\right)^{-5}:\left[\left(2^3\right)^3\right]^2$

79) $\left[\left(2^{-1}+3^{-1}\right)\cdot5^{-1}\right]^{-1}-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$

80) $\dfrac{-3^8\cdot(-3)^4}{-2^3-1^4}:27^3$

**RISULTATI**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1) $-3$ | 2) 9 | 3) $-21$ | 4) 1 | 5) 2 | 6) $-3$ | 7) $-\frac{1}{12}$ | 8) $-\frac{7}{6}$ |
| 9) $\frac{13}{20}$ | 10) $-\frac{7}{18}$ | 11) $\frac{155}{48}$ | 12) $-12$ | 13) 1 | 14) 0 | 15) $-7$ | 16) 1 |
| 17) 0 | 18) $-24$ | 19) $-\frac{5}{12}$ | 20) $-\frac{13}{12}$ | 21) $-\frac{6}{5}$ | 22) 1 | 23) $-2$ | 24) 1 |
| 25) $-\frac{15}{4}$ | 26) 0 | 27) $-5$ | 28) $\frac{23}{30}$ | 29) $-4,4$ | 30) $-1,68$ | 31) $-21$ | 32) 1 |
| 33) 5 | 34) 40 | 35) 3 | 36) $\frac{1}{40}$ | 37) 1 | 38) 0 | 39) 0 | 40) 1 |
| 41) 1 | 42) 0 | 43) 1 | 44) $-12$ | 45) $-1$ | 46) 1 | 47) $-1$ | 48) 1 |
| 49) $-\frac{3}{2}$ | 50) 0 | 51) $-2$ | 52) $-1$ | 53) 1 | 54) $-3$ | 55) 168 | 56) $-1$ |
| 57) 1 | 58) 1 | 59) 1 | 60) 0 | 61) 1 | 62) 1 | 63) 16 | 64) 0 |
| 65) $-1$ | 66) 1 | 67) 1 | 68) $-9/2$ | 69) 4 | 70) 0 | 71) 1 | 72) $-1$ |
| 73) $-10$ | 74) 100 | 75) 1 | 76) 3 | 77) 1024 | 78) $-4$ | 79) 1 | 80) 3 |

## NUMERI INDICATI CON LETTERE; ALTRE ESPRESSIONI NUMERICHE

In Matematica ci si serve molto frequentemente di lettere per indicare dei numeri.
Il numero rappresentato da una lettera può essere, a seconda di casi, *variabile*, *costante* o *incognito*.
Vedi a proposito pag. 100.

**A) Calcola il valore delle ESPRESSIONI LETTERALI sotto elencate, per i valori delle lettere scritti accanto.**

**Esempio svolto** (vedi la NOTA):

Calcolare $\dfrac{\left(a^2-a\right)^2}{a-1}$ per $a=-\dfrac{1}{2}$

NOTA ♥ *Una scrittura del tipo* $[\ldots]_{a=\ldots}$ *significa che si vuole calcolare il valore che l'espressione entro le quadre assume, quando alla lettera si dà il valore specificato.*
Queste quadre servono per "inscatolare" l'espressione, la quale andrà poi calcolata sostituendo al posto della lettera il valore scritto in basso a destra della parentesi chiusa.

$$\left[\frac{\left(a^2-a\right)^2}{a-1}\right]_{a=-\frac{1}{2}}=\frac{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{-1-2}{2}}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{-\frac{3}{2}}=\frac{9}{16}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\boxed{-\frac{3}{8}}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) $a(a+2)-3a$ a) $a=-7$ b) $a=0$ c) $a=+2$ | 2) $w(5w-3)$ a) $w=-3/10$ b) $w=3/5$ | 3) $\dfrac{(t-1)(t-2)}{(t-3)(t-4)}$ | a) $t=0$ b) $t=1$ c) $t=-1$ |
| 4) $\dfrac{4x(x+2y)}{(x-y)^2}$ a) $x=-2,\ y=2$ b) $x=-1/4,\ y=-1/2$ c) $x=-1,\ y=1/2$ | 5) $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{a+b}$ a) $a=-1,\ b=2$ b) $a=2,\ b=-4$ c) $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4}$ d) $a=2,\ b=\frac{1}{3}$ e) $a=-\frac{1}{5},\ b=1$ | | |
| 6) $\dfrac{m^4-m^3}{-m^2+2}$ a) $m=2$ b) $m=-2$ | 7) $(x+1)^2-(x-1)^2-4x$ a) $x=1$ b) $x=2$ c) $x=3$ d) $x=-3$ e) $x=1/3$ f) $x=-4/5$ | | |

**B) Le uguaglianze sotto elencate sono delle EQUAZIONI, ossia di fronte ad esse ci domandiamo: esistono dei valori della lettera che verificano l'uguaglianza? E in caso affermativo, quali sono?** (pag. 149).
**Accanto a ciascuna sono proposti dei valori per la lettera; di essi, alcuni sono soluzione, altri no. Sostituisci, per riconoscere le soluzioni.**

**Esempio svolto**
Quali, fra i numeri $-1, -2, -3$, sono soluzioni dell'equazione $1-x^2=4(x+1)$ ?

*Con* $x=-1$: $1-(-1)^2=4(-1+1);\ 1-1=4\cdot 0;\ 0=0$ *OK, è soluzione*
*Con* $x=-2$: $1-(-2)^2=4(-2+1);\ 1-4=4\cdot(-1);\ -3=-4$ *NO*
*Con* $x=-3$: $1-(-3)^2=4(-3+1);\ 1-9=4\cdot(-2);\ -8=-8$ *OK, è soluzione*

| | |
|---|---|
| 8) $x(x-2)=6-x$ 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3 | 9) $(x+4)^2-x^2=2(x+1)$ $-3,\ -\frac{8}{3},\ -\frac{7}{3},\ -2$ |
| 10) $-\frac{1}{2}\left(5+\frac{3}{x}\right)+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{x}\right)+2$ $1,\ -1,\ -\frac{1}{4},\ 0$ | 11) $\dfrac{x+2}{x^2+5x-24}-\dfrac{1}{x^2-5x+6}=0$ $0, -3, +3, 4$ |
| 12) $\frac{5}{8}a-\frac{9a-1}{16}=0$ $1,\ -1,\ 2,\ -2$ | 13) $y\left(9y^3+12y^2+2\right)=11y^2$ $0,\ -1,\ -2,\ \frac{1}{3}$ |

14) Prova a risolvere per tentativi le equazioncine che seguono (ciascuna delle quali ha una sola soluzione, tranne la c) che ne ha due).
Si tratta di provare a trovare "a mente" quel numero che sostituito al posto di $x$ rende vera l'uguaglianza.

a) $\dfrac{10}{x}=-5$ b) $\dfrac{1}{4}x-3=0$ c) $x^2=x+30$ d) $24(x+7)=0$ e) $\sqrt{x}+1=9$

**C) Si può dimostrare che le uguaglianze sotto elencate sono delle IDENTITA'** (vedi pag. 149 in fondo); **vale a dire, valgono per qualsiasi valore "ammissibile" delle lettere coinvolte.**
**Un valore *non* è "ammissibile" se dà luogo a un'operazione "non eseguibile" (es. la divisione per 0).**
**Verifica la validità di ciascuna identità, per i valori delle lettere specificati accanto.**

**Esempio svolto**: verifica la validità dell'identità $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{a^2-b^2}=-\dfrac{1}{ab(a+b)}$ nel caso $a=3,\ b=-6$

$\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{-6}}{3^2-(-6)^2}=-\dfrac{1}{3\cdot(-6)\cdot(3-6)}$ $\quad \dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{9-36}=-\dfrac{1}{-18\cdot(-3)}$ $\quad \dfrac{\frac{3}{6}}{-27}=-\dfrac{1}{54}$ $\quad \dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{27}\right)=-\dfrac{1}{54}$ $\quad -\dfrac{1}{54}=-\dfrac{1}{54}$ $\boxed{OK!!!}$

| | |
|---|---|
| 15) $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=a-b$ $\quad a=4,\ b=5$ $\quad a=-1,\ b=1/2$ $\quad a=-2/3,\ b=-2$ | 16) $\dfrac{x-y}{\frac{1}{y-1}-\frac{1}{x-1}}=(x-1)(y-1)$ $\quad x=3,\ y=-2$ $\quad x=2,\ y=-1/2$ $\quad x=1,\ y=3$ (?) ⇨ |
| 17) $\dfrac{k+1}{k-1}-\dfrac{k-1}{k+1}=\dfrac{4k}{k^2-1}$ $\quad k=0;\ k=2;$ $\quad k=3;\ k=-1/2$ | 18) $\dfrac{1}{m-1}+\dfrac{m}{1-m^2}=\dfrac{1}{m^2-1}$ $\quad m=2;\ m=-2;\ m=0;$ $\quad m=3/5;\ m=-1/4$ |
| 19) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=0$ $\quad a=2,\ b=4,\ c=6$ $\quad a=1,\ b=1/2,\ c=1/3$ | $a=0,\ b=-3,\ c=5$ $\quad a=-1/2,\ b=-1/3,\ c=-1/4$ |

**D) Altre espressioni numeriche**

20) $-\frac{2}{3}:\left(-1-\frac{2}{3}\right)-\left[-\left(-\frac{7}{5}\right)\right]$ $\quad$ 21) $\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{14}-\frac{2}{7}\right)-\left(-\frac{1}{20}+\frac{1}{5}\right)$ $\quad$ 22) $\frac{1}{3}-\frac{5}{2}\cdot\left(+\frac{3}{2}-\frac{7}{10}\right):\left(-1+\frac{1}{4}\right)$

23) $\left(-\frac{13}{60}+\frac{7}{20}\right):\left(\frac{3}{10}-\frac{4}{15}\right)$ $\quad$ 24) $\left[-1-\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{15}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\right]\cdot\left(-3-\frac{9}{2}\right)$ $\quad$ 25) $\left[\left(-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{26}-\frac{1}{18}\right]:\left(1-\frac{7}{12}\right)$

26) $\left[\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)+\frac{1}{3}\right]:\left(-\frac{1}{2}\right)+1$ $\quad$ 27) $\left[\frac{3}{4}\cdot\left(-1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{6}\right]\cdot\frac{3}{2}+1$ $\quad$ 28) $\left\{\left[-9:(-15)-\frac{7}{5}\right]\cdot\frac{1}{2}\right\}:\left(-\frac{1}{5}\right)$

29) $6-1:\left\{\left[\left(-\frac{3}{4}-1\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)-\frac{3}{2}\right]\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{12}\right\}$ $\quad$ 30) $\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{2^3}{2^3-1}:(-24)-\frac{2\cdot5^2+1}{7}:(-7)$

31) $3\cdot\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{3}{8}-\frac{7}{12}\right)\left(\frac{-5^2+1}{5}\right)\right]$ $\quad$ 32) $-\frac{3}{7}\cdot\left[-\frac{1}{3}-\frac{1}{(-2)^2}\right]\cdot(-2^2)$ $\quad$ 33) $+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{7}{5}\right)-\left(\frac{-1}{12}-6^{-1}-2^{-2}\right)$

34) $\left\{(-2)^3\cdot\left[-(-2)^{-1}-0,75\right]-2^2-1^2\right\}\cdot\left(6^{-1}-2^{-1}\right)$ $\quad$ 35) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-(0,2)^{-1}\right]\cdot\left(-0,5-\frac{1}{5}\right)-10^{-1}$

36) $\dfrac{-1-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}+\dfrac{-1-2^{-1}+2^{-2}}{1-2^{-1}-2^{-2}}}{-(-2)^3}$ $\quad$ 37) $\left(\dfrac{-0,15-\frac{4}{5}}{-0,35+\frac{3}{10}}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{6}\right)$ $\quad$ 38) $\dfrac{-\left(\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}\right)}{\frac{3}{10}-\frac{1}{5}}+\frac{2}{3^{-2}}$

**RISPOSTE**

1) a) 56 b) 0 c) 2 $\quad$ 2) a) 27/20 b) 0 $\quad$ 3) a) 1/6 b) 0 c) 3/10 $\quad$ 4) a) −1 b) 20 c) 0

5) a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{3}{4}$ c) 2 d) $\frac{5}{2}$ e) 6 $\quad$ 6) a) −4 b) −12 $\quad$ 7) a, b, c, d, e, f): 0

8) $x=3,\ x=-2$ $\quad$ 9) $x=-7/3$ $\quad$ 10) $x=-1/4$ $\quad$ 11) $x=-3,\ x=4$ $\quad$ 12) $a=-1$ $\quad$ 13) $y=0,\ y=-2,\ y=1/3$

14) a) $x=-2$ $\quad$ b) $x=12$ $\quad$ c) $x=6$ *oppure* $x=-5$ $\quad$ d) $x=-7$ $\quad$ e) $x=64$

16) Qui il valore 1 non è ammissibile per *x*! Infatti, ponendo $x=1$, si otterrebbe un denominatore uguale a 0, e la divisione per 0 è una "operazione non eseguibile" (*illegal* operation).

20) −1 $\quad$ 21) −1/10 $\quad$ 22) 3 $\quad$ 23) 4 $\quad$ 24) 8 $\quad$ 25) −1/3 $\quad$ 26) −1 $\quad$ 27) 0 $\quad$ 28) 2 $\quad$ 29) 0

30) 1 $\quad$ 31) −2 $\quad$ 32) −1 $\quad$ 33) 0 $\quad$ 34) 1 $\quad$ 35) 2 $\quad$ 36) −1 $\quad$ 37) −2 $\quad$ 38) 0

## 10. NUMERI E OPERAZIONI: TUTTO QUELLO CHE DEVI SAPERE IN 50 DOMANDE

**I due capitoli iniziali, quelli sui numeri e sulle operazioni con le loro proprietà, sono di importanza colossale. Devono essere acquisiti al meglio, perché da essi dipende tutta la matematica successiva. Ecco una serie di domande alle quali occorre saper rispondere se si vuol procedere su basi sicure.**

1) Si ha una "corrispondenza biunivoca" fra due insiemi A e B quando ad OGNI elemento di A si può far corrispondere UNO E UN SOLO elemento di B, e … *Cosa manca? Cosa va messo al posto dei puntini?*
2) Si dice "numero intero" quell'entità astratta, quel "quid", che è comune a tutti gli insiemi, che possono essere messi in … con un insieme dato (purché questo non sia … )
3) La "somma" di numeri interi ha a che fare con l'operazione insiemistica di … , il cui simbolo è …
4) La sottrazione è definita come l'operazione inversa dell'addizione: in che senso? E la divisione?
5) E' giusto dire che i multipli di 7 sono: 14, 21, 28, 35, ecc. ? Quanti divisori ha il 7?
6) Alcuni fra i Criteri di Divisibilità presuppongono di effettuare somme di cifre. Quali?
7) Si dice "primo" un intero divisibile solo per sé stesso e per 1. *Cosa manca, in questa definizione?*
8) 0 rientra tra i numeri pari? E tra i numeri primi? Esistono numeri primi pari?
9) 1 rientra tra i numeri dispari? E tra i numeri primi? La negazione di "primo" è …
10) Due interi sono detti "primi fra loro" se … In tal caso, il loro M.C.D. è … e il loro m.c.m. è …
11) Trova il più piccolo intero superiore a 300 che non sia primo, ma sia primo con 210
12) Per determinare il M.C.D. fra due o più interi dopo averli scomposti in fattori primi, quali fattori si prendono? Stessa domanda per il m.c.m.
13) Per riconoscere che un intero $n$ è primo, non è necessario verificare che non è divisibile per nessun numero primo $<n$. Basta infatti constatare che non ha divisori primi $\leq$ …
14) L'intero di cinque cifre 79$y$48 è divisibile per 11. Quanto vale la cifra $y$ ?
15) La proprietà che consente di semplificare una frazione prende il nome di …
16) $0^0 = ...$ $7^0 = ...$ $0^7 = ...$ $0^1 = ...$ $1^0 = ...$ $1^1 = ...$
17) La somma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$ ha un valore che si avvicina, prendendo tantissimi addendi, a …
18) E' giusto dire che in un periodico misto l'antiperiodo è "tutto ciò che sta a sinistra del periodo"?
19) Enuncia la regola per trasformare in frazione a) un periodico semplice b) un periodico misto
20) I possibili resti di una divisione intera per 19 sono: …
21) Una frazione, ridotta ai minimi termini, che abbia per denominatore 192, se venisse trasformata, con la divisione, in numero con la virgola, che tipo di decimale produrrebbe? Qual è la regola generale?
22) "Ratio" in Latino, nel suo senso matematico, e anche in Inglese, è sinonimo di …
23) Cosa vuol dire, per un numero, essere "irrazionale"? Scrivi un esempio di numero con la virgola, irrazionale.
24) L'insieme di tutti i numeri, razionali + irrazionali, viene detto "insieme dei numeri …"
25) Trasforma in frazione il numero periodico $0,06\overline{7}$ col metodo dell'equazione. Fai la verifica, dividendo.
26) Spiega a parole cosa dice la proprietà distributiva generalizzata; inventa un esempio.
27) Spiega a parole cosa dice la proprietà invariantiva della sottrazione; inventa un esempio.
28) Spiega a parole cosa dice la proprietà distributiva del quoziente rispetto alla somma; inventa un esempio.
29) "Per moltiplicare, o dividere, un prodotto per un numero, basta …"
30) Nella "divisione intera" intervengono 4 interi $a$, $b$, $c$, $r$ (dividendo, divisore, quoziente, resto). Fra di essi vale l'uguaglianza $c\cdot...+...=...$ e inoltre deve sussistere la disuguaglianza … Fai un esempio di situazione reale in cui non ha senso la divisione "ordinaria", ma ci vuole quella "intera".
31) Cosa dice la "legge di annullamento del prodotto"?
32) Perché l'operazione 0:0 è considerata "indeterminata"? Quale altra operazione "indeterminata" conosci? Spiega la ragione anche in questo caso.

33) a) $\frac{0}{13}=...$ b) $\frac{0}{0}=...$ c) $\frac{13}{13}=...$ d) $\frac{13}{0}=...$ e) In che senso "$\frac{1}{0}=\infty$" ?

34) Qual è l'elemento neutro del prodotto? E della somma?
Quale l'elemento assorbente del prodotto? La somma ha un elemento "assorbente"?

35) Descrivi a parole le proprietà delle potenze simboleggiate dalle uguaglianze seguenti:

I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ II) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ III) $a^n : b^n = (a:b)^n$ IV) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

36) Quali proprietà delle operazioni sono state applicate nelle seguenti catene? Descrivile a parole.

a) $(3+4)(3+6):3=(9+18+12+24):3=3+6+4+8=3+8+6+4=11+10=21$ b) $15^4:5^4=3^4=81$

c) $\frac{(3^8:3^2)^2}{36}=\frac{(3^6)^2}{36}=\frac{3^{12}}{36}=\frac{3^{10}}{4}$ d) $\frac{(8\cdot10)^6}{2^5\cdot4^5}=\frac{8^6\cdot10^6}{8^5}=8\cdot10^6=8000000$ e) $(23\cdot25\cdot3)\cdot4=23\cdot100\cdot3$

37) Su di una *number line* rappresenta con la massima precisione,
prendendo per unità di misura un segmento di 4 quadretti, i numeri: $+\frac{15}{4};\ -\frac{21}{8};\ -2,3;\ -2,\bar{3};\ +\frac{2}{3}$

38) Quando due numeri relativi sono discordi,
la loro somma algebrica ha per segno … e per valore assoluto …

39) La regola "$-$ moltiplicato $-$ dà $+$" può essere giustificata facendo vedere che è l'unica regola compatibile con una ben determinata proprietà delle operazioni: quale?

40) Il reciproco di un numero relativo è definito come quel numero relativo che …

41) Tutti i numeri relativi hanno il proprio reciproco?

42) Quali sono i due simboli alternativi coi quali si può indicare il *reciproco* di un numero non nullo *x*?
E con che simbolo si indica invece l'*opposto* di un numero relativo *x*?

43) Può il quadrato di un numero $a$ essere minore del numero di partenza?

44) Che significato ha il prefisso "Kilo" ordinariamente e, invece, in (determinati) contesti informatici?
E "Mega"? E "Giga"? E "Tera"?

45) Il moltiplicatore *a* della potenza di 10 in un numero espresso in notazione scientifica,
che requisito deve possedere?
Scrivi in notazione scientifica i tre numeri seguenti: 432,1 0,000001234 21000000000

46) Svolgi la seguente espressione, e portane il risultato in notazione scientifica: $(3,2\cdot10^{-13}):(5\cdot10^{-4})^2$

47) La luce viaggia a circa $3\cdot10^5\ km/s$. Quanti secondi ci mette a percorrere un metro?
Scrivi la risposta in notazione scientifica.

48) a) $\left[2\cdot\frac{x^3+1}{x^2-x+1}\right]_{x=-\frac{1}{2}}$ b) $\left[-a^2+\frac{a^{-2}}{4}-0,75\right]_{a=\frac{1}{2}}$ c) $\left[\frac{(-x)^2-x^2}{x}-x^4\right]_{x=3}$

49) Svolgi le seguenti espressioni, descrivendo le proprietà delle potenze applicate:

a) $\frac{5^3\cdot5^{-4}\cdot5^{-5}}{5^{-11}}\cdot2^5:10^5$ b) $\frac{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}\cdot18^{-5}\right]^2}{3^{-10}}\cdot2^{11}$ c) $\frac{1}{\left[7^{20}:7^2\cdot\left(7^3\right)^{-3}\cdot7\right]\cdot14^{-10}}$

50) E' data l'equazione $2(x+1)(x-1)=-3x$.
Considera i numeri di seguito elencati,
e metti un cerchietto o un rettangolino intorno a quelli che sono soluzioni dell'equazione.

$0 \quad +1 \quad -1 \quad +2 \quad -2 \quad +\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$

**ALCUNE RISPOSTE**

1) "viceversa" 5) No, cominciano dal 7 7) Occorre specificare che il numero dev'essere >1
11) 319 13) $\le\sqrt{n}$ 14) $y=9$ 20) 0, 1, 2, … , 18 22) "rapporto, quoziente" 30) $c\cdot b+r=a,\ r<b$
43) Sì, se è *a* compreso fra 0 e 1 ($0<a<1$) 45) $1\le a<10$; $4,321\cdot10^2$; $1,234\cdot10^{-6}$; $2,1\cdot10^{10}$
46) $1,28\cdot10^{-6}$ 47) $3,333...\cdot10^{-9}$ secondi 48) a) 1 b) 0 c) –81 49) a) 1 b) 2 c) 1024 50) –2, +1/2

## 11. DUE RIGHE DI STORIA (GRAZIE a Stefano Barbero dell'Università di Torino!)

La presenza dei numeri relativi nella storia dell'uomo si può far risalire alle civiltà antiche in cui si svilupparono i commerci e le attività agricole.
L'aumentare degli scambi di merci fece comparire il concetto di debito o spesa, che si contrapponeva a quello di guadagno o ricavo. Occorreva in qualche modo segnalare e distinguere nei conteggi i numeri associati a cose che si dovevano dare o erano andate perse da quelli concernenti cose che si avevano o venivano acquisite.



*Una tavoletta cuneiforme con i primi esempi di problemi di matematica che facevano incidentalmente uso anche di numeri negativi*

Le prime testimonianze scritte di questa distinzione tra numeri si possono ritrovare già in testi cuneiformi babilonesi risalenti all'epoca intorno al 2000 a. C.: piccole raccolte di problemi di matematica di autore ignoto, in cui compaiono quantità indicanti debiti commerciali. Sempre in tavolette babilonesi di autore sconosciuto, risalenti al III secolo a. C., si usano numeri finalizzati a rappresentare debiti o mancanze, accanto a quantità relative a tempi e misurazioni astronomiche, e persino alcune regole di calcolo coinvolgenti i numeri negativi.

L'idea che numeri di questo genere, indicanti qualcosa che ci viene tolto o che non si possiede, potessero essere accettati come soluzioni di problemi o manipolati con regole ben precise compatibili con quelle degli altri numeri "normali", dovette comunque affermarsi a fatica nel corso dei secoli.

Altre testimonianze dell'uso di numeri negativi si ritrovano nel testo *Arithmetica* del matematico greco Diofanto (circa 250 d. C.) il quale fa cenno a due categorie di numeri distinti da lui chiamati *numeri additivi* e *numeri sottrattivi* ed enuncia, forse per primo, la regola che descrive il prodotto fra due negativi: "meno per meno fa più".


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græc & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, &c
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Jacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS

*L'Arithmetica di Diofanto in una traduzione latina del 1621*

Pure i matematici ed i contabili cinesi e indiani fecero ricorso a numeri dotati di segno.
In Cina già a partire dal III secolo a.C. si era sviluppato un sistema di calcolo algebrico, il *cheng fu shu,* o "operazioni positive e negative", in cui i numeri venivano rappresentati mediante bacchette di colore diverso: rosse a indicare i positivi (*cheng)* e nere per i negativi (*fu).*
E altrettanto in India ritroviamo la concezione di credito e debito, con l'uso di numeri negativi per esprimere quest'ultimo.
Il matematico Brahmagupta (circa 628 d. C.) pare si trovasse a risolvere un problema di contabilità per il proprio sovrano quando ebbe l'intuizione, per agevolare i propri calcoli, di rappresentare su di una sbarretta i numeri indicanti i debiti ed i crediti rispettivamente a sinistra e a destra di un punto rappresentante lo zero (introdotto, quest'ultimo, proprio dai matematici indiani).
Egli aveva compreso le regole algebriche fondamentali con cui operare mediante numeri relativi, e rappresentava i negativi anteponendo loro un punto.

Bhaskara, un altro matematico indiano (circa 600 d. C.), iniziò a riflettere intorno a questioni più delicate sulla natura dei numeri relativi.
Egli osservò per primo che, dato un numero positivo, esistono due numeri, uno positivo e l'altro negativo, il cui quadrato uguagli il numero di partenza, ma che ciò non avviene invece se il numero assegnato è negativo: elevando, infatti, un numero al quadrato, non si può mai ottenere risultato negativo.
Egli dava inoltre come indicazione generale di scartare, in quanto prive di senso, eventuali soluzioni negative di problemi.

Questa diffidenza per i numeri relativi si tramandò, insieme al loro uso, ai matematici arabi, come Al-Khuwarizmi (circa 825 d. C.), che con i loro trattati fusero le conoscenze del mondo greco con quelle delle culture orientali, tramandandole ai matematici europei del medioevo.




Famoso fra questi fu Leonardo Pisano detto Fibonacci (circa 1170 - circa 1250) che con i suoi trattati introdusse la notazione numerica arabo-indiana in Occidente e con essa anche i numeri che indicavano debiti e crediti, facendone uso nei calcoli ma scartando ancora le soluzioni negative dei problemi.

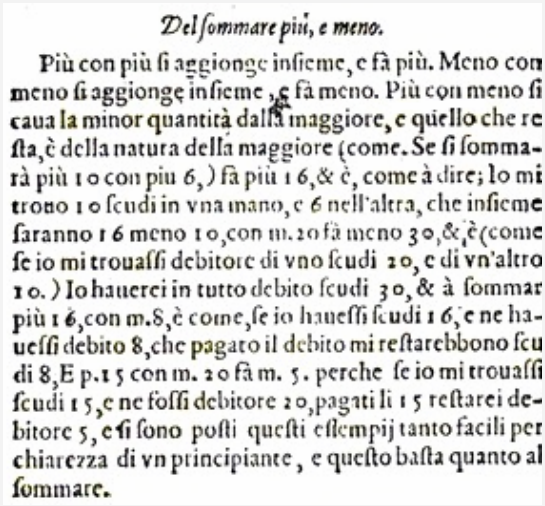
In realtà i numeri negativi sembravano portare con sé un'aura sinistra di *non-numeri* o di numeri "strani", tanto che nei secoli XV-XVII venivano comunemente chiamati *numeri absurdi* dai matematici europei.
Girolamo Cardano (1501-1576?) e Cartesio (1596-1650) usarono in modo rilevante i numeri relativi nei loro trattati rispettivamente sulle equazioni di terzo grado e sui fondamenti della geometria analitica, ma non ritenevano corrette e significative soluzioni negative di equazioni.

Il primo matematico moderno a concepire numeri relativi come soluzioni di equazioni fu l'italiano Rafael Bombelli (1526-1572) che mostrò come i numeri negativi potessero avere un significato anche nella vita di ogni giorno se si dà loro la giusta interpretazione. Con un semplice esempio ("se io fossi con 15 scudi e fossi in debito di 20 una volta che avessi dato i 15 resterei con un debito di 5 cioè di *meno 5* scudi") illustrò in modo semplice quel che intendeva per interpretazione corretta.
Egli introdusse una notazione che si mantenne e si diffuse, utilizzando per indicare i numeri negativi la lettera corsiva *m* che abbreviava la parola *minus*, atta ad esprimere la loro origine come quantità legate ad una perdita o a un debito. Questa lettera corsiva col tempo si tramutò nel semplice trattino che adottiamo ai giorni nostri, e che è finito col combaciare con il segno dell'operazione di sottrazione.


L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Aritmetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

*L'immagine del frontespizio del libro di Bombelli (a sinistra) …*

*… e (a destra) quella di una pagina dove per la prima volta egli dà un'interpretazione interessante delle soluzioni negative dei problemi e dove introduce le notazioni p ed m per indicare i numeri in credito e debito.*


Del ſommare più, e meno.

Più con più ſi aggionge inſieme, e fà più. Meno con meno ſi aggionge inſieme, e fà meno. Più con meno ſi caua la minor quantità dalla maggiore, e quello che reſta, è della natura della maggiore (come. Se ſi ſommarà più 10 con piu 6,) fà più 16,& è, come à dire; Io mi trouo 10 ſcudi in vna mano, e 6 nell'altra, che inſieme ſaranno 16 meno 10,con m.20 fà meno 30,&,è(come ſe io mi trouaſſi debitore di vno ſcudi 20, e di vn'altro 10.) Io haurei in tutto debito ſcudi 30,& à ſommar più 16,con m.8,è come,ſe io haueſſi ſcudi 16, e ne haueſſi debito 8,che pagato il debito mi reſtarebbono ſcudi 8,E p.15 con m. 20 fà m. 5. perche ſe io mi trouaſſi ſcudi 15,e ne foſſi debitore 20,pagati li 15 reſtarei debitore 5, e ſi ſono poſti queſti eſſempij tanto facili per chiarezza di vn principiante, e queſto baſta quanto al ſommare.

Altri matematici iniziarono a comprendere quante possibili applicazioni ed interpretazioni potevano avere i numeri relativi all'interno della Matematica e della nascente Fisica.
Possiamo ricordare Simon Stevin (1548-1620) che accettò come soluzioni di equazioni i numeri negativi e iniziò ad impiegarli in Fisica. Insieme a Bombelli immaginò anche che i numeri relativi avessero una loro interpretazione come lunghezze rappresentabili su una retta con un'origine, e che questo modo di vederli potesse aiutare i matematici a comprendere meglio il loro significato.

Contraddizioni e dispute sulla loro definizione rigorosa, sul loro uso e sul loro ruolo e legame con gli altri insiemi numerici, si risolveranno solo nell'Ottocento e agli inizi del Novecento.

Gradualmente sempre più i numeri relativi svelarono le loro potenzialità, ed entrarono a far parte della Matematica a pieno diritto grazie ai trattati di Eulero (1707-1783) e Gauss (1777-1855).

Fu persino rimessa in discussione la questione di Baskhara sull'esistenza di numeri con quadrato negativo … ma questa è un'altra (affascinante) storia!

# PERCENTUALI

- **QUANT'E' IL 15 PER CENTO (SI SCRIVE "15%") DI 40 EURO?**

  **E' i $\frac{15}{100}$ di 40 euro,**
  **vale a dire è ciò che si ottiene**
  - **considerando i 40 euro,**
  - **suddividendoli in 100 parti uguali (ciascuna parte sarà dunque di euro 40:100 = 0,4)**
  - **e poi prendendo 15 di queste parti uguali $(15 \cdot 0{,}4 = 6 \text{ euro})$.**

  **IL CALCOLO SI PUO' SVOLGERE SEMPLICEMENTE**
  **MOLTIPLICANDO PER LA FRAZIONE $\frac{15}{100}$:**

  **15% di 40 euro = $\frac{15}{10\cancel{0}} \cdot 4\cancel{0} = \frac{60}{10} = 6$ euro**

- La produzione di rifiuti giornaliera a Napoli+hinterland nel maggio 2007 si aggirava intorno a 1400 tonnellate. Secondo la legge, almeno il 35% dei rifiuti prodotti avrebbe dovuto essere raccolto in modo differenziato, così da recuperare e riciclare per quanto possibile.
  Ma nello stesso periodo, in quella zona, solo il 10% dei rifiuti andava alla "differenziata".
  Quante tonnellate di rifiuti sfuggivano ogni giorno alla normativa?

  Facile: $35\% - 10\% = 25\% \left(\frac{35}{100} - \frac{10}{100} = \frac{25}{100}\right)$

  e il 25% di 1400 tonnellate è $\frac{25}{100} \cdot 1400 = \frac{1}{4} \cdot 1400 = 1400 : 4 = 350$ tonnellate.

- L'anno scorso i miei risparmi, 20000 euro, hanno avuto un incremento del 3%.
  A quanto ammontano ora?

  3% di 20000 euro = $\frac{3}{\cancel{100}} \cdot 200\cancel{00} = 600$ euro

  e dunque i miei risparmi ammontano ora a $20000 + 600 = 20600$ euro.

  Anche:
  un aumento del 3%, ossia dei 3/100, equivale ad avere i 103/100, cioè il 103% ($100\% + 3\% = 103\%$).
  Ma il 103% di 20000 euro è $\frac{103}{\cancel{100}} \cdot 200\cancel{00} = 20600$ euro .

- **Una "percentuale" di qualcosa è dunque una frazione, con denominatore 100, di quella cosa.**

  **Spesso è più comodo lavorare con le percentuali anziché con le normali frazioni, per due motivi.**

  ♪ **Un motivo è la semplicità del calcolo:**
  **fare una percentuale del p% equivale a dividere per 100 e moltiplicare per p;**
  **ma dividere per 100 è semplicissimo, basta spostare la virgola a sinistra di 2 posti.**

  ♫ **L'altro motivo è che le frazioni con lo stesso denominatore**
  **possono essere confrontate fra loro più agevolmente.**
  **Facciamo un esempio.**
  **La frazione 3/8 è leggermente superiore alla frazione 1/3: facile stabilirlo, ma sarebbe ancora più facile se al posto delle due frazioni si avessero le percentuali equivalenti, perché**

  **$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375 = \frac{37{,}5}{100} = 37{,}5\%$ e $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}3333\ldots = \frac{33{,}33\ldots}{100} = 33{,}33\ldots\%$**

  **e avere il 37,5% di qualcosa anziché il 33,33…% di quella stessa cosa**
  **equivale dunque ad avere circa il 4% in più (4% = 4/100 = 1/25).**

❑ Mi fanno lo sconto del 12% su di un bene che originariamente costava 250 euro. Quanto spendo?

12% di 250 euro = $\frac{12}{10\cancel{0}}\cdot 25\cancel{0} = \frac{300}{10} = 30$ euro  quindi  spesa $= 250 - 30 = 220$ euro.

Anche: uno sconto del 12%, ossia dei 12/100, equivale ad avere gli 88/100,

cioè l' 88% (100% −12% = 88% ). Ma l' 88% di 250 euro è $\frac{88}{10\cancel{0}}\cdot 25\cancel{0} = \frac{2200}{10} = 220$ euro.

♥ Osserviamo ora che se per esperimento provassimo ad *aumentare* questi 220 euro del 12%, NON ritorneremmo a 250 euro!

Infatti il 112% di 220 è $\frac{112}{10\cancel{0}}\cdot 22\cancel{0} = \frac{2464}{10} = 246{,}4$

Il motivo di questa differenza è che

♪ il PRIMO 12% (quello dello sconto) si riferisce a 250,

♫ mentre il SECONDO 12% (quello dell'"esperimento" di rincaro dopo lo sconto) **si riferisce ad una cifra diversa** (220).

❑ Un tale investe in borsa una data somma di denaro.
Supponiamo che ad un periodo fortunato, in cui si ha un guadagno del 30%, faccia seguito un secondo periodo di magra, in cui rispetto al massimo del periodo precedente si perde il 30%.

| Inizio periodo | Fine periodo |
|---|---|
| $x$ | $\frac{130}{100}x$ |
| $\frac{130}{100}x$ | $\frac{7\cancel{0}}{10\cancel{0}}\cdot\frac{13\cancel{0}}{10\cancel{0}}x = \frac{91}{100}x$ |

… Il nostro risparmiatore, in totale, avrà perso il 9% della cifra inizialmente investita.
Non bisogna cadere nella trappola "guadagno il 30%, poi perdo il 30%, quindi sono alla pari" perché IL PRIMO 30%, quello del guadagno, si riferisce a una data cifra (quella iniziale) mentre IL SECONDO 30%, quello della perdita, si riferisce a una cifra diversa (e maggiore) quindi è "normale" che la perdita superi il guadagno.

❑ 27 kg, che percentuale rappresentano rispetto a 40 kg?
Beh, dato che 27 rispetto a 40 è ovviamente i 27/40, basterà trasformare la frazione 27/40 in una frazione equivalente con denominatore 100.

Si può procedere in diversi modi, anche con una proporzione (27:40 = $x$:100) ma, in generale, il modo più rapido e comodo di fare conti di questo genere è il seguente.

♪ Trovo il numero decimale corrispondente, effettuando la divisione … $\frac{27}{40} = 27:40 = 0{,}675$

♫ … poi trasformo il numero decimale in una frazione con denominatore 100;

basta vedere a quanti centesimi il numero decimale stesso corrisponde. $0{,}675 = \frac{67{,}5}{100} = 67{,}5\ \%$

♥ Se dopo un rincaro del 30% un prezzo diventa di 36 euro e 40 centesimi, qual era il prezzo originario?

Dunque: se c'è stato un rincaro del 30%, il nuovo prezzo, quello che sappiamo essere di 36,4 euro, è i 130/100 del prezzo iniziale. Abbiamo già affrontato, occupandoci di frazioni, problemi di questo tipo: se $f$, prezzo finale, è i 130/100 di $i$, prezzo di partenza, allora quest'ultimo si potrà ricostruire

♪ dividendo $f$ per 130 (con ciò, si ottiene 1/100 di $i$)

♫ poi moltiplicando ciò che si è ottenuto per 100.

$f = \frac{130}{100}i \rightarrow i = \frac{f}{130}\cdot 100$ *o anche* $i = f\cdot\frac{100}{130}$ (nel nostro caso, $i = 36{,}4\cdot\frac{100}{130} = 28$)

Si può giungere a questa conclusione anche con l'aiuto di una semplicissima "equazione" (uguaglianza contenente un numero "incognito" ossia sconosciuto e indicato ad esempio col simbolo $x$):

$\underbrace{\boxed{\frac{130}{100}x = 36{,}4}}_{1{,}3x = 36{,}4} \overset{(*)}{\rightarrow} x = \frac{36{,}4}{1{,}3}$ *o anche* $x = \frac{36{,}4}{\frac{130}{100}}$ *o anche* $\boxed{x = 36{,}4\cdot\frac{100}{130}}$

(*) *Se un prodotto dà come risultato* 36,4
*allora uno dei fattori sarà uguale a* 36,4 *diviso l'altro fattore*

NOTA: puoi pensare di passare da $\frac{130}{100}x = 36{,}4$ a $x = 36{,}4\cdot\frac{100}{130}$ anche prendendo l'uguaglianza iniziale

e: a) moltiplicando per 100 ambo i membri  b) poi dividendo ambo i membri per 130

**ESERCIZI di "riscaldamento"**

1) Determina:
   a) il 70% di 80 kg  b) il 20% di 4 euro e 60 centesimi  c) il 12,5% di 6/5 di metro
   d) quanti diventano 40000 passeggeri dopo un aumento dei passeggeri del 20%
   e) il prezzo che, aumentato del 10%, diventa di 57 euro e 75 centesimi
   f) il prezzo che diventerebbe di 204 euro se venisse scontato del 15%  g) il 30% del 40% di 1000 euro

2) Che percentuale rappresentano:
   a) 15 kg rispetto a 50 kg?  b) 11 litri rispetto a 18,5 litri?  c) 10000 spettatori rispetto a 7500 spettatori?

| Matematica e Problemi della Realtà | **PROBLEMI DELLA REALTA' CON PERCENTUALI** |
|---|---|

3) Dopo due sconti successivi del 10%, a quanto si porta un prezzo iniziale di 100 euro?

4) Di che percentuale occorre aumentare un dato prezzo,
   in modo che facendo poi il 20% di sconto si ritorni al prezzo iniziale?

5) Se un prezzo aumenta del 400%, vuol dire che quadruplica?

6) Se il numero di divorzi in Italia è passato da 27000 circa nel 1997 a 50000 circa nel 2006,
   - che percentuale in più si è avuta nel 2006 rispetto al 1997?
   - E che percentuale in meno si aveva nel 1997 rispetto al 2006?

7) Il valore delle azioni di una certa società il giorno 2 marzo è aumentato del 4% (*);
   il giorno 3 marzo è aumentato del 6% (*); il giorno 4 marzo è calato del 10% (*).
   Di che percentuale è variato il valore la sera del 4 marzo rispetto al mattino del 2?
   (*) *S'intende, confrontando il valore la sera con quello al mattino dello stesso giorno*.

8) Sul 30% di 20000 euro ho guadagnato il 3%, sul rimanente ho perso il 2,5%.
   Sono in guadagno o in perdita? E di che percentuale sull'investimento iniziale?

9) Se le due dimensioni di un orto rettangolare vengono una aumentata e l'altra diminuita del 10%,
   che variazione percentuale subisce l'area?
   a) Diminuisce di una percentuale fissa
   b) Aumenta di una percentuale fissa
   c) Resta invariata
   d) Dipende dalle misure delle dimensioni iniziali

10) Se le due dimensioni di un orto rettangolare vengono aumentate entrambe del 10%,
    di quanto aumenta in percentuale l'area?

11) Determina il valore finale di un prezzo di 80 euro, se il negoziante prima lo aumenta del 10%
    poi il mese successivo accorda a tutti i clienti uno sconto del 5%

12) Mi restano ancora 16 esercizi, ossia il 40% del compito per le vacanze. Quanti esercizi erano stati dati?

13) La prima rata mensile per acquistare un'automobile corrisponde al 2% del prezzo, e ammonta a 204 €.
    Quanto costa l'automobile?

14) Ho comprato alla fiera un mobiletto, ma a mia moglie proprio non è piaciuto: abbiamo finito per
    rivenderlo ai nostri noiosissimi vicini di casa, che invece, dopo averlo visto, se ne erano innamorati;
    e ci hanno dato ben 276 euro, il 15% in più del prezzo d'acquisto. Qual era quest'ultimo?

15) Riempi i puntini:

| | | |
|---|---|---|
| Numero di taglie "S" vendute | … | 10% |
| Numero di taglie "M" vendute | … | 32% |
| Numero di taglie "L" vendute | 100 | … |
| Numero di taglie "XL" vendute | 45 | … |
| Totale | 250 | 100% |

16) Se una tassa passa dal 20% al 21%, come è accaduto in Italia per l'IVA nel Settembre 2011,
    non è giusto dire che, rispetto a quanto si pagava in precedenza, si deve ora pagare l'1% in più. Perché?

17) In un concorso, passa la prima selezione soltanto il 20% dei disegni presentati.
    Successivamente, ad una seconda selezione, solo l'8% dei disegni rimasti in gara viene premiato.
    E in totale i disegni premiati sono 4. Quanti lavori erano stati presentati alla gara?

18) Supponi che su di un investimento si continui a oltranza a:
guadagnare il 50% un giorno; poi perdere il 50% il giorno successivo;
poi guadagnare il 50% il giorno dopo; poi perdere il 50% il giorno dopo ancora; ecc. ecc.
Col passare del tempo, cosa succederà? Qual è l'affermazione vera fra quelle sottostanti?

a) Il capitale resterà in media pressoché stabile
b) Il capitale diminuirà avvicinandosi alla metà di quello iniziale
c) Il capitale diminuirà, rimanendo però pur sempre al di sopra di una certa soglia
d) Il capitale diminuirà avvicinandosi a zero

19) In un paesino gli aventi diritto al voto per le elezioni comunali erano 1250, ma solo il 78,4% si è recato alle urne. Se il sindaco è stato eletto con 640 voti a favore, qual è la percentuale dei consensi a) rispetto al numero dei votanti? b) rispetto al totale degli aventi diritto al voto?

20) Una signora che pesava 80 kg riesce, con una dieta ferrea, a perdere ben 10 chili;
poi però ritornando al normale regime alimentare riacquista tutto il peso che aveva perduto.
Di quanto è diminuito in percentuale il peso a seguito della dieta?
E di che percentuale è poi aumentato quando la dieta è stata abbandonata?

21) La classe Prima A, per via delle bocciature, è rimasta con soli 15 allievi, e di questi 1/3 sono femmine. La Prima B ha il 50% di femmine, e il 20% di studenti complessivamente in più rispetto alla Prima A. Le due classette vengono fuse insieme per formare un'unica Seconda.
Qual è la percentuale delle femmine nella nuova classe?

22) In una cittadina l'80% degli abitanti è maggiorenne, quindi ha diritto al voto.
Nelle ultime elezioni comunali, soltanto il 70% degli aventi diritto al voto si è recato alle urne, ma il 5% di questi ha votato scheda bianca o nulla. Fra i voti espressi, 5 su 8 sono stati a favore del signor Lapo Mannaro, che è stato così eletto sindaco con 3990 preferenze. Quanti abitanti ha quella città?

23) Un commerciante di abiti disinvolto, nel periodo dei saldi, espone in vetrina un cartello con la scritta "Tutto scontato del 15%". Sennonché, egli aveva nel frattempo proceduto a cambiare completamente tutta la merce in vetrina, applicando al prezzo di vendita precedentemente previsto per i vari capi un ricarico del 15%. In definitiva, qual è la variazione percentuale reale dei prezzi a carico del cliente?

## LO "SCORPORO DELL'IVA"

L'IVA ( = Imposta sul Valore Aggiunto) è un tributo che lo Stato esige ogniqualvolta un bene o un servizio viene venduto. Al prezzo netto che il rivenditore intenderebbe ricavare viene applicato un rincaro, in percentuale, che va a carico del consumatore. Ad esempio, se un prodotto compare in vetrina al prezzo di 90 euro, bisogna pensare che di questi 90 euro solo una parte li tratterrà il negoziante, perché nei 90 euro finali è compresa anche l'IVA, che il negoziante stesso provvederà a versare allo Stato.
Se, poniamo, l'aliquota IVA è al 20% (queste aliquote possono essere differenti nei diversi paesi europei), per trovare il ricavo netto del rivenditore occorre risalire a quel prezzo $x$ il quale, aumentato del 20%, produce un prezzo finale di 90 euro. Tale procedimento viene chiamato "lo scorporo dell'IVA".
Ma, in base a quello che abbiamo visto, tu dovresti saper bene come fare!

24) A tale scopo, basterà moltiplicare la cifra di 90 euro per la frazione …

25) E più in generale, indicando con $a$ l'aliquota (nell'esempio di prima, era $a = 20$), la frazione per cui va moltiplicato il prezzo finale, se si vuole risalire a quello che sarebbe stato il prezzo senza IVA, è …

**RISPOSTE**

1a) 56 kg 1b) 92 centesimi 1c) 15 cm 1d) 48000 passeggeri 1e) 52 € e 50 centesimi 1f) 240 € 1g) 120 €
2a) Il 30% 2b) Poco meno del 59,46% 2c) Il 133,33… % 3) A 81 € (il 2° sconto è fatto su 90 €!) 4) Del 25%
5) No, che quintuplica 6) Circa l'85% in più; circa il 46% in meno 7) È diminuito dello 0,784%
8) Perdo 170 € cioè lo 0,85% 9) a: l'area diminuisce sempre dell'1%, indipendentemente dalle dimensioni
10) Del 21%: $\frac{110}{100}a \cdot \frac{110}{100}b = \frac{121}{100}ab$ 11) 83 euro e 60 centesimi 12) 40: $\frac{40}{100}n = 16 \rightarrow n = 16 \cdot \frac{100}{40} = 40$
13) 10200 euro 14) 240 euro: $115/100\,a = 276 \rightarrow a = 276 \cdot 100/115 = 240$ 15) 25; 80; 40%; 18%
16) La domanda vuole mettere in relazione ciò che si paga ora con ciò che si pagava prima: e se prima, su un importo di 100, si pagava 20, ora anziché 20 si paga 21 ossia 1/20 in più: l'aumento della tassa è stato di 1/20 = 0,05 = 5%
17) 250: $\frac{8}{100} \cdot \frac{20}{100} = 1{,}6\%$; $\frac{1{,}6}{100}x = 4 \rightarrow x = 4 \cdot \frac{100}{1{,}6} = 250$
18) d 19) a) Circa il 65,3% b) Il 51,2% 20) Del 12,5%; del 14,3% circa 21) Circa il 42,4% 22) 12000
23) Il cliente ci guadagna, ma solo il 2,25% del prezzo ordinario della merce 24) $\frac{100}{120}$ 25) $\frac{100}{100+a}$

# CENNI SULL'OPERAZIONE DI RADICE

## CHE COS'E' L'OPERAZIONE DI "RADICE"

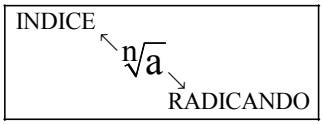
**Si dice "radice quadrata" (cubica, quarta, quinta, ... ) di un numero reale $a \geq 0$, quel numero reale $b \geq 0$ che elevato al quadrato (al cubo, alla quarta, alla quinta, ...) dà come risultato a.**

**DEFINIZIONE :** $\sqrt[n]{a} = b$ **se e solo se** $b^n = a$ $\quad (a,b \geq 0)$

**Quindi l'operazione di estrazione di radice è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza.**

Esempi: $\sqrt[4]{81} = 3$ perché $3^4 = 81$; $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}$ perché $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$; $\sqrt[2]{0,09} = 0,3$ perché $(0,3)^2 = 0,09$

Un simbolo del tipo $\sqrt[n]{a}$ viene chiamato "**radicale**".
Vale a dire, "radice" è il *risultato*,
"radicale" è il *simbolo* dell'operazione di estrazione di radice.
Il numero **n** viene detto "**indice**". Il numero **a** viene detto "**radicando**".



RADICALE

L'indice n è un numero naturale, maggiore o uguale a 1.

**Se l'indice vale 1, la radice è uguale al radicando**: $\sqrt[1]{a} = a$

**L'indice 2 viene di norma sottinteso.** Ossia, anziché scrivere $\sqrt[2]{a}$ si usa scrivere $\sqrt{a}$ : $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$
L'abbreviazione è conveniente, dato che la radice quadrata è di gran lunga la più utilizzata.

Ancora qualche esempio:

$\sqrt[3]{1000} = 10$ perché $10^3 = 1000$; $\sqrt{25} = 5$ perché $5^2 = 25$;

$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ perché $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$; $\sqrt[4]{0,0016} = 0,2$ perché $(0,2)^4 = 0,0016$

La separazione della parte intera da quella decimale si può effettuare con la **virgola** oppure col **punto** (all'anglosassone).

- Se il radicando è $>1$ il valore della radice è *minore* del radicando stesso;
- ma se il radicando è $<1$ (compreso fra 0 e 1) il valore della radice è *maggiore* del radicando stesso.

## DUE IDENTITA' VERAMENTE FONDAMENTALI

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ $\quad$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ $\quad$ Indice ed esponente sono uguali: la radice e la potenza, operazioni inverse l'una dell'altra, si "compensano", quindi si possono semplificare

$\sqrt[n]{a^n} = a$ $\quad$ $\sqrt[n]{a^n} = a$ $\quad$ Anche qui, potenza e radice, operazioni inverse fra loro, si "compensano", da cui la semplificazione

## ANTICIPAZIONI

I radicali saranno oggetto di uno studio più approfondito sul Volume 2.
Qui ci limitiamo solo ad anticipare qualcosa sulle **RADICI QUADRATE**.

Per **moltiplicare** fra loro due radici quadrate basta moltiplicarne i radicandi: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$; $\sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{100}$

E viceversa, si può scrivere, ad esempio, $\sqrt{49 \cdot 16} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{16} = 7 \cdot 4 = 28$.

♥ Invece sarebbe GRAVE ERRORE scrivere ~~$\sqrt{4} + \sqrt{25} = \sqrt{4+25}$~~ oppure ~~$\sqrt{49+16} = \sqrt{49} + \sqrt{16}$~~ !!!

**LA RADICE QUADRATA DI UN NUMERO NEGATIVO NON ESISTE**: $\sqrt{-49} = impossibile$
(NOTA: questa affermazione verrà ridiscussa quando nel Volume 2 introdurremo i cosiddetti "numeri complessi")

**IL RISULTATO DI UNA RADICE QUADRATA È SEMPRE NON NEGATIVO ($\geq 0$), E UNICO: anche se esistono *due* numeri il cui quadrato dà 9 (il +3 e il –3), la scrittura $\sqrt{9}$ indica *solo* il +3.**

♥ IMPORTANTE: $\sqrt{9} = 3$ e NON ~~$\sqrt{9} = \pm 3$~~ ;
tant'è vero che quando si risolve un'equazione come ad esempio la $x^2 = 25$,
le cui soluzioni sono evidentemente i due numeri +5 e –5,
NON SAREBBE CORRETTO esprimere tali soluzioni con la scrittura $x = \sqrt{25}$,
perché in tal modo la soluzione negativa andrebbe persa;
è invece giusto scrivere che $x^2 = 25 \leftrightarrow x = \pm\sqrt{25}$.

## ESERCIZI DI BASE SUI RADICALI

Nei casi in cui il risultato non sia "tondo", **evita la macchinetta** procedendo invece **per tentativi**.
Ad esempio, per calcolare (meglio: approssimare) il numero $\sqrt{30}$ fino alla prima cifra decimale, puoi fare così:

$5^2 = 25 \quad 6^2 = \boxed{36 > 30} \quad$ QUINDI $\quad 5 < \sqrt{30} < 6$

$5{,}1^2 = 26{,}01 \quad 5{,}2^2 = 27{,}04 \quad 5{,}3^2 = 28{,}09 \quad 5{,}4^2 = 29{,}16 \quad 5{,}5^2 = \boxed{30{,}25 > 30} \quad$ QUINDI $\quad 5{,}4 < \sqrt{30} < 5{,}5$

1) $\sqrt[3]{8}$ 2) $\sqrt[4]{625}$ 3) $\sqrt{49}$ 4) $\sqrt[5]{32}$ 5) $\sqrt[3]{27}$

6) $\sqrt[7]{1}$ 7) $\sqrt[8]{0}$ 8) $\sqrt{-4}$ 9) $\sqrt[3]{125}$ 10) $\sqrt{36}$

11) $\sqrt[4]{16}$ 12) $\sqrt[3]{216}$ 13) $\sqrt{196}$ 14) $\sqrt[4]{10000}$ 15) $\sqrt[5]{243}$

16) $\sqrt{900}$ 17) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ 18) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ 19) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$ 20) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

21) $\sqrt{\frac{121}{289}}$ 22) $\sqrt{\frac{100}{9}}$ 23) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ 24) $\sqrt[3]{\frac{64}{729}}$ 25) $\sqrt{10}$

26) $\sqrt{20}$ 27) $\sqrt{60}$ 28) $\sqrt{200}$ 29) $\sqrt{2000}$ 30) $\sqrt[3]{10}$

31) $\sqrt[3]{555}$ 32) $\sqrt[4]{10}$ 33) $\sqrt{0{,}09}$ 34) $\sqrt{0{,}25}$ 35) $\sqrt[3]{0{,}008}$

36) $\sqrt{0{,}4}$ 37) $\sqrt[3]{0{,}1}$ 38) $\left(\sqrt{39}\right)^2$ 39) $\sqrt{41}\cdot\sqrt{41}$ 40) $\sqrt{23^2}$

41) $\sqrt{64}$ 42) $\sqrt[3]{64}$ 43) $\sqrt[6]{64}$ 44) $\sqrt[10]{1024}$ 45) $\sqrt{9/4}$

46) $\sqrt[3]{\frac{125}{343}}$ 47) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$ 48) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}$ 49) $\sqrt{\frac{121}{169}}$ 50) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

51) $\sqrt[4]{13^4}$ 52) $\sqrt{(-7)^2}$ 53) $\sqrt{0}$ 54) $\sqrt{1}$ 55) $\sqrt{-9}$

56) Può la radice quadrata di un numero essere maggiore del numero stesso?
57) Può la radice cubica di un numero essere maggiore della radice quadrata dello stesso numero?
58) Quali numeri coincidono con la propria radice quadrata?
59) Quali sono quei due numeri che hanno la proprietà di essere uguali al doppio della propria radice quadrata?
60) Completa le seguenti tabelle.

| $a$ | 0 | 0,1 | 0,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 9 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{a}$ (1) | 0 | 0,3... | | 1,4... | | | | | | | |

| $a$ | 20 | 50 | 100 | 1000 | 2000 | 5000 | 1000000 | $a$ | 0,01 | 0,0004 | 0,000001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{a}$ (2) | 4,... | | | | | | | $\sqrt{a}$ (3) | | | |
| $\sqrt[3]{a}$ (2) | | 3,... | | | | | | $\sqrt[3]{a}$ (3) | 0,2... | | |

(1) fino alla 1ª cifra decimale (2) solo la parte intera (3) valore esatto o approssimazione ritenuta adeguata

### RISULTATI, RISPOSTE

1) 2 2) 5 3) 7 4) 2 5) 3 6) 1 7) 0 8) impossibile 9) 5 10) 6 11) 2 12) 6 13) 14
14) 10 15) 3 16) 30 17) $\frac{3}{4}$ 18) $\frac{1}{2}$ 19) $\frac{3}{10}$ 20) $\frac{1}{2}$ 21) $\frac{11}{17}$ 22) $\frac{10}{3}$ 23) $\frac{2}{3}$ 24) $\frac{4}{9}$
25) 3,1... 26) 4,4... 27) 7,7... 28) 14,1... 29) 44,7... 30) 2,1... 31) 8,2... 32) 1,7... 33) 0,3
34) 0,5 35) 0,2 36) 0,6... 37) 0,4... 38) 39 39) 41 40) 23 41) 8 42) 4 43) 2 44) 2
45) $\frac{3}{2}$ 46) $\frac{5}{7}$ 47) $\frac{3}{5}$ 48) $\frac{1}{3}$ 49) $\frac{11}{13}$ 50) $\frac{2}{3}$ 51) 13 52) +7 53) 0 54) 1 55) impossibile
56) Sì, se il numero di partenza è compreso fra 0 e 1 57) Come per il 56) 58) 0 e 1 59) 0 e 4

| 60) | $a$ | 0 | 0,1 | 0,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 9 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\sqrt{a}$ | 0 | 0,3... | 0,7... | 1,4... | 1,7... | 2 | 2,2... | 2,4... | 3 | 3,1... | 3,4... |

| $a$ | 20 | 50 | 100 | 1000 | 2000 | 5000 | 1000000 | $a$ | 0,01 | 0,0004 | 0,000001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{a}$ | 4,... | 7,... | 10 | 31,... | 44,... | 70,... | 1000 | $\sqrt{a}$ | 0,1 | 0,02 | 0,001 |
| $\sqrt[3]{a}$ | 2,... | 3,... | 4,... | 10 | 12,... | 17,... | 100 | $\sqrt[3]{a}$ | 0,2... | 0,07... | 0,01 |

# CENNI DI LOGICA (PARTE 1)

## 1. PROPOSIZIONI E CONNETTIVI LOGICI

**"Proposizione" = "affermazione", "frase per la quale abbia senso chiedersi se sia vera o falsa"**.

Esempi:

1. L'uomo è disceso la prima volta sulla Luna nel 1969 (Vera).
2. Il numero 413 è primo (Falsa).

Nella lingua parlata o scritta si utilizzano diverse
**costruzioni linguistiche per mettere in relazione tra loro le proposizioni**. Le principali sono

- **e**
- **o, oppure**
- **non**
- **se … allora …**
- **se … allora … e viceversa**

Esempi:

3. Il gatto è un mammifero **E** la balena è un pesce.
4. La Juventus ha vinto il campionato del 1985/86 **O** il campionato del 1986/87.
5. Il numero 413 **NON** è primo.
6. **SE** Dante Alighieri è morto prima del 1300,
   **ALLORA** la Divina Commedia è stata scritta prima del 1300.
7. **SE** il mio anno di nascita è un numero divisibile sia per 2 che per 3,
   **ALLORA** il mio anno di nascita è divisibile per 6, **E VICEVERSA**.

**In Logica tali costruzioni linguistiche vengono schematizzate tramite i "connettivi logici".**
A partire da due proposizioni p, q, i connettivi consentono di creare le **proposizioni "composte"**:

| | |
|---|---|
| $p \wedge q$ | **p ET q (congiunzione)** |
| $p \vee q$ | **p VEL q (disgiunzione)** |
| $\bar{p}$, $\neg p$, $\sim p$ | **NON p (negazione)** *La negazione può essere indicata in tre modi alternativi* |
| $p \rightarrow q$ | **p IMPLICA q; SE p, ALLORA q (implicazione)** |
| $p \leftrightarrow q$ | **p BIIMPLICA q; SE p, ALLORA q E VICEVERSA (biimplicazione, doppia implicazione)** |

**La corretta interpretazione dei tre connettivi ET, VEL, NON
è descritta dalle rispettive TAVOLE DI VERITA' qui sotto riportate:**

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

| p | $\bar{p}$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

ET ( $\wedge$ ) è anche detto "prodotto logico",
e a volte lo si trova indicato con lo stesso simbolo
che si usa per la moltiplicazione:
"$\cdot$" (eventualmente sottinteso).

VEL ( $\vee$ ) è anche detto "somma logica",
e può essere indicato con notazione additiva: "+"

Riassumendo:

- **il connettivo $\wedge$ (ET) lega due proposizioni p, q producendo una proposizione composta $p \wedge q$ che è considerata**
  - **VERA soltanto quando sono vere ENTRAMBE le proposizioni componenti p, q**
  - **altrimenti è considerata FALSA;**
- **il connettivo $\vee$ (VEL) lega due proposizioni p, q producendo una proposizione composta $p \vee q$ che è considerata**
  - **VERA purché sia vera ALMENO UNA delle proposizioni componenti p, q**
  - **mentre è considerata FALSA soltanto quando p, q sono entrambe false;**
- **il connettivo NON viene applicato ad una singola proposizione, e produce una nuova proposizione il cui valore di verità è opposto rispetto a quello della proposizione iniziale.**

Esempio: nel caso sia $p = $"Roma è la capitale d'Italia" (Vera); $q = $"$2+2=5$" (Falsa)
avremo: $p \wedge q$ FALSA, $p \vee q$ VERA, $\overline{p}$ FALSA, $\overline{q}$ VERA

♥ **La tavola di verità per il connettivo $\vee$ stabilisce che la comunità dei matematici assegna ad esso il significato di "o" inteso in senso INCLUSIVO, proprio come il VEL latino, e *NON* di un "o" ESCLUSIVO (in Latino, AUT).**

- Ad esempio, la proposizione
  "*Le darò un bacio o una carezza*"
  (che evidentemente non esclude la possibilità di entrambe le cose!)
  può essere pensata come la DISGIUNZIONE INCLUSIVA delle due proposizioni
  $b =$"*le darò un bacio*"; $c =$"*le darò una carezza*"
  e si tradurrà quindi in linguaggio logico con $b \vee c$.

- Invece se consideriamo la proposizione
  "*Alla fine dell'anno scolastico o resterò promosso o andrò a fare il manovale*"
  e indichiamo con $p, m$ rispettivamente le due proposizioni
  $p =$"*resterò promosso*"; $m =$"*andrò a fare il manovale*"
  una traduzione col VEL non sarebbe accurata, in quanto l'affermazione evidentemente significa che si verificherà UNA E UNA SOLA delle due circostanze INCOMPATIBILI $p, m$.
  Avremmo quindi bisogno, per una traduzione fedele, di un connettivo di "disgiunzione esclusiva", che in effetti in Logica esiste, seppure sia poco usato, e può essere espresso, ad esempio, col simbolo XOR (dall'inglese "eXclusive OR").
  … Ma possiamo anche fare a meno di un nuovo connettivo, e tradurre così: $\boxed{\left(p \wedge \overline{m}\right) \vee \left(\overline{p} \wedge m\right)}$

## 2. PROPOSIZIONI LOGICAMENTE EQUIVALENTI

Siano $p, q$ due proposizioni. Consideriamo ora le proposizioni composte

1) $\overline{p \wedge q}$
2) $\overline{p} \vee \overline{q}$

Bene, io dico che esse *hanno certamente lo stesso "valore di verità"*:
o sono entrambe vere, oppure sono entrambe false.
Infatti:

- se è vera la 1), che è la negazione della proposizione $p \wedge q$, allora significa che è falsa la $p \wedge q$, quindi che è falsa almeno una fra le due proposizioni $p, q$.
  Ma allora almeno una fra $\overline{p}, \overline{q}$ è vera, quindi è vera la 2).
- E, viceversa: se è vera la 2), allora è vera almeno una fra le due proposizioni $\overline{p}, \overline{q}$;
  quindi, è falsa almeno una fra le due proposizioni $p, q$;
  perciò, è certamente falsa la congiunzione $p \wedge q$; per cui la sua negazione $\overline{p \wedge q}$, ossia la 1), è vera.

**Due proposizioni composte, costituite dalle stesse proposizioni componenti**
(collegate, però, in modo diverso dai connettivi logici),
**si dicono "logicamente equivalenti" se assumono sempre lo stesso valore di verità, qualunque siano i valori di verità delle proposizioni componenti**.

E' molto interessante scoprire coppie di proposizioni logicamente equivalenti.

**Per verificare se due proposizioni sono logicamente equivalenti, possiamo servirci delle "tavole di verità" dei vari connettivi logici.**

Ad esempio, andiamo a verificare l'equivalenza logica $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ con l'uso delle tavole (**il simbolo " = " va qui interpretato e letto come "logicamente equivalente a"**):

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\overline{p \wedge q}$ | $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $\overline{q}$ | $\overline{p} \vee \overline{q}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | **F** | V | V | F | F | **F** |
| V | F | F | **V** | V | F | F | V | **V** |
| F | V | F | **V** | F | V | V | F | **V** |
| F | F | F | **V** | F | F | V | V | **V** |

# ALCUNE EQUIVALENZE LOGICHE NOTEVOLI

**(il simbolo " = " va interpretato e letto come "logicamente equivalente a")**

$\overline{\overline{p}} = p$ Legge della doppia negazione, o "legge di complementarietà": "**due negazioni affermano**"

$p \wedge q = q \wedge p$ ; $p \vee q = q \vee p$ Proprietà **commutativa** della congiunzione e della disgiunzione

$p \wedge p = p$ ; $p \vee p = p$ Proprietà di **idempotenza** della congiunzione e della disgiunzione

$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ ; $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ Proprietà **associativa** di congiunzione e disgiunzione

$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$
$\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

**LEGGI DI DE MORGAN** (**Importantissime !!! Confrontale con le analoghe per gli INSIEMI** di pag. 89)



$p \wedge (p \vee q) = p$ ; $p \vee (p \wedge q) = p$ Leggi di **assorbimento**

$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ Proprietà **distributiva** della congiunzione rispetto alla disgiunzione …

$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ … e proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione

Osserviamo che $\wedge$ viene anche detto "prodotto logico" per via di certe sue affinità con il prodotto fra numeri, $\vee$ viene anche detto "somma logica" perché presenta alcune somiglianze con la somma fra numeri (per cogliere queste analogie, immagina di sostituire nelle rispettive tavole di verità "V" con "1" e "F" con "0").

Se però proviamo a giocare con le due formule precedenti, trasformando il simbolo $\wedge$ in $\bullet$, il simbolo $\vee$ in $+$, e pensando di avere tre numeri $a, b, c$ anziché tre proposizioni $p, q, r$, otterremo le due relazioni

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ e ~~$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$~~, *la prima giusta*, ma *la seconda sbagliata*.

Insomma: in Logica valgono ENTRAMBE le proprietà distributive, sia quella della congiunzione rispetto alla disgiunzione, sia quella della disgiunzione rispetto alla congiunzione, mentre in Algebra vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma ma NON quella della somma rispetto al prodotto.

Esercizio 1. Serviti della tabella seguente per verificare la seconda legge di De Morgan $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $\overline{p \vee q}$ | $\overline{p}$ | $\overline{q}$ | $\overline{p} \wedge \overline{q}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | | | | | |
| V | F | | | | | |
| F | V | | | | | |
| F | F | | | | | |

Esercizio 2. Verifica, con la tabella, la proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione:

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \wedge r$ | $p \vee (q \wedge r)$ | $p \vee q$ | $p \vee r$ | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | | | | | |
| V | V | F | | | | | |
| V | F | V | | | | | |
| V | F | F | | | | | |
| F | V | V | | | | | |
| F | V | F | | | | | |
| F | F | V | | | | | |
| F | F | F | | | | | |

Esercizio 3. Verifica la validità di alcune, a tua scelta, fra le equivalenze logiche riportate in questa pagina.

## 3. … E L'IMPLICAZIONE?

Ci siamo occupati, fin qui, di CONGIUNZIONE (et), DISGIUNZIONE (vel) e NEGAZIONE (non).
Per quanto riguarda l'implicazione e la biimplicazione, il discorso si prospetta molto più difficile: è infatti assai problematico decidere se per questi connettivi logici, ben più complessi dei precedenti, abbia ancora senso fissare delle "tavole di verità".
Ne riparleremo più avanti, nella Parte 2 (pag. 350 e seguenti) di questi Cenni di Logica.

## 4. SIMBOLI LOGICI DI USO COMUNE

| **Il "QUANTIFICATORE UNIVERSALE"** $\forall$ **(per ogni, per qualsiasi, qualunque sia)** | **Il "QUANTIFICATORE ESISTENZIALE"** $\exists$ **(esiste)** $\nexists$ **non esiste;** $\exists!$ **esiste uno e un solo** | **Il simbolo "TALE CHE" / oppure \| o :** |
|---|---|---|

**ESERCIZI** (gentilissima concessione del prof. Raffaele Mascella dell'Università di Teramo)

1) "[…] dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste un'enunciazione vera oppure falsa. Tale enunciazione non sussiste certo in tutti: la preghiera, ad esempio, è un discorso, ma non risulta né vera né falsa. Prescindiamo dunque dagli altri discorsi, dal momento che l'indagine al riguardo è più pertinente alla retorica o alla poetica. Il discorso dichiarativo spetta invece alla presente considerazione" (Aristotele, *De interpretatione*)

Quale termine abbiamo noi utilizzato, al posto dell'aristotelico "discorsi dichiarativi"?

2) Quali fra le seguenti frasi sono da considerarsi delle "proposizioni"?

(a) "La porta è chiusa"
(b) "Forse la porta è chiusa"
(c) "Probabilmente Albert Einstein descrisse la teoria della relatività ristretta nel 1905"
(d) "Nel 1905 Albert Einstein descrisse la teoria della relatività ristretta"
(e) "La soluzione dell'equazione $3x + 15 = 24$ è $x = 3$"
(f) "Quanti anni hai?"
(g) "Il 21 luglio del 336 a.C. Aristotele aveva una rana sotto la tunica"
(h) "La capitale d'Italia è Milano"
(i) "Fatti mandare dalla mamma a prendere il latte!"

3) "[…] nella lingua italiana, così come in tutti i linguaggi naturali, queste particelle logiche sono polivalenti e ambigue, si presentano in tante versioni equivalenti e hanno diversi sensi.
Ad esempio la congiunzione «e» tra due enunciati può essere espressa in molteplici varianti («Marco è bravo e intelligente», «Marco è bravo, ma anche intelligente», «Marco è sia bravo, sia intelligente») ma quando è presente può avere anche significati diversi dall'affermazione che gli enunciati sono congiunti («si sposarono e vissero felici e contenti», che ha senso «e poi» ad indicare una consequenzialità), così come la disgiunzione «o» che può avere
- un senso debole o inclusivo
(se indica l'uno, o l'altro, o anche tutti e due: «se è sereno o fa caldo vado al mare»)
- oppure un senso forte o esclusivo
(se indica l'uno, o l'altro, ma non tutti e due: «oggi vado al mare o resto a casa»).
Gli esempi di usi e significati alquanto differenziati non terminano certo qui, ma credo che il senso sia stato compreso: nelle lingue naturali abbiamo molte possibilità di esprimere uno stesso concetto, avvalendoci dei significati multiformi delle parole, delle molteplici strutture grammaticali, dei contesti in cui vengono usate, dell'enfasi attribuita attraverso la punteggiatura o con l'oratoria.
In Logica è opportuno invece ricondurre tutte queste molteplicità espressive a quelle "di base", cioè raggruppandole in base al significato che hanno, e considerando la forma linguisticamente più semplice per la loro denotazione.
Le particelle logiche aventi stesso significato sono così riportate ad un'unica rappresentazione, sia per simbolo che per significato" (R. Mascella)

Ciò premesso,

I) dire in quali delle seguenti proposizioni la congiunzione "e" si può esprimere tramite il connettivo $\wedge$:

(a) "Carlo e Marco sono insegnanti"
(b) "Carlo e Marco stanno venendo alla festa"
(c) "Carlo ha una maglia bianca e blu"
(d) "Carlo è andato al bar e ha preso un caffè"
(e) "Carlo e Marco pesano ciascuno 80 Kg"
(f) "Carlo e Marco pesano insieme 160 Kg"

II) Dire in quali delle seguenti proposizioni la "o" è inclusiva:

(a) "Nelle fermate a richiesta l'autobus si ferma se qualche persona deve scendere o salire"
(b) "Nel menu turistico è compreso il dolce o la frutta"
(c) "Paolo sposerà Marina o Monica"
(d) "Per vincere quel concorso bisogna essere molto bravi o raccomandati"
(e) "L'unanimità si raggiunge quando tutti sono favorevoli o tutti sono contrari"
(f) "Puoi farmi avere notizie tramite Claudia o tramite Elisa"

4) "Sono ammesse al concorso le persone che sono laureate e che hanno meno di trent'anni o hanno figli".
Aldo non è laureato, ha ventisei anni e un figlio.
Paolo è laureato, ha quarant'anni e due figli.
Vincenzo è laureato, ha trentadue anni e non ha figli.
Chi può partecipare al concorso?

5) Aldo, Bruno e Carlo sono tre studenti che hanno sostenuto un esame.
Ponendo:
A = “Aldo ha superato l’esame”, B = “Bruno ha superato l’esame”, C = “Carlo ha superato l’esame”,
determinare le proposizioni composte che traducono, attraverso i connettivi logici, i seguenti enunciati:

(a) “Solo Carlo ha superato l’esame”
(b) “Solo Aldo non ha superato l’esame”
(c) “Solo uno tra Aldo, Bruno e Carlo ha superato l’esame”
(d) “Almeno uno tra Aldo, Bruno e Carlo ha superato l’esame”
(e) “Almeno due tra Aldo, Bruno e Carlo hanno superato l’esame”
(f) “Al più due tra Aldo, Bruno e Carlo hanno superato l’esame”
(g) “Esattamente due tra Aldo, Bruno e Carlo hanno superato l’esame”

6) Aldo, Bruno e Carlo sono gli unici tre membri di una commissione che vota una proposta.
Ponendo: A = “Aldo vota a favore”; B = “Bruno vota a favore ”; C = “Carlo vota a favore”,
determinare le proposizioni composte che traducono i seguenti enunciati:

(a) “La votazione è stata unanime”
(b) “La proposta, in seguito alla votazione, è passata”
(c) “La proposta ha ricevuto un numero dispari di voti a favore”
(d) “La proposta è stata respinta, ma non all’unanimità”
(e) “La proposta è stata respinta; Bruno ha votato contro”

7) Posto: A = “Carlo è ligure” e B = “Diego è piemontese”,
scrivere le proposizioni che traducono, attraverso i connettivi logici, i seguenti enunciati:

(a) “Carlo non è ligure”
(b) “Carlo è ligure e Diego è piemontese”
(c) “Carlo è ligure sebbene Diego sia piemontese”
(d) “Non è vero che Carlo sia ligure e allo stesso tempo Diego piemontese”
(e) “O Carlo è ligure e Diego è piemontese, o né Carlo è ligure, né Diego è piemontese”

8) *Da un Test di Ingresso alla Facoltà di Architettura.*
Nel diario del giovane Telesforo è scritto:

*Nonno Ubaldo dice che quando era giovane ha traversato l'oceano Atlantico a nuoto*
*e che riusciva a battere in velocità le balene.*
*Secondo me questa è una bugia.*

Si dica cosa si può correttamente dedurre dalla convinzione di Telesforo.

(a) Nonno Ubaldo non ha traversato l'Atlantico a nuoto
ma riusciva comunque a battere in velocità le balene
(b) A nonno Ubaldo non piacciono le balene
(c) Nonno Ubaldo non ha traversato l'Atlantico a nuoto e non riusciva a battere in velocità le balene
(d) Nonno Ubaldo ha traversato l'Atlantico a nuoto ma non riusciva a battere in velocità le balene
(e) Se nonno Ubaldo riusciva a battere in velocità le balene allora non ha traversato l'Atlantico a nuoto

9) Dire quali delle seguenti coppie di forme proposizionali sono logicamente equivalenti:

(a) $p$, $(p \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})$ (b) $\overline{p \wedge \overline{q}}$, $\overline{p} \vee q$ (c) $p \vee q$, $(\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q})$

**RISPOSTE**

1) Abbiamo usato il termine “proposizioni”

2) (a), (d), (e), (g), (h), espressioni verbali di fronte alle quali ha significato chiedersi: “E’ vero o è falso?”

3) I) (a), (b), (e) II) (d), (f) 4) Aldo e Vincenzo no, Paolo sì

5) (a) $\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C$ (b) $\overline{A} \wedge B \wedge C$ (c) $(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C)$ (d) $A \vee B \vee C$
(e) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C)$ oppure $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
(f) $\overline{A \wedge B \wedge C}$ (g) $(A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C)$

6) (a) $(A \wedge B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})$ (b) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C)$
(c) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C)$
(d) $(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C)$ (e) $(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})$

7) (a) $\overline{A}$ (b) $A \wedge B$ (c) $A \wedge B$ (d) $\overline{A \wedge B}$ (e) $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$ 8) (e) 9) (a), (b)

# INSIEMI

## 1. CHE COS'E' UN "INSIEME"

**Con la parola "insieme" indichiamo un gruppo, una collezione, una totalità di oggetti.**
**Gli oggetti che costituiscono un insieme vengono chiamati i suoi "elementi**".

Non necessariamente si deve trattare di oggetti concreti:
gli elementi di un insieme possono essere anche entità astratte, o persone.

A ben guardare, tuttavia,

**quanto abbiamo appena scritto non può pretendere di essere**
**una vera e propria "definizione" del termine "insieme".**
In effetti**, è corretto parlare di "definizione" soltanto quando un determinato concetto**
**viene descritto per mezzo di concetti più semplici, già precedentemente acquisiti**,
mentre noi non abbiamo fatto altro che citare dei *sinonimi* ("gruppo", "collezione", "totalità").

In realtà,

**il concetto di "insieme" è talmente semplice da NON poter essere definito**
**a partire da concetti ancora più semplici (è già "al massimo livello di semplicità" … ):**
**si dice che è un concetto "primitivo" della matematica.**

Quando inizieremo lo studio della Geometria, incontreremo altri concetti "primitivi":
punto, retta, piano, movimento rigido.

**Un insieme si dice:**
- **"finito", se i suoi elementi si possono contare esaurendo l'operazione del contare;**
- **"infinito", in caso contrario.**

Così scrivendo, abbiamo dato l'impressione che il discorso si possa "liquidare" molto semplicemente, ma … … a ben guardare, in tutta onestà, in questo modo la questione *NON* è posta nei termini corretti.

La riflessione, estremamente interessante, sugli insiemi finiti e infiniti,
verrà ripresa al termine del capitolo (pag. 90).

Esempi:

- ❑ *Gli allievi che alla data attuale risultano iscritti all'Università di Oxford possono essere pensati come gli elementi di un insieme. Questo insieme è, ovviamente,* ***finito****.*
- ❑ *Gli atomi di ferro della Tour Eiffel di Parigi costituiscono, nella loro totalità, un insieme. Questo insieme è formato da un numero gigantesco, ma pur sempre* ***finito****, di elementi.*
- ❑ *I multipli di 5 (ossia i numeri 5, 10, 15, 20, … ) costituiscono un insieme* ***infinito****.*
- ❑ *Una retta è un insieme* ***infinito*** *di punti.*

- **Gli insiemi si indicano di solito con le lettere maiuscole dell'alfabeto: A, B, C, ... , I, ...** ;
- **i loro elementi, di solito, con le lettere minuscole**: **a, b, c, ... , x, y, ...**

Tuttavia, non sono rare le *eccezioni* a questa consuetudine. Tanto per fare un esempio,
in Geometria i punti vengono indicati di norma con lettere maiuscole e le rette con minuscole;
quando dunque si ha a che fare con una retta r pensata come insieme dei suoi punti A, B, … , P, … ,
accade di avere l'insieme contrassegnato in minuscolo e l'elemento in maiuscolo.

**Per indicare che un oggetto a è elemento dell'insieme I si scrive: $a \in I$**
*(leggi: "a appartiene all'insieme I", oppure: "a è un elemento di I", oppure: "a è contenuto in I").*

*Esempio. Se indichiamo con C l'insieme delle città capitali di una nazione, potremo scrivere:*
*Londra* $\in C$; *Pisa* $\notin C$ *(*$\notin$*, negazione del simbolo di appartenenza, si legge "non appartiene a").*

Non necessariamente gli elementi di un insieme devono essere "della medesima specie".
E' in effetti del tutto lecito considerare insiemi bizzarri formati da oggetti, concreti od astratti, dei tipi più svariati (che so … l'insieme J avente per elementi: la Luna, il presidente degli Stati Uniti e il numero 1,25).

Comunque, in Matematica hanno particolare rilievo:

- gli insiemi i cui elementi sono *punti geometrici* (questi insiemi sono anche detti "**figure**")
- e quelli i cui elementi sono *numeri* (gli "**insiemi numerici**", di cui si occupa il paragrafo successivo).

## 2. INSIEMI NUMERICI RILEVANTI

**$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri "naturali" = $\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$**

Quindi i numeri "**naturali**" sono gli **interi assoluti** ( = *senza segno* ).

**$\mathbb{N}^*$ = insieme dei numeri naturali privato dello zero = $\{1, 2, 3, 4, ...\}$**

In generale, l'asterisco accanto al simbolo di un insieme numerico è usato per escludere lo "0" dall'insieme stesso.

**$\mathbb{Z}$ = insieme degli interi relativi = $\{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$**

**$\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri razionali**

Ricordiamo che
**un numero si dice "razionale" se è esprimibile sotto forma di "frazione", intesa come "quoziente fra due interi, il secondo dei quali (è ovvio!) $\neq 0$ ".**

Dicendo "numeri razionali", senza specificare altro, si intende "razionali *relativi*".
Se si desidera indicare l'insieme dei razionali *assoluti* ( = senza segno ), al posto del simbolo $\mathbb{Q}$ si impiega il simbolo $\mathbb{Q}_a$ .

Il software da noi utilizzato per scrivere le formule (MathType) usa una **grafica** un po' barocca per indicare alcuni insiemi numerici.
Per gli insiemi dei numeri razionali e reali possiamo semplicemente scrivere una Q e una R poi aggiungere un trattino:
$\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

I simboli $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ vengono dal tedesco:
*Zahlen* = numeri
*Quotient* = quoziente

**$\mathbb{R}$ = insieme dei numeri "reali", ossia di tutti i numeri, sia razionali che irrazionali**

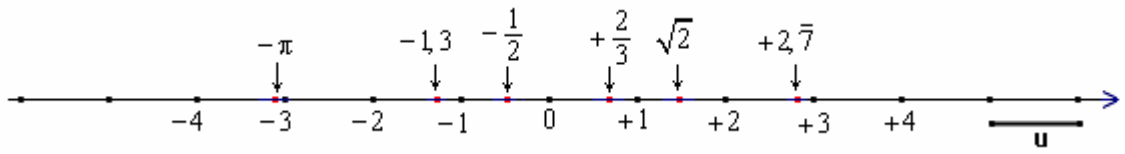



Quando si parla di "numeri reali", ci si riferisce di norma ai "reali *relativi*".
L'insieme dei reali *assoluti* ( = senza segno) può essere indicato con $\mathbb{R}_a$ .

- Sono **razionali** tutti **i decimali finiti** e tutti **i decimali periodici**.
- Invece gli **illimitati *non* periodici** sono **irrazionali**.
  Si dimostra che sono irrazionali il numero $\sqrt{2}$ e, più in generale, le radici quadrate degli interi che non sono "quadrati perfetti":
  $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, ...$
  Anche il numero $\pi$ è irrazionale
  (come dimostrò per primo il francese Lambert nel XVIII secolo).
  **L'insieme dei numeri irrazionali** si indica prevalentemente con un simbolo che utilizza l'operazione di "differenza insiemistica": $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

L'insieme $\mathbb{R}$ è "rappresentabile sopra una retta", nel senso che, presa una "number line"
( = retta dotata di origine, orientamento e unità di misura ),
- ♪ ad ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto (detto "*immagine*" di quel numero)
- ♫ e viceversa, ad ogni punto corrisponde uno e un solo numero reale (detto "*ascissa*" di quel punto).

**In ogni intervallino, anche piccolissimo, della "number line", troviamo sempre infiniti punti con ascissa razionale ed infiniti altri punti con ascissa irrazionale ⇨.**




**P = insieme dei numeri primi = $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...\}$** . Alcuni scrivono $\mathbb{P}$.

**E = insieme dei numeri pari = $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}$** . In Inglese: pari = *Even*

La comunità matematica è concorde nel classificare anche lo "zero" (0) fra i numeri PARI.
Si intendono come "pari" quei numeri *naturali* che si possono scrivere sotto la forma $2 \cdot n$ , essendo *n* ancora un numero *naturale*.
Poiché 0 evidentemente gode di questa proprietà ( $0 = 2 \cdot 0$ ), ecco che 0 è pari.
Vedi anche pagina 3 a questo proposito.

**O = insieme dei numeri dispari = $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...\}$** . In Inglese: dispari = *Odd*

Le categorie di "parità" e "disparità" si estendono, in senso più "largo", anche agli interi *relativi*:
fra questi, son detti *pari* quelli che si possono scrivere nella forma $2 \cdot x$ , essendo *x* ancora un intero relativo.
Sono perciò classificati pari i numeri $0, +2, -2, +4, -4, +6, -6, ...$ e dispari gli altri interi relativi.

## 3. DEFINIZIONE PER ELENCAZIONE O PER PROPRIETA' CARATTERISTICA

Se si vuole definire un insieme, in modo che tutti sappiano esattamente e senza possibilità di equivoco da quali elementi questo insieme è costituito, si può scegliere uno dei seguenti due modi:

I. **si elencano tutti gli elementi** dell'insieme
(se l'insieme è infinito, si useranno i puntini di sospensione, come negli esempi riportati al paragrafo precedente riguardanti gli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, P, E, O)

II. oppure **si enuncia una proprietà che caratterizzi gli elementi dell'insieme**, cioè una proprietà in base alla quale si possa dire con certezza se un dato oggetto appartiene o no all'insieme. Es.:
- A = { 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91 } oppure: A = { multipli di 13 minori di 100 }
- E = { 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... } oppure: E = { numeri pari }

**ESERCIZI** (risposte a pag. 97)

1) I seguenti insiemi sono definiti mediante una proprietà caratteristica dei loro elementi. Definiscili invece **elencando** gli elementi stessi.
A = insieme dei numeri primi compresi fra 30 e 60
B = insieme dei multipli di 6
C = insieme delle vocali contenute nella parola "albero"
D = insieme dei numeri naturali minori di 100 tali che la somma delle loro cifre dia 7

2) I seguenti insiemi sono definiti semplicemente elencando i loro elementi. Definiscili invece mediante una **proprietà caratteristica** dei loro elementi.

$E = \{10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60,\ 70,\ 80,\ 90,\ 100\}$ $\quad F = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ ...\right\}$

$G = \{1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ ...\}$ $\quad H = \{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ ...\}$

$I = \{123,\ 234,\ 345,\ 456,\ 567,\ 678,\ 789\}$ $\quad L = \{11,\ 33,\ 55,\ 77,\ 99,\ 121,\ 143,\ ...\}$

3) Una scrittura come la seguente: $A = \{2n+1,\ n \in \mathbb{N}\}$ si legge:
"A è l'insieme dei numeri della forma $2n+1$, con $n$ che appartiene all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali".
Per elencare gli elementi dell'insieme A dobbiamo far variare $n$ nell'insieme $\mathbb{N}$, facendogli assumere dunque i valori 0, 1, 2, 3, … , e per ogni valore dato a $n$ calcolare il valore dell'espressioncina $2n+1$.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2n+1$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | … |

In definitiva, avremo:
$A = \{2n+1,\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$

♥ In matematica, vengono sovente utilizzati i simboli:
- $\mathbf{2n+1}$ per indicare il generico numero **dispari**,
- $\mathbf{2n}$ per indicare il generico numero **pari.**

Qui si sottintende che sia $n \in \mathbb{N}$; per indicare il generico numero **dispari**, a volte si usa $\mathbf{2n-1}$, con $n \in \mathbb{N}^*$
Fra l'altro, i numeri *interi* si associano preferibilmente a lettere *centrali* dell'alfabeto, come *n, m, i, k* ...

Altri esempi: $B = \{k^2,\ k \in \mathbb{N}\} = \{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, ...\}$ $\quad C = \left\{\frac{x+1}{x},\ x \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5}, ...\right\}$

**Completa tu**: $D = \{n^3,\ n \in \mathbb{N}^*\} = ...$ $\quad E = \{3n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = ...$ $\quad F = \{\sqrt{x},\ x \in \mathbb{N}\} = ...$

4) Nel quesito precedente si chiedeva di passare da una definizione in simboli ad una per elencazione. **Fai ora il viceversa**, per gli insiemi che seguono (l'insieme in cui varia la lettera dovrà essere $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}^*$):

$G = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ ...\}$ $\quad H = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ ...\right\}$ $\quad I = \left\{0,\ \frac{4}{5},\ \frac{24}{25},\ \frac{124}{125},\ \frac{624}{625},\ ...\right\}$

5) Qual è ( = che tipo di figura geometrica costituisce) l'insieme dei punti del piano la cui distanza da un punto K fissato sul piano è: a) uguale a 5 cm? b) minore o uguale di 5 cm?

6) Qual è l'insieme dei punti dello SPAZIO la cui distanza da un punto fissato K è:
a) uguale a 5 cm? b) minore o uguale di 5 cm?

7) Qual è l'insieme dei punti del piano la cui distanza da un punto K fissato sul piano è non superiore a 10 cm e non inferiore a 6 cm?

8) Qual è l'insieme dei punti dello spazio che distano 7 cm da una retta fissata? E da un piano fissato?

9) Per qual motivo "l'insieme delle diciottenni carine nate a Venezia" non è accettabile, come definizione?

## 4. INSIEMI UNITARI, INSIEME VUOTO

**Si dice "insieme unitario" ogni insieme costituito da un solo elemento.**
Ad esempio, l'insieme dei punti comuni a due rette che si tagliano è un insieme unitario.

**Si dice "insieme vuoto" un insieme privo di elementi.**
E' vuoto l'insieme delle commesse di un negozio, se il proprietario le ha licenziate tutte per la crisi.
L'insieme dei numeri comuni all'insieme dei numeri pari e all'insieme dei numeri dispari è vuoto.

**L'insieme vuoto si indica con uno qualsiasi dei seguenti due simboli:** $\varnothing$ , $\{\ \}$. Il primo è più usato.

*Di solito, anziché parlare di "UN insieme vuoto", si dice "L' insieme vuoto". Secondo te, perché?* ⇨

**ESERCIZI**. Dire quali fra i seguenti insiemi sono unitari, quali vuoti, quali né unitari né vuoti.

1) A = insieme dei punti comuni a due circonferenze complanari e concentriche
2) B = insieme dei punti comuni a una circonferenza e a una sua corda
3) C = insieme dei punti di un segmento, che lo dividono in due parti uguali
4) D = insieme dei punti di un segmento, che lo dividono in due parti, delle quali una è doppia dell'altra
5) E = insieme dei numeri primi pari
6) F = insieme dei punti comuni a due rette parallele

## 5. SOTTOINSIEMI

**Si dice che un insieme B è sottoinsieme di un insieme A se** B è "una parte" di A,
nel senso che **ogni elemento di B appartiene anche ad A.**

In tal caso si scrive: $\mathbf{B \subseteq A}$ che si legge: "**B è un sottoinsieme di A**", oppure: "**B è incluso in A**".

♥ "*Incluso*" si dice per un *insieme* rispetto ad *un altro*; il simbolo è $\subseteq$ (è sottoinsieme di, è incluso in).
"C*ontenuto*" si dice per un *elemento* rispetto a un *insieme*; il simbolo è $\in$ (appartiene a, è contenuto in).

Esempi:

$A = \{7, 11, 19, 21, 30\}$
$B = \{11, 21, 30\}$
$B \subseteq A$

I = {cittadini italiani}
S = {cittadini italiani il cui cognome inizia con "S"}
$S \subseteq I$

F = {multipli di 10}
G = {multipli di 5}
$F \subseteq G$

Molto spesso un **sottoinsieme** si definisce dicendo che esso è costituito da
**quegli elementi dell'insieme di partenza, che soddisfano a una certa ulteriore proprietà**.
Due esempi:

P = insieme dei pesci
F = insieme dei pesci di fiume
$F \subseteq P$

A = insieme dei numeri pari
B = insieme dei numeri pari, che sono quadrati perfetti
$B \subseteq A$

**Fra i sottoinsiemi di un qualsivoglia insieme A ci sono sempre l'insieme vuoto, e A stesso:**

$\underset{\text{per ogni}}{\forall}$ A, $\varnothing \subseteq A$; $A \subseteq A$

Si dice "**sottoinsieme proprio**" di un insieme A, ogni sottoinsieme di A, che non coincida con A stesso.

Se si desidera dare un forte risalto al fatto che I è un sottoinsieme di J che "non riempie tutto J", cioè non viene a coincidere con J, si può usare un simbolo specifico, detto di "inclusione stretta": $\subset$
Si scrive allora $I \subset J$
("I è incluso strettamente in J").

## 6. INSIEME DELLE PARTI

**L'insieme, i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A, viene detto "insieme delle parti" di A, e indicato col simbolo P(A)** (leggi: "P di A", oppure "insieme delle parti di A").

Ribadisco: **si tratta di un insieme i cui elementi sono a loro volta degli insiemi!**

Ad esempio, se $A = \{a,b,c\}$ , allora $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

**ESERCIZI**

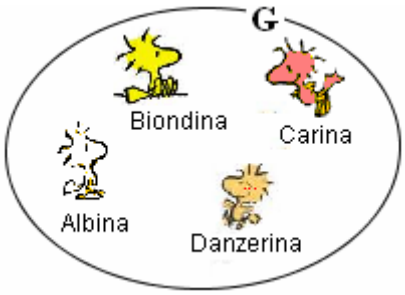
7) Di quanti elementi è costituito l'insieme delle parti di A, se A contiene 4 elementi?
8) In generale, detto n il numero di elementi di un insieme A, quanti elementi conterrà l'insieme $P(A)$?
9) La formula precedentemente trovata è valida anche per $P(\varnothing)$?

Le RISPOSTE agli esercizi di questa pagina sono a pag. 97.

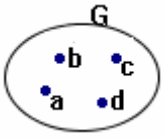
## 7. DIAGRAMMI DI VENN

**Per rappresentare gli insiemi è spesso conveniente far uso di particolari, semplici raffigurazioni chiamate "diagrammi di Venn".**

Prova ad immaginare un gruppo di galline in un recinto. Ecco una rappresentazione di questo insieme G di galline:

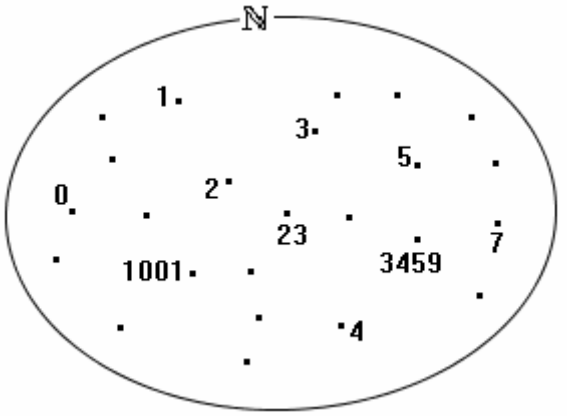



Ed ecco la rappresentazione dello stesso insieme G se il recinto venisse osservato da una mongolfiera sospesa a grande altezza.




*Se ci interessa solo il fatto che le galline sono quattro,*
*che hanno determinati nomi,*
*e che le vogliamo pensare come elementi di uno stesso "insieme",*
*la rappresentazione "dalla mongolfiera",*
*che riduce le galline ad altrettanti punti all'interno del recinto,*
*è la più comoda ed essenziale.*
*Questa rappresentazione costituisce appunto un "diagramma di Venn".*

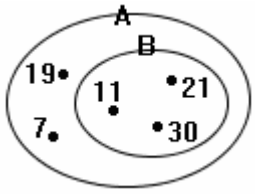
Ed ecco un possibile diagramma di Venn per l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali:



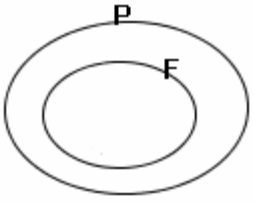

**Se è richiesto di rappresentare, in uno stesso diagramma di Venn, un insieme ed un suo sottoinsieme, il sottoinsieme andrà rappresentato come un recinto *interno* al recinto che rappresenta l'insieme principale.**

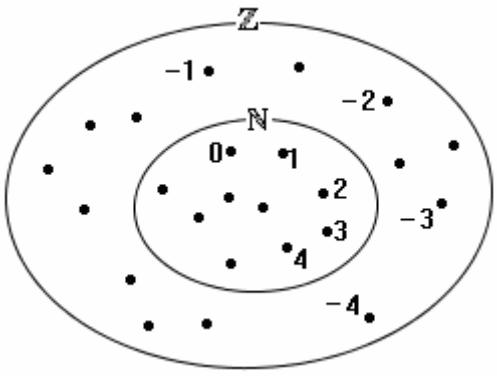
$\mathbb{N}$ = { numeri naturali }
$\mathbb{Z}$ = { interi relativi }
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
(dato che 1 = +1, 2 = +2 ecc.)

A = {7, 11, 19, 21, 30}
B = {11, 21, 30}
$B \subseteq A$




P = insieme dei pesci
F = insieme dei pesci di fiume
$F \subseteq P$



## 8. INTERSEZIONE

**Dati due insiemi A e B, si dice "intersezione" fra A e B,**
e si indica con il simbolo $\mathbf{A \cap B}$ (leggi: " A intersezione B "),
**l'insieme i cui elementi sono gli elementi comuni ai due insiemi A e B,**
**cioè gli elementi che appartengono contemporaneamente sia ad A che a B.**

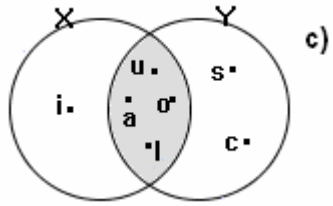
Esempi:

a) Se $A = \{10, 2, 7, 4\}$ e $B = \{8, 7, 2, 11, 22\}$, allora $A \cap B = \{2, 7\}$ (*oppure* $\{7, 2\}$ : *è la stessa cosa*)

b) $A = \{\textit{naturali minori di } 10\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$B = \{\textit{numeri pari}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...\}$
$A \cap B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

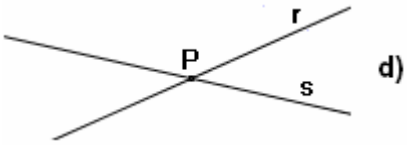
♥ L'*ordine* in cui vengono pensati o elencati gli elementi di un insieme è **irrilevante**!

c) $X = \{\textit{lettere della parola "aiuola"}\} = \{a, i, u, o, l\}$
$Y = \{\textit{lettere della parola "scuola"}\} = \{s, c, u, o, l, a\}$
$X \cap Y = \{a, u, o, l\}$ (vedi figura)




d) Consideriamo una retta r. Essa è un insieme di punti.
Consideriamo un'altra retta s, che tagli la retta r.
Anche la retta s, naturalmente, è un insieme di punti.
L'intersezione fra questi due insiemi
(che abbiamo indicato, eccezionalmente, con lettere minuscole
perché la consuetudine è di indicare le rette con lettere minuscole), è
l'insieme unitario il cui elemento è il punto in cui tali rette si tagliano
(si usa infatti dire "*il punto di intersezione*" fra le due rette).

$$r \cap s = \{P\}$$




♥ In questa pagina ci sono parecchie notazioni "atipiche": ad esempio, scrivendo $P \in r$, eccezionalmente l'*elemento* è indicato in maiuscolo e l'*insieme* in minuscolo; in $\alpha \cap \beta$ due insiemi sono indicati con lettera greca …

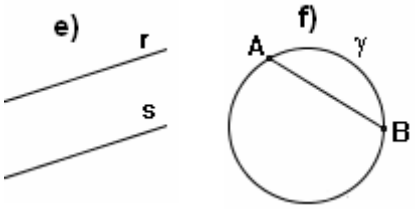
e) Se due rette r, s sono *parallele*, la loro intersezione è l'*insieme vuoto*:

$$r \cap s = \varnothing$$

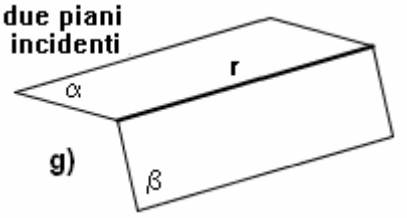
… Beh, In realtà due rette sono considerate parallele in DUE casi:
se giacciono sullo stesso piano e non hanno alcun punto in comune,
*oppure* se coincidono. Dunque avremmo dovuto in realtà scrivere,
con maggior precisione: "Se due rette r ed s sono parallele, la loro
intersezione è l'insieme vuoto, *escluso il caso della coincidenza*".

f) L'intersezione fra una circonferenza (pensata come insieme di punti)
e una sua corda (pensata anch'essa come insieme di punti),
è un insieme contenente due soli elementi: i due estremi della corda.

$$\gamma \cap \overline{AB} = \{A, B\}$$

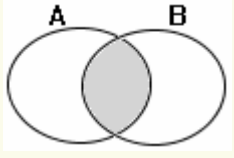



g) L'intersezione fra due *piani incidenti* ( = che si tagliano)
è una *retta* (quindi un insieme di infiniti punti): $\alpha \cap \beta = r$

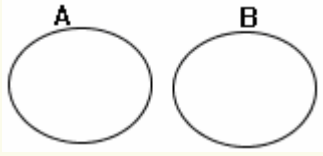



h) L'intersezione fra l'insieme degli abitanti di Milano
e l'insieme degli abitanti dell'Italia è il primo
fra i due insiemi considerati ( = l'insieme degli abitanti di Milano).
**In generale, se $\mathbf{A \subseteq B}$, allora è sempre $\mathbf{A \cap B = A}$.**

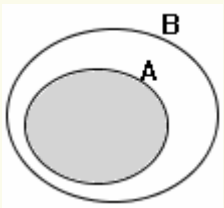
**RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELL'INTERSEZIONE fra due insiemi A, B**



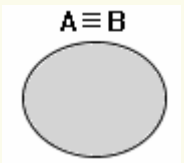

La situazione più generale. L'**intersezione** fra A e B è la **parte di territorio interna ad entrambi i recinti** A, B




A, B non hanno elementi comuni (si dice che sono "**disgiunti**"). L'**intersezione** di A e B è **vuota**: $A \cap B = \varnothing$




**Uno dei due insiemi è sottoinsieme dell'altro: l'intersezione è l'insieme più piccolo**
$A \subseteq B \rightarrow A \cap B = A$




**I due insiemi coincidono: anche l'intersezione coincide con ciascuno di essi**
$A \equiv B \rightarrow A \cap B = A = B$
"≡" si legge : "coincide con"

## 9. UNIONE

**Dati due insiemi A e B, si dice "unione" fra A e B ,**
e si indica con il simbolo $\mathbf{A \cup B}$ (leggi: "A unione B"),
**l'insieme i cui elementi sono tutti gli elementi che appartengono o ad A, o a B,**
**dove la particella "o" deve essere intesa in senso "inclusivo" (come il VEL della lingua latina)**
**e *non* esclusivo, come sarebbe invece il latino AUT; cioè, è inclusa**
**anche la possibilità che l'elemento appartenga sia ad A che a B contemporaneamente.**

Insomma, un elemento appartiene ad $A \cup B$ qualora appartenga ad ALMENO UNO dei due insiemi A, B;
in altre parole, appartengono ad $A \cup B$ quegli elementi che appartengono:
1) ad A ma non a B; 2) a B ma non ad A; 3) sia ad A che a B.

Schematicamente:

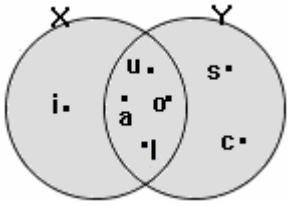
$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$ $A \cup B$ è l'insieme degli oggetti $x$ tali che $x$ appartiene ad A, VEL $x$ appartiene a B

$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$ $A \cap B$ è l'insieme degli oggetti $x$ tali che $x$ appartiene ad A, ET $x$ appartiene a B

♥ Nota bene la **somiglianza fra i simboli** $\cup$ (unione), $\vee$ ("vel" logico); $\cap$ (intersezione), $\wedge$ ("et" logico)

Esempi:

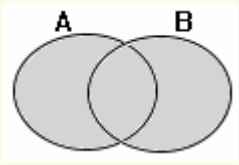
a) Se
$A = \{\text{numeri naturali minori di } 10\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$B = \{\text{numeri pari}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...\}$
allora $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, ...\}$



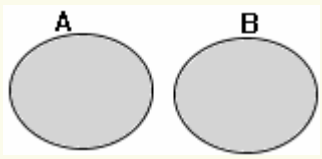

b) Se $X = \{a, i, u, o, l\}$, $Y = \{s, c, u, o, l, a\}$,
allora $X \cup Y = \{a, i, u, o, l, s, c\}$ (*vedi figura*)

c) Se $A = \{\text{abitanti di Milano}\}$ e $B = \{\text{abitanti dell'Italia}\}$, allora $A \cup B = \{\text{abitanti dell'Italia}\} = B$
**In generale, se $\mathbf{A \subseteq B}$, allora $\mathbf{A \cup B = B}$.**

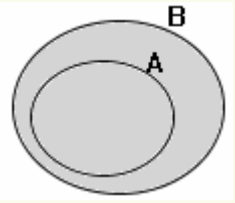
**RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELL'UNIONE fra due insiemi A, B**



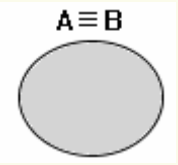

La situazione più generale. L'**unione** fra A e B è il **territorio interno ad almeno uno tra i recinti** A, B




A, B non hanno elementi comuni (si dice che A, B sono "**disgiunti**"). L'**unione** di A e B è **tutto il territorio ombreggiato**



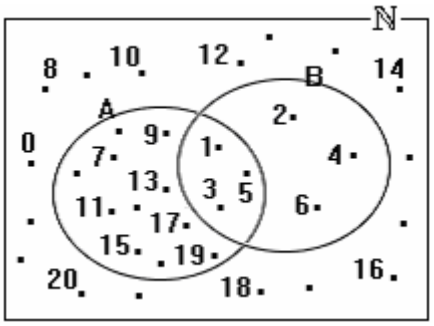

**Uno dei due insiemi è sottoinsieme dell'altro: l'unione è l'insieme più grande**
*Se* $A \subseteq B$, *allora* $A \cup B = B$




**I due insiemi coincidono: anche l'unione coincide con ciascuno di essi**

### ESERCIZIO SVOLTO

*Rappresenta, in uno stesso diagramma di Venn, gli insiemi seguenti:*
$\mathbb{N} = \{\textit{numeri naturali}\}$; $A = \{\textit{numeri dispari}\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
*Definisci poi, per elencazione, gli insiemi* $A \cap B$, $A \cup B$.




Tanto A quanto B sono sottoinsiemi di $\mathbb{N}$;
il recinto $\mathbb{N}$ contiene quindi al suo interno
sia il recinto A che il recinto B.
**In pratica, l'insieme $\mathbb{N}$ è il "grande insieme"**
**in cui gli altri due sono "immersi":**
**in casi come questo, si parla di "insieme universo"**
**o "insieme ambiente"** (se ne occupa in particolare il paragrafo 12).
L'insieme che fa da "insieme universo" in un certo contesto,
viene di solito rappresentato con un rettangolo anziché un ovale.

Risposte: $A \cap B = \{1, 3, 5\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, ...\}$

## 10. ESERCIZI SU: SOTTOINSIEMI, INTERSEZIONE, UNIONE

(risposte alle pagg. 97-98)

1) $A = \{numeri\ pari\} = ...$

$B = \{numeri\ primi\} = ...$

$A \cap B = ...$

$A \cup B = ...$

Spazio per il diagramma di Venn:



2) $I = \{numeri\ naturali\ minori\ di\ 12\} = ...$

$L = \{numeri\ naturali\ maggiori\ di\ 8\} = ...$

$I \cap L = ...$

$I \cup L = ...$

Spazio per il diagramma di Venn:



3) $A = \{rettangoli\}$; $B = \{rombi\}$

NOTA
- Si dice "**rettangolo**" un quadrilatero coi **quattro angoli retti**;
- si dice "**rombo**" un quadrilatero coi **quattro lati uguali** fra loro.

$A \cap B = ...$

$A \cup B = ...$

4) $L = \{numeri\ naturali\ minori\ di\ 30\} = ...$

$P = \{numeri\ primi\} = ...$

$Q = \{numeri\ naturali\ terminanti\ con\ la\ cifra\ 3\} = ...$

$L \cap P \cap Q = ...$

5) Rappresenta graficamente, *in uno stesso diagramma di Venn*, i seguenti insiemi:

$T = \{triangoli\}$

$A = \{triangoli\ acutangoli\}$

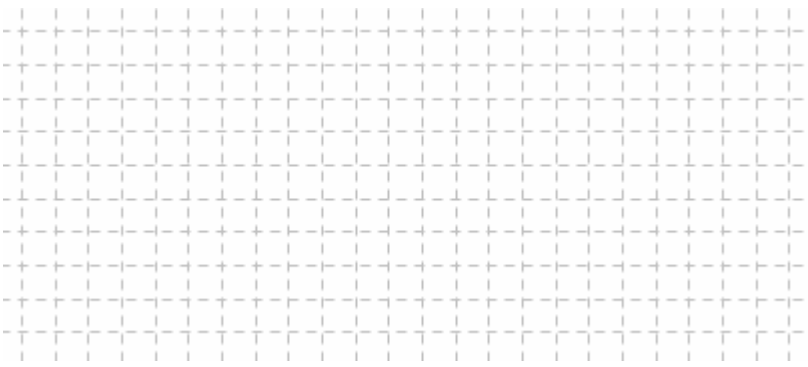
$O = \{triangoli\ ottusangoli\}$

$R = \{triangoli\ rettangoli\}$

$I = \{triangoli\ isosceli\}$

$E = \{triangoli\ equilateri\}$

NOTA Un triangolo si dice:
- **acutangolo** se ha **tutti e tre gli angoli acuti**;
- **ottusangolo** se ha **un angolo ottuso**;
- **rettangolo** se ha **un angolo retto;**
- **isoscele se ha (almeno) due lati uguali fra loro;**
- **equilatero se ha tutti e tre i lati uguali fra loro (caso particolare, quindi, di triangolo isoscele).**



6) Sempre con riferimento agli insiemi dell'esercizio precedente:

$A \cap O = ...$ $A \cup O = ...$ $R \cap I = ...$ $R \cap E = ...$

$I \cap E = ...$ $I \cup E = ...$ $A \cap E = ...$ $A \cup E = ...$

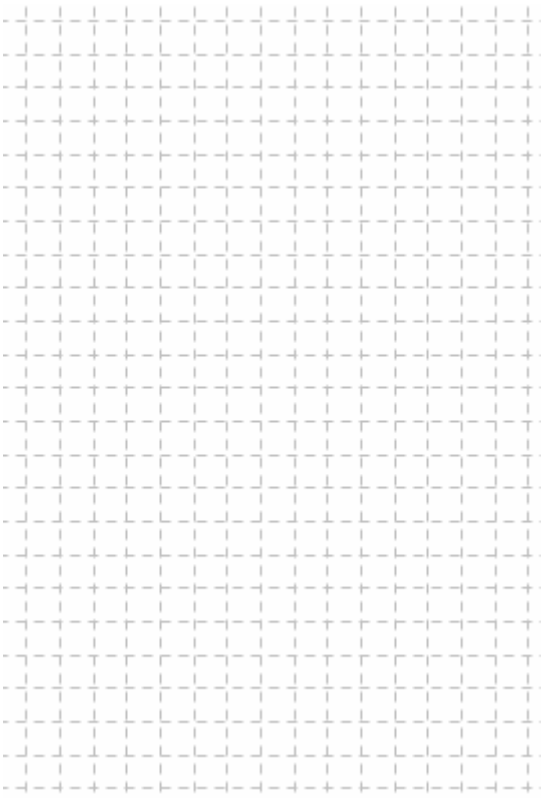
7) Rappresenta graficamente, *in uno stesso diagramma di Venn*, i seguenti insiemi:

*a*) $\mathbb{N} = \{numeri\ naturali\} = \{0,1,2,3,4,5,...\}$
$A = \{numeri\ pari\}$
$B = \{numeri\ dispari\}$
$C = \{multipli\ di\ 5\}$

*b*) $A = \{numeri\ naturali\ da\ 0\ a\ 12\}$
$B = \{numeri\ pari\ dell'insieme\ A\}$
$C = \{numeri\ dispari\ dell'insieme\ A\}$
$D = \{multipli\ di\ 3\ dell'insieme\ A\}$
$E = \{multipli\ di\ 4\ dell'insieme\ A\}$

*c*) $\mathbb{N} = \{numeri\ naturali\}$ $A = \{numeri\ pari\}$
$B = \{numeri\ dispari\}$ $C = \{multipli\ di\ 5\}$
$D = \{multipli\ di\ 10\}$ $E = \{multipli\ di\ 15\}$

*d*) $A = \{multipli\ di\ 3\}$
$B = \{multipli\ di\ 4\}$
$C = \{multipli\ di\ 6\}$
$D = \{multipli\ di\ 12\}$



8) Tenendo presente la differenza fra cerchio e circonferenza
*(il cerchio è una superficie, la circonferenza è una linea, che fa da "contorno" al cerchio)*
e quella (analoga) fra sfera e superficie sferica,
stabilisci qual è l'intersezione fra le seguenti coppie di insiemi:

*a*) due circonferenze complanari e concentriche, di raggio diverso
*b*) due cerchi complanari e concentrici, di raggio diverso
*c*) due superfici sferiche concentriche di raggio diverso
*d*) due sfere concentriche di raggio diverso
*e*) una sfera e un piano passante per il suo centro
*f*) una superficie sferica e un piano passante per il suo centro
*g*) una sfera e una retta passante per il suo centro
*h*) una superficie sferica e una retta passante per il suo centro

9) Indichiamo con A un insieme qualsiasi. Allora $A \cap \varnothing = ...$ $A \cup \varnothing = ...$

10) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, allora $A \cap B \cap C = ...$ $A \cup B \cup C = ...$

11) Su di un piano $\pi$ è dato un punto P.
   a) Qual è l'unione di tutte le rette del piano passanti per P?
   (NOTA: osserviamo che si tratta dell'unione di INFINITI insiemi)
   b) Qual è l'intersezione di tali infinite rette?

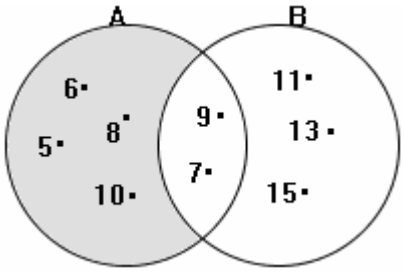
12) In un collegio femminile, le attività sportive pomeridiane proposte sono pallavolo e nuoto.
Ogni ragazza deve praticare almeno una di queste attività.
   a) Se l'80% delle ragazze fa pallavolo, il 50% nuoto, e 75 ragazze entrambi gli sport, quante sono in totale le ragazze iscritte al collegio?
   b) Nel caso non fosse stata scritta la frase
   "Ogni ragazza deve praticare almeno una di queste attività",
   quale sarebbe stata la risposta al problema?

## 11. DIFFERENZA DI DUE INSIEMI

**Dati due insiemi A e B, si dice "differenza" fra A e B**
**(presi in quest'ordine**: prima A e poi B), e si indica con **A – B**,
**l'insieme i cui elementi sono quegli elementi di A, che NON appartengono anche a B.**

Esempi:

a) Se
$A = \{5,6,7,8,9,10\}$
$B = \{7,9,11,13,15\}$
allora
$A - B = \{5,6,8,10\}$

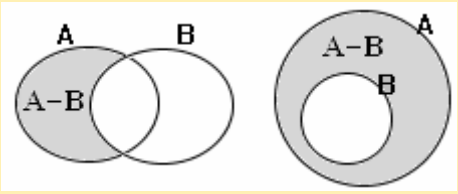



b) Se
$A = \{numeri\ pari\}$,
$B = \{numeri\ dispari\}$
allora $A - B = \{numeri\ pari\}$.
In generale,
se $A \cap B = \varnothing$, allora $A - B = A$

c) Se con A si indica un insieme qualsiasi, è:
$A - \varnothing = A$;
$A - A = \varnothing$;
$\varnothing - A = \varnothing$.

Nei diagrammi di Venn qui sotto riportati, è ombreggiato l'insieme $A - B$.

In pratica, **A – B si ottiene partendo da A e togliendo da A gli elementi (se ce ne sono) che appartengono anche a B**




## 12. INSIEME "UNIVERSO" (O "INSIEME AMBIENTE"). UN'ALTRA OPERAZIONE INSIEMISTICA: LA "COMPLEMENTAZIONE"

**Molto sovente capita al matematico di dover lavorare con insiemi che sono tutti inclusi in uno stesso "grande" insieme U.**

Ad esempio, se si fa della geometria piana e si è interessati allo studio delle figure geometriche "viste" come insiemi di punti, è chiaro che si continuerà sempre a lavorare all'interno di un certo piano $\pi$ e "non si uscirà mai da tale piano", nel senso che gli insiemi con cui si tratterà saranno sempre e soltanto dei sottoinsiemi di $\pi$.

Ancora: studiando i numeri naturali, ci si imbatte in insiemi (l'insieme dei numeri pari, quello dei numeri primi, quello dei multipli di 7, ecc. ecc.), che sono tutti sottoinsiemi del "grande" insieme $\mathbb{N}$.

**Si dice allora in questi casi che si lavora all'interno di un "insieme universo".**
Cioè, l'insieme "vasto" che contiene tutti gli altri insiemi di cui momentaneamente ci si vuole occupare, viene detto "**insieme universo**" (o "**insieme ambiente**").

**Detto U un insieme universo, e A un suo sottoinsieme, l'insieme differenza U – A viene anche detto "insieme complementare di A rispetto a U" e per indicarlo si può usare una soprallineatura:**
$\mathbf{U - A = \overline{A}}$ = complementare di **A** (rispetto all'insieme **U**, pensato come "insieme universo").

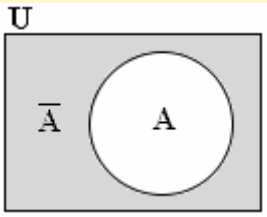
♥ **Si assomigliano (anzi, sono identici!) i due simboli di soprallineatura:**
♪ quello che indica, in INSIEMISTICA, **COMPLEMENTAZIONE**
♫ e quello che indica, in LOGICA, **NEGAZIONE**.

In effetti il COMPLEMENTARE di un insieme A è l'insieme formato da quegli elementi dell'insieme universo che NON appartengono ad A.

| INSIEMI | LOGICA |
|---|---|
| $\cap$ | $\wedge$ |
| $\cup$ | $\vee$ |
| $\overline{\ }$ | $\overline{\ }$ |

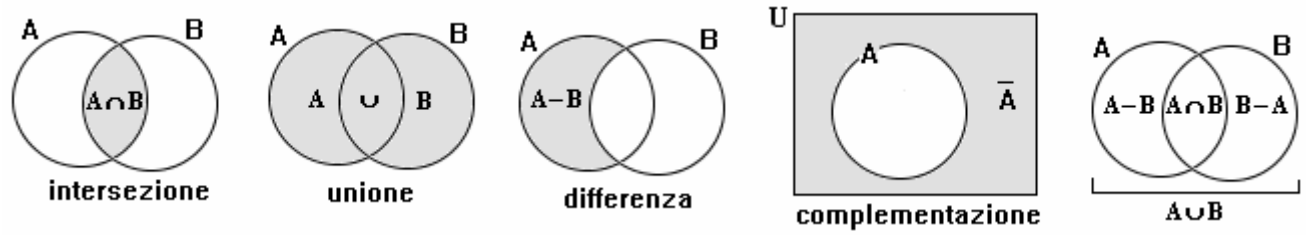
Preferibilmente, l'insieme che fa da **insieme universo** in un determinato contesto viene rappresentato con un **rettangolo** anziché con un ovale.

Nel diagramma di Venn qui a fianco, compaiono: un insieme A, "immerso" nell' **insieme universo** U, e il **complementare** di A, ombreggiato.




**ESERCIZI** (risposte a pag. 99)
1) Qual è il complementare dell'insieme dei numeri dispari, se come insieme ambiente si assume $\mathbb{N}$?
2) Qual è il complementare dell'insieme dei numeri dispari, se come insieme ambiente si assume $\mathbb{N}^*$?
3) $\mathbb{N} - \{0\} = ?$

## 13. FIGURE RIASSUNTIVE




## 14. PROPRIETA' DELLE OPERAZIONI INSIEMISTICHE

E' possibile (anzi, è un ottimo e divertente esercizio) **dimostrarle tramite i diagrammi di Venn**.
Particolarmente importanti sono le seguenti.

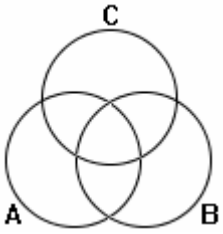
**La proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione**: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

*Tratteggia* A *con tratto ascendente*

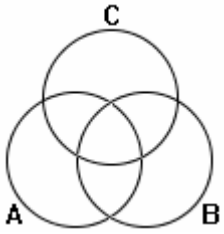
*poi* $B \cup C$ *con tratto discendente*

*Il territorio tratteggiato PER DUE VOLTE sarà* $A \cap (B \cup C)$

Evidenziamo l'insieme $A \cap (B \cup C)$




Evidenziamo l'insieme $(A \cap B) \cup (A \cap C)$




*Tratteggia* $A \cap B$ *con tratto ascendente*

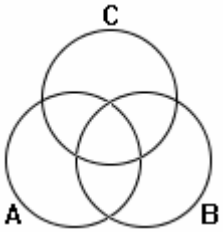
*poi* $A \cap C$ *con tratto discendente*

*Il territorio tratteggiato ALMENO UNA VOLTA sarà* $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

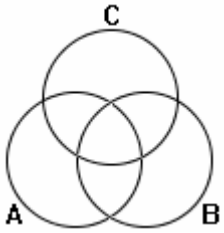
**La proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione**: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Vai coi tratteggi! →

↓



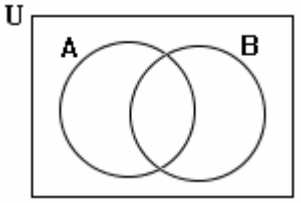

$A \cup (B \cap C)$



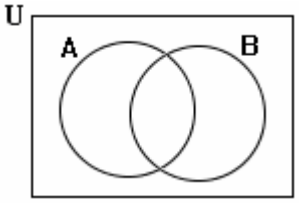

$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

**Le due LEGGI DI DE MORGAN**:

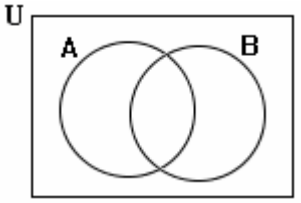
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



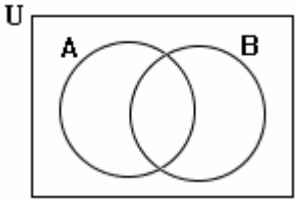

$\overline{A \cap B}$




$\overline{A} \cup \overline{B}$




$\overline{A \cup B}$




$\overline{A} \cap \overline{B}$

♥ **Le due leggi di De Morgan sono IMPORTANTISSIME e possono essere confrontate con LE ANALOGHE IN LOGICA:**

$$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q} \qquad \overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$$

Distinguiamo bene, però:
nelle leggi di De Morgan per la Logica,

- *non* si hanno *insiemi* ma PROPOSIZIONI e *non* si hanno operazioni *insiemistiche* bensì operazioni LOGICHE;
  e in particolare, il simbolo di soprallineatura *non* ha il significato di "complementazione" bensì di "negazione";
- inoltre il simbolo "=" *non* va letto "*uguale*", ma "LOGICAMENTE EQUIVALENTE".

Il legame fra operazioni insiemistiche e connettivi logici è approfondito a pag. 358.

# 15. INSIEMI INFINITI

Quando abbiamo introdotto il concetto di "numero intero", abbiamo scritto così:

**"si dice «numero intero» quell'entità astratta, quel «quid», che è comune a tutti gli insiemi, i quali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un insieme dato (PURCHE' QUESTO NON SIA INFINITO)".**

Ma **cosa vuol dire, per un insieme, "essere infinito"?**
Facciamo alcuni esempi e controesempi.

- *I multipli di 5 (ossia i numeri 5, 10, 15, 20, …) costituiscono un insieme **infinito**.*
- *Una retta è un insieme **infinito** di punti.*
- *Invece l'insieme degli abitanti della Cina **non** è infinito.*
  *Allo stesso modo, l'insieme i cui elementi sono gli atomi di ferro della Tour Eiffel di Parigi è formato da un numero colossale, ma pur sempre finito, di elementi.*

Come possiamo, dunque, spiegare in astratto cosa si intende per "insieme infinito" ?

Un modo "ingenuo" sarebbe di scrivere che un insieme si dice:
- "finito", se i suoi elementi si possono contare esaurendo l'operazione del contare;
- "infinito", in caso contrario.

Il guaio è che così, a ben guardare, entreremmo in un "**circolo vizioso**"!
Infatti, se per definire cosa si intenda per "numero intero"
io devo specificare che l'insieme di riferimento "non deve essere infinito",
allora **il concetto di "insieme infinito"** ***deve essere già stato acquisito,***
**nel momento in cui si va a definire il concetto di "numero intero":**
non è dunque logicamente corretto pretendere di dar la definizione di "insieme infinito"
utilizzando il procedimento del "contare", che invece presuppone
di avere già formulato ***in precedenza*** la definizione di "numero intero"!

Possiamo uscire, brillantemente, dalla situazione di stallo
ricorrendo al semplice ma potente strumento concettuale delle "corrispondenze biunivoche"
ANCHE per dare la definizione di "insieme infinito".

Già Galileo Galilei (1564-1642) si accorse di una curiosissima, sorprendente situazione ("**paradosso di Galileo**"):
- **l'insieme A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, …} dei naturali non nulli**
- **e l'insieme B = {2, 4, 6, 8, 10, …} dei naturali non nulli pari,**
  **il quale è soltanto una parte di A, è solo un "pezzo" di A e non "riempie" tutto A,**

**possono essere messi in corrispondenza biunivoca fra loro!**

Certo: basta far corrispondere ad ogni elemento di A il suo doppio,
e inversamente ad ogni elemento di B la sua metà, e il gioco è fatto!

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ... |
| | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ |
| B | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | ... |

Ad ogni "asola" dell'insieme A corrisponde uno e un solo "bottone" dell'insieme B, e viceversa:
quindi effettivamente la corrispondenza è **biunivoca**.

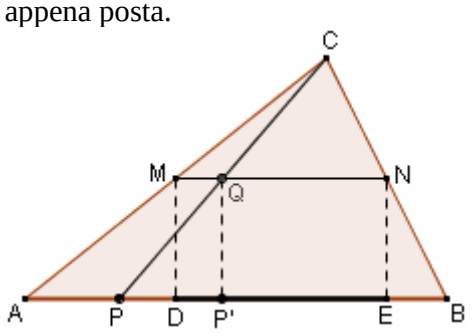
Il fatto che A e B si possano porre in corrispondenza biunivoca tra loro ci dice che in qualche modo (tante asole, altrettanti bottoni) gli elementi di B sono "*tanti quanti* gli elementi di A".
Eppure B è ottenibile prendendo A e *togliendogli* degli elementi! Insomma,
se partiamo da A e gli togliamo degli elementi (i numeri dispari), la "numerosità" di A non cambia!!!

**Ma è proprio questo fatto così bizzarro, l'esistenza di insiemi**
**i quali si possono mettere in corrispondenza biunivoca con un "pezzo" di sé stessi,**
**che può essere sfruttato per dare una "caratterizzazione" degli insiemi infiniti,**
**voglio dire: per stabilire un criterio che permetta di distinguere**
**gli insiemi infiniti dagli altri che infiniti non sono.**

**DEFINIZIONE**

**Un INSIEME si dice "INFINITO"**
**se è possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con una sua "parte propria",**
**cioè con un suo sottoinsieme, che non "riempie" tutto l'insieme di partenza.**

Facciamo un altro esempio.
Sia $\overline{AB}$ un segmento, pensato come l'insieme dei suoi punti.
Faremo vedere che $\overline{AB}$ è un insieme infinito, secondo la definizione appena posta.
Possiamo procedere, ad esempio, così:
costruiamo un triangolo ABC che abbia $\overline{AB}$ come lato.
Siano M, N i punti medi dei lati $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$,
e sia $\overline{DE}$ il segmento avente per estremi i punti ottenuti
calando da M e da N le perpendicolari su $\overline{AB}$.
Bene!
Faremo ora vedere che l'intero segmento $\overline{AB}$
si può mettere in corrispondenza biunivoca con il segmento $\overline{DE}$,
che costituisce soltanto un "pezzo" di $\overline{AB}$. Infatti:
sia P un qualsiasi punto di $\overline{AB}$;
congiungiamo P con C, e indichiamo con Q il punto in cui tale congiungente taglia $\overline{MN}$;
caliamo da Q la perpendicolare ad $\overline{AB}$ fino ad incontrare $\overline{AB}$ in P'.
OK, diremo che al punto P (che sta sul segmento $\overline{AB}$) corrisponde il punto P' appartenente a $\overline{DE}$; e che, viceversa, al punto P' corrisponde P (se si parte da P' si può ritornare a P alzando la perpendicolare ad $\overline{AB}$ fino a incontrare $\overline{MN}$ in Q, poi congiungendo C con Q e prolungando $\overline{CQ}$ fino a raggiungere $\overline{AB}$).




Sei convinto che in questo modo resta stabilita una corrispondenza biunivoca tra $\overline{AB}$, pensato come l'insieme dei suoi punti, e $\overline{DE}$, che è soltanto una "parte propria" di $\overline{AB}$?
Controlla bene che effettivamente è così, prendendo P in varie posizioni su $\overline{AB}$ e constatando che il procedimento grafico indicato porta sempre ad "abbinare" a P uno e un solo punto P', appartenente a $\overline{DE}$; prendi poi P' in varie posizioni su $\overline{DE}$ e verifica che il procedimento grafico inverso permette di risalire ad uno e un solo punto P, appartenente ad $\overline{AB}$.

Dunque il segmento $\overline{AB}$ è un insieme infinito,
perché, come abbiamo fatto vedere, può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.

Ricapitoliamo, e riordiniamo le idee.

- **Un insieme si dice "infinito" se è possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con una sua "parte propria", cioè con un suo sottoinsieme, che non "riempie" tutto l'insieme di partenza.**
- **Si dice "numero intero" quell'entità astratta, quel "quid", che è comune a tutti gli insiemi, i quali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un insieme dato (purché questo non sia infinito).**

## GRADI DI INFINITO SEMPRE PIU' ALTI

A questo punto è abbastanza istintivo essere indotti a pensare che, presi due qualsiasi insiemi infiniti, questi si possano *certamente* mettere in corrispondenza biunivoca fra loro, e quindi che, così come i due insiemi {Nord, Sud, Est, Ovest} e {Primavera, Estate, Autunno, Inverno}, per il fatto di poter essere posti in corrispondenza biunivoca tra loro, hanno in comune una certa entità astratta (quella che chiamiamo "il numero 4"), allo stesso modo anche due qualsiasi insiemi infiniti siano accomunati da una analoga entità astratta, il "numero infinito".

**Sorpresa!** Si può dimostrare che **non è così**.
Ad esempio, si può dimostrare che l'insieme i cui elementi sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …
NON PUO' IN ALCUN MODO essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme i cui elementi sono "tutti i numeri assoluti, sia interi che con la virgola (finiti, periodici, illimitati non periodici)".
Quest'ultimo insieme, l' insieme dei numeri reali assoluti ( = senza segno),
è dunque "*più numeroso*" dell'insieme {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …};
ha "*un grado di infinito maggiore*" rispetto ad esso.

Studi più approfonditi mostrerebbero che esistono insiemi i quali hanno, a loro volta, un "grado di infinito" ancora maggiore di quello dell'insieme dei numeri reali assoluti;
e anzi che

**dato un "grado di infinito", ne esiste sempre uno ancora maggiore,**
**dunque**
**"esistono infiniti gradi di infinito".**

Di queste affascinanti tematiche fu pioniere e acuto esploratore il danese **Georg Cantor** (1845-1918).
Se interessato, puoi trovare la appassionante trattazione dei "gradi di infinito" cliccando qui ⇨
oppure andando a leggere l'apposito capitolo del Volume 2 .

## 16. ESERCIZI VARI SUGLI INSIEMI (risposte a pag. 95)

1) Sia $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{3, 4, 5, 6\}$. Quali fra le seguenti affermazioni sono vere?
a) $2\in X\cap Y$ b) $2\in Y-X$ c) $4\subseteq X\cap Y$ d) $\{4\}\subseteq X\cap Y$ e) $\varnothing\in P(X)$ f) $\{2,3,4\}\supseteq\{4,3\}$
g) $\varnothing\subseteq X$ h) $\varnothing\subset X$ i) $\{1, 2, 3, 4\}\subseteq X$ l) $\{1, 2, 3, 4\}\subset X$ m) $X\subseteq X$ n) $X\subset X$

2) Quando definiamo un insieme, è essenziale che la nostra definizione sia chiara ed univoca, in modo che non ci possano essere ambiguità di interpretazione … in modo, insomma, che di fronte a un elemento, tutti possano essere concordi nello stabilire se appartiene o no a quell'insieme.
Ciò premesso, quali fra le seguenti sono definizioni corrette?
A) L'insieme dei grandi fiumi europei B) L'insieme degli studenti pigri delle scuole superiori di Roma
C) L'insieme delle persone di cittadinanza italiana D) L'insieme delle persone che pesano più di 70 kg

3) Rappresenta *in un unico* diagramma di Venn l'insieme A dei multipli di 6 e l'insieme B dei multipli di 8, all'interno dell'*insieme ambiente* $\mathbb{N}^*$.
Riconosci poi, nel diagramma, i seguenti insiemi: $A\cap B$; $A\cup B$; $A-B$; $B-A$; $\overline{A\cup B}$.
Definisci infine ciascuno di tali insiemi
a) per elencazione b) mediante una proprietà caratteristica degli elementi.

4) Definisci *per elencazione* i seguenti insiemi:
$A=\{2k,\ con\ k\in\mathbb{N}^*\}$ $B=\{2k,\ con\ k\in\mathbb{N}\}$ $C=\{2^k,\ con\ k\in\mathbb{N}\}$ $D=\{2k+1,\ con\ k\in\mathbb{N}\}$
$E=\{2n-1,\ con\ n\in\mathbb{N}^*\}$ $F=\left\{\frac{k+1}{k^2},\ con\ k\in\mathbb{N}^*\right\}$ $G=\{3^{n+1}-3^n,\ con\ n\in\mathbb{N}\}$ $H=\{i\cdot 2^{i+1},\ con\ i\in\mathbb{N}\}$

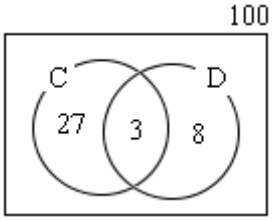
5) Nel quesito precedente si chiedeva di passare da una definizione in simboli ad una per elencazione.
Fai ora *il viceversa,* per gli insiemi che seguono (l'insieme in cui varia la lettera dovrà essere $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}^*$):
$A=\{5, 10, 15, 20, 25, 30, ...\}$ $B=\{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...\}$ $C=\{5, 15, 25, 35, 45, ...\}$
$D=\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...\right\}$ $E=\left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, ...\right\}$ $F=\{2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ 37,\ 50,\ 65,\ 82,\ 101, ...\}$

6) Stabilisci quale dev'essere, secondo logica, il numero successivo nella sequenza:
a) 1, 4, 7, 10, 13, 16, ... b) 23, 19, 15, 11, 7, 3, ... c) 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, … d) 2, 4, 8, 16, 32, …
e) 1, 8, 27, 64, 125, … f) 2, 6, 18, 54, 162, … g) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … h) 1, 2, 2, 4, 8, 32, 256, …

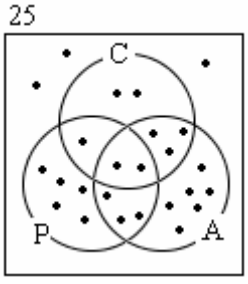
7) Sia $X=\{l, m, n, o\}$, $Y=\{l, m, n, o, p, q\}$, $W=\{g, h, i, l, m\}$. Definisci *per elencazione*:
$X-W$ $X\cup W$ $X\cap W$ $X\cap Y$ $X\cup Y$ $(X-W)\cup(W-X)$ $(X\cup W)-(X\cap W)$

8) Un intero *n* si dice "abbondante" se la somma dei suoi divisori, comprendendo l'unità ma escludendo il numero stesso, va a superare *n*. Ad esempio, il numero 12 è "abbondante" perché i suoi divisori diversi dal numero stesso sono: 1, 2, 3, 4 e 6, e si ha $1+2+3+4+6>12$.
Definisci per elencazione l'insieme $H=\{numeri\ abbondanti\ non\ superiori\ a\ 20\}$.

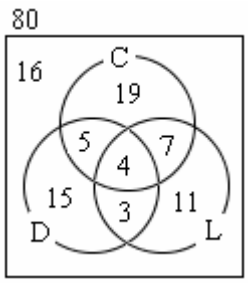
9) Un barista si diverte a fare una statistica riguardo alle abitudini dei clienti che ordinano un caffè, e riassume le sue osservazioni su un campione di 100 ordinazioni nel diagramma di Venn qui a fianco riportato.
a) Quanti hanno ordinato un caffè Corretto?
b) Quanti hanno scelto il Dolcificante (anziché lo zucchero)?
c) Quanti hanno voluto un caffè Corretto, col Dolcificante?
d) Quanti un caffè col dolcificante, non corretto?




10) Osservando il diagramma di Venn, che si riferisce all'iscrizione ai 3 gruppi sportivi disponibili (Calcio, Pallavolo, Atletica) degli allievi di una classe di Liceo, rispondi alle domande che seguono.
a) Quanti ragazzi praticano almeno il calcio?
b) Quanti ragazzi praticano almeno 1 sport?
c) Quanti non ne praticano nessuno?
d) Qual è la percentuale di ragazzi che praticano almeno 1 sport?
e) Quanti ragazzi praticano 1 solo sport?
f) Quanti ragazzi praticano esattamente 2 sport?
g) Quanti praticano almeno 2 sport?
h) Quanti praticano Atletica, ma non Calcio né Pallavolo?
i) Quanti praticano sia Calcio che Pallavolo, ma non Atletica?



11) A 80 adulti viene domandato se sono Coniugati, se hanno la Laurea, se sono attualmente Disoccupati. Sentite le risposte, si compila il diagramma di Venn qui riportato.




I) Quante fra queste persone
   a) non sono sposate?
   b) hanno la laurea ma sono disoccupate?
   c) non hanno la laurea e sono disoccupate?
   d) sono disoccupate ma non sposate?
   e) hanno una laurea o un lavoro?

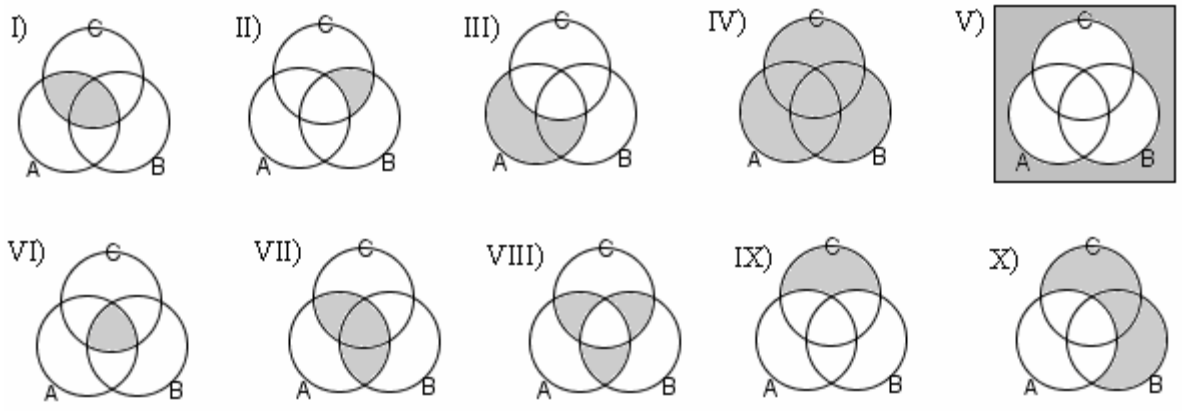
II) a) Fra i laureati, qual è la percentuale di disoccupati?
   b) E fra i non laureati?
   c) Fra i laureati sposati, qual è la percentuale di disoccupati?

12) Riempi i puntini (A e B indicano due insiemi qualsiasi; aiutati con i diagrammi di Venn):
$(A-B)\cap(A\cap B)=\ldots$ $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=\ldots$ $A-(A\cap B)=\ldots$ $(A\cup B)-B=\ldots$

13) Sia $F\subseteq G$, $G\subseteq H$. Riempi i puntini: $(H-G)\cap F=\ldots$ $(H-F)\cup G=\ldots$

14) E' vero che se $X\cap Y=X$, allora $X\subseteq Y$ ?

15) Scrivi l'operazione insiemistica che produce come risultato l'insieme ombreggiato, in ciascuno dei casi.




16) Scrivi l'insieme il cui insieme delle parti è $\{\{1\},\{3\},\{5\},\{1,3\},\{1,5\},\{3,5\},\{1,3,5\}\}$

17) Quanti elementi ha un insieme, il cui insieme delle parti contiene a) 1000 elementi? b) 1024 elementi?

18) Analizza la differenza fra le scritture $0$, $\{0\}$, $\varnothing$, $\{\varnothing\}$

19) Cosa accomuna l'insieme degli uccelli con 10 ali e l'insieme dei triangoli equilateri ottusangoli?

20) Se un insieme A ha 8 elementi e un altro insieme B ne ha 15, cosa si può affermare con certezza riguardo al numero di elementi di $A\cap B$? $A\cup B$? $A-B$? $B-A$?

*La rappresentazione tramite i diagrammi di Venn si rivela a volte utilissima per risolvere senza grande fatica determinati problemi. Ecco alcuni esempi.*

21) Se 50 allievi di una Scuola Superiore si sono iscritti al corso pomeridiano facoltativo di Francese, 40 a quello di Spagnolo, e fra questi 18 risultano iscritti a entrambi i corsi, si domanda: quanti impareranno solo Francese, quanti solo Spagnolo, quanti almeno una delle due lingue.

22) Un'indagine su un campione di 200 famiglie rivela che 53 di queste hanno (almeno) un cane, 38 (almeno) un gatto. Soltanto 8 delle famiglie che hanno uno o più gatti ospitano anche uno o più cani. E quante di queste famiglie non posseggono né cani né gatti? Quante almeno un cane o almeno un gatto?

23) Ognuno degli 80 concorrenti a un posto di lavoro ha studiato almeno una fra le due lingue Inglese e Francese. Sapendo che 72 dichiarano di aver studiato Inglese e 32 Francese, cosa si può dire riguardo al numero di quelli che hanno studiato entrambe le lingue?

24) In una scuola superiore europea ci sono 100 studenti. 15 sono iscritti soltanto al corso di Tedesco; fra tutti gli iscritti al corso di Tedesco 21 non imparano il Francese;
9 risultano iscritti sia a Tedesco che a Inglese, 22 sia a Francese che a Inglese.
In totale, imparano il Tedesco 30 studenti, l'Inglese 49 studenti, il Francese 55 studenti.
Si chiede: quanti alunni non imparano alcuna lingua? Quanti una sola? Quanti tutte e tre?

25) In una classe di scuola elementare la maestra parla delle malattie dei bambini.
Da un'indagine fra i 25 scolaretti, emerge che tutti, ma proprio tutti, hanno avuto o il morbillo, o la scarlattina, o la varicella; 1 bambino anzi ha avuto tutte e tre le patologie, 4 sia il morbillo che la scarlattina ma non la varicella, altri 3 sia il morbillo che la varicella ma non la scarlattina.
Se in 14 hanno avuto il morbillo, in 13 la scarlattina, e in 12 la varicella, si può dedurre, con questi dati, il numero di quelli che hanno fatto la scarlattina e la varicella ma non il morbillo?

26) I 30 studenti di una classe di Liceo discutono, in una Assemblea di Classe, sui cattivi risultati in Inglese riportati nelle pagelle quadrimestrali. In effetti, soltanto 12 fra gli studenti hanno avuto la sufficienza sia in scritto che in orale, mentre ben 15 hanno avuto l'insufficienza di scritto e 11 l'insufficienza in orale.
Si domanda quanti sono risultati insufficienti sia in scritto che in orale.

27) Da www.mathocean.com:
Oshkosh did a study of the colors used in African national flags. He found that
38 flags have red, 20 have blue, 13 have both red and blue, and 8 have neither red nor blue.
How many flags a) have red but not blue? b) have blue but not red? c) were included in the study?

28) British Columbia Secondary School Mathematics Contest, 2008
Examinations in each of three subjects, Anatomy, Biology, and Chemistry, were taken by a group of 41 students. The following table shows how many students failed in each subject, as well as in the various combinations:

| subject | A | B | C | AB | AC | BC | ABC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # failed | 12 | 5 | 8 | 2 | 6 | 3 | 1 |

(For instance, 5 students failed in Biology, among whom there were 3 who failed both Biology and Chemistry, and just 1 of the 3 who failed all three subjects).
The number of students who passed all three subjects is: A) 4 B) 16 C) 21 D) 24 E) 26

29) Siano $r$ ed $r'$ due rette (pensate ciascuna come un insieme di punti); stanno su di uno stesso piano e non sono parallele. Sia P il punto in cui tali due rette si tagliano. E' corretto scrivere che $r \cap r' = P$ ?

30) Nella classe di Asdrubale ci sono 37 allievi. Tutti si sono iscritti ad almeno una delle due attività extracurriculari (musica e pallavolo). Alla fine 15 fanno musica e 28 fanno pallavolo. Quanti allievi, frequentando entrambe le attività, hanno necessità di programmare gli orari per evitare sovrapposizioni?
A) 6 B) 9 C) 13 D) 16 E) 22 (Test di Ingresso alla Facoltà a numero chiuso di Architettura, 2008)

31) In un'aula scolastica, durante la ricreazione, 14 studenti stanno seduti, 8 mangiano la pizza.
Con questi dati si può concludere con certezza che il numero totale N degli studenti è:
A) $N < 14$ B) $N \geq 14$ C) $N > 14$ D) $N = 22$ E) $N > 22$ (Test di Ingresso a Medicina, 2008)

32) In una classe si è formata una squadra di nuoto e una squadra di tennis.
Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
A) Il miglior nuotatore fra i tennisti è anche il miglior tennista fra i nuotatori
B) Se il più bravo tra i nuotatori non gioca a tennis, anche il più bravo tra i tennisti non nuota
C) Il più giovane fra i nuotatori che giocano a tennis è anche il più giovane dei tennisti che nuotano
D) Se il più vecchio tra i tennisti non nuota, allora il più vecchio tra i nuotatori non gioca a tennis
E) Il peggior nuotatore tra i tennisti è il miglior tennista tra i nuotatori

(Politecnico di Torino)

33) Kangourou 2004



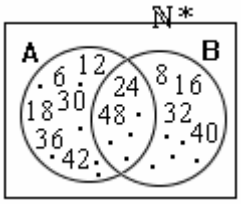

Jean-Michel ha raccolto 30 funghi di due tipi: gallinacci e porcini.
Se prende a caso 12 funghi, ci sarà almeno un gallinaccio fra di essi;
se ne prende a caso 20, fra questi si avrà almeno un porcino.
Quanti gallinacci ha raccolto Jean-Michel?
A) 11 B) 12 C) 19 D) 20 E) 29

34) Immaginiamo di suddividere tutte le persone che hanno vissuto o vivono tuttora su questa Terra in due insiemi: mettiamo nell'insieme A tutti quelli che, nella loro vita se sono già morti o fino a questo istante se ancora viventi, hanno stretto la mano ad altre persone un numero pari di volte, oppure nessuna volta; mettiamo nell'insieme B tutti quelli che, nella loro vita se sono già morti o fino a questo istante se ancora viventi, hanno stretto la mano ad altre persone un numero dispari di volte.
Dimostra che l'insieme B è costituito da un numero pari di persone.
(*Rielaborato da "The USSR Olympiad Problem Book" di Shklarsky, Chentzov, Yaglom, Irving*)

**RISPOSTE AGLI "ESERCIZI VARI SUGLI INSIEMI"**

1) a) F b) F c) F d) V e) V f) V g) V h) V i) V l) V m) V n) F

2) A) No B) No C) Sì D) Mah … Non sembra sufficientemente chiara! Specifichiamo almeno: vestiti o nudi?

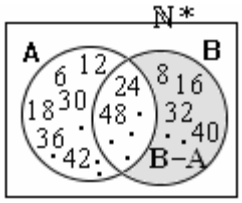
3) 


$A \cap B = \{24,\ 48,\ 72,\ 96,\ \dots\} = \{\textit{multipli di } 24\}$

$A \cup B = \{6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 18,\ 24,\ 30,\ 32,\ 36,\ 40,\ \dots\} =$
$= \{\textit{numeri che sono multipli o di } 6 \textit{ o di } 8\}$

$A - B = \{6, 12, 18, 30, 36, 42, 54\ \dots\} = \{\textit{mult. di } 6 \textit{ ma non di } 8\}$

Nella figura a destra: $B - A = \{8, 16, 32, 40, 56, 64, 80\ \dots\} = \{\textit{mult. di } 8 \textit{ ma non di } 6\}$




$\overline{A \cup B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, \dots\} = \{\textit{num. nat. non nulli che non sono mult. né di } 6 \textit{ né di } 8\}$

4) $A = \{2,4,6,8,10,\dots\}$ $B = \{0,2,4,6,8,10,\dots\}$ $C = \{1,2,4,8,16,32,\dots\}$ $D = \{1,3,5,7,9,11,\dots\}$
$E = \{1,3,5,7,9,11,\dots\} = D$ $F = \left\{2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \frac{7}{36}, \dots\right\}$ $G = \{2,6,18,54,162,\dots\}$ $H = \{0,4,16,48,128,320,\dots\}$

5) $A = \{5n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ $B = \{5n,\ n \in \mathbb{N}\}$ $C = \{5(2n+1),\ n \in \mathbb{N}\}$ $D = \left\{\frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ $E = \left\{\frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $F = \{n^2+1,\ n \in \mathbb{N}^*\}$

6) a) 19 b) −1 c) 28 d) 64 e) 216 f) 486 g) 34 (somma dei due precedenti) h) 8192 (prodotto dei due prec.)

7) $X - W = \{n, o\}$ $X \cup W = \{l, m, n, o, g, h, i\}$ $X \cap W = \{l, m\}$
$X \cap Y = \{l, m, n, o\} = X$ $X \cup Y = \{l, m, n, o, p, q\} = Y$
$(X - W) \cup (W - X) = \{n, o\} \cup \{g, h, i\} = \{n, o, g, h, i\}$
$(X \cup W) - (X \cap W) = \{l, m, n, o, g, h, i\} - \{l, m\} = \{n, o, g, h, i\}$ (*)

(*) In generale (dimostralo coi diagrammi di Venn!), per QUALUNQUE coppia di insiemi A, B, è SEMPRE $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

8) $H = \{12, 18, 20\}$ 9) a) 30 b) 11 c) 3 d) 8 10) a) 8 b) 22 c) 3 d) 88% e) 13 f) 7 g) 9 h) 6 i) 1

11) I) a) 45 b) 7 c) 20 d) 18 e) 60 II) a) 28% b) ≈ 36% c) ≈ 36%

12) $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$; $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$; $A - (A \cap B) = (A \cup B) - B = A - B$

13) $(H - G) \cap F = \varnothing$; $(H - F) \cup G = H$

14) Sì, è vero. Se $X \cap Y = X$, vuol dire che gli elementi comuni a X e a Y sono tutti gli elementi di X, quindi che tutti gli elementi di X appartengono anche a Y. E ciò significa che X è un sottoinsieme di Y.

15) I) $A \cap C$ II) $(B \cap C) - A = (C - A) \cap B$ III) $A - C$ IV) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = B \cup (A \cup C) = A \cup B \cup C$
V) $\overline{A \cup B \cup C}$ VI) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = B \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$ VII) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$
VIII) $\big[(A \cap B) - C\big] \cup \big[(A \cap C) - B\big] \cup \big[(B \cap C) - A\big]$ oppure … IX) $C - (A \cup B)$ X) $(B \cup C) - A$

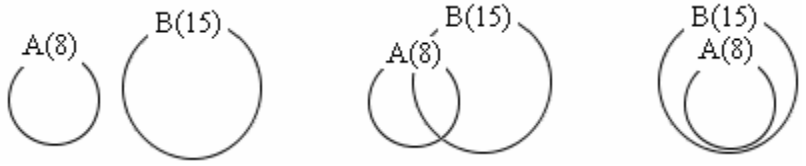
16) La risposta corretta è: "non esiste". Infatti, verrebbe la tentazione di rispondere che l'insieme di partenza è $\{1, 3, 5\}$, sennonché ogni insieme delle parti contiene sempre anche l'insieme vuoto, che invece qui non c'è!

17) a) Impossibile: il numero 1000 non è una potenza di 2 b) 10 ($1024 = 2^{10}$)

18) 0 indica un numero, {0} indica l'insieme unitario il cui unico elemento è il numero 0,
∅ indica l'insieme vuoto, {∅} indica un strano insieme unitario il cui unico elemento è l'insieme vuoto

19) Si identificano, sono lo stesso insieme: l'insieme vuoto

20) Con certezza possiamo dire solo che:
$A \cap B$ può avere da 0 a 8 elementi; $A \cup B$ da 15 a 23; $A - B$ da 0 a 8; $B - A$ da 7 a 15.
Te ne puoi render conto se rifletti sul fatto che le situazioni possibili sono quelle delle figure qui sotto.




21) Solo Francese: 32; solo Spagnolo: 22;
almeno una lingua: $32 + 18 + 22 = 72$

22) Né cani né gatti: 117;
almeno un cane o un gatto: 83

fig. 21)

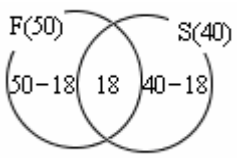
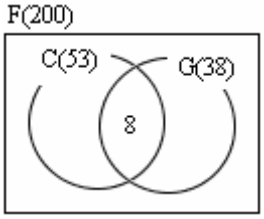
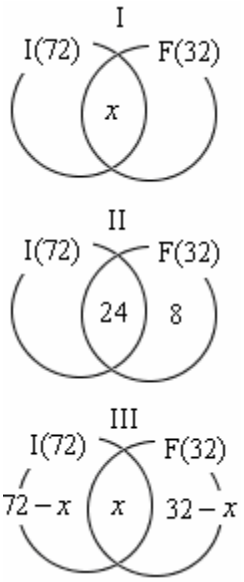



fig. 22)



23) I) La situazione è quella rappresentata in figura, dove dobbiamo determinare il numero $x$ degli elementi comuni. Osserviamo che se noi, per calcolare il numero di elementi di $I \cup F$, sommassimo 72 con 32, sbaglieremmo perché in questa somma 72+32 = 104 gli elementi comuni verrebbero contati 2 volte! In effetti, il numero corretto degli elementi di $I \cup F$ è (come ci dice il testo) 80, per cui quei $104-80=24$ elementi in più che ci ritroviamo sono dovuti al fatto che abbiamo contato due volte, anziché una sola, gli elementi di $I \cap F$. Ma allora $I \cap F$ ha, per l'appunto, 24 elementi.




II) Oppure: in totale le persone coinvolte sono 80 … Dato che l'Inglese l'hanno studiato in 72, se ne deduce che il numero di coloro che NON l'hanno invece studiato sarà di $80-72=8$. Questi 8 avranno allora fatto Francese, considerando che ognuno degli 80 ha studiato almeno una delle due lingue. Ma in totale hanno studiato Francese 32 persone, quindi oltre a questi 8, i soli fra gli 80 che hanno fatto Francese ma non Inglese, ce ne saranno altri $32-8=24$ che avranno studiato, oltre a Francese, pure Inglese.

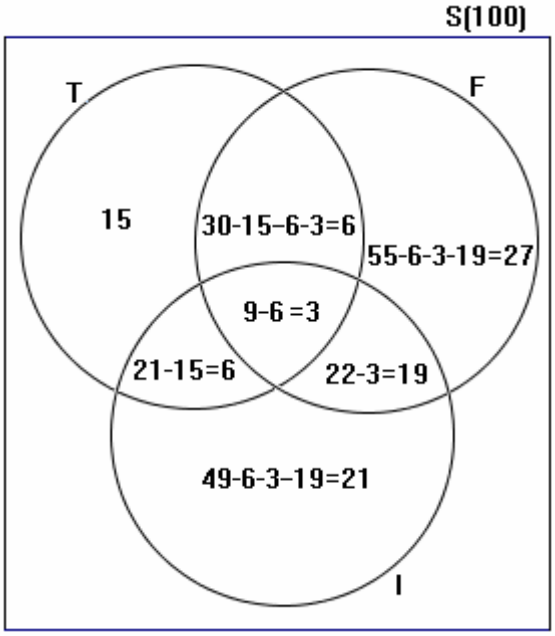
III) Anche con un'equazione: $72-x+x+32-x=80$ $[72+32-x=80]$ da cui $x=24$

IV) ♥ In generale (IMPORTANTE!) tramite considerazioni del tipo di quelle fatte sopra si trae che, per qualsiasi coppia di insiemi A, B aventi ciascuno un numero finito di elementi, si ha sempre $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$ [leggi: il numero degli elementi di $A \cup B$ è uguale a … ]

IV
$n(A \cup B) =$
$= n(A)+n(B)-n(A \cap B)$

24) Una lettura attentà del quesito porta a stabilire che i numeri degli studenti nei vari "territori" sono quelli indicati nella figura qui a fianco →
Dopodiché:

- gli studenti che non imparano nessuna lingua sono $100-(15+6+27+6+3+19+21)=100-97=3$
- gli studenti che imparano una sola lingua sono $15+27+21=63$
- gli studenti che imparano tutte e tre le lingue sono 3




25) 5 bambini hanno fatto la scarlattina e la varicella ma non il morbillo

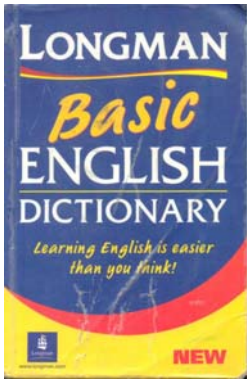
26) Sono risultati insufficienti sia in scritto che in orale in 8

27) a) 25 b) 7 c) 53 28) E

29) E' sostanzialmente corretto, ma formalmente non corretto. L'intersezione fra due insiemi è sempre ancora un insieme, non un elemento. Quindi la scrittura esatta è $r \cap r' = \{P\}$: l'intersezione fra l'insieme $r$ e l'insieme $r'$ è l'insieme unitario, che ha come unico elemento il punto P. Tuttavia, anche la scrittura $r \cap r' = P$ è accettata.

30) A 31) B 32) C 33) C 34) Ci hai pensato per bene? Davvero? Allora clicca sulla freccia per la correzione ⇨

Dal sito
http://searchsecurity.techtarget.com
(in Inglese, "insieme" si dice "set")




| SYMBOL | MEANING | EXAMPLE |
|---|---|---|
| $\{\ \}$ | is a set | $S=\{4,5\}$ |
| $\in$ | is an element of | $s \in S$ |
| $\notin$ | is not an element of | $s \notin T$ |
| $\subseteq$ | is a subset of | $S \subseteq T$ |
| $\subset$ | is a proper subset of | $S \subset T$ |
| $\cup$ | union | $S \cup T$ |
| $\cap$ | intersection | $S \cap T$ |
| $\varnothing$ | the empty set | $\{2,3,4\} \cap \{5,6,7\} = \varnothing$ |

## RISPOSTE AGLI ESERCIZI DI PAG. 81

1) $A=\{31,37,41,43,47,53,59\}$ $B=\{6,12,18,24,30,36,...\}$ $C=\{a,\ e,\ o\}$ $D=\{7?,16,25,34,43,52,61,70\}$.
Il quesito è ambiguo in quanto non è chiaro se il 7 debba appartenere o no all'insieme. Se da una parte con una sola cifra sembra non corretto parlare di "somma delle cifre", dall'altra non ha nemmeno torto chi ritiene spontaneo che, di fronte a una sola cifra, per "somma" si debba intendere quell'unica cifra.

2) $E=\{10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60,\ 70,\ 80,\ 90,\ 100\}=\{\text{multipli di 10 minori o uguali a 100}\}=$
$=\{\text{multipli di 10 minori di 101}\}=\{\text{multipli di 10 fino a 100 compreso}\}=\{\text{primi dieci multipli di 10}\}=...$

$F=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ ...\right\}=\{\text{frazioni senza segno con numeratore uguale a 1}\}$

$G=\{1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ ...\}=\{\text{potenze di 3, a partire da quella con esponente 0}\}$

$H=\{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ ...\}=\{\text{quadrati dei numeri naturali}\}$

$I=\{\text{numeri naturali di tre cifre, le cui cifre siano numeri consecutivi in ordine crescente}\}$

$L=\{11,\ 33,\ 55,\ 77,\ 99,\ 121,\ 143,\ ...\}=\{\text{multipli dispari di 11}\}$

3) $D=\{n^3,\ \ n\in\mathbb{N}^*\}=\{1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ ...\}$ $E=\{3n,\ \ n\in\mathbb{N}^*\}=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ ...\}$
$F=\{\sqrt{x},\ \ x\in\mathbb{N}\}=\{0;\ 1;\ 1,4...;\ 1,7...;\ 2;\ 2,2...;\ 2,4...;\ 2,6...;\ 2,8...;\ 3;\ 3,1...;\ ...\}$

4) $G=\{5n,\ n\in\mathbb{N}^*\}$ $H=\left\{\frac{1}{2^n},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ $I=\left\{\frac{5^n-1}{5^n},\ n\in\mathbb{N}\right\}$

5) a) Una circonferenza, di centro quel punto e raggio 5 cm b) Un cerchio, di centro quel punto e raggio 5 cm
6) a) Una superficie sferica, di centro quel punto e raggio 5 cm b) Una sfera, di centro quel punto e raggio 5 cm
7) E' una corona circolare
8) E' una superficie cilindrica illimitata; è l'insieme dei punti che stanno su due piani, paralleli a quello fissato
9) Perché non è univoca: una ragazza che è considerata carina da una persona, potrebbe non esserlo per un'altra.

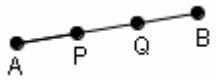
## RISPOSTE AGLI ESERCIZI DI PAG. 82

1) Vuoto (due circonf. si dicono "concentriche" se hanno lo stesso centro); se però le due circonf., oltre ad avere lo stesso centro, avessero anche lo stesso raggio, allora TUTTI i punti di ciascuna di esse sarebbero comuni anche all'altra, e l'insieme dei punti comuni non sarebbe, in questo caso particolare, né unitario né vuoto.

2) Né unitario, né vuoto (i punti comuni sono due: gli estremi della corda).

3) Unitario (l'unico punto che gode di questa proprietà è il punto di mezzo, detto anche "punto medio", del segmento).

4) Né unitario, né vuoto (DUE punti godono di questa proprietà: vedi figura).




5) Unitario: l'unico suo elemento è il numero 2.

6) Vuoto. Tuttavia, in una definizione "estesa" di parallelismo, anche due rette coincidenti, sovrapposte, costituiscono un caso particolare di rette parallele.
In questo caso l'insieme dei punti comuni non sarebbe, evidentemente, né vuoto né unitario, perché conterrebbe tutti i punti delle due rette coincidenti considerate.

7) Di 16 elementi. Se $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$ allora i sottoinsiemi di A, quindi gli elementi di $P(A)$, sono i seguenti:

$\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{a,\ d\},\ \{b,\ c\},\ \{b,\ d\},\ \{c,\ d\},\ \{b,\ c,\ d\},\ \{a,\ c,\ d\},\ \{a,\ b,\ d\},\ \{a,\ b,\ c\},\ A$

8) Dunque, vediamo … si può facilmente ricavare la tabella qui a fianco.
Da essa sembra proprio che, se si indica con $n$ il numero degli elementi di A, il numero degli elementi di P(A) sia $2^n$.
In effetti, si potrebbe dimostrare che è proprio così, qualunque sia $n$.

| Numero di elementi di A | Numero di elementi di P(A) |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |

9) Sì, perché l'insieme vuoto $\varnothing$ contiene $n=0$ elementi,
e l'unico sottoinsieme dell'insieme vuoto è l'insieme vuoto stesso,
quindi l'insieme $P(\varnothing)$ ha 1 solo elemento; ma è per l'appunto $2^0=1$.

## RISPOSTE AGLI ESERCIZI DELLE PAGG. 86-87

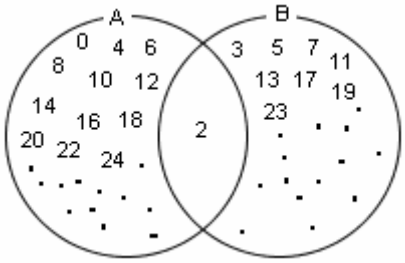
1)

$A=\{\text{numeri pari}\}=\{0,2,4,6,8,10,12,...\}$

$B=\{\text{numeri primi}\}=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,...\}$

$A\cap B=\{2\}$

$A\cup B=\{0,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,16,17,18,19,20,22,23,...\}$

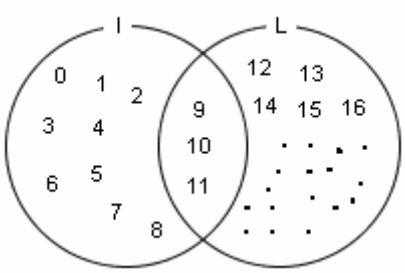


2)

$I = \{\text{numeri naturali minori di } 12\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

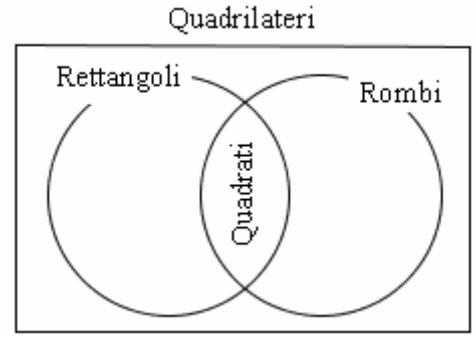
$L = \{\text{numeri naturali maggiori di } 8\} = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, ...\}$

$I \cap L = \{9, 10, 11\} \qquad I \cup L = \mathbb{N}$




3) $A = \{\text{rettangoli}\}$ $B = \{\text{rombi}\}$ $A \cap B = \{\text{quadrati}\}$

$A \cup B = \left\{ \begin{array}{l} \text{quadrilateri che sono o rettangoli, o rombi,} \\ \text{ossia per i quali è vera} \\ \text{almeno una fra queste due affermazioni:} \\ \text{il quadrilatero ha tutti i lati uguali fra loro,} \\ \text{oppure tutti gli angoli retti} \end{array} \right\}$




Ricordiamo che se c'è un insieme nel quale tutti gli altri sono "immersi" (insieme "**universo**"), questo viene rappresentato preferibilmente con un **rettangolo** anziché un ovale

4)

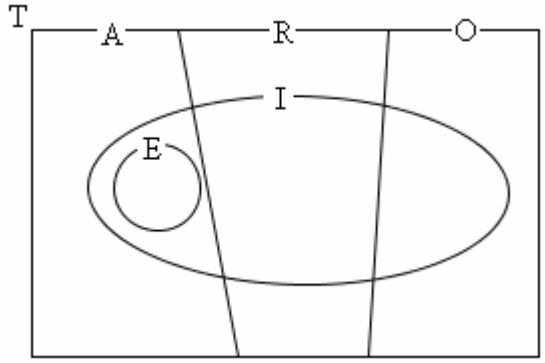
$L = \{\text{num. naturali minori di } 30\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., 25, 26, 27, 28, 29\}$

$P = \{\text{numeri primi}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...\}$

$Q = \{\text{num. naturali terminanti con la cifra } 3\} = \{3, 13, 23, 33, 43, 53, ...\}$

$L \cap P \cap Q = \{3, 13, 23\}$

5) e 6)




Poiché ogni triangolo equilatero
è anche isoscele e acutangolo, si ha $E \subseteq I$, $E \subseteq A$.
La figura è stata tracciata tenendo conto altresì che
$A \cup R \cup O = T$, $A \cap R = \varnothing$, $A \cap O = \varnothing$, $R \cap O = \varnothing$

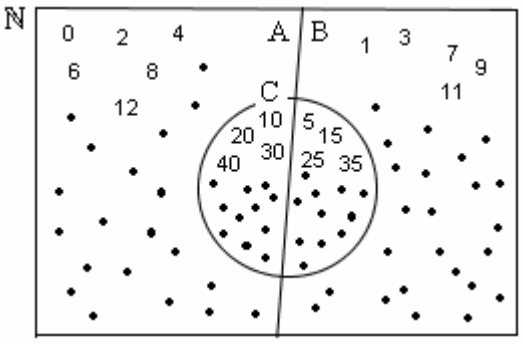
$A \cap O = \varnothing$
$A \cup O = \{\text{triangoli non rettangoli}\}$
$R \cap I = \{\text{triangoli rettangoli isosceli}\}$
$R \cap E = \varnothing$

$I \cap E = E$
$I \cup E = I$
$A \cap E = E$
$A \cup E = A$

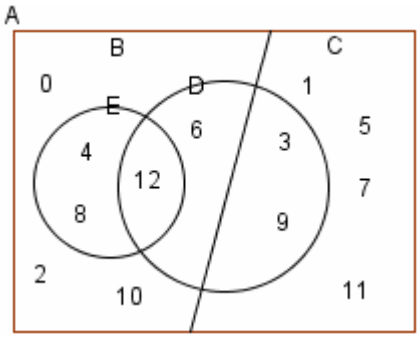
NOTA

NOTA : In generale, quando abbiamo un sottoinsieme con un suo "sovrainsieme", l'intersez. è il sottoinsieme, mentre l'unione è l'insieme più grande

7)

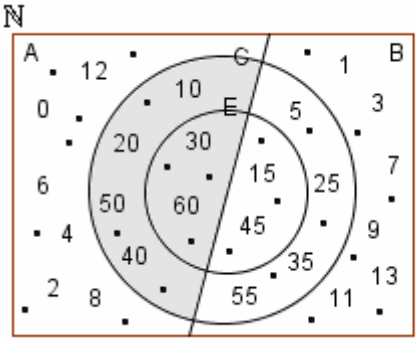



a)



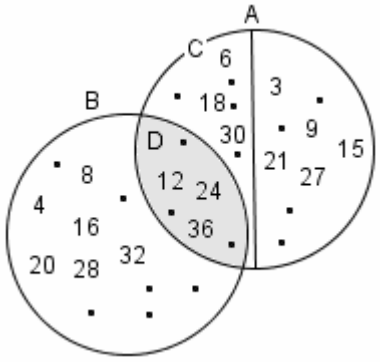

b)

c)




L'insieme ombreggiato è D

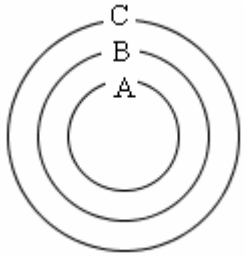
d) Può andar bene la rappresentazione seguente




o comunque qualsiasi diagramma dal quale emerga che:
$A \cap B = D$; $D \subseteq C \subseteq A$

8) a) l'insieme vuoto  b) il cerchio più piccolo  c) l'insieme vuoto
d) la sfera più piccola  e) un cerchio massimo della sfera
f) una circonferenza massima della sfera  g) un segmento, diametro della sfera
h) un insieme formato da due soli punti, estremità di un diametro della superficie sferica

9) $A \cap \varnothing = \varnothing; \quad A \cup \varnothing = A$

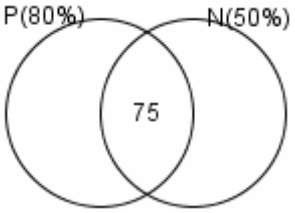



10) $A \cap B \cap C = A; \; A \cup B \cup C = C$

11) a) E' l'intero piano $\pi$
b) E' l'insieme unitario, avente come unico elemento P: $\{P\}$

12)

a) Poiché ogni ragazza deve fare almeno uno sport, vuol dire che tutto quel 20% di ragazze che non fa pallavolo, farà nuoto. Ma poiché risultano fare nuoto ben il 50% delle ragazze, ci sarà un 30% delle ragazze le quali, oltre a fare nuoto, faranno anche pallavolo. In definitiva, avremo che (indicati con $n_R$, $n_P$, $n_N$ rispettivamente il numero totale delle ragazze, il numero di quelle che fanno Pallavolo, il numero di quelle che fanno Nuoto):

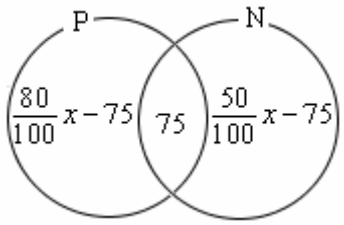



$$\frac{30}{100} n_R = 75 \quad \text{da cui} \quad n_R = 75 \cdot \frac{100}{30} = 250$$

e di conseguenza poi $n_P = \frac{80}{100} \cdot 250 = 200; \quad n_N = \frac{50}{100} \cdot 250 = 125$

IN ALTERNATIVA, si sarebbe potuto tracciare il diagramma riportato qui a destra, dove con $x$ è indicato il numero totale delle ragazze, e risolvere con l'equazione

$$\left(\frac{80}{100}x - 75\right) + \left(\frac{50}{100}x - 75\right) + 75 = x$$




b) In quel caso, non si sarebbe potuta dare una risposta sicura, perché avremmo potuto avere molte situazioni, compresa quella che l'insieme N fosse incluso in P.
In quest'ultimo caso, il numero totale delle ragazze sarebbe stato di 150, di cui 75 iscritte a Nuoto (e tutte queste pure a Pallavolo) e 120 a Pallavolo (di cui 75 anche a Nuoto).
La risposta più accurata al problema sarebbe stata in definitiva: "da un minimo di 150 ad un massimo di 250 ragazze".

**RISPOSTE AGLI ESERCIZI DI PAG. 88**

1) E' l'insieme dei numeri pari. Ricordiamo che anche 0 è considerato pari.

NOTA. La comunità matematica è unanime nel considerare lo "zero" (0) come un numero PARI.
Vengono considerati "pari" quei numeri *naturali* (*) che si possono scrivere sotto la forma $2 \cdot n$, essendo $n$ ancora un numero *naturale.*
Poiché 0 evidentemente gode di questa proprietà ($0 = 2 \cdot 0$), ecco che 0 è pari.
(*) I "numeri naturali" sono gli interi senza segno, 0 compreso: 0, 1, 2, 3, 4, 5, …

Questa scelta è anche conveniente per tutta una serie di motivi. Fra i tantissimi, ne citiamo uno solo, di carattere "pratico": in certi giorni, in determinate città, per limitare l'inquinamento atmosferico viene consentito di circolare solo alle vetture con "targhe dispari", in altri giorni solo alle vetture con "targhe pari". La finalità è evidentemente di far sì che in quei giorni sia in circolazione soltanto la metà circa dei veicoli abitualmente in uso. E' chiaro che considerare lo 0 "pari" è pienamente conforme alla logica e all'obiettivo, in questo contesto.

Parità" e "disparità" si possono estendere, in senso più "largo", anche agli interi *relativi*.
Vengono considerati pari quegli interi relativi che si possono scrivere nella forma $2 \cdot x$, essendo $x$ ancora un intero relativo: quindi, in quest'ambito, sono pari $0, +2, -2, +4, -4, +6, -6, \ldots$ e dispari gli altri interi relativi.

2) E' l'insieme dei numeri pari, privato dello 0.

3) Per l'insieme $\mathbb{N} - \{0\}$, l'insieme dei numeri naturali non nulli, il simbolo utilizzato è $\mathbb{N}^*$.

# CALCOLO LETTERALE: MONOMI E POLINOMI

## 1. ESPRESSIONI ALGEBRICHE; SIGNIFICATO DELLE LETTERE IN ALGEBRA

Si dice "**espressione algebrica**"
un insieme di numeri e/o lettere
legati fra loro dai segni di operazione.

- Se un'espressione algebrica non contiene lettere, ma solo numeri, viene detta "espressione algebrica numerica", o semplicemente "**espressione numerica**".
- Se c'è almeno una lettera, si parlerà invece di "**espressione letterale**".

Esempi:

$\underbrace{\dfrac{5^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3+7}}_{\text{espressione numerica}}$ $\qquad$ $\underbrace{-7a+5abc;\quad \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x-4}}}_{\text{espressioni letterali}}$

**In un'espressione algebrica, una *lettera* può, a seconda delle circostanze, avere il significato di:**

**♥ VARIABILE, ossia**
**numero del quale non si desidera specificare il valore,**
**perché tale valore potrà essere scelto, di volta in volta, in modi diversi**

Esempio 1

*Per determinare l'area di un triangolo*
*si utilizza l'espressione* $\boxed{\dfrac{b\cdot h}{2}}$
*(dove b indica la misura della base , h quella dell'altezza), calcolandola per i valori di b, h che interessano in quel momento.*

Esempio 2

*Un atleta si allena per una corsa di resistenza percorrendo 3,5 metri ogni secondo.*
*Che distanza copre in 20 secondi? In un minuto? In un'ora?*

$\boxed{s=}\ v\cdot t=\boxed{3{,}5\cdot t}$
*Con* $t=20\rightarrow s=3{,}5\cdot 20=70$
*Con* $t=60\rightarrow s=3{,}5\cdot 60=210$
*Con* $t=3600\rightarrow s=3{,}5\cdot 3600=12600$

**♥ INCOGNITA**, ossia
**numero del quale non è possibile specificare il valore,**
**perché questo è, almeno per il momento, sconosciuto, "incognito"**

Esempio

*Problema*:
*trovare due numeri interi consecutivi tali che la somma della terza parte del minore con la quarta parte del maggiore dia 58.*

$x=$ numero minore, $x+1=$ numero maggiore; $\qquad \boxed{\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}(x+1)=58}$

Risolvendo, con le tecniche opportune, l'**equazione** ottenuta,
si riesce a determinare il valore di $x$.

**♥ COSTANTE**
**Per "costante" si può intendere, a seconda dei casi:**

- **un numero particolare, dal valore fisso e immutabile …**

Esempi classici:

$\pi=3{,}1415926...$ "*p greco*"
$e=2{,}7182818...$ *numero di Nepéro*

QUALCHE FORMULA CON $\pi$:

*Lunghezza della circonferenza* $=\boxed{2\pi r}$

*Area del cerchio* $=\boxed{\pi r^2}$

*Volume della sfera* $=\boxed{\frac{4}{3}\pi r^3}$

*Superficie della sfera* $=\boxed{4\pi r^2}$

- **… oppure un "parametro" o "costante arbitraria"**

Quando una lettera è utilizzata nel ruolo di "costante arbitraria" o "parametro", si comporta a tratti come una costante (nel senso che il suo valore viene tenuto fisso) e a tratti come una variabile (nel senso che il suo valore viene cambiato).

*La rana, per un po' sta sott'acqua*
*e per un po' esce fuori a prendere una boccata d'aria:*
*allo stesso modo il parametro fa vita da anfibio*
*fra il ruolo di costante e quello di variabile.*
Ti pare strano e nebuloso questo discorso? Sì???
Sono perfettamente d'accordo con te! Ma più avanti, con le *equazioni letterali* (pag. 380), avrai esempi appropriati.

**ESERCIZI** (risposte a pag. 103)

1) Indicando l'età di Mario con *e*, scrivi le espressioni letterali corrispondenti alle età:
a) di sua moglie, che ha 2 anni più di lui
b) dei suoi figli, che Mario ha avuto rispettivamente alle età di 31 e 34 anni
c) di sua suocera, sapendo che quando partorì la figlia, che ora è moglie di Mario, aveva 29 anni

2) Se Aldo possiede *p* euro meno di Bruno, e Bruno a sua volta possiede *q* euro più di Carlo, allora, detta *c* la cifra, in euro, posseduta da Carlo, quanti euro posseggono i tre in totale?

3) In un parco ci sono *b* biciclette e *t* tricicli. Scrivi l'espressione che corrisponde al numero totale di ruote.

4) Se in un salvadanaio ci sono *a* monete da 1 euro, *b* monete da 50 centesimi, e *c* monete da 20 centesimi, scrivi l'espressione letterale che indica il valore contenuto nel salvadanaio, espresso in euro

5) Sia *n* un numero intero. Scrivi l'espressione letterale che indica
a) il numero successivo b) il numero precedente c) l'opposto di *n*
d) il triplo di *n* e) il successivo del triplo di *n* f) il triplo del successivo di *n*
g) il cubo del quadruplo di *n* h) il quadruplo del cubo di *n*
i) il numero che supera di 2 unità il doppio di *n*
l) il doppio del numero che supera *n* di 2 unità

Per indicare gli *interi* si preferisce di norma impiegare lettere *centrali* dell'alfabeto, come *n, m, i, k* …

6) Sia *n* un numero intero diverso da 0. Scrivi l'espressione letterale che indica
a) il reciproco di *n* b) il quadrato del reciproco di *n* c) il reciproco del quadrato di *n*
d) l'*antireciproco* ( = opposto del reciproco) di *n* e) il quadrato della somma fra *n* e il suo reciproco

7) Siano *x*, *y* due numeri. Scrivi l'espressione letterale che indica:
a) il reciproco della loro somma b) la somma dei loro reciproci c) la differenza dei loro quadrati (sottinteso: prendendo i numeri nell'ordine dato, ossia prima *x* poi *y*) d) il quadrato della loro differenza
e) il loro prodotto, diminuito di una unità f) il numero che supera di 4 il reciproco del loro prodotto
g) il loro rapporto (prendendoli nell'ordine dato) h) il prodotto della loro somma per la loro differenza
i) il valore assoluto della loro differenza l) la differenza fra i loro valori assoluti
m) la somma fra il triplo del 1° e il doppio del 2° n) il triplo della somma del 1° col doppio del 2°

8) Inversamente rispetto ai tre esercizi precedenti, descrivi a parole le espressioni algebriche che seguono:

a) $x\cdot\frac{1}{x}$ b) $(x+y)^2$ c) $\frac{1}{x^2+y^2}$ d) $|-x|$ e) $x^3+\left(\frac{1}{2}x\right)^3$ f) $x^2+(-x)^2$ g) $-\frac{x-y}{x+y}$ h) $(3x+4y)^2$

9) Se la somma di due numeri è *s* e uno di questi numeri è *x*, quanto vale l'altro numero?
Se la differenza di due numeri è *d* e uno di questi numeri è *x*, quanto vale l'altro numero?
[Rispondi sotto l'ipotesi che *x* sia a) il minore fra i due b) il maggiore fra i due]

10) Se il prodotto fra due numeri non nulli è *p* e uno di questi numeri è *x*, quanto vale l'altro numero?
Se il rapporto fra due numeri non nulli è *r* e uno di questi numeri è *x*, quanto vale l'altro numero?
[Rispondi sotto l'ipotesi che *x* sia a) il divisore nel rapporto b) il dividendo nel rapporto]

11) Considera le seguenti sequenze di uguaglianze e:
I) scrivi l'uguaglianza che ti sembra debba venire dopo;
II) controlla, svolgendo i calcoli, se è corretta;
III) scrivi un'uguaglianza letterale che esprima la relazione in forma astratta (puoi usare ad esempio *n* come lettera, ma qualunque scelta per la lettera andrebbe bene)
IV) verifica se la formula trovata va bene anche per altri valori assegnati alla lettera

a)
$$2-\frac{1}{2}=\frac{(2+1)(2-1)}{2}$$
$$3-\frac{1}{3}=\frac{(3+1)(3-1)}{3}$$
$$4-\frac{1}{4}=\frac{(4+1)(4-1)}{4}$$
…

b)
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2^2}$$
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}=\frac{2}{3^2}$$
$$\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}=\frac{3}{4^2}$$
…

c)
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{9-4}{6}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{16-9}{12}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{25-16}{20}$$
…

d)
$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$
$$3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$
…

e)
$$1^2+2^2=2\cdot1\cdot2+1$$
$$2^2+3^2=2\cdot2\cdot3+1$$
$$3^2+4^2=2\cdot3\cdot4+1$$
$$4^2+5^2=2\cdot4\cdot5+1$$
…

f)
$$1+1^2=1\cdot2$$
$$2+2^2=2\cdot3$$
$$3+3^2=3\cdot4$$
$$4+4^2=4\cdot5$$
…

g)
$$1-1\cdot0=1$$
$$4-2\cdot1=2$$
$$9-3\cdot2=3$$
$$16-4\cdot3=4$$
…

h)
$$1+1+2=4$$
$$1+4+4=9$$
$$1+9+6=16$$
$$1+16+8=25$$
…

i)
$$1+1+4+3=9$$
$$1+2+9+4=16$$
$$1+3+16+5=25$$
$$1+4+25+6=36$$
…

l)
$$0\cdot1\cdot2=1-1$$
$$1\cdot2\cdot3=8-2$$
$$2\cdot3\cdot4=27-3$$
$$3\cdot4\cdot5=64-4$$
…

12) $1^2+2^2+3^2=\frac{3\cdot4\cdot(6+1)}{6}$; $1^2+2^2+3^2+4^2=\frac{4\cdot5\cdot(8+1)}{6}$; $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\frac{5\cdot6\cdot(10+1)}{6}$

Dopo aver controllato che queste uguaglianze sono corrette, scrivi quella che a tuo parere viene dopo. Scrivi anche il secondo membro di quella che potrebbe essere la formula generale $1^2+2^2+...+n^2=...$ e verifica se "funziona", assegnando a *n* qualche valore maggiore di 6.

13) Scrivi le uguaglianze letterali che esprimono le affermazioni seguenti.

**Poiché si tratta di affermazioni vere qualunque siano i numeri coinvolti (eccettuato, tutt'al più, qualche valore "eccezionale": ad esempio, un denominatore non può mai essere uguale a zero), otterrai delle "identità" ( = uguaglianze letterali, vere per tutti i valori "ammissibili" delle lettere).**

a) Sottraendo dalla somma di due numeri la loro differenza, si ottiene il doppio del secondo numero
b) Sommando il precedente e il successivo di un intero si ottiene il doppio dell'intero stesso
c) Moltiplicando la somma di due numeri per la loro differenza, si ottiene la differenza fra il quadrato del primo e il quadrato del secondo
d) Dato un intero, se dal quadrato del successivo si sottrae il quadrato del precedente si ottiene il quadruplo del numero di partenza
e) La somma di quattro interi consecutivi supera di 6 unità il quadruplo del più piccolo di essi
f) La somma di un numero col suo reciproco è uguale al rapporto fra il quadrato, aumentato di 1, di quel numero, e il numero stesso.

14) Scrivi le uguaglianze letterali che esprimono le affermazioni seguenti.

Quelle che otterrai saranno delle "equazioni".
**Una "equazione" è una "uguaglianza letterale problematica", di fronte alla quale ci si domanda: "Quali saranno (se esistono) i valori della lettera, o delle lettere, per cui l'uguaglianza è vera?"**

a) La somma di un numero col suo doppio è uguale a 21
b) Un numero supera di 4 unità i suoi 2/3
c) Un numero è inferiore di 12 unità al suo quadrato
d) Il quadrato di un numero supera di 48 unità il doppio del numero stesso
e) Un numero è uguale alla quarta parte del suo reciproco
f) I quadrati di due numeri differiscono di 9 unità
g) Moltiplicando un numero per 3, aumenta di 8 unità.

15) Calcola il valore delle espressioni letterali che seguono, per i valori delle lettere specificati a fianco:

a) $(4-x)^2+x$ per $x=4;\ x=5;\ x=-4$ b) $\frac{h-1}{h^2-2h-1}$ per $h=1;\ h=-1;\ h=0;\ h=\frac{1}{4};\ h=-\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{x}-\frac{x}{x-1}$ per $x=2;\ x=-3;\ x=\frac{1}{2}$ d) $\frac{y}{y+\frac{1}{y}}$ per $y=1;\ y=\frac{2}{3};\ y=-\frac{1}{2}$ e) $\frac{a^2+a^3}{1-a+a^2}$ per $a=1,\ a=-1\ a=-10$

*Ciò che segue è tratto dal sito*
*www.themathpage.com*
*del professor Lawrence Spector*
*(New York),*
*una ricca e ben curata raccolta*
*di lezioni ed esercitazioni interattive.*

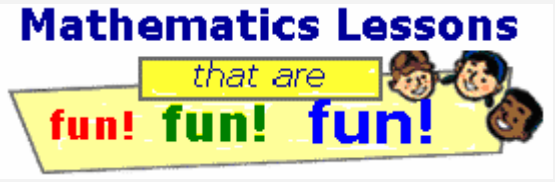



Let the value of the variable (leggi: *vèriabol*) *y* depend on the value of the variable *x* as follows: $y=2x+4$.
Calculate the value of *y* that corresponds to each value of *x*:
When $x=0$, $y=...$ When $x=1$, $y=...$ When $x=2$, $y=...$ When $x=3$, $y=...$

Write an algebraic expression that will symbolize each of the following.
a) Six times a certain number b) Six more than a certain number c) Six less than a certain number
d) A certain number less than 6 e) A number repeated as a factor three times
f) A number repeated as a term three times g) The sum of three consecutive whole numbers
h) Eight less than twice a certain number i) One more than three times a certain number

NOTA
La parola "*times*" è di uso frequente in lingua Inglese per indicare *moltiplicazione*. Ad esempio, $5\cdot8$ si legge: "five *times* eight", $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$ si legge: "one half *times* three fourths" (anche: one half "*multiplied by* three fourths")

*Il sito http://math.rice.edu/~lanius/*
*della professoressa Cynthia Lanius*
*di Houston, Texas,*
*è stato selezionato fra i migliori contributi su Internet*
*in materia di didattica della matematica.*




*Fra le sue tantissime proposte, ecco un facile gioco che può essere analizzato col calcolo letterale.*

Prendi un calendario qualsiasi (*purché abbia una settimana su ogni riga*).
Dì a un tuo amico di scegliere 4 giorni che formano un quadrato, come i quattro qui a destra. **18 19**
Il tuo amico dovrà dirti solo la somma dei quattro giorni, e tu gli saprai dire quali sono i giorni. **25 26**
Come funziona il giochino? … Supponiamo, per fissare le idee, che i quattro numeri scelti dalla persona siano quelli raffigurati. La somma sarà allora $18+19+25+26=88$.
Indichiamo il primo numero con un simbolo, ad esempio $n$.
Allora gli altri numeri in gioco saranno $n$+1, $n$+7, $n$+8.
L'amico in questo caso ti rivelerebbe che $n+n+1+n+7+n+8=88$. Quindi tu a questo punto potresti …
Prova a continuare il ragionamento per conto tuo, poi clicca sulla freccia ⇨
per andare a vedere cosa dice la professoressa Lanius (*like terms* = termini "simili").

**RISPOSTE**

1) a) $e+2$ b) $e-31,\ e-34$ c) $e+2+29=e+31$ 2) $c+c+q+c+q-p=3c+2q-p$ 3) $2b+3t$

4) $a+0{,}50b+0{,}20c$ oppure $a+\frac{b}{2}+\frac{c}{5}=a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{5}c$ oppure $\frac{100a+50b+20c}{100}$

5) a) $n+1$ b) $n-1$ c) $-n$ d) $3n$ e) $3n+1$ f) $3(n+1)$ g) $(4n)^3$ h) $4n^3$ i) $2n+2$ l) $2(n+2)$

6) a) $\frac{1}{n}$ o anche $n^{-1}$ b) $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ o $(n^{-1})^2$ c) $\frac{1}{n^2}$ d) $-\frac{1}{n}$ e) $\left(n+\frac{1}{n}\right)^2$

7) a) $\frac{1}{x+y}$ b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ c) $x^2-y^2$ d) $(x-y)^2$ e) $xy-1$ f) $\frac{1}{xy}+4$ g) $\frac{x}{y}$ h) $(x+y)(x-y)$
i) $|x-y|$ l) $|x|-|y|$ m) $3x+2y$ n) $3(x+2y)$

8) a) il prodotto di un numero per il suo reciproco b) il quadrato della somma di due numeri
c) il reciproco della somma dei quadrati di due numeri d) il valore assoluto dell'opposto di un numero
e) la somma del cubo di un numero col cubo della sua metà
f) la somma del quadrato di un numero col quadrato del suo opposto
g) l'opposto del rapporto fra la differenza di due numeri e la loro somma
h) il quadrato della somma del triplo di un numero col quadruplo di un altro numero

9) $s-x$; a) $x+d$ b) $x-d$ 10) $\frac{p}{x}$; a) $rx$ b) $\frac{x}{r}$

11) a) I) $5-\frac{1}{5}=\frac{(5+1)(5-1)}{5}$ III) $n-\frac{1}{n}=\frac{(n+1)(n-1)}{n}$ b) I) $\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}=\frac{4}{5^2}$ III) $\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n^2}$
c) I) $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{36-25}{30}$ III) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n(n+1)}$ d) I) $4-\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$ III) $n-\frac{n}{n+1}=\frac{n^2}{n+1}$
e) I) $5^2+6^2=2\cdot5\cdot6+1$ III) $n^2+(n+1)^2=2\cdot n\cdot(n+1)+1$ f) I) $5+5^2=5\cdot6$ III) $n+n^2=n\cdot(n+1)$
g) I) $25-5\cdot4=5$ III) $n^2-n\cdot(n-1)=n$ h) I) $1+25+10=36$ III) $1+n^2+2n=(n+1)^2$
i) I) $1+5+36+7=49$ III) $1+(n-1)+n^2+(n+1)=(n+1)^2$ *oppure* $1+n+(n+1)^2+(n+2)=(n+2)^2$
l) $4\cdot5\cdot6=125-5$ III) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=(n+1)^3-(n+1)$ *oppure* $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=n^3-n$

12) $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=\frac{6\cdot7\cdot(12+1)}{6}$; $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

13) a) $(x+y)-(x-y)=2y$ b) $(x-1)+(x+1)=2x$ c) $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$
d) $(x+1)^2-(x-1)^2=4x$ e) $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=4x+6$ f) $x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$

14) a) $x+2x=21$ b) $x=\frac{2}{3}x+4$ c) $x=x^2-12$ d) $x^2=2x+48$ e) $x=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}$ f) $x^2-y^2=9$ g) $3x=x+8$

15) a) 4; 6; 60 b) 0, −1; 1; $\frac{12}{23}$; −6 c) $-\frac{3}{2}$; $-\frac{13}{12}$; 3 d) $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{13}$; $\frac{1}{5}$ e) 2; 0; $-\frac{300}{37}$

# MONOMI

## 2. DEFINIZIONE DI MONOMIO, GRADO DI UN MONOMIO

**Si dice "monomio" un'espressione algebrica costituita da numeri e/o lettere moltiplicati fra loro.**
Le lettere possono eventualmente essere elevate a potenza con esponente intero positivo.

Esempi di monomi sono:

$4a^2b \quad -\frac{5}{6}ax^3y^5z \quad t^4 \quad -c^2x \quad y \quad -\frac{7}{5}$

(anche una singola lettera o un numero "puro" possono essere considerati come casi particolari di monomio)

In un monomio distinguiamo un **coefficiente** e una **parte letterale**.

| *monomio* | *coefficiente* | *parte letterale* |
|---|---|---|
| $4a^2b$ | $4$ | $a^2b$ |
| $-\frac{5}{6}ax^3y^5z$ | $-\frac{5}{6}$ | $ax^3y^5z$ |
| $t^4$ | $\boxed{+1}$. *Infatti* $t^4 = \underbrace{+1\cdot t^4}_{\text{qualsiasi numero, moltiplicato per +1, resta invariato}}$ | $t^4$ |
| $-c^2x$ | $\boxed{-1}$. *Infatti* $\underbrace{-c^2x}_{\text{opposto del numero } c^2x} = \underbrace{-1\cdot c^2x}_{\text{moltiplicando un numero per } -1 \text{ ne ottengo l'opposto}}$ | $c^2x$ |
| $-\frac{7}{5}$ | $-\frac{7}{5}$ | *non c'è* |
| $4\cdot a^2b\cdot 5bx$ | 20. *Infatti* $4\cdot a^2b\cdot 5bx = \underbrace{20a^2b^2x}_{\textbf{monomio scritto in "forma normale"}}$ | $a^2b^2x$ |

**In un monomio, l'esponente di una lettera si dice anche "grado" di quella lettera.**
**Quando si parla di "GRADO" DI UN MONOMIO**, senza far riferimento a nessuna lettera in particolare, **si vuole intendere il "grado complessivo",**
definito come la **SOMMA DEI GRADI ( = ESPONENTI) DELLE SINGOLE LETTERE**.

| *monomio* | *grado* |
|---|---|
| $4a^2b$ | $2+1=3$ |
| $-\frac{5}{6}ax^3y^5z$ | 10 |
| $t^4$ | 4 |
| $-c^2x$ | 3 |
| $y$ | 1 |
| $-\frac{7}{5}$ | $-\frac{7}{5}$, se pensato come un monomio, è di grado $0$. Infatti è possibile scrivere, ad esempio, $-\frac{7}{5} = -\frac{7}{5}\cdot x^0$ (un numero elevato a 0 dà sempre come risultato 1, tranne il caso particolarissimo $0^0$ = indeterminato ) |

## 3. OPERAZIONI CON MONOMI

- **MOLTIPLICAZIONE**

$$\boxed{\left(7a^4b^3\right)\cdot\left(2a^2bx\right)} \underset{\textit{dissociativa}}{=} 7a^4b^3\cdot 2a^2bx \underset{\textit{commutativa}}{=} 7\cdot 2\cdot a^4\cdot a^2\cdot b^3\cdot b\cdot x \underset{\textit{associativa}}{=}$$
$$= (7\cdot 2)\cdot\left(a^4\cdot a^2\right)\cdot\left(b^3\cdot b\right)\cdot x \underset{\textit{additiva degli esponenti}}{=} \boxed{14a^6b^4x}$$

Per moltiplicare fra loro due o più monomi basta **moltiplicare i coefficienti**,
e poi eseguire il prodotto delle parti letterali tenendo conto della **proprietà additiva degli esponenti**.

Altri esempi: $-4x^3y^2z\cdot\left(3x^2yw\right) = -12x^5y^3zw$ $\qquad -\frac{21^{\,3}}{16_{\,2}}ab\cdot\left(-\frac{24^{\,3}}{35_{\,5}}b\right) = +\frac{9}{10}ab^2$

- **DIVISIONE**

$$\boxed{\left(24a^5b^5c^5\right):\left(8a^3b^4c^5\right)} = \frac{24a^5b^5c^5}{8a^3b^4c^5} = \frac{24}{8}\cdot\frac{a^5}{a^3}\cdot\frac{b^5}{b^4}\cdot\frac{c^5}{c^5} = \boxed{3a^2b}$$

Per dividere due monomi basta **dividere i coefficienti**,
poi eseguire il quoziente delle parti letterali tenendo conto della **proprietà sottrattiva degli esponenti**.

**Volendo, per svolgere una divisione fra due monomi**
**è anche possibile ricorrere agli esponenti negativi:**

$$\boxed{\left(24a^5b^5c^5\right):\left(8a^3b^4c^5\right)} = 24a^5b^5c^5\cdot\frac{1}{8a^3b^4c^5} = 24a^5b^5c^5\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{b^4}\cdot\frac{1}{c^5} = \boxed{{}^{3}\!\cancel{24}a^5b^5c^5\cdot\frac{1}{\cancel{8}}\cdot a^{-3}b^{-4}c^{-5} = 3a^2b}$$

**Si tratta**, quindi, **di trasformare la divisione in moltiplicazione, nel modo seguente:**

- **si moltiplica il coefficiente del primo monomio per il reciproco del coefficiente del secondo;**
- **si cambiano di segno gli esponenti delle lettere del secondo monomio.**

Ecco un altro esempio, svolto nei due possibili modi:

$$\left(\frac{1}{8}x^3y^6\right):\left(-\frac{5}{4}x^2y^2\right) = \begin{cases} \frac{1}{8}:\left(-\frac{5}{4}\right)x^{3-2}y^{6-2} = \frac{1}{{}_2\cancel{8}}\cdot\left(-\frac{\cancel{4}}{5}\right)xy^4 = -\frac{1}{10}xy^4 \\ \frac{1}{{}_2\cancel{8}}x^3y^6\cdot\left(-\frac{\cancel{4}}{5}x^{-2}y^{-2}\right) = -\frac{1}{10}xy^4 \end{cases}$$

Ancora:

$$3ab^3c^3:\left(-2abc^5d^5\right) = 3ab^3c^3\cdot\left(-\frac{1}{2}a^{-1}b^{-1}c^{-5}d^{-5}\right) = -\frac{3}{2}b^2c^{-2}d^{-5}\ \text{(NOTA)}$$

NOTA
Il risultato di quest'ultima espressioncina è dunque un prodotto di
numeri e lettere, in cui qualche lettera è elevata a esponente negativo.
Non si tratta perciò di un monomio "in senso stretto"
(la definizione da noi posta all'inizio prevedeva che in un monomio
le lettere potessero essere elevate soltanto ad esponente positivo);
tuttavia, in questi casi si continua a usare ugualmente
il termine "monomio".

♥ **DIVIDERE**
**per una lettera**
**elevata ad esponente**
**equivale a**
**MOLTIPLICARE**
**per quella stessa**
**lettera**
**con ESPONENTE**
**CAMBIATO**
**DI SEGNO!**

$\boxed{:a^2 \cdot\frac{1}{a^2}\cdot a^{-2}}$ $\qquad$ $\boxed{:a^{-3} \cdot\frac{1}{a^{-3}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{a^3}}\cdot a^3}$

Si può facilmente verificare che **tutte le operazioni che coinvolgono questi "MONOMI CON ESPONENTI ANCHE NEGATIVI" si effettuano esattamente come per i "*monomi in senso stretto*".**
Avvertiamo soltanto che, **in presenza di esponenti negativi, non viene utilizzato il concetto di "grado".**

E' pur vero che, di fronte a una divisione come $3ab^3c^3:\left(-2abc^5d^5\right)$,
nella quale l'osservazione degli esponenti in gioco ci indica subito che nel risultato uscirebbero
esponenti negativi, **potremmo anche scegliere di trasformare in "frazione algebrica"** e scrivere:

$$3ab^3c^3:\left(-2abc^5d^5\right) = \frac{3\cancel{a}b^{\cancel{3}^{2}}\cancel{c^3}}{-2\cancel{a}\cancel{b}c^{\cancel{5}^{2}}d^5} = -\frac{3b^2}{2c^2d^5} \quad \text{che equivale appunto a} \quad -\frac{3}{2}b^2c^{-2}d^{-5}$$

## ❑ ELEVAMENTO A POTENZA

$\boxed{\left(3x^3y^4z\right)^2} \underset{\substack{\text{"la potenza}\\ \text{di un prodotto..."}}}{=} 3^2\cdot\left(x^3\right)^2\cdot\left(y^4\right)^2\cdot z^2 \underset{\substack{\text{moltiplicativa}\\ \text{degli esponenti}}}{=} \boxed{9x^6y^8z^2}$

Per elevare un monomio a potenza basta **elevare a potenza il coefficiente,**
poi elevare a potenza ogni singola lettera tenendo conto della **proprietà moltiplicativa degli esponenti**.

Questo procedimento contiene in sé anche l'applicazione della proprietà che afferma:
*la potenza di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori*.

Altro esempio: $\left(-\frac{2}{5}abc^4\right)^3=\left(-\frac{2}{5}\right)^3a^3b^3c^{12}=-\frac{8}{125}a^3b^3c^{12}$

## ❑ SOMMA ALGEBRICA

Innanzitutto si deve chiarire cosa si intende per "monomi simili".

Def.: **due o più monomi si dicono "simili" se hanno la stessa parte letterale**. Esempi, controesempi:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $3a^2b,\ \frac{1}{5}a^2b,\ -a^2b$ | sono simili | $\frac{3}{4}x^3y^3,\ \frac{1}{2}x^3y^2$ | NON sono simili |
| $4xy,\ 4xy$ | sono simili (addirittura uguali) | $2abx,\ 2abxy$ | NON sono simili |

Regola: **la somma algebrica di due o più monomi simili è un monomio simile a quelli dati, che ha come coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.**

Ad es., $2a+3a=5a$ (*2 volte un numero, più 3 volte LO STESSO numero, dà 5 volte quel numero*)

Nell'eseguire una somma algebrica fra monomi, è **CALDAMENTE RACCOMANDATO di**
♥ **SOTTOLINEARE in modo diverso le "famigliole" di termini simili**:

❑ $x^3\underline{+3x^2}\underline{+5x}\underline{+12x^2}\underline{+x^2}\underline{-7x}=x^3+16x^2-2x$

❑ $\underline{-\frac{1}{6}ab}+\underline{\frac{1}{10}ab}\underline{-ab^2}+\underline{\frac{1}{7}ab^2}\underline{+ab}+\underline{\frac{1}{15}ab}=$

$=\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+1+\frac{1}{15}\right)ab+\left(-1+\frac{1}{7}\right)ab^2=$

$=\frac{-5+3+30+2}{30}ab-\frac{6}{7}ab^2=\frac{30}{30}ab-\frac{6}{7}ab^2=ab-\frac{6}{7}ab^2$

*Osserviamo che i risultati delle due espressioni qui a fianco non sono più ulteriormente semplificabili:*
**la somma algebrica fra monomi NON simili non conduce ad un unico monomio, può solo essere lasciata indicata così com'è.**

♥ Questo è importante!
Un'espressioncina come $2a+3b$ NON può assolutamente essere portata sotto una forma ancora più semplice.

### APPROFONDIMENTO

La regola per la somma algebrica di due o più monomi simili,
che abbiamo giustificato elementarmente in un caso particolare a coefficienti interi ( $2a+3a=5a$ ),
richiede precisamente, per una sua giustificazione più generale, di pensare a quel procedimento, che è **l'inverso dell'applicazione della propr. distributiva**, ed è chiamato "**raccoglimento a fattor comune**".

- Ad esempio, possiamo scrivere $2a+3a=(2+3)\cdot a=5a$
  dove il passaggio $2a+3a=(2+3)\cdot a$ è, appunto, un "raccoglimento a fattor comune".
- Altro esempio: $-\frac{1}{2}xy+\frac{3}{4}xy-2xy=\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-2\right)xy=\frac{-2+3-8}{4}xy=-\frac{7}{4}xy$

### ♥ RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE

**Data una somma algebrica i cui termini siano dei prodotti,
se c'è un fattore che è comune a tutti questi prodotti, esso potrà essere "raccolto", ossia:
potrà essere scritto fuori da una parentesi, al cui interno si metterà quella somma algebrica
la quale, rimoltiplicata per il numero scritto fuori, permette di riottenere l'espressione iniziale.
La somma algebrica che finisce fra parentesi sarà, evidentemente, ricavabile da quella iniziale,
privando ciascun prodotto del fattore raccolto ( = dividendo ciascun prodotto per il fattore raccolto).**

Esempi:

$5\cdot7+5\cdot8+5\cdot9=5\cdot(7+8+9)=5\cdot24=120$

$93-75+36-21=3\cdot(31-25+12-7)=3\cdot11=33$

$2^{12}-3\cdot2^{10}=2^{10}\cdot\left(2^2-3\right)=2^{10}\cdot1=1024$

$ab+ac+ad=a(b+c+d)$

$35x-14y=7(5x-2y)$

$12x^3y^2z-18x^5y=6x^3y\left(2yz-3x^2\right)$

## 4. ESERCIZI SUI MONOMI (risultati alla pag. successiva)

### ❑ Moltiplicazione

1) $3x \cdot 4x$ 2) $11n^2 \cdot 3n^4$ 3) $2b^4 \cdot 2b^2 \cdot 2b$ 4) $3y^3 \cdot 2y^2$ 5) $2a \cdot 3ab \cdot 4abc$

6) $6x \cdot 4xy^3z \cdot 2xy^4$ 7) $2k \cdot \left(-3k^3\right)$ 8) $\left(-10x^3y\right)\left(-3x^2y^2\right)$ 9) $-a^2 \cdot 4a^2 \cdot 3a^3$

10) $-\frac{1}{2}xy^5z \cdot \frac{21}{8}xy^6 \cdot \left(-\frac{12}{35}xy^2z^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{9}x\right)$ 11) $\frac{3}{25}ab^3\left(-\frac{15}{4}ac^3\right)\left(-\frac{5}{18}b^3\right)$ 12) $-2x\left(-\frac{1}{4}x\right)\left(-\frac{1}{8}xy\right) \cdot 32x^3$

### ❑ Divisione

13) $15a^8 : \left(5a^2\right)$ 14) $6x^6 : \left(3x^3\right)$ 15) $18a^4 : \left(6a^3\right)$ 16) $28b^5 : \left(-4b\right)$ 17) $-4x^5y^6z^7 : \left(2x^2y\right)$

18) $10x^2 : 2$ 19) $-8xy : 4$ 20) $a^2 : a$ 21) $-a^3 : a$ 22) $-a^3 : a^3$

23) $\frac{22}{15}a^7b^{10} : \left(-\frac{55}{3}a^4b^9\right)$ 24) $-\frac{3}{5}x^5 : \left(-\frac{7}{10}x^3\right)$ 25) $-\frac{125}{4}a^9b^8c^7 : \left(-\frac{75}{8}a^7b^7c^7\right)$

26) $-\frac{2}{7}x^6y : \left(\frac{8}{21}x^2y\right)$ 27) $-\frac{5}{14}x^5y^2z^3 : \left(\frac{10}{21}x^4y^2z\right)$ 28) $2x^2 : \left(-\frac{3}{5}x\right)$

29) $-7a^2 : a^2$ 30) $a^2 : \left(-7a^2\right)$ 31) $3a^{10} : \left(11a^2\right)$ 32) $-7x^3y : \left(14x^2\right)$ 33) $xy : \left(5x\right)$

34) $x^3 : \left(\frac{1}{3}x\right)$ 35) $\frac{3}{5}a^4 : \left(\frac{3}{5}a^4\right)$ 36) $\frac{1}{2}a : \left(-\frac{1}{2}a\right)$ 37) $\frac{1}{2}a : \left(-2a\right)$ 38) $2a : \left(-\frac{1}{2}a\right)$

### ❑ Elevamento a potenza

39) $\left(2x^2\right)^3$ 40) $\left(-3a^4y^5\right)^2$ 41) $\left(-3a^4y^5\right)^3$ 42) $\left(-2xy^2z^3w^4\right)^5$

43) $\left(\frac{2}{5}x^4y\right)^3$ 44) $\left(-x\right)^2$ 45) $\left(-x\right)^3$ 46) $\left(-0,25a^3\right)^2$

### ❑ Somma algebrica

47) $2x+3x+4x$ 48) $3y^2+5y^2-y^2$ 49) $ab-8ab+6ab$ 50) $3x+4y+5x-2z+y+3z$

51) $4a^2+3a-2+4a-4a^2+1$ 52) $a^2-ab+2ab-b^2+a^2-ab$ 53) $14x-4x^2+x^2-4x-10x+3x^2$

54) $x+\frac{1}{2}x$ 55) $y-\frac{1}{4}y$ 56) $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2$ 57) $\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{3}a^2b$ 58) $\frac{13}{6}x-\frac{2}{3}x+x$

59) $\frac{3}{5}x^3-x^3$ 60) $-\frac{1}{6}a-\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}a$ 61) $-\frac{3}{10}x^2+\frac{13}{10}x^2$ 62) $-\frac{3}{5}a^2-\frac{1}{10}a^2+\frac{3}{10}a^2$

### ❑ Esponenti negativi

63) $10a^{-6} \cdot 2a^{-3}$ 64) $3a^5 \cdot 2a^{-2}$ 65) $\frac{1}{5}a^{-3} \cdot \frac{1}{4}a$ 66) $4x^{-2}y^{-5} \cdot 2x^2y^{-1}$

67) $10a^{-6} : \left(2a^{-3}\right)$ 68) $3a^5 : \left(2a^{-2}\right)$ 69) $\frac{1}{5}a^{-3} : \left(\frac{1}{4}a\right)$ 70) $4x^{-2}y^{-5} : \left(2x^2y^{-1}\right)$

71) $3a^{-2}+5a^{-2}$ 72) $3a^{-2}-5a^{-2}$ 73) $0,\bar{3}xy^{-1}-xy^{-1}$ 74) $a^{-1}b^{-1}-2a^{-1}b^{-1}$

75) $3x : \left(-4x^4y\right)$ 76) $1 : \left(\frac{2}{3}x\right)$ 77) $\left(x+2x\right) : \left(6x^{-1}\right)$ 78) $\left(x+2x\right) \cdot \left(6x^{-1}\right)$

79) $\left(\frac{2}{5}x^3y^{-4}\right)^{-2}$ 80) $\left(-4ab^{-2}\right)^{-1}$ 81) $\left(\frac{1}{3}x^4y^{-5}\right)^{-3}$ 82) $\left(-10ab^{-3}\right)^{-2}$

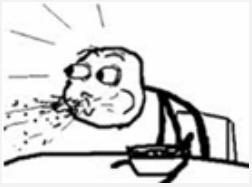
83) **POVERO PIERINO, NON NE AZZECCA UNA …**
**VUOI CORREGGERE GLI ERRORI TREMENDI CHE IL COMPAGNO HA COMMESSO?**

a) $7xy-xy=7$ b) $5a-4a=1$ c) $\left(3x^2\right)^2=3x^4$ d) $\left(3a^3\right)^3=27a^{27}$

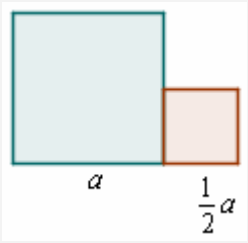
e) $4x+5x=9x^2$ f) $7a \cdot 2a=14a$ g) " $-x^2$, quando $x=7$, vale 49 "

h) $7x+5y=12xy$ i) $(-3xy):(-3xy)=0$ l) $5ab^2 : (3b) = 5ab^2 \cdot \frac{1}{3}b$

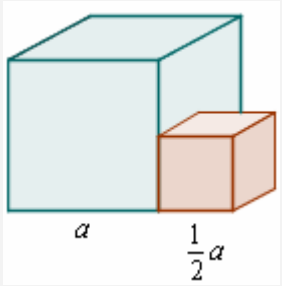
m) "Il grado del monomio $6x^3y^4$ è 12" n) $2x^3y^2 : (7x^2y) = 2x^3y^2 \cdot 7x^{-2}y^{-1}$



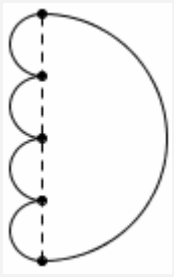
84) La figura qui a destra mostra due quadrati i cui lati misurano rispettivamente $a$ e $\frac{1}{2}a$.
Quanto misura l'area della superficie? E il suo contorno?




85) Due cubi accostati.
Quanto misura il volume del solido? E la sua superficie totale?




86)

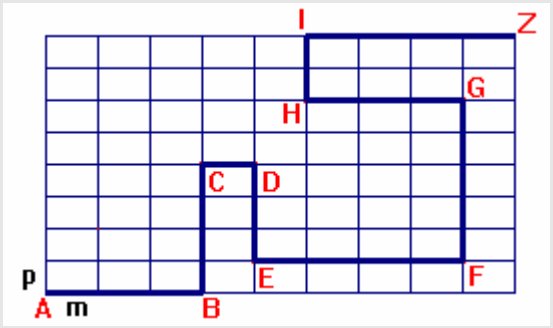


La figura mostra 5 semicirconferenze; indichiamo con R il raggio della maggiore. Allora sia l'area della figura, che la lunghezza del suo contorno, sono espresse da monomi: quali?

87) Supponiamo che un prezzo sia inizialmente di $p$ euro. Se viene prima aumentato, poi dopo un certo tempo diminuito, del 20%, allora il prezzo finale è espresso da un monomio: quale?

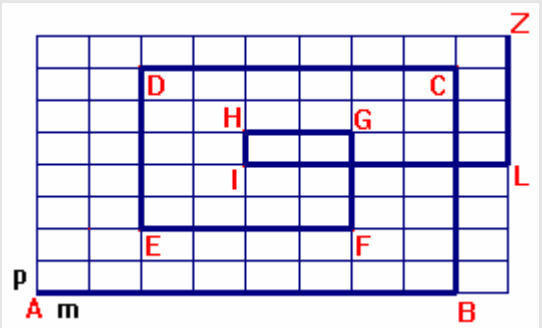
88) Supponiamo che una laboriosa schedatura di dati richieda $x$ addetti per essere portata a termine in 10 giorni; quanti addetti ci vorranno per far sì che il lavoro richieda 8 giorni soltanto? La risposta è un monomio.

89)




Ogni segmentino orizzontale misura $m$, ogni segmentino verticale misura $p$. Il cammino ABCDEFGHIZ equivale a uno spostamento

$orizzontale = 3m + m + 4m - 3m + 4m = \boxed{9m}$;
$verticale = 4p - 3p + 5p + 2p = \boxed{8p}$




Calcola ora tu il valore degli spostamenti corrispondenti a quest'altro cammino ABCDEFGHILZ.
… Il risultato era prevedibile, ti pare?

90) Determina la superficie totale di un cubo il cui volume è uguale a $\frac{1}{27}k^{27}$



**RISULTATI**

1) $12x^2$ 2) $33n^6$ 3) $8b^7$ 4) $6y^5$ 5) $24a^3b^2c$ 6) $48x^3y^7z$ 7) $-6k^4$ 8) $30x^5y^3$ 9) $-12a^7$ 10) $-\frac{1}{20}x^4y^{13}z^3$

11) $\frac{1}{8}a^2b^6c^3$ 12) $-2x^6y$ 13) $3a^6$ 14) $2x^3$ 15) $3a$ 16) $-7b^4$ 17) $-2x^3y^5z^7$ 18) $5x^2$ 19) $-2xy$ 20) $a$

21) $-a^2$ 22) $-1$ 23) $-\frac{2}{25}a^3b$ 24) $\frac{6}{7}x^2$ 25) $\frac{10}{3}a^2b$ 26) $-\frac{3}{4}x^4$ 27) $-\frac{3}{4}xz^2$ 28) $-\frac{10}{3}x$ 29) $-7$ 30) $-\frac{1}{7}$

31) $\frac{3}{11}a^8$ 32) $-\frac{1}{2}xy$ 33) $\frac{1}{5}y$ 34) $3x^2$ 35) $1$ 36) $-1$ 37) $-\frac{1}{4}$ 38) $-4$ 39) $8x^6$ 40) $9a^8y^{10}$ 41) $-27a^{12}y^{15}$

42) $-32x^5y^{10}z^{15}w^{20}$ 43) $\frac{8}{125}x^{12}y^3$ 44) $x^2$ 45) $-x^3$ 46) $\frac{1}{16}a^6$ 47) $9x$ 48) $7y^2$ 49) $-ab$ 50) $8x+5y+z$

51) $7a-1$ 52) $2a^2-b^2$ 53) $0$ 54) $\frac{3}{2}x$ 55) $\frac{3}{4}y$ 56) $-x^2$ 57) $\frac{5}{6}a^2b$ 58) $\frac{5}{2}x$ 59) $-\frac{2}{5}x^3$ 60) $-a$ 61) $x^2$

62) $-\frac{2}{5}a^2$ 63) $20a^{-9}$ 64) $6a^3$ 65) $\frac{1}{20}a^{-2}$ 66) $8y^{-6}$ 67) $5a^{-3}$ 68) $\frac{3}{2}a^7$ 69) $\frac{4}{5}a^{-4}$ 70) $2x^{-4}y^{-4}$ 71) $8a^{-2}$

72) $-2a^{-2}$ 73) $-\frac{2}{3}xy^{-1}$ 74) $-a^{-1}b^{-1}$ 75) $-\frac{3}{4}x^{-3}y^{-1}$ 76) $\frac{3}{2}x^{-1}$ 77) $\frac{1}{2}x^2$ 78) $18$ 79) $\frac{25}{4}x^{-6}y^8$

80) $-\frac{1}{4}a^{-1}b^2$ 81) $27x^{-12}y^{15}$ 82) $\frac{1}{100}a^{-2}b^6$ 83) Consultati con i tuoi compagni … 84) $\frac{5}{4}a^2, 5a$

85) $\frac{9}{8}a^3,\ 7a^2$ 86) $\frac{5}{8}\pi R^2, 2\pi R$ 87) $\frac{96}{100}p = \frac{24}{25}p$ 88) $\frac{5}{4}x$ 89) Stesso risultato di prima! 90) $\frac{2}{3}k^{18}$

## 5. ESPRESSIONI VARIE CON MONOMI (la freccia, se c'è, è un link verso la correzione)

1) $\left[2\cdot(3x+4x+x)-5x\cdot 3\right]:x$ 2) $\left(x^2-4x-2x\cdot x+x^2\right)^2-(4x)^2$ ⇨ 3) $\left(x^3+2x^3+7x^3\right):(-5x)+3x^2$

4) $4\left(5a^6-7a^6\right)+\left(3a^3\right)^2$ 5) $\left[\left(3x^2-x^2+2x^2\right)\cdot(3x-x+2x)+(2x)^3\right]:(12x)$ 6) $\left(-a^3-3a^3\right):\left(a^2-5a^2\right)$

7) $2\cdot\left[(3x-x-4x)(x+5x-3x)+7x^2\right]\cdot 3x-5x^3$ 8) $\left\{\left[(a+2a)(a-2a)+4a^2\right]\cdot 2a+(-2a)^3+7a^3\right\}^3$

9) $a+\left[3a\cdot(-3ab)-5b\left(-2a^2\right)\right]:(-ab)$ 10) $\left[(3a-a)(3a+a)-(3a)^2\right]^2-2a^4$ 11) $\left[-x\cdot(-2x)-x^2\right]:(-x)$

12) $x^4+\left(-x\cdot x^2+2x^2\cdot x+3x^3-4x^3\right):x-2x^2\left(2x^2-x^2\right)$ 13) $-(abc+2abc)(abc-2abc)^2-2^2\cdot(-abc)^3$

14) $\left[(-3ab)^2+(-2ab)^3:(ab)+2a^2b\cdot b\right]^2-\frac{1}{2}(-2ab)^4$ 15) $\left[\left(y^2+\frac{1}{4}y^2\right)\left(y-\frac{1}{5}y\right)+y^3\right]^2-3y^6$ ⇨

16) $\left[\left(\frac{1}{8}n-\frac{1}{4}n+\frac{1}{2}n\right)\cdot\frac{4}{3}n\right]^2:\left[(-n)^4+n^4+2n^4\right]-\left(-\frac{1}{2}\right)^4$ ⇨ 17) $\left[\left(\frac{9}{8}y^4-y^4\right):\left(-\frac{1}{2}y\right)^3\right]:y$

18) $\left\{\left[-c^2\cdot(-c)^2+c\cdot(-c)^3-c^4+\left(-2c^2\right)^2\right]:c+(2c)^3\right\}:c-(3c)^2$ ⇨ 19) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x-x\right)\cdot\left(-2x^2\right)^2+x^5$

20) $\left\{\left[-\frac{2}{5}x^2\cdot\left(-\frac{15}{4}x\right)\cdot(-2x)-x^4\right]:\left(-4x^3\right)+\frac{1}{4}x\right\}(-x)+\left(-\frac{3}{2}x\right)^2$ 21) $\left[\left(-\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{8}t^4\right):3+\left(\frac{1}{2}t\right)^3\cdot t\right]:3$

22) $\left[\left(\frac{3}{2}pq-\frac{2}{3}pq-pq\right):\left(\frac{1}{3}p-\frac{1}{2}p\right)-3q\right]^2-3q^2$ 23) $\left\{\left[-\frac{1}{2}a\cdot\left(-\frac{2}{3}b\right)\left(-\frac{3}{4}c\right)-\frac{3}{4}abc\right]:\left(\frac{ab}{2}\right)-4c\right\}:(6c)$

24) $\left(\frac{3}{4}a^2\right)^2+\frac{1}{3}\left(a^4+\frac{1}{2}a^4+\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{8}a^4\right)-\left[\left(\frac{1}{2}a\right)^2\right]^2-2a^2\cdot\left(-\frac{1}{4}a\right)^2$ 25) $\left(\frac{3}{2}k\right)^2-3\left(2k-\frac{3}{2}k\right)\left(k+\frac{1}{2}k\right)$

26) $0,\bar{5}\cdot\left[0,25\left(n^3+n^2\cdot n\right)+0,5\left(n^2\right)^3:n^3\right]\cdot 9n-\left(2n^2\right)^2$ 27) $-x^3+\left(3,456x^2-6,543x^2+0,087x^2\right)\cdot\left(-0,\bar{3}x\right)$

28) $\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x^2\right):\left(\frac{3}{4}x-\frac{x}{4}\right)-x$ 29) $\left[-\frac{4}{3}x^3y\cdot\frac{15}{8}xy^3+3(-xy)^4-\frac{1}{2}x\left(-xy^2\right)^3:y^2\right]:(-xy)^3+2xy$

30) $\frac{1}{12}\left(a^{-2}+2a^{-2}+3a^{-2}+6a^{-2}\right)\left(\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{2}a^2\right)$ 31) $\left[\left(a^{-1}-2a^{-1}-3a^{-1}\right)\cdot\frac{1}{4}a^2\right]:a+1$

32) $\left[\left(x^{-2}-3x^{-3}+x^{-2}+x^{-3}+2x^{-3}\right)^{-2}+\frac{1}{2}x\cdot\frac{3}{2}x\cdot(-x)^2\right]:(-x)-(-x)^3$ ⇨

33) $\left[\left(-2x^2\right)^{-5}\left(4x^3\right)^2-\frac{3}{2}x^2:x^6+\frac{3}{x^4}\right]^{-2}$ ⇨ 34) $\left[\frac{2}{5}a^{-2}b^{-5}:\left(\frac{1}{4}a^{-5}b\right)\cdot\left(\frac{a^{-1}b^2}{2}\right)^3+\frac{3}{5}\right]:a^2\cdot\left(-\frac{5}{2}a^{-1}\right)^2$

35) $y^2\left\{\left[\left(2x^{-1}y\right)^{-2}+\left(2xy^{-1}\right)^2\right]\cdot 4x^{-2}-\left(-\frac{1}{2}y\right)^{-4}\cdot y^2\right\}$ 36) $\left\{1:\left[\left(x^{-2}\right)^2\cdot\left(x^2\right)^{-2}\right]+(-x)^8\right\}:x^7-x$

37) $\left[\frac{3}{4}a^{-5}b^6c^{-1}\cdot\frac{2}{3}a^{-1}b^{-5}c+\frac{1}{2}\left(a^{-3}\right)^2b\right]:\left(\frac{5}{3}a^{-8}b\right)-\frac{2}{5}(-2a)^2$ 38) $\left[a:(2a^4)-\frac{3}{2}a^{-5}:a^{-2}\right]^4\cdot a^{13}$

39) $x\cdot\left[\left(0,125x^2\right)^{-1}\cdot 0,25x^3\right]^{-1}$ 40) $\left[\frac{2}{5}x^{-10}y^{-7}z^{-1}:\left(\frac{3}{10}x^{-8}y^{-8}z\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}x^2y^{-1}z^3\right)-4z\right]:\left[(-yz)^3:\left(-\frac{1}{2}y\right)^3:\left(8z^2\right)\right]$

### RISULTATI

1) 1 2) 0 3) $x^2$ 4) $a^6$ 5) $2x^2$ 6) $a$ 7) $x^3$ 8) $a^9$ 9) 0 10) $-a^4$ 11) $-x$ 12) $-x^4$ 13) $a^3b^3c^3$
14) $a^4b^4$ 15) $y^6$ 16) 0 17) $-1$ 18) 0 19) 0 20) $x^2$ 21) 0 22) $q^2$ 23) $-1$ 24) $a^4$ 25) 0 26) $n^4$
27) 0 28) $x$ 29) $xy$ 30) 1 31) 0 32) 0 33) $x^8$ 34) $5a^{-4}$ 35) 1 36) $x$ 37) $-a^2$ 38) $a$ 39) 1/2 40) $-5$

# POLINOMI

## 6. DEFINIZIONE DI POLINOMIO, GRADO DI UN POLINOMIO

**Si dice "polinomio" la somma indicata di due o più monomi.**

Esempi di polinomi sono:

$$5a+4b \qquad \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{6}x-1$$

I monomi che compongono un polinomio vengono chiamati i "termini" del polinomio stesso.

| | |
|---|---|
| 2 termini | binomio |
| 3 termini | trinomio |
| 4 termini | quadrinomio |
| 5 termini | polinomio di 5 termini |
| … | … |

**Si dice "GRADO" DI UN POLINOMIO, IL MASSIMO FRA I GRADI DEI SUOI MONOMI**
(ricorda che il *grado di un monomio* è la *somma dei gradi*, ossia degli esponenti, *delle sue lettere*).
**Se tutti i termini di un polinomio hanno lo stesso grado, il polinomio si dice "omogeneo".**

| | |
|---|---|
| $\underbrace{-\frac{1}{5}a^3b^2c}_{3+2+1=6°\ grado}\ \underbrace{+\frac{4}{7}ab^3c^3}_{1+3+3=7°\ grado}\ \underbrace{-\frac{2}{3}b^4}_{4°\ grado}$ | trinomio di 7° grado |
| $x^2-5x+4$ | trinomio di 2° grado |
| $7a-2$ | binomio di 1° grado ( = lineare) |
| $a^5+2a^4b+3a^3b^2-a^2b^3-ab^4-b^5$ | polinomio omogeneo di 6 termini, di 5° grado |

## 7. OPERAZIONI CON POLINOMI

- **SOMMA E DIFFERENZA (SOMMA ALGEBRICA)**

$$(8x+2y-1)-(3x-y+7)+(-5x+3)=8x+2y-1\underbrace{-3x+y-7}_{\substack{\text{"–" davanti a somma algebrica cambia tutti i segni}}}\ \underbrace{-5x+3}_{\substack{\text{"+" davanti a somma algebrica conferma tutti i segni}}}=3y-5$$

- **PRODOTTO DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO E VICEVERSA**

**Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma:**

quando si deve moltiplicare una somma per un numero, è possibile, volendo, moltiplicare per quel numero ciascun addendo della somma, poi addizionare i prodotti parziali così ottenuti.

$$(9+4+7)\cdot 5=9\cdot 5+4\cdot 5+7\cdot 5=45+20+35=100$$

$$3\cdot(1+3+5+7)=3\cdot 1+3\cdot 3+3\cdot 5+3\cdot 7=3+9+15+21=48$$

$$\left(\frac{12}{5}+\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{10}{3}=\frac{12}{5}\cdot\frac{10}{3}+\frac{5}{2}\cdot\frac{10}{3}=8+\frac{25}{3}=\frac{49}{3}$$

$$3\cdot(-2+7-1)=3\cdot(-2)+3\cdot(+7)+3\cdot(-1)=-6+21-3=12$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(-3-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot(-3)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{10}-\frac{1}{4}=\frac{30+2-5}{20}=\frac{27}{20}$$

$$a\cdot(b+c+d+e)=ab+ac+ad+ae$$

$$\left(x^2+3x-5\right)\cdot x^3=x^5+3x^4-5x^3$$

$$2ab\left(a+b\right)=2a^2b+2ab^2$$

$$\left(4a^2x-\frac{1}{3}ax^2+\frac{15}{2}\right)\cdot\left(-\frac{12}{5}ax^2\right)=-\frac{48}{5}a^3x^3+\frac{4}{5}a^2x^4-18ax^2$$

## ❑ PRODOTTO DI DUE POLINOMI

**Proprietà distributiva generalizzata:**

quando si deve moltiplicare una somma per un'altra somma, è possibile, volendo, moltiplicare ciascun addendo della prima somma per ciascun addendo della seconda, poi addizionare i prodotti parziali così ottenuti.

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}+3\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot 3=$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{3}{2}+\frac{4}{15}+1=\frac{12+45+8+30}{30}=\frac{95}{30}=\frac{19}{6}$$

$$(-2-3+4)\cdot(-5+3)=$$

$$=(-2)(-5)+(-2)(+3)+(-3)(-5)+(-3)(+3)+(+4)(-5)+(+4)(+3)=$$

$$=+10-6+15-9-20+12=+2$$

$$(a+b)\cdot(c+d+e)=ac+ad+ae+bc+bd+be$$

$$(x+y)(x-y+1)=x^2\cancel{-xy}+x\cancel{+xy}-y^2+y=$$

$$=x^2-y^2+x+y$$

$$\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}b^2\right)\cdot(2ab+1)=a^3b+\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}ab^3+\frac{1}{3}b^2$$

Il procedimento, chiamato in Inglese **FOIL** (vedi finestrella qui a fianco), è ben descritto, ad esempio, in QUESTO ⇨ sito.

In Inglese l'applicazione della "distributiva generalizzata" viene di norma denominata con la sigla **FOIL** (si pronuncia come si scrive).

**FOIL = First, Outside, Inside, Last.**

**F**irst: multiply the first term in each set of parenthesis
**O**utside: multiply the two terms on the outside
**I**nside: multiply both of the inside terms
**L**ast: multiply the last term in each set of parenthesis
(da www.freemathhelp.com)

## ❑ PRODOTTO DI UN MONOMIO PER DUE POLINOMI

$$\boxed{5a^2(2a+b)(3a-b)}=\begin{cases}(10a^3+5a^2b)(3a-b)=30a^4-10a^3b+15a^3b-5a^2b^2=30a^4+5a^3b-5a^2b^2\\(15a^3-5a^2b)(2a+b)=30a^4+15a^3b-10a^3b-5a^2b^2=30a^4+5a^3b-5a^2b^2\\\boxed{5a^2(6a^2-2ab+3ab-b^2)=5a^2(6a^2+ab-b^2)=30a^4+5a^3b-5a^2b^2}\end{cases}$$

♥ Delle tre possibili modalità, è **DECISAMENTE PREFERIBILE L'ULTIMA (moltiplicare innanzitutto i due polinomi, lasciando il monomio indicato)** perché conduce a situazioni di calcolo più comode

## ❑ PRODOTTO DI TRE POLINOMI

$$\boxed{(2a-1)(3a-1)(a+1)}=\begin{cases}(2a-1)(3a^2+3a-a-1)=(2a-1)(3a^2+2a-1)=6a^3+4a^2-2a-3a^2-2a+1=\\\qquad=6a^3+a^2-4a+1\\(3a-1)(2a^2+2a-a-1)=(3a-1)(2a^2+a-1)=ecc.\\(a+1)(6a^2-2a-3a+1)=(a+1)(6a^2-5a+1)=ecc.\end{cases}$$

## ❑ PRODOTTO DI DUE POLINOMI, PRECEDUTO DAL SEGNO –

Osserviamo **innanzitutto che un segno " – " davanti ad un prodotto equivale ad un fattore –1,** perché

- " – " davanti ad un prodotto indicherebbe di eseguire il prodotto e poi cambiare di segno il risultato
- ma allora, evidentemente, sostituendo un fattore –1 al posto del " – " l'effetto sarà il medesimo

$$\boxed{-(a+2)(a-b-1)}=\begin{cases}\boxed{-(a^2-ab-a+2a-2b-2)}=-(a^2-ab+a-2b-2)=-a^2+ab-a+2b+2\\(-a-2)(a-b-1)=-a^2+ab+a-2a+2b+2=-a^2+ab-a+2b+2\\(a+2)(-a+b+1)=-a^2+ab+a-2a+2b+2=-a^2+ab-a+2b+2\end{cases}$$

♥ Delle tre possibili modalità, **è DECISAMENTE PREFERIBILE LA PRIMA (moltiplicare innanzitutto i due polinomi, lasciando il segno " – " indicato)** perché conduce a situazioni di calcolo più comode.

## ❑ POTENZA DI UN POLINOMIO

- $\boxed{(a+b)^2} = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 \underline{+ab} \underline{+ab} + b^2 = \boxed{a^2+2ab+b^2}$

  da cui, per esempio:

$$(5x^3+3x)^2 = (5x^3)^2 + 2\cdot 5x^3\cdot 3x + (3x)^2 = 25x^6+30x^4+9x^2$$

$$(x-3)^2 = (x+(-3))^2 = x^2+2\cdot x\cdot(-3)+(-3)^2 = x^2-6x+9$$

- $\boxed{(a+b)^3} = (a+b)^2\cdot(a+b) = (a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b) =$

$$= a^3 \underline{+2a^2b} \underline{+ab^2} \underline{+a^2b} \underline{+2ab^2} + b^3 = \boxed{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

- $\boxed{(a+b)^4} = (a+b)^3\cdot(a+b) = \ldots = \boxed{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}$
- …
- $\boxed{(a+b+c)^2} = (a+b+c)\cdot(a+b+c) = a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2 =$

$$= \boxed{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$$

- …

Gli esempi fatti mostrano che

**per ELEVARE A POTENZA UN POLINOMIO**
**si deve ricorrere ad un PRODOTTO RIPETUTO,**
**oppure applicare FORMULE PARTICOLARI**.

Di queste formule ci occuperemo in una sezione successiva
("**PRODOTTI NOTEVOLI**", ossia "prodotti degni di nota, rilevanti", a partire da pagina 122).

## ❑ QUOZIENTE DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO

**Proprietà distributiva del quoziente rispetto alla somma:**

quando si deve dividere una somma per un numero, è possibile, volendo, dividere per quel numero ciascun addendo della somma, poi addizionare i quozienti parziali così ottenuti.

$$(15+10+35):5 = 15:5+10:5+35:5 = 3+2+7 = 12$$

$$\frac{15+10+35}{5} = \frac{15}{5}+\frac{10}{5}+\frac{35}{5} = 3+2+7 = 12$$

$$\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+2\right):(-2) = -\frac{3}{4}:(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right):(-2)+2:(-2) =$$

$$= \frac{3}{8}+\frac{1}{4}-1 = -\frac{3}{8}$$

Esempi:

$$\left(-6x^3+x^2y\right):x^2 = -6x^3:x^2+x^2y:x^2 = -6x+y$$

$$\left(\frac{1}{2}a^2+5ab-3b^2\right):(-3) = -\frac{1}{6}a^2-\frac{5}{3}ab+b^2$$

**Potrà essere comodo in taluni casi trasformare in moltiplicazione**, come nell'esempio che segue:

$$\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^2+x\right):\left(-\frac{4}{9}x\right) \overset{\text{NOTA}}{=} \left(\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^2+x\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}x^{-1}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}x^2+\frac{15}{8}x-\frac{9}{4}$$

NOTA
**DIVIDERE per una lettera elevata ad esponente equivale a MOLTIPLICARE per quella stessa lettera con ESPONENTE CAMBIATO DI SEGNO!**

Gli **ESERCIZI SULLE ESPRESSIONI CON POLINOMI** si trovano alle **pagine 118 e 119**

# 8. ESPRESSIONI CON ESPONENTI LETTERALI

Ecco una piccola **rassegna di esempi svolti**.

$a^{3k+1}\cdot a^{2k+3}=a^{(3k+1)+(2k+3)}=a^{3k+1+2k+3}=a^{5k+4}$ (propr. add. degli esp.)

$a^{3k+1}:a^{2k+3}\overset{\text{NOTA 1}}{=}a^{(3k+1)-(2k+3)}=a^{3k+1-2k-3}=a^{k-2}$ (propr. sottr. degli esp.)

$\left(a^{3k+1}\right)^{2k+3}=a^{(3k+1)(2k+3)}=a^{6k^2+9k+2k+3}=a^{6k^2+11k+3}$ (propr. molt. degli esp.)

$\frac{1}{2}t^{3k}\cdot\frac{1}{5}t^{k}=\frac{1}{10}t^{3k+k}=\frac{1}{10}t^{4k}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}t^{3k}:\left(\frac{1}{5}t^{k}\right)=\frac{1}{2}t^{3k}\cdot 5t^{-k}=\frac{5}{2}t^{2k}$

$\left(a^{n+2}+a^{n}\right)\cdot a^{3}=a^{n+5}+a^{n+3}$ $\qquad$ $\left(a^{n+2}+a^{n}\right):a^{3}=a^{n-1}+a^{n-3}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a^x\cdot a^x=a^{2x}$ | $a^x:a^x=1$ | $\left(a^x\right)^x\overset{\text{NOTA 2}}{=}a^{x^2}$ | $a^x+a^x=2a^x$ |
| $a^x\cdot a^2=a^{x+2}$ | $a^x:a^2=a^{x-2}$ | $\left(a^x\right)^2=a^{2x}$ | $a^x+a^2=$ STOP (non sono monomi simili) |
| $a^x\cdot a=a^{x+1}$ | $a^x:a=a^{x-1}$ | | |
| $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$ | $a^x:a^y=a^{x-y}$ | $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$ | $a^x+a^y=$ STOP |
| $a^x\cdot a^{x-3}=a^{2x-3}$ | $a^x:a^{x-3}=a^3$ | $\left(a^x\right)^{x-3}=a^{x^2-3x}$ | $a^x+a^{x-3}=$ STOP |

$a^{x+y}\cdot a^{x-y}=a^{x+y+x-y}=a^{2x}$ $\qquad$ $a^{x+y}:a^{x-y}=a^{x+y-x+y}=a^{2y}$

$\left(a^{x+y}\right)^{x-y}=a^{(x+y)(x-y)}=a^{x^2\cancel{-xy}\cancel{+xy}-y^2}=a^{x^2-y^2}$

$\left(x^n+2\right)\left(x^n-3\right)=x^{2n}-3x^n+2x^n-6=x^{2n}-x^n-6$

$\left(a^b\right)^3:\left(a^{b-c}\right)^2=a^{3b}:a^{2b-2c}=a^{3b-2b+2c}=a^{b+2c}$ $\qquad$ $a^k\left(2a^k+3a\right)=2a^{2k}+3a^{k+1}$

**NOTA 1** - Oppure:

$a^{3k+1}:a^{2k+3}=$
$=a^{3k+1}\cdot a^{-(2k+3)}=$
$=a^{3k+1}\cdot a^{-2k-3}=$
$=a^{3k+1-2k-3}=a^{k-2}$

DIVIDERE per una lettera elevata ad esponente è come MOLTIPLICARE per quella stessa lettera con ESPONENTE CAMBIATO DI SEGNO!

♥ **NOTA 2**

😐 *Professore, non riesco a convincermi del fatto che* $(a^x)^x=a^{x^2}$ *…*
*Mi confondo, e sono portato a scrivere che il risultato è invece* $a^{2x}$ *…*

☺ Pierino, **quando hai qualche dubbio, prova a dare un valore numerico alla lettera che compare a esponente**!
Ad es., con $x=3$ avresti $(a^x)^x=(a^3)^3$.
Ora, il risultato è $a^9$, che va d'accordo con $a^{x^2}$ e NON con $a^{2x}$ !!!

## ESERCIZI

**1)** $6x^{n-1}\cdot 3x^{n-2}$ **2)** $6x^{n-1}:\left(3x^{n-2}\right)$ **3)** $\left(x^{n-1}\right)^{n-2}$ **4)** $\frac{2}{3}a^{y+2}\cdot\frac{3}{4}a^{2y}\cdot\frac{4}{5}a^{2}$ **5)** $2a^x\cdot 3a$

**6)** $2a^x:(3a)$ **7)** $\left(3x^m\right)^2$ **8)** $\left(3x^m\right)^n$ **9)** $\frac{1}{2}b^n\left(\frac{1}{4}b^{2n}-\frac{1}{3}b^n+2\right)$ **10)** $\left(a^x+2a^y\right)\left(3a^x-4a\right)$

**11)** $\left(x^p+1\right)\left(x^p+2\right)\left(x^p+3\right)$ **12)** $\left[a\left(a^p+a^q\right)+a^{p+1}\right]:a^2$ **13)** $a^x\cdot a^{-x}$ **14)** $a^x:a^{-x}$ **15)** $\left(a^x\right)^{-x}$

**16)** $\left[x^{2k+3}:\left(3x^{k-1}\right)\right]^2$ **17)** $\left(a^b\right)^b:a$ **18)** $3x^k+x^{-k}-2\left(x^k+x^{-k}\right)$ **19)** $\left(a+b^m\right)\left(a+b^n\right)$

**20)** $\left(a^x-3\right)\left(a^x+4\right)-\left(a^x+3\right)\left(a^x-4\right)$ **21)** $\left(a^x\right)^y\cdot a^x$ **22)** $a^{x-y+2}\cdot a^{2x+y-1}$ **23)** $a^{x-y+2}:a^{2x+y-1}$

**24)** $\left(a^y-1\right)\left(a^y-2\right)+2\left(a^y-3\right)\left(a^y+1\right)$ **25)** $2a:\left(-\frac{3}{4}a^{n-2}\right)^{-3}$ **26)** $3h^{2p+1}\cdot 4h^{p-2}$ **27)** $3h^{2p+1}:\left(4h^{p-2}\right)$

**28)** $\frac{4h^{p-2}}{3h^{2p+1}}$ **29)** $2a^{x+1}+\left(a^x-a\right)\left(a^x-1\right)-\left[\left(a^x\right)^2+a-a^{2x}:a^x\right]$ **30)** $\left(3c^k\right)^2:\left(c^{2+h}\right)^k-\left(\frac{1}{9}c^{hk}\right)^{-1}$

## RISULTATI

**1)** $18x^{2n-3}$ **2)** $2x$ **3)** $x^{n^2-3n+2}$ **4)** $\frac{2}{5}a^{3y+4}$ **5)** $6a^{x+1}$ **6)** $\frac{2}{3}a^{x-1}$ **7)** $9x^{2m}$ **8)** $3^n x^{mn}$ **9)** $\frac{1}{8}b^{3n}-\frac{1}{6}b^{2n}+b^n$

**10)** $3a^{2x}-4a^{x+1}+6a^{x+y}-8a^{y+1}$ **11)** $x^{3p}+6x^{2p}+11x^p+6$ **12)** $2a^{p-1}+a^{q-1}$ **13)** $1$ **14)** $a^{2x}$ **15)** $a^{-x^2}$

**16)** $\frac{1}{9}x^{2k+8}$ **17)** $a^{b^2-1}$ **18)** $x^k-x^{-k}$ **19)** $a^2+ab^n+ab^m+b^{m+n}$ **20)** $2a^x$ **21)** $a^{xy+x}$ **22)** $a^{3x+1}$

**23)** $a^{-x-2y+3}$ **24)** $3a^{2y}-7a^y-4$ **25)** $-\frac{27}{32}a^{3n-5}$ **26)** $12h^{3p-1}$ **27)** $\frac{3}{4}h^{p+3}$ **28)** $\frac{4}{3}h^{-p-3}$ **29)** $a^{x+1}$ **30)** $0$

# 9. IL QUOZIENTE DI DUE POLINOMI

## A) PREMESSA: LA "DIVISIONE INTERA"

La divisione di due polinomi richiama molto la divisione di due interi,
come la interpreterebbe un bambino delle prime classi elementari.

– "Pierino, quanto fa $23:5$"?
– "Fa **4 col resto di 3**, signora maestra!
Infatti il 5 nel 23 ci sta 4 volte; $4\cdot 5$ però dà solo 20, quindi mi rimane un resto di 3".

E' pur vero che se la stessa operazione 23:5 gli venisse proposta qualche anno più tardi, nelle scuole medie, Pierino probabilmente non risponderebbe più come prima, ma scriverebbe invece:

$23:5=\frac{23}{5}$ oppure $23:5=4,6$.

Ma è anche vero che *non sempre*, quando si imposta una divisione fra due interi,
interessa il risultato "esatto":
**a volte interessa proprio determinare un quoziente intero, accompagnato da un resto.**

Esempi:

*a) Si divide un percorso podistico di 10 km in 8 tappe intermedie esattamente uguali.*
*Qual è la lunghezza di ciascuna tappa?*
Risposta: $10:8=1,25$ km (1 km e 250 metri).

*b) Sono a disposizione 6 torte alla crema, e i partecipanti alla festa sono 20.*
*Che parte di torta tocca a ciascuno?*
Risposta: $6:20=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$. Perciò a ciascuno toccheranno 3/10 di torta, ossia 3 fette da 1/10 di torta.

*c) Sono arrivati in città 63 bambini di un paese povero, che saranno ospiti per una vacanza.*
*29 famiglie sono disposte ad accoglierli. Quanti bambini andranno presso ciascuna famiglia?*
**Questa volta**, poiché tagliare a fette i bambini è decisamente poco gentile,
**NON avrebbe alcun senso fare 63:29 = 63/29 o 63:29 = 2,… : si farà invece**
**63:29 = 2 col resto di 5.**
2 bambini per famiglia, dunque; poi ci sono altri 5 bambini, cui provvederemo in qualche modo;
magari, 5 fra le famiglie potranno accettare un bambino in più,
oppure vorrà dire che quei 5 di resto dormiranno in parrocchia.

**In matematica, la "DIVISIONE INTERA"**
**(così viene infatti chiamata la divisione fra due interi, quando non si accetta un risultato frazionario o decimale, ma si vuole invece un quoziente intero ed un resto)**
**è definita con precisione nel modo seguente.**

**Se a, b sono due numeri naturali (con b diverso da 0),**
**e il simbolo ":" viene utilizzato per indicare DIVISIONE INTERA, allora**

$$\mathbf{a:b=c} \text{ quando } \mathbf{c\cdot b+r=a,} \ \boxed{\mathbf{con\ r<b}} \quad \mathbf{(a,b,c,r\in\mathbb{N},\ b\neq 0)}$$

Notare l'IMPORTANTISSIMA condizione $r < b$ :
♥ IL RESTO DEV'ESSERE SEMPRE MINORE DEL DIVISORE.

Ad esempio, è giusto scrivere che **$23:5=4$ col resto di 3** perché $4\cdot 5+3=23$, ed è $3<5$.

**Nei linguaggi di programmazione utilizzati in Informatica**,
solitamente **l'operazione di divisione "esatta" viene indicata con uno "slash" (** / )
mentre si utilizzano **due "operatori" specifici**, **DIV** e **MOD**, **per indicare rispettivamente**

- il **QUOZIENTE INTERO** (**DIV**)
- e il **RESTO** (**MOD**)

**della DIVISIONE INTERA.**

Esempi:
23 DIV 5 = 4; 92 DIV 10 = 9; 33 DIV 3 = 11; 5 DIV 7 = 0;
23 MOD 5 = 3; 92 MOD 10 = 2; 33 MOD 3 = 0; 5 MOD 7 = 5.

## B) COME E' DEFINITA E COME SI EFFETTUA LA DIVISIONE FRA DUE POLINOMI

E veniamo ora alla **divisione fra due polinomi**.
Siano A, B due polinomi, contenenti entrambi la stessa lettera,
diciamo per fissare le idee $x$, ma potrebbe essere una lettera qualsiasi.
Per evidenziare questo fatto, ossia che i polinomi dipendono entrambi da $x$,
li indicheremo, più precisamente, coi simboli: $A(x)$, $B(x)$ .

**$A(x)$ si legge: "A di $x$" e si interpreta:**
**"polinomio A, che dipende dalla lettera $x$". Idem per $B(x)$.**

Ciò premesso:

**Dati due polinomi $A(x)$, $B(x)$ (NOTA 1)**
**la divisione $A(x):B(x)$ è quell'operazione mediante la quale**
**si determina un terzo polinomio $Q(x)$,**
**detto "polinomio quoziente", o semplicemente "quoziente",**
**e simultaneamente un quarto polinomio $R(x)$, detto "resto", tali che**

**I) si abbia $A(x) = Q(x)\cdot B(x) + R(x)$**

**II) il grado di $R(x)$ sia minore del grado di $B(x)$**

**NOTA 1**
Qui per precisione occorrerebbe aggiungere che in questo contesto si deve escludere il "caso limite" in cui il polinomio $B(x)$ si riduca alla costante 0

Si può dimostrare che:

♪ in una divisione fra due polinomi, così come è stata definita, **quoziente e resto esistono sempre e sono determinati in modo unico**;

♫ **l'operazione si può svolgere tramite un *algoritmo***
( = procedimento; tuttavia, clicca su questa freccia ⇨ oppure consulta il Volume 2 per una definizione più accurata dell'importante termine "**algoritmo**")
molto simile all'ordinario metodo per la divisione fra due numeri, e **che illustriamo mediante l'esempio qui a fianco**.

**a.** *Divido il 1° termine del dividendo $6x^4$ per il 1° termine del divisore $2x^2$ ottenendo il monomio $3x^2$, che sarà il primo termine del quoziente.*

**b.** *Moltiplico $3x^2$ per il divisore $2x^2-x+3$ , CAMBIO I SEGNI DEI TERMINI OTTENUTI e metto in colonna.*

**c.** *Addiziono algebricamente* (**NOTA 3**), *ottenendo un "resto parziale".*

**d.** *Ripeto il procedimento con il 1° termine del resto parziale, ossia con $-2x^3$ ...*

**e.** *Mi fermerò quando il grado del resto parziale diventerà minore del grado del divisore. Allora QUELLO sarà il resto definitivo*

Gli **ESERCIZI** sulla divisione di polinomi si trovano a **pagina 120**.

$(\underbrace{6x^4-5x^3+12x^2+2}_{A(x)}) : (\underbrace{2x^2-x+3}_{B(x)})$

**(NOTA 2)**
*spazio*!

$$\begin{array}{llll|l} 6x^4 & -5x^3 & +12x^2 & +2 & 2x^2-x+3 \\ \cline{5-5} -6x^4 & +3x^3 & -9x^2 & & \underbrace{3x^2-x+1}_{Q(x)} \\ \cline{1-3} & -2x^3 & +3x^2 & +2 & \rightarrow \textit{resto parziale} \\ & +2x^3 & -x^2 & +3x & \\ \cline{2-4} & & 2x^2 & +3x+2 & \rightarrow \textit{resto parziale} \\ & & -2x^2 & +x-3 & \\ \cline{3-4} & & & \underbrace{4x-1}_{R(x)} & \rightarrow \textit{resto definitivo} \end{array}$$

Il grado del resto parziale è diventato minore del grado del divisore: perciò $4x-1$ è il resto definitivo

$Q(x) = 3x^2-x+1$;
$R(x) = 4x-1$

Prova:

$$\boxed{Q(x)\cdot B(x)+R(x)} =$$
$$= \left(3x^2-x+1\right)\cdot\left(2x^2-x+3\right)+\left(4x-1\right) =$$
$$= 6x^4-3x^3+9x^2-2x^3+x^2-3x+2x^2-x+3+4x-1 =$$
$$= 6x^4-5x^3+12x^2+2 = \boxed{A(x)} \quad OK!!!$$

**NOTA 2** - Poiché il POLINOMIO DIVIDENDO è "INCOMPLETO" (manca del termine di 1° grado),
♥ nello schema si deve lasciare uno SPAZIO VUOTO fra il termine di grado 2 e quello di grado 0, per poter eventualmente "ospitare" una colonna di termini di grado 1, che in effetti in questo esercizio poi si presenterà.

**NOTA 3** - Quando moltiplico, *poi cambio i segni, poi sommo*, potrei anche, in alternativa, moltiplicare, *lasciare i segni inalterati e sottrarre*. Ma evidentemente cambiare i segni e poi sommare algebricamente è più facile.

## C) IL TEOREMA DEL RESTO E LA "REGOLA DI RUFFINI"

**Supponiamo di avere una divisione fra due polinomi (aventi, è ovvio, la stessa variabile, diciamo *x*) nella quale il polinomio divisore sia un binomio della forma $(x-k)$, essendo *k* un numero fissato.**

*Per fare un esempio, nella divisione* $(2x^3-5x^2-x+6):(x-4)$
*il divisore è appunto della forma* $(x-k)$; *in questo caso, ovviamente,* $k=4$.

**Se dunque si ha una divisione di questo tipo, allora …**

**I) … si può determinare il resto della divisione anche senza effettuare la divisione stessa, mediante il**

> ♥ **TEOREMA DEL RESTO:**
> **"Il resto della divisione $P(x):(x-k)$ è uguale a $P(k)$, cioè al numero che si ottiene sostituendo il numero *k* al posto di *x* nel polinomio dividendo, e poi svolgendo i calcoli"**

**OSSERVAZIONE**
Quando il **divisore** è un **binomio di 1° grado** come $(x-k)$, allora il **resto**, essendo di **grado inferiore rispetto al divisore**, è obbligato ad essere di **grado zero**, quindi a non contenere più la variabile, riducendosi ad una **costante numerica**.

*Ad esempio, considerando la divisione* $(2x^3-5x^2-x+6):(x-4)$
*posso subito dire che il resto sarà* $P(4)=2\cdot4^3-5\cdot4^2-4+6=128-80-4+6=50$

**II) … e in più la divisione si può eseguire, in alternativa al solito metodo di pag. 115 (il quale continua, volendo, a essere pienamente valido), tramite un algoritmo più veloce chiamato REGOLA DI RUFFINI e illustrato qui di seguito, sempre sull'esempio di prima:**

$(2x^3-5x^2-x+6):(x-4)\ \rightarrow$

| | 2 | −5 | −1 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | | 8 | 12 | 44 |
| | 2 | 3 | 11 | 50 |

DA CUI $Q(x)=2x^2+3x+11$; $R=50$

Spieghiamo lo schema.

a) **Sulla prima riga in alto, si scrivono i coefficienti del polinomio dividendo**;
b) si traccia una linea verticale davanti al 1° coefficiente, ed un'altra davanti all'ultimo coefficiente;
c) si traccia, sotto la riga dei coefficienti ma un poco distanziata, una linea orizzontale;
d) **nell'angolino a sinistra in alto, si scrive il "*k*" (che nel nostro esempio vale 4)**

Così facendo si ottiene

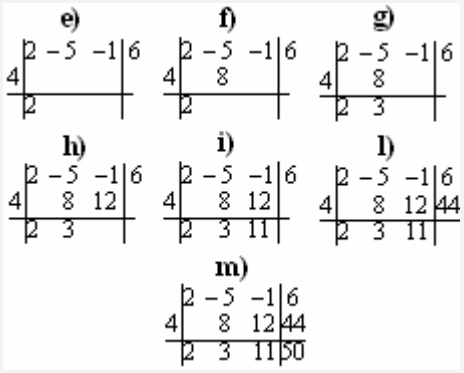
| | 2 | −5 | −1 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | | | | |
| | | | | |

… e a questo punto si incomincia a "lavorare":

**sulla riga più in basso, il calcolo fornirà i coefficienti del polinomio quoziente, seguiti (nell'angolo in basso a destra) dal resto della divisione.**

Ma come avviene questo calcolo? Semplice:

e) si "**abbassa**" il 1° coefficiente, che è 2
f) si **moltiplica** $2\cdot4$ e si scrive il risultato, 8, sotto al 2° coeff.
g) si **somma** algebricamente, in colonna: $-5+8=3$
h) si **moltiplica** $3\cdot4$ e si scrive il risultato, 12, sotto al 3° coeff.
i) si **somma** algebricamente, in colonna: $-1+12=11$
l) si **moltiplica** $11\cdot4$ scrivendo il risultato, 44, sotto al 4° coeff.
m) si **somma** algebricamente, in colonna: $6+44=50$




**Così il procedimento è terminato**. Ora:

♪ **il polinomio quoziente ha grado inferiore di 1 unità rispetto al polinomio dividendo** (basti pensare che se si svolgesse la divisione con il "vecchio" procedimento, il primo calcolo sarebbe $2x^3:x=2x^2$) quindi, essendo i suoi coefficienti 2 3 11, si avrà $Q(x)=2x^2+3x+11$

♫ **il resto, come si diceva, compare nella parte bassa dell'angolino di destra** ed è, come d'altronde si era già previsto tramite il Teorema del Resto, $R=50$.

Controlla tu stesso che effettuando la divisione col "vecchio" algoritmo, si otterrebbero lo stesso quoziente e lo stesso resto.

❑ Vediamo ora quest'altro esempio, interessante sotto diversi aspetti.

$$(a^4 - 4a^2 - 3a - 7) : (a + 2)$$

C'è la lettera $a$ al posto della lettera $x$, e fin qui niente di speciale;

inoltre, il polinomio dividendo è "incompleto", in quanto manca il termine di 3° grado;
… beh, non importa, faremo conto che il termine di 3° grado abbia coefficiente 0.

Ma soprattutto, si osserva che il divisore è della forma

*lettera + un numero*

anziché

*lettera – un numero*

e questa sì che è una novità di rilievo!
Dobbiamo domandarci:
sarà possibile anche in questo caso applicare il Teorema del Resto e la Regola di Ruffini?

La risposta è AFFERMATIVA, per il fatto che

♥ **il binomio $a+2$ si può scrivere come $a-(-2)$**
**e quindi anche in questo caso si può ritenere di avere un binomio della forma**
**$(variabile - k)$;**
**basta pensare che il valore di $k$ sia, questa volta, $-2$ !!!**

$$a + 2 = a - (-2) = a - k \quad (con \ \ k = -2)$$

Dunque, procediamo.

Calcolo preliminare del resto col Teorema del Resto:

$$R = P(k) = P(-2) = (-2)^4 - 4(-2)^2 - 3\cdot(-2) - 7 = 16 - 16 + 6 - 7 = -1$$

Determinazione del quoziente tramite la Regola di Ruffini:

| | 1 | 0 | −4 | −3 | −7 |
|---|---|---|---|---|---|
| −2 | | −2 | 4 | 0 | 6 |
| | 1 | −2 | 0 | −3 | −1 |

$Q(a) = a^3 - 2a^2 - 3;$ $\quad R = -1$ Ecco fatto!

❑ Un ultimo esempio:

$$(x^3 - 1) : (x - 1)$$

$$R = P(1) = 1^3 - 1 = 0$$

| | 1 | 0 | 0 | −1 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 0 |

$Q(x) = x^2 + x + 1$
$R = 0$

**Quando si divide un polinomio per un altro polinomio**
**e si vede che il resto della divisione è zero,**
**si dice che il primo polinomio è "divisibile" per il secondo.**

**In matematica, l'aggettivo "divisibile"**
**è sempre utilizzato col significato di**
**"divisibile esattamente, cioè con resto 0".**

Ma allora possiamo affermare che il Teorema del Resto
ci fornisce, in un contesto di polinomi, un vero e proprio
"**CRITERIO DI DIVISIBILITA'** ":

"**un polinomio $P(x)$ è divisibile per un binomio della forma $(x-k)$**
**se e soltanto se $P(k) = 0$**"

E veniamo, per concludere "in bellezza", alla

## DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEL RESTO

Supponiamo di avere la divisione

$$P(x) : (x - k),$$

e indichiamo

- con $Q(x)$ il quoziente della divisione stessa,
- e con $R$ il resto.

Allora varrà l'**identità** (NOTA)

$$P(x) = Q(x)\cdot(x - k) + R$$

Se adesso noi in questa identità sostituiamo $k$ al posto di $x$
( = assegniamo a $x$ il valore $k$) avremo

$$\mathbf{P(k)} = Q(k)\cdot(k - k) + R = Q(k)\cdot 0 + R = 0 + R = \mathbf{R} \quad \text{C.V.D.}$$

NOTA

*Come sappiamo, per "identità" si intende un'uguaglianza letterale che è sempre vera, per qualsiasi valore "ammissibile" delle lettere in gioco. Ad esempio ,*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

*è un'identità.*
*Generalmente il termine "**identità**" è contrapposto a "**equazione**".*

Gli **ESERCIZI** sul Teorema del Resto e sulla Regola di Ruffini si trovano a **pagina 121**.

## 10. ESPRESSIONI VARIE CON POLINOMI

**Esempi svolti:**

**A)** $\boxed{\left[x(2x+3)-2x(x+1)+4\right](x-2)+2(4-x)}=$

$\left(\cancel{2x^2}\ \underline{+3x}\ \cancel{-2x^2}\ \underline{-2x}+4\right)(x-2)+8-2x=$

$=(x+4)(x-2)+8-2x=$

$=x^2\ \cancel{-2x}\ \cancel{+4x}\ \cancel{-8}\ \cancel{+8}\ \cancel{-2x}=x^2$

**SUGGERIMENTI**



**da amico!**

I) La **sottolineatura** delle famigliole di **termini simili** è **preziosa**, e caldamente **consigliata**.

II) **RILEGGI** sempre **attentamente dopo ogni passaggio**!

**B)** $\boxed{\left(a^2-2ab-b^2\right)(2b-a)-2a\left(3a^2+2ab-2b^2\right)-(a-2b)\cdot b^2+(2a)^3}=$

$=\cancel{2a^2b}\ \underset{\bullet}{-a^3}\ \cancel{-4ab^2}\ \cancel{+2a^2b}\ \cancel{-2b^3}\ \cancel{+ab^2}\ \underset{\bullet}{-6a^3}\ \cancel{-4a^2b}\ \cancel{+4ab^2}\ \cancel{-ab^2}\ \cancel{+2b^3}\ \underset{\bullet}{+8a^3}=a^3$

$\square\quad\ast\ast\quad\square\quad\quad\square\quad\square\quad\ast\ast$

**C)** $\boxed{\frac{1}{2}\left[x\left(x^2-1\right)-2(x-1)\left(x^2-x-1\right)-(2-x)\left(x^2-2x-1\right)\right]}=$

$=\frac{1}{2}\left[x^3-x-2\left(x^3\ \underline{-x^2}\ \cancel{-x}\ \underline{-x^2}\ \cancel{+x}+1\right)-\left(\underset{\bullet}{2x^2}\ \underset{\ast\ast}{-4x}-2-x^3\ \underset{\bullet}{+2x^2}\ \underset{\ast\ast}{+x}\right)\right]=$

$=\frac{1}{2}\left[x^3-x-2\left(x^3-2x^2+1\right)-\left(4x^2-3x-2-x^3\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\cancel{x^3}\ \underline{\underline{-x}}\ \cancel{-2x^3}\ \cancel{+4x^2}\ \cancel{-2}\ \cancel{-4x^2}\ \underline{\underline{+3x}}\ \cancel{+2}\ \cancel{+x^3}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2x=x$

## 11a. ESERCIZI (ESPRESSIONI CON POLINOMI) (freccia = **link verso la correzione**)

1) $9a-(7a-b-1)-(a+b-5)-6$ ⇨

2) $x^2-\left(-3x^2-5x+2\right)+(2x-4)-7x$

3) $-\left(-b^2+4a^2-ab\right)+a^2+\left(3a^2-ab+b^2\right)$ ⇨

4) $\frac{1}{5}c-\left(-\frac{3}{8}c+5d\right)-\left(\frac{19}{40}c-3d\right)+\left(-\frac{1}{10}c+3d\right)$ ⇨

5) $6xy-\left(x^2-xy-y^2\right)+\left(-5x^2-7xy\right)-\left(+11y^2-6x^2\right)+10y^2$

6) $\frac{1}{3}x^2-\left(\frac{4}{5}x^2+\frac{2}{3}x+1\right)-\left(-\frac{1}{6}x+\frac{7}{15}x^2-2\right)+\left(\frac{14}{15}x^2+\frac{1}{2}x\right)$

7) $\frac{5}{4}ab^2-\left[\left(\frac{1}{4}ab^2-\frac{7}{3}ab+a\right)-\left(-\frac{4}{3}ab+2a\right)\right]$

8) $3a(2a-5b)-b(3a-4b)-6a(a-3b)-3b^2$ ⇨

9) $-ab\left(a^2+2b^2\right)-\left[a\left(a^2b-b^3\right)-b\left(ab^2+a^3\right)\right]+(ab)^3:(-b)^2$

10) $(3x+y)\cdot 2x-\left\{4x(x-2y)-2\left[x(3x+y)-2x(2x+3y)\right]\right\}$

11) $\left\{-3c\left[-3c(2c-1)-(5c+1)\right]-2c^2(-5+9c)+13c\right\}\cdot\frac{1}{16}$

12) $4(a+2)(a-3)-(2a-1)(2a-5)+29$ ⇨

13) $\left(a^2-3a+2\right)(a+3)-(a-1)(a+2)(a-3)+2a$ ⇨

14) $3(x-2)(x-1)-(2x+3)(x-6)$

15) $(a+b)(3a-b)-5b(-a+b)-3(a-b)(a+2b)$

16) $-x^2+2x(3-x)(1+x)-(1-x)\left(2x^2-x+1\right)$

17) $1+x(3x-2)-(x+1)\left(x^2-x+1\right)+x(x-1)(x-2)$

18) $9a^2b^2+\left[\frac{3}{4}a\left(2a-\frac{1}{6}b\right)-\left(3a-\frac{1}{4}b\right)\left(\frac{1}{2}a+b\right)\right]\left(\frac{1}{4}b^2+3ab\right)-\left(\frac{1}{2}b\right)^4$

19) $2(3a-1)(2a+1)-(4a-1)(3a+1)+1$ ⇨ (clicca sulla freccia per utili suggerimenti!)

20) $2(y-1)(2y+1)-(y+1)(y-2)-3y(y-1)$

21) $(x+3)(x+4)-2(x-1)(x-6)-x(21-x)$

22) $2(t-2)(t-5)-(t+2)(2t+10)+7\cdot 4t$

23) $-(x-1)\left(x^2+x+1\right)-x(2-x)(x-4)+6x^2$

24) $4(a+1)(2a+1)-(4a-1)(2a-3)-1$

25) $\left[(a+b)(a-2b)-(a-b)(a+2b)\right]:(-2b)$

26) $28+3(b-2)(4-b)-b(b+18)+4\left(b^2-1\right)$

27) $6(x-y)(x+2y)-(3x+y)(2x-y)-7y(x-3y)$

28) $-\left(2a^2-ax-3x^2\right)(x-3a)+\left(3a^2+2ax-x^2\right)(3x-2a)$

29) $\frac{x^2}{4}-x\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{2}x\right)\left(\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{16}x^4-2x^2\cdot x$

30) $y^3+11y+(y+1)(y+2)(y+3)-2(y-1)(y-2)(y-3)-18(y^2+1)$

31) $0{,}5\cdot\left[2(a-3b)(2a-b)-3(2a+b)(a-3b)-(5b-4a)(a+b)\right]-5b^2$

32) $(3x-1)(2x-1)(x-1)-(6x+1)(x^2-1)-12(1-x)x$ 33) $\frac{1}{8}a^2-2\left(\frac{3}{8}a-b\right)\left(\frac{3}{2}a+4b\right)-8b^2$

34) $(a+10b)\cdot ab+(a+b)(a+3b)(a-5b)-\left[2b^2(a-8b)-9ab^2\right]$

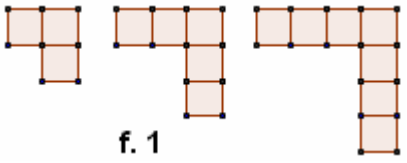
35) $\left(3a^2-a+\frac{1}{6}\right)\left(3a^2+a-\frac{1}{6}\right)-\left(3a^2+\frac{1}{4}\right)\left(3a^2-\frac{1}{9}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{17}{8}a+1\right)\cdot a$ ⇨

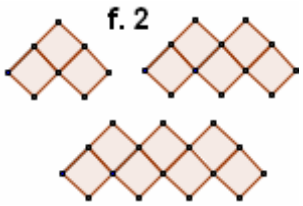
36) $\frac{1}{4}m\left(\frac{5}{4}m-1\right)-\frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}m-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}m+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}m-1\right)+\frac{1}{9}(m^2+12)$

37) $x(2x-1)(x+1)(x-2)+(1-x)(2+x)(1+x)(1+2x)+x^2(8x+3)-(7x+1)$

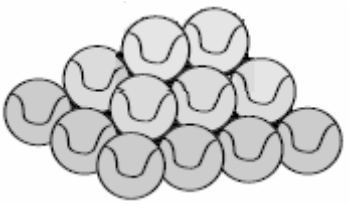
38) $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)-(a-1)(a+2)(a-3)(a+4)-16a(3a+4)-(2a)^3$

39) Anna si diverte a utilizzare dei cerini per delimitare quadrati disposti come in fig. 1, mentre Betta li colloca come in figura 2. Ora, indichiamo con *n* un generico intero dispari. Volendo realizzare *n* quadrati,
   a) di quanti fiammiferi necessiterebbe ciascuna?
   b) E quanti fiammiferi starebbero sul contorno della figura, nei due casi?




40) La figura qui a fianco mostra alcune palline da tennis sistemate su più strati sovrapposti: quello più in alto è formato da 2 palline soltanto, quello appena sotto da 6 palline, quello sotto ancora da 12, ecc. Se ora si avessero *n* strati, quante sarebbero le palline dello strato inferiore?



**RISULTATI**

1) $a$ 2) $4x^2-6$ 3) $2b^2$ 4) $d$ 5) 0 6) 1 7) $ab^2+ab+a$ 8) $b^2$ 9) 0 10) 0 11) $c^2+c$ 12) $8a$
13) $2a^2$ 14) $x^2+24$ 15) $4ab$ 16) $8x-1$ 17) 0 18) 0 19) $a$ 20) $2y$ 21) 0 22) 0 23) $8x+1$ 24) $26a$
25) $a$ 26) 0 27) $10y^2$ 28) 0 29) $4x^2-x^4$ 30) 0 31) $a^2$ 32) 0 33) $-a^2$ 34) $a^3+b^3$ 35) $a$ 36) 1 37) 1
38) 0 39) L'espressione è la stessa nei due casi: a) $4+(n-1)\cdot 3=3n+1$; b) $2n+2$ 40) $n(n+1)=n^2+n$

**VERIFICHE DI IDENTITA'**

Cos'è un' "*identità*"?
E' un'**uguaglianza letterale, vera per tutti i valori "ammissibili" delle lettere coinvolte**
(gli eventuali valori "non ammissibili" sono quelli che darebbero luogo a un'operazione non eseguibile:
ad esempio, l'identità $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a(a+1)}$ vale per $a\neq 0$, $a\neq -1$, ossia vale tutti i valori di $a$ TRANNE i valori $0$ e $-1$, non ammissibili perché renderebbero un denominatore uguale a 0).

**Esempio svolto -** *Verifica che vale la seguente identità*: $\boxed{(x+1)(4x+1)+x^2=(2x+1)(3x+1)-x^2}$

Eseguo i calcoli ai due membri, per constatare che si ottenga il medesimo risultato:

$\underline{4x^2}\ \underline{+x}\ \underline{+4x}+1\ \underline{+x^2}=\underline{6x^2}\ \underline{+2x}\ \underline{+3x}+1\ \underline{-x^2}$; $\quad 5x^2+5x+1=5x^2+5x+1$, *OK*!!!

**CONTRARIAMENTE agli esercizi di pag. 63**
**(che erano dei puri controlli "a test", su alcuni valori delle lettere), queste verifiche effettuate tramite il calcolo letterale hanno una validità DEL TUTTO GENERALE e ci danno l'AUTENTICA SICUREZZA che si tratti davvero di un'identità.**

**ESERCIZI - Verifica** che valgono le seguenti **identità**:

1) $a(a+2b)+(b-1)(1+b)=(a+b+1)(a+b-1)$ 2) $(a-1)(a^2-1)=(a+1)(a^2-2a+1)$
3) $k+2(k+3)=(k+2)(k+3)-(k+2)\cdot k$ 4) $(a+b)(a-b+1)=(a-b)(a+b+1)+2b$
5) $(x+2)(x+3)(x+4)-(x+1)(x+2)(x+3)=3(x-2)(x-3)+30x$ 6) $(1-x^3)(1+x^3)=-(x^2-1)(x^4+x^2+1)$

## 11b. ESERCIZI (DIVISIONE DI POLINOMI)

1) $\left(6x^4+23x^3-8x^2+10x-3\right):\left(x^2+4x-1\right)$

2) $\left(4a^4-a^2+8a-5\right):\left(2a^2-a+3\right)$

3) $\left(2y^3-4y+11\right):\left(y-1\right)$

4) $\left(16x^4-5x^2+9x\right):\left(4x^2-3x+2\right)$

5) $\left(x^6-3x^4+3x^2-1\right):\left(x^3-x^2-x+1\right)$

6) $\left(6b^4+11b^3-12b^2-5b+2\right):\left(b^2+2b-1\right)$

7) $\left(6t^5-8t^4+t^3-5t^2+10t-6\right):\left(2t^3-t-3\right)$

8) $\left(a^6+a^5+a^3+a^2+1\right):\left(a+2\right)$

9) $\left(-3x^4+2x^2+2x-1\right):\left(x-1\right)$

10) $\left(9t^4-16t^2+20t-4\right):\left(3t^2+4t-2\right)$

11) $\left(\frac{4}{9}x^3-\frac{7}{18}x^2-\frac{11}{24}x+\frac{3}{8}\right):\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}\right)$

12) $\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{13}{6}a^3+4a^2-2a+2\right):\left(\frac{1}{2}a^2-2a+3\right)$

13) $\left(4x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{12}\right):\left(2x-\frac{1}{3}\right)$

14) $\left(x^4+x^3-x^2+x+1\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)$

15) $\left(x^4-3x^3y+2x^2y^2+xy^3+y^4\right):\left(x^2-xy+y^2\right)$ (NOTA)

16) $\left(9x^4+12x^3y+4x^2y^2-y^4\right):\left(3x^2+2xy-y^2\right)$

17) $\left(x^3-8x^2y+77y^3\right):\left(x-5y\right)$

18) $\left(a^4+a^3b-6a^2b^2+ab^3+3b^4\right):\left(a^2-ab-b^2\right)$

19) $\left(a^5-a^4b-2a^3b^2+2a^2b^3+b^5\right):\left(a^2-ab-b^2\right)$

20) $\left(x^3+y^3\right):\left(x^2-xy+y^2\right)$

21) $\left(\frac{1}{16}x^2-x+\frac{11}{4}\right):\left(\frac{1}{2}x-1\right)$

22) $\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{4}{3}a^2-\frac{40}{9}a-\frac{8}{9}\right):\left(2a^2-12a-\frac{8}{3}\right)$

23) $\left(3a^4-3b^4\right):\left(4a+4b\right)$

24) $\left(2a+3\right):\left(a+1\right)$

25) $\left(a^2+a+1\right):\left(a+1\right)$

26) $\left(x+1\right):x$ (*)

27) $x:\left(x+1\right)$ (*)

(*) *Negli esercizi 26, 27 il monomio viene pensato come caso particolare di polinomio*

28) In una divisione fra polinomi, il divisore è $x^2+1$, il quoziente $3x^2-x-2$, il resto $x+3$. E il dividendo?

NOTA

**In casi di questo genere, quando si hanno due lettere**, i polinomi dividendo e divisore sono, di norma, omogenei.
**La lettera che è ordinata secondo le potenze decrescenti viene pensata come la variabile, mentre la seconda lettera è "trattata" come una costante, che va a far parte dei coefficienti.**

Quindi, ad esempio, il polinomio $x^4-3x^3y+2x^2y^2+xy^3+y^4$ è pensato nella variabile $x$:

$x^4-3x^3y+2x^2y^2+xy^3+y^4=P(x)$, con coefficienti $1,\ -3y,\ 2y^2,\ y^3,\ y^4$.

Volendo considerare come variabile la $y$, prima di effettuare la divisione occorrerebbe invertire l'ordine dei termini (sia nel dividendo che nel divisore).
E si osserverebbe che cambia anche il polinomio quoziente (a meno che il resto sia 0).

## RISULTATI

1) $Q(x)=6x^2-x+2 \quad R(x)=x-1$

2) $Q(a)=2a^2+a-3 \quad R(a)=2a+4$

3) $Q(y)=2y^2+2y-2 \quad R=9$

4) $Q(x)=4x^2+3x-1 \quad R=2$

5) $Q(x)=x^3+x^2-x-1 \quad R=0$

6) $Q(b)=6b^2-b-4 \quad R(b)=2b-2$

7) $Q(t)=3t^2-4t+2 \quad R=0$

8) $Q(a)=a^5-a^4+2a^3-3a^2+7a-14 \quad R=29$

9) $Q(x)=-3x^3-3x^2-x+1 \quad R=0$

10) $Q(t)=3t^2-4t+2 \quad R(t)=4t$

11) $Q(x)=\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{2} \quad R=0$

12) $Q(a)=a^2-\frac{1}{3}a+\frac{2}{3} \quad R(a)=\frac{1}{3}a$

13) $Q(x)=2x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \quad R=0$

14) $Q(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{7}{8} \quad R=\frac{23}{16}$

15) $Q(x)=x^2-2xy-y^2 \quad R(x)=2xy^3+2y^4$

16) $Q(x)=3x^2+2xy+y^2 \quad R=0$

17) $Q(x)=x^2-3xy-15y^2 \quad R=2y^3$

18) $Q(a)=a^2+2ab-3b^2 \quad R=0$

19) $Q(a)=a^3-ab^2+b^3 \quad R=2b^5$

20) $Q(x)=x+y \quad R=0$

21) $Q(x)=\frac{1}{8}x-\frac{7}{4} \quad R=1$

22) $Q(a)=\frac{1}{6}a+\frac{1}{3} \quad R=0$

23) $Q(a)=\frac{3}{4}a^3-\frac{3}{4}a^2b+\frac{3}{4}ab^2-\frac{3}{4}b^3 \quad R=0$

24) $Q=2 \quad R=1$

25) $Q(a)=a \quad R=1$

26) $Q=1 \quad R=1$

27) $Q=1 \quad R=-1$

28) Il dividendo è $3x^4-x^3+x^2+1$. Per determinarlo, basta utilizzare la relazione $Q(x)\cdot B(x)+R(x)=A(x)$.

## 11c. ESERCIZI (TEOREMA DEL RESTO E REGOLA DI RUFFINI)

E' richiesto di:

i ) **determinare il resto applicando il Teorema del Resto**
ii ) **determinare il quoziente** (e ritrovare, una seconda volta, il resto) **mediante la regola di Ruffini**.

Due esempi svolti:

**A)** $\left(y^4-5y^2+4\right):\left(y-2\right)$

$R=P(2)=2^4-5\cdot 2^2+4=\ldots=0$

| | 1 | 0 | −5 | 0 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | 4 | −2 | −4 |
| | 1 | 2 | −1 | −2 | 0 |

$Q(y)=y^3+2y^2-y-2 \quad R=0$

**B)** $\left(8t^4-t^3-\frac{1}{6}\right):\left(t+\frac{1}{2}\right) \quad R=P\left(-\frac{1}{2}\right)=8\left(-\frac{1}{2}\right)^4-\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{6}=\ldots=\frac{11}{24}$

| | 8 | −1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{2}$ | | −4 | $\frac{5}{2}$ | $-\frac{5}{4}$ | $\frac{5}{8}$ |
| | 8 | −5 | $\frac{5}{2}$ | $-\frac{5}{4}$ | $\frac{11}{24}$ |

$Q(t)=8t^3-5t^2+\frac{5}{2}t-\frac{5}{4} \quad R=\frac{11}{24}$

1) $\left(3x^3-8x^2-x+13\right):\left(x-2\right)$

**OCCHIO**



agli eventuali **termini mancanti** … … vogliono **coefficiente 0 !!!**

2) $\left(x^3-x^2-x+10\right):\left(x+2\right)$

3) $\left(x^4+x^3+x+1\right):\left(x-1\right)$

4) $\left(a^4+3a^3-a^2-5a-6\right):\left(a+3\right)$

5) $\left(x^5+x^3+x+1\right):\left(x-1\right)$

6) $\left(b^3+6b^2+6b\right):\left(b+5\right)$

7) $\left(x^5+x^3+x+1\right):\left(x+1\right)$

8) $\left(2y^3-4y+8\right):\left(y+2\right)$

9) $\left(x^3-x^2+\frac{7}{12}x-\frac{1}{6}\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)$

10) $\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z+\frac{1}{4}\right):\left(z+1\right)$

11) $\left(\frac{1}{2}w^3-\frac{4}{3}w^2-\frac{3}{4}w+\frac{1}{12}\right):\left(w+\frac{1}{3}\right)$

12) $\left(\frac{1}{9}x^3-x\right):\left(x-3\right)$

13) $\left(d^4-\frac{9}{10}d^3+\frac{12}{25}d^2+\frac{27}{5}d+2\right):\left(d+\frac{2}{5}\right)$

14) $\left(3000x^3-10x-2\right):\left(x-0{,}1\right)$

15) $\left(0{,}75a^4-1{,}125a^3-0{,}25a^2+0{,}125a-0{,}0625\right):\left(a+0{,}5\right)$

16) $\left(x^3+ax^2-2a^2x-a^3\right):\left(x-3a\right)$ (NOTA)

17) $\left(a^3-a^2b-ab^2+b^3\right):\left(a-b\right)$

18) $\left(x^3-8k^3\right):\left(x-2k\right)$

19) $\left(x^3+ax^2-2a^2x-a^3\right):\left(x+3a\right)$

20) $\left(a^3-a^2b-ab^2+b^3\right):\left(a+b\right)$

21) $\left(x^4-s^2x^2+s^4\right):\left(x+s\right)$

| | |
|---|---|
| N O T A | In casi di questo genere, quando si hanno **due lettere**, i polinomi in gioco sono, di norma, **omogenei**. La lettera che è ordinata secondo le potenze decrescenti viene pensata come la **variabile**, mentre la seconda lettera è "trattata" come una **costante**, che va a far parte dei **coefficienti**. Quindi, ad es., il pol. $x^3+ax^2-2a^2x-a^3$ è pensato nella variabile $x$, con coeff.: $1,\ a,\ -2a^2,\ -a^3$ |

22) a) Without doing the division, work out the remainder of the division $P(x)=x^3-6x^2+5$ into $x-2$
b) Calculate the quotient and the remainder of $(x^2+5x+6):(x+3)$ (www.personal.psu.edu)

23) Quanto deve valere $k$ se si desidera che il resto della divisione $\left(x^{16}+kx^4+2x+8\right):\left(x+1\right)$ sia 0?

24) La divisione $(x^7-1):(x-1)$ ha come resto 0; verificalo, e serviti di questo fatto per esprimere il polinomio $x^7-1$ come prodotto di due opportuni polinomi.

## RISULTATI

1) $Q(x)=3x^2-2x-5 \quad R=3$
2) $Q(x)=x^2-3x+5 \quad R=0$
3) $Q(x)=x^3+2x^2+2x+3 \quad R=4$
4) $Q(a)=a^3-a-2 \quad R=0$
5) $Q(x)=x^4+x^3+2x^2+2x+3 \quad R=4$
6) $Q(b)=b^2+b+1 \quad R=-5$
7) $Q(x)=x^4-x^3+2x^2-2x+3 \quad R=-2$
8) $Q(y)=2y^2-4y+4 \quad R=0$
9) $Q(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3} \quad R=0$
10) $Q(z)=\frac{1}{2}z-\frac{5}{6} \quad R=\frac{13}{12}$
11) $Q(w)=\frac{1}{2}w^2-\frac{3}{2}w-\frac{1}{4} \quad R=\frac{1}{6}$
12) $Q(x)=\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{3}x \quad R=0$
13) $Q(d)=d^3-\frac{13}{10}d^2+d+5 \quad R=0$
14) $Q(x)=3000x^2+300x+20 \quad R=0$
15) $Q(a)=0{,}75a^3-1{,}5a^2+0{,}5a-0{,}125 \quad R=0$
16) $Q(x)=x^2+4ax+10a^2 \quad R=29a^3$
17) $Q(a)=a^2-b^2 \quad R=0$
18) $Q(x)=x^2+2kx+4k^2 \quad R=0$
19) $Q(x)=x^2-2ax+4a^2 \quad R=-13a^3$
20) $Q(a)=a^2-2ab+b^2 \quad R=0$
21) $Q(x)=x^3-sx^2 \quad R=s^4$
22) a) $-11$ b) $Q(x)=x+2 \quad R=0$
23) $R=P(k)=P(-1)=k+7$, perciò $R=0$ con $k=-7$
24) $x^7-1=\left(x-1\right)\left(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)$

# PRODOTTI NOTEVOLI

## 12. QUADRATO DI UN BINOMIO

$\boxed{(a+b)^2} = (a+b)(a+b) = a^2 \underline{+ab} \underline{+ab} + b^2 = \boxed{a^2+2ab+b^2}$

Abbiamo così ricavato la formula

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$$

che si può esprimere a parole nel modo seguente.

Il **quadrato di un binomio** si esegue facendo
- il **quadrato del primo** termine;
- 2 volte il primo termine × il secondo termine ( = il **doppio prodotto del primo per il secondo**)
- il **quadrato del secondo** termine

**Esempi** di applicazione della formula:

a) $(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2+30xy+25y^2$

b) $\underbrace{(a-6x)^2}_{(a+(-6x))^2} = a^2 + 2\cdot a\cdot(-6x) + (-6x)^2 = a^2 - 12ax + 36x^2$

♥ Ricordare che la formula va applicata mettendo (ovviamente) al posto di "*a*" il primo termine del binomio dato, e al posto di "*b*" il secondo termine, e tenendo soprattutto presente che **ciascun termine deve comprendere anche il segno che lo precede!**

♫ **I passaggi intermedi si possono fare a mente;** un **buon consiglio** è tuttavia quello di **indicare il doppio prodotto, prima di svolgerlo, nei casi in cui questo non è semplicissimo**.

c) $\left(-\frac{1}{4}x+3y\right)^2 = \left(\underbrace{\boxed{-\frac{1}{4}x}}_{1^\circ \text{ termine}} \; \underbrace{\boxed{+3y}}_{2^\circ \text{ termine}}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}x\right)^2 + \cancel{2}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{4}_2}x\right)\cdot 3y + (3y)^2 = \frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{2}xy + 9y^2$

d) $\left(\boxed{-t}\,\boxed{-3}\right)^2 = (-t)^2 + 2\cdot(-t)\cdot(-3) + (-3)^2 = t^2+6t+9$

e) $(3x^2+7x)^2 = 9x^4+42x^3+49x^2$

f) $(2a-b)^2 = 4a^2-4ab+b^2$

- **Verifica** per $a=5,\ b=3$

  $1^\circ\ membro = (2a-b)^2 = (2\cdot 5-3)^2 = (10-3)^2 = 7^2 = \boxed{49}$

  $2^\circ\ membro = 4a^2-4ab+b^2 = 4\cdot 5^2 - 4\cdot 5\cdot 3 + 3^2 = 4\cdot 25 - 60 + 9 = 100-60+9 = \boxed{49}$

- **Verifica** svolgendo il calcolo letterale in un altro modo:

  $(2a-b)^2 = (2a-b)(2a-b) = 4a^2 - 2ab - 2ab + b^2 = 4a^2-4ab+b^2$

g) $\left(-\frac{3}{4}x^3+\frac{5}{6}x^2y\right)^2 = \frac{9}{16}x^6 + \cancel{2}\cdot\left(-\frac{\cancel{3}}{4}x^3\right)\cdot\frac{5}{\cancel{6}_{\cancel{2}}}x^2y + \frac{25}{36}x^4y^2 = \frac{9}{16}x^6 - \frac{5}{4}x^5y + \frac{25}{36}x^4y^2$

h) $(-5-x^2)^2 = 25+10x^2+x^4$

i) Un esempio di **espressione**:

$(x-1)(x-6)+3(x-1)^2-(2x-3)^2 = x^2 \underline{-6x} \underline{-x} + 6 + 3(x^2-2x+1) - (4x^2-12x+9) =$

$= \cancel{x^2} \underline{-7x} \cancel{+6} \cancel{+3x^2} \underline{-6x} \cancel{+3} \cancel{-4x^2} \underline{+12x} \cancel{-9} = -x$

- Lo **schema qui a fianco** rappresenta le varie **combinazioni di segno nel binomio di partenza e nel risultato**

$$\begin{array}{llllll} (+ & +)^2 & = & + & + & + \\ (+ & -)^2 & = & + & - & + \\ (- & +)^2 & = & + & - & + \\ (- & -)^2 & = & + & + & + \end{array}$$

- **I seguenti due esempi sono puramente numerici ( = senza lettere)**, e mostrano come il quadrato di un binomio possa, in taluni casi, costituire una tecnica efficace di **calcolo mentale**. Tutti i passaggi intermedi, infatti, possono essere svolti a mente, senza scrivere nulla!

  l) $53^2 = (50+3)^2 = 50^2 + 2\cdot 50\cdot 3 + 3^2 = 2500 + 300 + 9 = 2809$

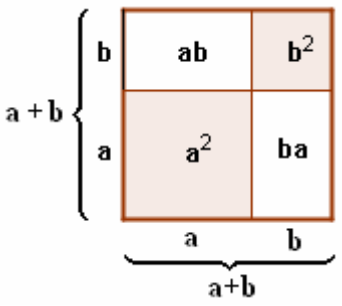
  m) $29^2 = (30-1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841$

- La **figura qui a destra** costituisce una **visualizzazione-giustificazione geometrica della formula per il quadrato di un binomio.**

  Essa mostra un **quadrato il cui lato misura** $\mathbf{a+b}$. **L'area** di questo **quadrato** può essere calcolata in **2 modi diversi**.

  I) Pensando direttamente all'area totale si ottiene $S = (a+b)^2$

  II) … e sommando invece le 4 aree parziali si ha $S = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$




Il limite di questa giustificazione sta nel fatto che si riferisce solo ai casi in cui a, b assumano valori non negativi.

Poiché però *i due calcoli devono portare al medesimo risultato*, ecco che salta fuori la nostra formula.

- Gli **esempi che seguono** presentano **esponenti letterali:**

  n) $\left(3a^k - 2\right)^2 = \left(3a^k\right)^2 + 2\cdot 3a^k\cdot(-2) + (-2)^2 = 9a^{2k} - 12a^k + 4$

  o) $\left(a^x + a^y\right)^2 = \left(a^x\right)^2 + 2\cdot a^x\cdot a^y + \left(a^y\right)^2 = a^{2x} + 2a^{x+y} + a^{2y}$

  p) $\left(x^{a+b} + x^{a-b}\right)^2 = \left(x^{a+b}\right)^2 + 2\cdot x^{a+b}\cdot x^{a-b} + \left(x^{a-b}\right)^2 = x^{2a+2b} + 2x^{2a} + x^{2a-2b}$

## ESERCIZI

1) $(x+1)^2$ 2) $(x+2)^2$ 3) $(x+3)^2$ *con verifica per* $x=1$

4) $(x-4)^2$ 5) $(x-5)^2$ 6) $(x-6)^2$ *con verifica per* $x=8$

7) $(4w-7)^2$ 8) $(3x-2y)^2$ 9) $(-t+8)^2$ *con due verifiche: per* $t=3$ *e per* $t=-2$

10) $\left(\frac{11}{12}x^2 + \frac{5}{2}x\right)^2$ 11) $\left(-\frac{1}{5}e^5 + \frac{1}{3}e^3\right)^2$ 12) $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$ *con verifica per* $a = 1/2$

13) $(2k-9)^2$ 14) $\left(1-x^2\right)^2$ 15) $(-abc-1)^2$

16) *Calcolo mentale:* $61^2 = (60+1)^2 = \ldots$ 17) *Calcolo mentale:* $59^2 = (60-1)^2 = \ldots$ 18) *Calcolo mentale:* $999^2 = (1000-1)^2 = \ldots$

19) *Ricordando che* $24^2 = 576$, *calcola a mente* $2^{20} = \left(2^{10}\right)^2 = 1024^2$ (*il "Mega"* ⇨ *dell'Informatica*)

20) $\left(4s^n + 3s\right)^2$ 21) $\left(a^{m+1} + a^{m+2}\right)^2$ 22) $\left(5x^n - 4x^p\right)^2$

## RISULTATI

1) $x^2+2x+1$ 2) $x^2+4x+4$ 3) $x^2+6x+9$

4) $x^2-8x+16$ 5) $x^2-10x+25$ 6) $x^2-12x+36$

7) $16w^2-56w+49$ 8) $9x^2-12xy+4y^2$ 9) $t^2-16t+64$

10) $\frac{121}{144}x^4 + \frac{55}{12}x^3 + \frac{25}{4}x^2$ 11) $\frac{1}{25}e^{10} - \frac{2}{15}e^8 + \frac{1}{9}e^6$ 12) $a^2 + a + \frac{1}{4}$

13) $4k^2-36k+81$ 14) $1-2x^2+x^4$ 15) $a^2b^2c^2+2abc+1$

16) 3721 17) 3481 18) 998001 19) 1.048.576

20) $16s^{2n} + 24s^{n+1} + 9s^2$ 21) $a^{2m+2} + 2a^{2m+3} + a^{2m+4}$ 22) $25x^{2n} - 40x^{n+p} + 16x^{2p}$

## 13. PRODOTTO $(a+b)(a-b)$, ossia PRODOTTO DELLA SOMMA DI DUE TERMINI PER LA LORO DIFFERENZA

$$\boxed{(a+b)(a-b)} = a^2 \cancel{-ab} \cancel{+ab} - b^2 = \boxed{a^2-b^2}$$

Quindi

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2-b^2}$$

Se si deve **moltiplicare** la **somma di due termini per la differenza di quegli stessi termini**, basta fare **la differenza dei quadrati**, ossia
**il quadrato del primo** termine **meno il quadrato del secondo** termine

**Esempi** di applicazione della formula:

a) $(x+5y)(x-5y) = x^2-25y^2$

♥ **Osservazione importante**
Nella formula di cui ci stiamo occupando i "termini" sono i due monomi, che nella prima parentesi compaiono sommati, e nella seconda sottratti (o viceversa).
Ad esempio, nell'operazione appena svolta, i "termini" erano: $x$ (1° termine), $5y$ (2° termine).
**I due segni +, − fra i due termini non devono dunque, in questo caso, essere pensati come segni che fanno parte dei termini stessi, bensì come segni di operazione (addizione e sottrazione) che li separano:**

$$(\boxed{x}+\boxed{5y})(\boxed{x}-\boxed{5y}) = x^2-25y^2$$

b) $(3ab-c^2)(3ab+c^2) = 9a^2b^2-c^4$

c) $\left(a^3+\frac{1}{2}\right)\left(a^3-\frac{1}{2}\right) = a^6-\frac{1}{4}$

d) $(a+3b)(a-3b)(a^2+9b^2) = (a^2-9b^2)(a^2+9b^2) = a^4-81b^4$

e) Utilità per il **calcolo mentale**: $53\cdot 47 = (50+3)(50-3) = 50^2-3^2 = 2500-9 = 2491$

f) $(3x^n+4y^{n-1})(3x^n-4y^{n-1}) = (3x^n)^2-(4y^{n-1})^2 = 9x^{2n}-16y^{2n-2}$

g) $(-c+4d)(-c-4d) = (\boxed{-c}+\boxed{4d})(\boxed{-c}-\boxed{4d}) = (-c)^2-(4d)^2 = c^2-16d^2$

h) Un esempio di **espressione**:

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)+(1-x^2)^2-2(1+x)(1-x) =$$
$$= (1-x^2)(1+x^2)+1-2x^2+x^4-2(1-x^2) =$$
$$= \cancel{1-x^4}+\cancel{1-2x^2}+\cancel{x^4}-2+\cancel{2x^2} = 0$$

**ESERCIZI**

1) $(a+1)(a-1)$
2) $(a+2)(a-2)$
3) $(a+3)(a-3)$
4) $(3x-2y)(3x+2y)$
5) $(a^3+4)(a^3-4)$
6) $(y^4-y^3)(y^4+y^3)$
7) $\left(\frac{1}{3}x^3+1\right)\left(\frac{1}{3}x^3-1\right)$
8) $\left(-\frac{1}{2}y-2\right)\left(-\frac{1}{2}y+2\right)$
9) $(a^k+3)(a^k-3)$
10) $108\cdot 92 = (100+8)(100-8) = \ldots$
11) $49\cdot 51$
12) $48\cdot 52$

**RISULTATI**

1) $a^2-1$
2) $a^2-4$
3) $a^2-9$
4) $9x^2-4y^2$
5) $a^6-16$
6) $y^8-y^6$
7) $\frac{1}{9}x^6-1$
8) $\frac{1}{4}y^2-4$
9) $a^{2k}-9$
10) 9936
11) 2499
12) 2496

## 14. QUADRATO DI UN TRINOMIO E, PIU' IN GENERALE, DI UN POLINOMIO

$$\boxed{(a+b+c)^2} = (a+b+c)(a+b+c) =$$
$$= a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2 = \boxed{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$$

Il **quadrato di un TRINOMIO** si esegue facendo:

- il **quadrato del primo** termine
- il **quadrato del secondo**
- **il quadrato del terzo**
- **il doppio prodotto del primo per il secondo**
- **il doppio prodotto del primo per il terzo**
- **il doppio prodotto del secondo per il terzo**

$$\boxed{(a+b+c+d)^2} = (a+b+c+d)(a+b+c+d) =$$
$$= a^2+ab+ac+ad+ab+b^2+bc+bd+ac+bc+c^2+cd+ad+bd+cd+d^2 =$$
$$= \boxed{a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd}$$

$$\boxed{(a+b+c+d+e)^2} = \ldots = \boxed{\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+ \\ +2ab+2ac+2ad+2ae+ \\ +2bc+2bd+2be+ \\ +2cd+2ce+ \\ +2de \end{array}}$$

In generale, il **quadrato di un POLINOMIO** si esegue facendo

- il **quadrato di ciascun termine;**
- il **doppio prodotto di ciascun termine per ciascuno dei successivi**

**Esempi** di applicazione delle formule:

a) $\left(\boxed{3x}\boxed{-4y}\boxed{+5}\right)^2 = 9x^2+16y^2+25-24xy+30x-40y$

b) $\left(x^2-x-2\right)^2 = x^4+x^2+4-2x^3-4x^2+4x = x^4-2x^3-3\underline{x^2}+4x+4$

c) $\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{6}{5}x-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x^2\right)^2+\left(\frac{6}{5}x\right)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2+2\cdot\frac{1}{\cancel{3}}x^2\cdot\frac{\cancel{6}^{\,2}}{5}x+\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}x^2\cdot\left(-\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_{\,2}}\right)+\cancel{2}\cdot\frac{\cancel{6}^{\,3}}{5}x\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{4}_{\,\cancel{2}}}\right) =$

$= \frac{1}{9}x^4+\underline{\frac{36}{25}x^2}+\frac{9}{16}+\frac{4}{5}x^3\underline{-\frac{1}{2}x^2}-\frac{9}{5}x = \frac{1}{9}x^4+\frac{4}{5}x^3+\frac{72-25}{50}x^2-\frac{9}{5}x+\frac{9}{16} = \frac{1}{9}x^4+\frac{4}{5}x^3+\frac{47}{50}x^2-\frac{9}{5}x+\frac{9}{16}$

d) $(3a-x+y-1)^2 = 9a^2+x^2+y^2+1-6ax+6ay-6a-2xy+2x-2y$

### ESERCIZI

1) $(1+x+y)^2$ 2) $(3a-2b-c)^2$ 3) $\left(5a^2-a+1\right)^2$ 4) $\left(y^4+y^3+y^2+y+1\right)^2$

5) Verifica la validità: □ dell'uguaglianza 3) per $a=1$ e poi per $a=2$; □ della 4) per $y=\pm1$

6) $\left(-\frac{1}{4}ab-\frac{1}{2}ac+2bc\right)^2$ 7) $\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-z\right)^2$ 8) $\left(a^k+5a-6\right)^2$ 9) $\left(x^{3k}-x^p-x^2-x\right)^2$

### RISULTATI

1) $1+x^2+y^2+2x+2y+2xy$ 2) $9a^2+4b^2+c^2-12ab-6ac+4bc$

3) $25a^4-10a^3+11a^2-2a+1$ 4) $y^8+2y^7+3y^6+4y^5+5y^4+4y^3+3y^2+2y+1$

6) $\frac{1}{16}a^2b^2+\frac{1}{4}a^2c^2+4b^2c^2+\frac{1}{4}a^2bc-ab^2c-2abc^2$ 7) $\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{4}y^2+z^2-\frac{1}{3}xy-\frac{2}{3}xz+yz$

8) $a^{2k}+25a^2+36+10a^{k+1}-12a^k-60a$

9) $x^{6k}+x^{2p}+x^4+x^2-2x^{3k+p}-2x^{3k+2}-2x^{3k+1}+2x^{p+2}+2x^{p+1}+2x^3$

## 15. CUBO DI UN BINOMIO

$$\boxed{(a+b)^3} = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3 \underline{+a^2b} \underline{+2a^2b} +2ab^2 +ab^2 +b^3 = \boxed{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

Il **cubo di un binomio** si esegue mediante la formula

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

e cioè facendo:

- il **cubo del primo** termine
- **3 volte il quadrato del primo × il secondo**
- **3 volte il primo × il quadrato del secondo**
- il **cubo del secondo**

**Esempi:**

a) $(x+2y)^3 = x^3+3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot 4y^2+8y^3 = x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

b) $(a-5)^3 = a^3+3\cdot a^2\cdot(-5)+3\cdot a\cdot(-5)^2+(-5)^3 = a^3-15a^2+75a-125$
$a+(-5)$

c) $(-x^2+1)^3 = -x^6+3\cdot x^4\cdot 1+3\cdot(-x^2)\cdot 1+1 = -x^6+3x^4-3x^2+1$

d) $(-4a^2-a)^3 = -64a^6+3\cdot 16a^4\cdot(-a)+3\cdot(-4a^2)\cdot a^2-a^3 = -64a^6-48a^5-12a^4-a^3$

e) $(2-x^n)^3 = 8-12x^n+6x^{2n}-x^{3n}$

f) **Alla fine**, dopo aver fatto i calcoli, la **successione dei segni** potrà essere *esclusivamente* una delle seguenti:

| $\boxed{+\ +\ +\ +}$ | $\boxed{+\ -\ +\ -}$ | $\boxed{-\ +\ -\ +}$ | $\boxed{-\ -\ -\ -}$ |
|---|---|---|---|
| *esercizio a)* | *esercizi b), e)* | *esercizio c)* | *esercizio d)* |

- **Il primo segno** dello sviluppo **coinciderà** quindi sempre **con quello del 1° termine** del binomio dato
- e **i quattro segni** dello sviluppo **saranno**
  - **tutti uguali** fra loro, **se i coefficienti dei termini del binomio iniziale erano concordi**;
  - **alterni**, **se i coefficienti dei termini del binomio iniziale erano discordi.**

g) Un'**espressione**:

$$\frac{1}{5}\left[(x+3)^3-(x-2)^3\right]-3x(x+1) = \frac{1}{5}\left[x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 9+27-\left(x^3+3\cdot x^2\cdot(-2)+3\cdot x\cdot 4-8\right)\right]-3x^2-3x =$$

$$= \frac{1}{5}\left[x^3+9x^2+27x+27-\left(x^3-6x^2+12x-8\right)\right]-3x^2-3x = \frac{1}{5}\left[\cancel{x^3} \underline{+9x^2} \widetilde{+27x} \underline{\underline{+27}} \cancel{-x^3} \underline{+6x^2} \widetilde{-12x} \underline{\underline{+8}}\right]-3x^2-3x =$$

$$= \frac{1}{5}\left[15x^2+15x+35\right]-3x^2-3x = \cancel{3x^2}\cancel{+3x}+7\cancel{-3x^2}\cancel{-3x} = 7$$

### ESERCIZI

1) $(y+1)^3$ *con verifica per* $y=1$ 2) $(y+2)^3$ *con verifica per* $y=1$ 3) $(y+3)^3$ *con verifica per* $y=1$

4) $(y-4)^3$ *con verifica per* $y=1$ 5) $(y-z)^3$ *e verifica per* $y=5, z=4$ 6) $(2xy+1)^3$

7) $\left(\frac{1}{3}a-x\right)^3$ 8) $\left(-\frac{1}{2}s+\frac{2}{3}t\right)^3$ 9) $\left(-\frac{1}{4}h-2\right)^3$ 10) $\left(\frac{1}{5}a^2-\frac{1}{2}a\right)^3$ 11) $\left(\frac{3}{2}x^m+\frac{2}{3}x^p\right)^3$ 12) $\left(a+a^k\right)^3$

### RISULTATI

1) $y^3+3y^2+3y+1$ 2) $y^3+6y^2+12y+8$ 3) $y^3+9y^2+27y+27$

4) $y^3-12y^2+48y-64$ 5) $y^3-3y^2z+3yz^2-z^3$ 6) $8x^3y^3+12x^2y^2+6xy+1$

7) $\frac{1}{27}a^3-\frac{1}{3}a^2x+ax^2-x^3$ 8) $-\frac{1}{8}s^3+\frac{1}{2}s^2t-\frac{2}{3}st^2+\frac{8}{27}t^3$ 9) $-\frac{1}{64}h^3-\frac{3}{8}h^2-3h-8$

10) $\frac{1}{125}a^6-\frac{3}{50}a^5+\frac{3}{20}a^4-\frac{1}{8}a^3$ 11) $\frac{27}{8}x^{3m}+\frac{9}{2}x^{2m+p}+2x^{m+2p}+\frac{8}{27}x^{3p}$ 12) $a^3+3a^{2+k}+3a^{1+2k}+a^{3k}$

# 16. QUARTA, QUINTA, … n-ESIMA POTENZA DI UN BINOMIO

$$\boxed{(a+b)^4} = (a+b)^3(a+b) = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) =$$
$$= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 = \boxed{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}$$

$$\boxed{(a+b)^5} = (a+b)^4(a+b) = \left(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\right)(a+b) =$$
$$= a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4+a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5 = \boxed{a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5}$$

$$\boxed{(a+b)^6} = (a+b)^5(a+b) = \ldots = \boxed{a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6}$$

ecc. ecc.

Vediamo così che le formule per le **potenze di un binomio** presentano un aspetto armonioso e regolare.

Si ha, in generale, $\boxed{(a+b)^n = a^n+na^{n-1}b+\ldots+nab^{n-1}+b^n}$, ossia:

**lo sviluppo di $(a+b)^n$**

- **comincia da $a^n$**
- e **prosegue poi secondo le potenze decrescenti di *a* e crescenti di *b*, fino a terminare con $b^n$** ;
- **il polinomio è omogeneo**, perché questo decrescere dell'esponente di *a*, abbinato al simultaneo crescere dell'esponente di *b*, fa sì che il grado dei vari termini si mantenga sempre uguale a $n$ ;
- inoltre, si osserva che **il secondo e il penultimo coefficiente valgono $n$.**

Ciò permetterebbe di ricordare le varie formule senza fatica, se non fosse per i coefficienti intermedi:
… quelli, non è affatto facile tenerli a mente!

Ci domandiamo allora:
**esiste un metodo comodo per ricostruire rapidamente pure i coefficienti intermedi?**

Cominciamo con l'osservare che lo sviluppo di $(a+b)^4$ viene ricavato da quello (già noto) di $(a+b)^3$ ; allo stesso modo, lo sviluppo di $(a+b)^5$ viene ricavato da quello (già noto) di $(a+b)^4$, e così via.

Prendiamo ora, per esempio, il calcolo tramite il quale $(a+b)^5$ viene "generato" a partire da $(a+b)^4$.
Si scrive $(a+b)^5 = (a+b)^4(a+b)$, dopodiché si sviluppa $(a+b)^4$ e infine si svolge il prodotto:
i monomi di $(a+b)^4$ vengono moltiplicati prima tutti per $a$ poi tutti per $b$,
e da ultimo si riducono i termini simili.

Riprendiamo in esame la moltiplicazione $(a+b)^4(a+b)$, ponendo particolare attenzione sui coefficienti, e andando a capo in modo "furbo", affinché i monomi simili risultino incolonnati. Avremo:

$$(a+b)^5 = (a+b)^4(a+b) = (a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)(a+b) =$$
$$= \underbrace{\left(\boxed{1}a^4 \quad +\boxed{4}a^3b \quad +\boxed{6}a^2b^2 \quad +\boxed{4}ab^3 \quad +\boxed{1}b^4\right)}_{\text{sviluppo di } (a+b)^4}(a+b) =$$
$$= \begin{array}{lllll} 1a^5 & +4a^4b & +6a^3b^2 & +4a^2b^3 & +1ab^4 \\ & +1a^4b & +4a^3b^2 & +6a^2b^3 & +4ab^4 \quad +1b^5 \end{array}$$
$$= \underbrace{\boxed{1}a^5 \quad +\underset{\underset{4+1}{\sqcup}}{\boxed{5}}a^4b \quad +\underset{\underset{6+4}{\sqcup}}{\boxed{10}}a^3b^2 \quad +\underset{\underset{4+6}{\sqcup}}{\boxed{10}}a^2b^3 \quad +\underset{\underset{1+4}{\sqcup}}{\boxed{5}}ab^4 \quad +\boxed{1}b^5}_{\text{sviluppo di } (a+b)^5}$$

Possiamo a questo punto rilevare un fatto molto interessante:

**i coefficienti dello sviluppo di una potenza di binomio sono tali che ognuno di essi**
(a parte il primo e l'ultimo, che sono unitari)
**è ricavabile sommando due opportuni coefficienti, relativi alla potenza precedente!**

Ad esempio, il secondo coefficiente del nostro risultato (sto pensando al coefficiente 5 del termine $5a^4b$ )
è ottenuto sommando 4 e 1, che sono poi il secondo e il primo coefficiente, relativi alla potenza precedente.
Analogamente, il terzo coefficiente del nostro risultato (mi riferisco al coefficiente 10 del termine $10a^3b^2$ )
è ottenuto sommando 6 e 4, che sono poi il terzo e il secondo coefficiente, relativi alla potenza precedente.

Bene! **Abbiamo così trovato il metodo per ricostruire rapidamente i vari coefficienti successivi!**

**Ogni coefficiente (a parte il primo e l'ultimo, unitari)**
**si può ricavare sommando due opportuni coefficienti, relativi alla potenza precedente,**
**e per l'esattezza:**

- ♪ **il coefficiente di ugual posto (nella potenza precedente)**
- ♫ **e il coefficiente che precedeva quest'ultimo (sempre nella potenza precedente).**

*Ad es., i coeff. di* $(a+b)^6$ *potranno essere ricavati istantaneamente partendo dai coeff. di* $(a+b)^5$*, che sono*

$\boxed{1}\quad\boxed{5}\quad\boxed{10}\quad\boxed{10}\quad\boxed{5}\quad\boxed{1}$.

*Basterà scrivere la sequenza di numeri*

$\boxed{1}\quad 1+5=\boxed{6}\quad 5+10=\boxed{15}\quad 10+10=\boxed{20}\quad 10+5=\boxed{15}\quad 5+1=\boxed{6}\quad\boxed{1}$

*dopodiché sarà sufficiente appiccicare a ciascun coefficiente la parte letterale corretta per ottenere*

$$(a+b)^6 = a^6 + \boxed{6}a^5b + \boxed{15}a^4b^2 + \boxed{20}a^3b^3 + \boxed{15}a^2b^4 + \boxed{6}ab^5 + b^6$$

Ricapitoliamo. **L' n-esima potenza di un binomio è un polinomio con le seguenti caratteristiche:**

- **è di grado n**
- **è omogeneo ( = tutti i suoi termini hanno lo stesso grado)**
- **è ordinato secondo le potenze decrescenti del primo termine e crescenti del secondo termine**
- **contiene n+1 termini**
- **il suo primo e il suo ultimo coefficiente valgono 1**
- **il suo secondo e il suo penultimo coefficiente valgono n**
- **i coefficienti intermedi** possono essere ricavati tenendo presente che ogni coeff. è uguale alla somma
  - ♪ fra il coefficiente di ugual posto, dello sviluppo precedente,
  - ♫ e il coefficiente che, sempre nello sviluppo precedente, precedeva quest'ultimo.

A tale scopo, i vari coefficienti possono essere organizzati in un apposito schema,
detto **"Triangolo di Tartaglia"** (Niccolò Fontana detto il Tartaglia, algebrista italiano, 1499-1557),
**nel quale ogni numero di ciascuna fila orizzontale**
(tranne il primo e l'ultimo, che sono uguali a 1) **è calcolato come somma dei due che lo sovrastano.**

Per **costruire il Triangolo di Tartaglia**, possiamo immaginarlo come un **albero di Natale**. In alto, **sul cucuzzolo, ci mettiamo un 1**.

Ora **scendiamo lungo le pendici dell'albero**, **scrivendo (seconda riga) un 1 e poi un altro 1**.

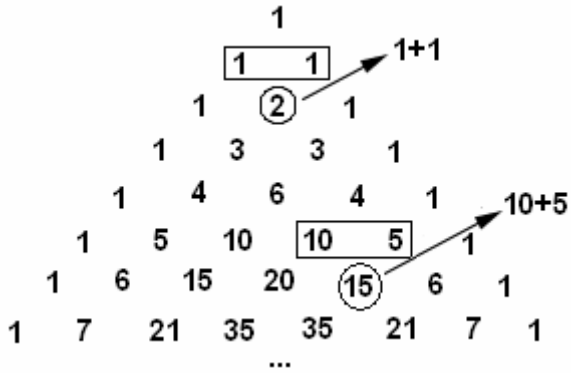
Scendiamo ancora: siamo sulla **terza riga**; **come primo elemento della riga scriviamo un 1**; poi, dato che sopra di noi troviamo una coppia di 1, **scriviamo un 2 ( 1 + 1 = 2 ).** **Terminiamo la riga con un 1.**

**Abbiamo così costruito i coefficienti (1, 2, 1) di $(a+b)^2$.**

**Scendiamo ancora**, ed ecco che, **procedendo allo stesso modo**,

**si generano i coefficienti (1, 3, 3, 1) di $(a+b)^3$**

**E così per le righe successive.**




*Secondo te, si può dare un significato anche alla seconda riga* **(1, 1)** *del triangolo di Tartaglia?*
*E al cucuzzolo?*

Dal "Triangolo di Tartaglia" otteniamo, dunque, le **formule**:

$$(a+b)^4 = a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + \mathbf{5}a^4b + \mathbf{10}a^3b^2 + \mathbf{10}a^2b^3 + \mathbf{5}ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + \mathbf{6}a^5b + \mathbf{15}a^4b^2 + \mathbf{20}a^3b^3 + \mathbf{15}a^2b^4 + \mathbf{6}ab^5 + b^6$$
$$(a+b)^7 = a^7 + \mathbf{7}a^6b + \mathbf{21}a^5b^2 + \mathbf{35}a^4b^3 + \mathbf{35}a^3b^4 + \mathbf{21}a^2b^5 + \mathbf{7}ab^6 + b^7$$
$$(a+b)^8 = a^8 + \mathbf{8}a^7b + \mathbf{28}a^6b^2 + \mathbf{56}a^5b^3 + \mathbf{70}a^4b^4 + \mathbf{56}a^3b^5 + \mathbf{28}a^2b^6 + \mathbf{8}ab^7 + b^8$$

*ecc. ecc.*

**Esempi** di applicazione:

a) $\boxed{(3x+2)^4} = 81x^4 + 4\cdot 27x^3\cdot 2 + 6\cdot 9x^2\cdot 4 + 4\cdot 3x\cdot 8 + 16 = \boxed{81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16}$

b) $\boxed{\left(x^2-2\right)^5} = \left(x^2\right)^5 + 5\cdot\left(x^2\right)^4(-2) + 10\cdot\left(x^2\right)^3(-2)^2 + 10\cdot\left(x^2\right)^2(-2)^3 + 5\cdot x^2(-2)^4 + (-2)^5 =$

$= \boxed{x^{10} - 10x^8 + 40x^6 - 80x^4 + 80x^2 - 32}$

c) $\boxed{\left(\frac{1}{2}a - 1\right)^6} = \frac{1}{64}a^6 + 6\cdot\frac{1}{32}a^5\cdot(-1) + 15\cdot\frac{1}{16}a^4\cdot(+1) + 20\cdot\frac{1}{8}a^3\cdot(-1) + 15\cdot\frac{1}{4}a^2\cdot(+1) + 6\cdot\frac{1}{2}a\cdot(-1) + 1 =$

$= \boxed{\frac{1}{64}a^6 - \frac{3}{16}a^5 + \frac{15}{16}a^4 - \frac{5}{2}a^3 + \frac{15}{4}a^2 - 3a + 1}$

d) $\boxed{(-x-3)^4} = (-x)^4 + 4\cdot(-x)^3\cdot(-3) + 6\cdot(-x)^2\cdot(-3)^2 + 4\cdot(-x)\cdot(-3)^3 + (-3)^4 =$

$= x^4 + 4\cdot(-x^3)\cdot(-3) + 6\cdot x^2\cdot 9 + 4\cdot(-x)\cdot(-27) + 81 = \boxed{x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81}$

e) $\boxed{(-2a-b)^5} = (-2a)^5 + 5\cdot(-2a)^4\cdot(-b) + 10\cdot(-2a)^3\cdot(-b)^2 + 10\cdot(-2a)^2\cdot(-b)^3 + 5\cdot(-2a)\cdot(-b)^4 + (-b)^5 =$

$= -32a^5 + 5\cdot 16a^4\cdot(-b) + 10\cdot(-8a^3)\cdot b^2 + 10\cdot 4a^2\cdot(-b^3) + 5\cdot(-2a)\cdot b^4 - b^5 =$

$= \boxed{-32a^5 - 80a^4b - 80a^3b^2 - 40a^2b^3 - 10ab^4 - b^5}$

f) $\boxed{\left(a^x + a^y\right)^4} = a^{4x} + 4\cdot a^{3x}\cdot a^y + 6\cdot a^{2x}\cdot a^{2y} + 4\cdot a^x\cdot a^{3y} + a^{4y} =$

$= \boxed{a^{4x} + 4a^{3x+y} + 6a^{2x+2y} + 4a^{x+3y} + a^{4y}}$

**OSSERVAZIONE**

I termini dello sviluppo dell' n-esima potenza di un binomio hanno sempre **segni**:

- **TUTTI UGUALI** fra loro (se i coefficienti dei due termini di partenza sono **concordi**)
  $+ + + + \ldots$ *oppure* $- - - - \ldots$
- o altrimenti **ALTERNI** (se i coefficienti dei due termini di partenza sono **discordi**)
  $+ - + - \ldots$ *oppure* $- + - + \ldots$

Basterà perciò determinare il PRIMO di questi segni (che dipende dal segno del primo fra i due coefficienti nel binomio, e dal fatto se l'esponente sia pari o dispari) per avere la corretta sequenza dei segni finali.

**ESERCIZI**

1) $(t-3)^4$ *con verifica ponendo* $t=1$
2) $(5x+2y)^4$ *Verifica per* $x=1,\ y=-2$
3) $(2a^2-a)^4$ *Due verifiche, con* $a=1$ *e* $a=-1$
4) $(t+10)^5$ *Verifica con* $t=-10$
5) $(x-3y)^5$ *Verifica con* $x=y=1$
6) $(-1-b^3)^5$ *Verifica con* $b=-1$
7) $(1+c)^6$ *Verifica con* $c=-1$ *e con* $c=1$
8) $(-1+c)^6$ *Verifica con* $c=1$ *e con* $c=2$
9) $(p-2)^6$ *Verifica con* $p=1$
10) $(-1+w)^9$ *Verifica con* $w=1$

**RISULTATI**

1) $t^4 - 12t^3 + 54t^2 - 108t + 81$
2) $625x^4 + 1000x^3y + 600x^2y^2 + 160xy^3 + 16y^4$
3) $16a^8 - 32a^7 + 24a^6 - 8a^5 + a^4$
4) $t^5 + 50t^4 + 1000t^3 + 10000t^2 + 50000t + 100000$
5) $x^5 - 15x^4y + 90x^3y^2 - 270x^2y^3 + 405xy^4 - 243y^5$
6) $-1 - 5b^3 - 10b^6 - 10b^9 - 5b^{12} - b^{15}$
7) $1 + 6c + 15c^2 + 20c^3 + 15c^4 + 6c^5 + c^6$
8) $1 - 6c + 15c^2 - 20c^3 + 15c^4 - 6c^5 + c^6$
9) $p^6 - 12p^5 + 60p^4 - 160p^3 + 240p^2 - 192p + 64$
10) $-1 + 9w - 36w^2 + 84w^3 - 126w^4 + 126w^5 - 84w^6 + 36w^7 - 9w^8 + w^9$

# 17. COMPLEMENTI SUI PRODOTTI NOTEVOLI

*Ti presento in questo paragrafo qualche approfondimento interessante.*

**A.** Possiamo "ritrovare" la nota formula per il **quadrato di un trinomio** anche procedendo come segue:

$$(a+b+c)^2=\big[(a+b)+c\big]^2=(a+b)^2+2(a+b)\cdot c+c^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

Analogamente, si potrà scrivere, per il **quadrato di un quadrinomio**:

$$(a+b+c+d)^2=\big[(a+b)+(c+d)\big]^2=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2ad+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

oppure, in alternativa:

$$(a+b+c+d)^2=\big[(a+b+c)+d\big]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)\cdot d+d^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+2ad+2bd+2cd+d^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

❑ **Esercizio 1.** *Ricostruisci la formula per il quadrato di un polinomio di 5 termini scrivendo:*

$$(a+b+d+c+e)^2=\big[(a+b+c)+(d+e)\big]^2$$

**Correzione** ⇨

**B.** Un prodotto come $(a+b+c)(a-b-c)$, se svolto "normalmente", porterebbe a ottenere 9 termini. In alternativa, possiamo fare così:

$$(a+b+c)(a-b-c)=\big[a+(b+c)\big]\big[a-(b+c)\big]=$$
$$=a^2-(b+c)^2=$$
$$=a^2-\left(b^2+2bc+c^2\right)=a^2-b^2-2bc-c^2$$

Nel passaggio $a-b-c=a-(b+c)$, si dice che "si è messo in evidenza il segno $-$ ".

" **METTERE IN EVIDENZA IL SEGNO $-$ "**
**significa prendere un POLINOMIO**
**e riscriverlo come $-$(POLINOMIO COI SEGNI CAMBIATI)**

Altri esempi:

$$4a^2-3a-2=-\left(-4a^2+3a+2\right)\qquad -x^3+x^2y-xy^2+y^3=-\left(x^3-x^2y+xy^2-y^3\right)$$

Ed ecco ancora un caso in cui "mettere in evidenza il segno $-$ " si rivela utile ai fini del calcolo:

$$\left(x^3+x^2-2x+4\right)\left(x^3-x^2+2x+4\right)=\left(x^3+4+x^2-2x\right)\left(x^3+4-x^2+2x\right)=$$
$$=\big[\left(x^3+4\right)+\left(x^2-2x\right)\big]\big[\left(x^3+4\right)-\left(x^2-2x\right)\big]=$$
$$=\left(x^3+4\right)^2-\left(x^2-2x\right)^2=$$
$$=x^6+8x^3+16-\left(x^4-4x^3+4x^2\right)=$$
$$=x^6+8x^3+16-x^4+4x^3-4x^2=x^6-x^4+12x^3-4x^2+16$$

❑ **Esercizio 2** **Correzione** ⇨

*Svolgi i seguenti prodotti nel modo ottimale:*

$(3x+2y+z)(3x-2y-z)$ $(3x+2y-z)(3x-2y+z)$ $(a+b+c+d)(a-b-c-d)$

$(3x+2y+z)(3x+2y-z)$ $(3x+2y+z)(3x-2y+z)$ $(a+b+c+d)(a+b+c-d)$

**C.**

La formula $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, se viene riscritta da destra verso sinistra, diventa

$$\boxed{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$$

Ma quest'ultima uguaglianza ci dice che
**"una differenza di quadrati è uguale alla somma delle basi, moltiplicato la loro differenza"**

Questo fatto
(che sarà fondamentale tener presente nel capitolo
dedicato alla scomposizione in fattori di un polinomio),
può rivelarsi **molto utile ai fini del calcolo rapido**.

Ad esempio, se in un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 52 e un cateto 48,
per il Teorema di Pitagora (vedi pag. 214) l'altro cateto misurerà

$\sqrt{52^2-48^2}$ .

A questo punto, anziché metterci a svolgere i quadrati, potremmo scrivere

$$\sqrt{52^2-48^2}=\sqrt{(52+48)(52-48)}=\sqrt{100\cdot 4}=\sqrt{400}=20$$

- **Esercizio 3** **Correzione** ⇨

  *Svolgi i seguenti calcoli nel modo più efficace:*

  $45^2-35^2$ $46^2-36^2$ $99^2-98^2$ $67^2-33^2$ $156^2-144^2$

## RICAPITOLAZIONE DEI PRINCIPALI "PRODOTTI NOTEVOLI"

### POTENZE DI UN BINOMIO (A PARTIRE DAL QUADRATO)

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$
$$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$$
...

I coefficienti
possono essere determinati
tramite il
**Triangolo di Tartaglia**

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
.....

nel quale
**i coefficienti non laterali sono ciascuno la somma dei due che lo sovrastano**

### SOMMA DI DUE TERMINI MOLTIPLICATO LA LORO DIFFERENZA

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

*riassumibile nell'importante "slogan" :*

"La somma di due termini, moltiplicata per la loro differenza,
è uguale alla DIFFERENZA DEI QUADRATI"

### QUADRATO DI UN POLINOMIO (A COMINCIARE DAL TRINOMIO)

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$
$$(a+b+c+d+e)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2ab+2ac+2ad+2ae+2bc+2bd+2be+2cd+2ce+2de$$
...

*Per svolgere il quadrato di un polinomio, si fa*
1) il QUADRATO DI CIASCUN TERMINE
2) il DOPPIO PRODOTTO DI CIASCUN TERMINE PER CIASCUNO DEI SUCCESSIVI

## 18. ESPRESSIONI CON PRODOTTI NOTEVOLI

**Esempi svolti**:

**A)** $\boxed{9(2a+b)^2-(6a-b)^2-8b(6a+b)}=9(4a^2+4ab+b^2)-(36a^2-12ab+b^2)-48ab-8b^2=$

$=\cancel{36a^2}+\cancel{36ab}+\cancel{9b^2}-\cancel{36a^2}+\cancel{12ab}-\cancel{b^2}-\cancel{48ab}-\cancel{8b^2}=\boxed{0}$

**B)** $\boxed{\left\{\frac{1}{8}\left[(2x+3y)(2x-3y)-(2x-y)(2x+y)\right]+1\right\}^2+2y^2}=$

$=\left\{\frac{1}{8}\left[4x^2-9y^2-(4x^2-y^2)\right]+1\right\}^2+2y^2=\left\{\frac{1}{8}\left[\cancel{4x^2}-9y^2-\cancel{4x^2}+y^2\right]+1\right\}^2+2y^2=$

$=\left\{\frac{1}{8}\left[-8y^2\right]+1\right\}^2+2y^2=(-y^2+1)^2+2y^2=y^4-\cancel{2y^2}+1+\cancel{2y^2}=\boxed{y^4+1}$

**ESERCIZI** (la freccia, se c'è, è un link verso la correzione)

1) $(x-3y)^2-2x(13x-33y)+(5x-6y)^2$

2) $7(a-1)^2+2(a+2)^2-(3a-1)^2$

3) $4ab+(a-b)^2-(a+b)^2$

4) $3(k^2+5)-(k+3)^2-(k-1)^2-(k-2)^2$

5) $\left(x+\frac{5}{6}y\right)^2-\frac{1}{3}y\left(2x+\frac{13}{6}y\right)+\left(3x-\frac{1}{6}y\right)^2$

6) $\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}a^3\right)^2-\frac{1}{4}a^3\left(a^3-\frac{4}{3}a\right)+\frac{8}{9}a^2$

7) $\frac{1}{14}\left[8(x-1)(x+2)-2(x+1)^2-6(x-2)^2\right]+3$

8) $\frac{1}{2}\left[(a^5+1)^2+(a^5+3)^2\right]-(a^5+7)(a^5-3)$

9) $\left[(a-10b)^2-3(2a-5b)^2-5(5b^2-2a^2)\right]^2+10\cdot(2a)^3\cdot b$ ⇨

10) $\frac{1}{2}\left[(-2+x)^2+(-2-x)^2\right](x^2-3)-(x^2+2)(x^2-6)$ ⇨

11) $(-y^2-1)^2\left[2(-4+y)^2-(y-8)^2+31\right]^2$ ⇨

12) $\left(3a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}a+1\right)\left(1+\frac{1}{2}a\right)-(a-1)^2-\frac{1}{4}(a^2+1)$ ⇨

13) $(3y-1)\left[y(y+1)-(y+3)(y+3)\right]-5(1-y)(3y+1)+4(8y-1)$

14) $(a^x-a)^2$

15) $\left(x^{k+1}+x^{k-1}\right)^2$

16) $\left(3y^{k+1}+5y^{3k-2}\right)^2$

17) $\left(x^p y^{p+1}-x^{3p}y\right)^2$

18) $\left(a^{3n}-a^4b^n\right)^2$

19) $(a+1)(a-1)+(a+2)(a-2)+(a+3)(a-3)+(a+4)(a-4)+(a+5)(a-5)$

20) $4(x+2y)(x-2y)+(x+4y)^2-5x^2$

21) $(5a-4b)(5a+4b)-(3a+5b)(3a-5b)-(4a-3b)^2$ ⇨

22) $4(3a-5)(5+3a)-4(-3a+1)^2-(a+4)(a-26)+a^2$

23) $(2x-1)(1+2x)+(1+2x)(2x+1)$

24) $\left(\frac{5}{3}xy+3z\right)\left(\frac{5}{3}xy-3z\right)-\frac{1}{9}(5xy-6z)^2+13z^2-\frac{17}{3}xyz$

25) $2a^2+(a-1)^2(a+1)^2$

26) $\left[\left(\frac{1}{3}w+1\right)^2-\left(\frac{1}{3}w-1\right)^2+\left(-\frac{1}{3}w+1\right)\left(-\frac{1}{3}w-1\right)-\frac{4}{3}w\right]\left(\frac{1}{9}w^2+1\right)+1$ ⇨

27) $\left[2(5n+1)\left(\frac{1}{5}n-\frac{1}{6}\right)-2\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{15}n\right]^2-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}-3n\right)$ ⇨

28) $a^2+(a+3)(-a-3)+3(2a+3)$ ⇨

29) $(2a+3)^2-(-2a-3)^2$

30) $(x-1)(x+1)(x^2+1)-(x-2)(x+2)(x^2+4)$

31) $1+\left[8a^2-(2a-1)(2a+1)\right](2a\cdot 2a-1)-(-2a)^4$

32) $\left\{\left[(b+3)(b-3)(b^2+9)+80\right]\left[(b+4)(b-4)(b^2+16)+257\right]\right\}^2+2b^8$

33) $\left(3a^{3n}+2a^{n+1}\right)\left(3a^{3n}-2a^{n+1}\right)$

34) $\left(1-a^k\right)\left(1+a^k\right)\left(1+a^{2k}\right)\left(1+a^{4k}\right)\left(1+a^{8k}\right)$

35) $(a-b+1)^2-(a+b-1)^2-4a(1-b)$ 36) $(3x-2y-1)^2-(3x+2y)^2+2(12xy+3x-2y)$

37) $(5a-b-1)^2-2(1-5a)(1+b)-(b-1)(b+1)-(-5a)^2$

38) $\frac{1}{2}\left[(a-2b+3c)^2+(a+2b-3c)^2+24bc\right]$ 39) $(x-1)^2(x-2)^2-(x^2-3x+2)^2$ ⇨

40) $(x^3-x^2+x-1)^2+2x(x^2+1)^2-3x^2(x^2+1)$ 41) $(a+b-c-d)^2-(c+d-b)^2-a\left[a+2(b-c-d)\right]$

42) $\left[(b^k-1)(b^{2k}-1)+b^{2k}\right]^2+b^k\left[2(b^{3k}+1)-b^k(b^k+1)\right]$

43) $(x-2)^3-(x+1)^3+9(x^2-x+1)$ 44) $\left\{(2x-1)^3-\left[6x(1-2x)-1\right]\right\}:8$

45) $(2-t)^3-(1-t)^3-3t(t-3)$ 46) $5x^2+\frac{1}{15}\left[(5x-2)^3-(5x-1)^3+7\right]$

47) $\left[(b+1)^3-(-b+1)^3\right]:2-3b$ 48) $(a+y)^3+(a-y)^3+(-a+y)^3+(-a-y)^3$

49) $\left[(x^2+4x-1)^2-8x(x-1)(x+1)-14x^2\right]^3-x^4(x^4+1)(x^4+2)$

50) $(a^2-1)^3-(a+1)^3(a-1)^3$ 51) $\left[(y-2)^4-(y+2)^4+64y\right]:(-16y^2)$

52) $(x^2+1)^4-x^2(x^2-1)^3-x^2(7x^4+3x^2+5)$ 53) $-2\left[(-2ab)^2+1\right]+\left[(2ab+1)^4-(4a^2b^2-ab+1)^2\right]:(5ab)$

54) $(a+1)^4-(a-1)^4-8a(a^2+1)$ 55) $1+(a-1)^5+5a\left[a(a^2+2)-(2a^2+1)\right]$

56) $\left[(x+2y)^5+(x-2y)^5\right]:(2x)-40y^2(x^2+2y^2)$

57) $9(2x-1)^2-(6x-7)^2-8(6x-5)$ 58) $-(10+x)^2+(8-x)^2-36(-1-x)$

59) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b\right)^2-\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{1}{2}ab$ 60) $2c+(-11c+3)^2-\left[9(-4c+1)^2+8c(1-3c)\right]$

61) $37-(4s-1)^2+4(2s+3)(2s-3)$ 62) $(3-n)(3+n)(9+n^2)-(2+n)(2-n)(4+n^2)$

63) $\frac{1}{4}\left[(3x^2+2)^2-(3x^2-4)(3x^2+4)\right]-3x^2$ 64) $2w^3-9w^2\left(\frac{1}{9}w-1\right)\left(\frac{1}{9}w+1\right)+\left(\frac{1}{3}w^2-3w\right)^2$

65) $(a^2-a-1)^2-(a+2)^2(a-1)^2+(2a-1)(2a^2-3)$ 66) $(x^4-x^2-1)^2+x^2\left[2(x^2+1)-x^2(x^2-1)^2\right]-1$

67) $45+(x^2+3)(x^2-3)-\left[(-x^2+x-5)^2-11(x-1)(x+1)\right]$

68) $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2-\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y+2\right)^2+2\left(\frac{1}{2}x+2\right)$ 69) $(a-b+3)^2+(3a-b+1)^2-2\left[5(a^2+1)+b^2-4ab\right]+8b$

70) $\left[-\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{2}x\right)^2+4x^2\left(\frac{1}{3}x+y-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{4}{3}x^2y\left(2x-\frac{15}{2}\right)\right]:(-2x)^2$

71) $2\left[a+(b-1)\cdot c\right]+(a+b-c-1)^2-(c-a)^2-(1-b)^2$ 72) $(a+1)^3-(a+2)^3+(a-1)^3-(a-2)^3$

73) $(t^4-t^3+2t^2-3t)^2-t^2(t^2-2t+3)^2+2t^5(t^2-2t+3)$ 74) $\left[(x+y)^3-(-x+y)^3\right]:(2x)$

75) $(7c-2d)^3-(5c-2d)^3+24cd(6c-d)$ 76) $(8a^6-1)^2+4a^4\left[3+4a^2(3a^2+1)\right]-(4a^4+1)^3$

77) $\frac{1}{3}\left[(a+a^2b)^3-a^3(1+a^3b^3)\right]$ 78) $2t+\frac{4}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}t+1\right)\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t+1\right)-\left[\left(\frac{1}{2}t-1\right)^3+2\right]\right\}$

79) $\frac{(2e^2-f)^3+f^3}{2e^2}-(2e^2-f)^2+e^2f$ 80) $\frac{ab(23a+61b)-\left[-(-3a+b)^3+b(-2a+3b)^2\right]+(3a+2b)^3}{100ab}$

81) $\frac{(r^4+r^2)^3-(r^6-r^3)^2-r^8(r^2+1)}{2}$ 82) $\frac{1}{15}\left\{124(1+b\cdot b^2)+\left[2b-(5+b)\right]^3+(-5b-1)^3+2\right\}$

83) $\left(2a^x - 3a^y\right)^2$ 84) $a^{x+1} + \left(a^x - a\right)^2 - a^2$ 85) $\left(-a^x + a\right)^3$ 86) $\left(a^x\right)^x - \left(a^x - 1\right)^2\left(a^x + 1\right)^2 - \left(a^{x^2} + 2a^{2x}\right)$

87) $(3a-2)^2 - 2(a-2)(2a-5) - 5(a-2)(a+2) - 2(3a+2)$ 88) $(x^2+x-1)^2 - (x^2+x)^2 + 2x(x+1)$

89) $(3a-2)^3 + 18a(3a-2) + 8$ 90) $15 + (3a-1)^4 - (3a-2)^2(3a+2)^2 + 6a(18a^2 - 21a + 2)$

91) Dimostra che la differenza dei quadrati di 2 interi consecutivi è uguale alla somma di quegli stessi numeri

92) Qual è il secondo termine dello sviluppo di $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{1000}$ ?

93) Se $A = k + 10$ e $B = k - 2$, allora:

I) $A^2 - B^2 = ?$ II) $(A+B)(A-B) = ?$ III) $(A+B)^2 = ?$ IV) $A^2 + 2AB + B^2 = ?$

94) Spiega perché i numeri 1331 1030301 1003003001 1000300030001 ... sono tutti cubi perfetti, e determina gli interi dei quali essi sono cubi (Indicazione: ad esempio, $1331 = 10^3 + 3\cdot 10^2 + ... = ...$)

95) Se il lato di un quadrato misura *a* cm e viene accorciato di *m* cm, di quanti $cm^2$ diminuisce l'area?
a) $m^2 - 2am$ b) $m^2$ c) $2am - m^2$ d) $a^2 + m^2 - 2am$

96) Il lato di un cubo misura $a$ cm. Se misurasse *m* centimetri in più, di quanto aumenterebbe la superficie totale del cubo? E di quanto aumenterebbe il suo volume?

97) Determina il lato di un quadrato sapendo che aumentandolo di 1 cm, oppure diminuendolo di 1 cm, le due rispettive aree differirebbero di $204\ cm^2$ (si risponde risolvendo una semplicissima equazione)

98) Qual è il 3° termine da sinistra nello sviluppo di $(a + a^{-1})^{10}$ ? Voglio dire: $(a + a^{-1})^{10} = a^{10} + ... + ? + ...$

99) Scrivi il prodotto notevole che, se viene svolto, dà come risultato $81x^4 - 49$

100) Determina il quadrato di binomio il cui sviluppo è
a) $81x^2 - 36x + 4$ b) $x^4 + 121x^2 - 22x^3$ c) $4 + 4x^3 + x^6$

101) $4a^2 + 12ab + 9b^2 + 16c^2 - 16ac - 24bc$ è un polinomio che si ottiene eseguendo un quadrato di trinomio. Sapresti risalire al prodotto notevole di partenza?

102) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$ è un polinomio che si ottiene eseguendo un quadrato di trinomio poi riducendo due termini simili. Sapresti risalire al prodotto notevole di partenza?

103) Quale dei seguenti polinomi NON è lo sviluppo di un quadrato di binomio?
a) $x^2 + 8x + 16$ b) $x^2 - 14x + 49$ c) $x^2 + 12x + 144$ d) $x^2 + 25 - 10x$ e) $1 + 6x^4 + 9x^8$

104) $x^8 + 4x^4 + ...$ Completa col termine mancante, in modo che il trinomio ottenuto sia uguale al quadrato di un binomio. Ci sono DUE POSSIBILITÀ: sapresti scriverle entrambe?

105) Sapendo che $876 \cdot 874 = 765624$, stabilisci senza far calcoli qual è il risultato dell'operazione $875^2$.

106) Determina il risultato dell'operazione $857239^2 - 857243 \cdot 857235$ evitando calcoli impegnativi.

107) Se al quadrato di un qualsiasi numero intero si aggiunge il sestuplo dell'intero successivo, poi si addiziona ancora 3 al risultato così ottenuto, in tal modo si ottiene certamente un quadrato perfetto. Giustifica, con una catena di uguaglianze basata sul calcolo letterale, questa affermazione.

108) Se si prende un qualsiasi numero intero, e gli si somma il suo quadrato, poi anche il consecutivo del numero di partenza, si ottiene in tal modo sempre un quadrato perfetto. Dimostra questa affermazione.

109) Se si prende un qualsiasi numero intero, e dal suo quadrato si sottrae il quadrato dell'intero precedente, diminuito di 1, poi si divide per 2 ciò che si è ottenuto, si ritorna sempre all'intero di partenza! Dimostra la verità di questa affermazione.

Ad esempio:
$7 \rightarrow \frac{49 - (36 - 1)}{2} = 7$

## IL PRINCIPIO DI IDENTITA' DEI POLINOMI

**Due polinomi nella stessa variabile si dicono "identici"**
**se, per qualunque valore attribuito alla variabile, i due polinomi assumono sempre ugual valore.**
Il cosiddetto "**PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI**" afferma che **due polinomi sono identici se e soltanto se hanno lo stesso grado, e in essi sono uguali i coefficienti dei termini di ugual grado**.

110) Determina i valori dei due numeri $a, b$ in modo che i due polinomi nella variabile $x$
$2x^2 + (a+b)x + a$ e $2x^2 + 15x + 2b$
siano identici, e determina il valore che tali polinomi identici assumono quando $x = 4$

**RISULTATI, RISPOSTE**

1) $45y^2$ 2) 14 3) 0 4) 1 5) $10x^2$ 6) $a^2$ 7) $2x$ 8) 26 9) $a^4+1600a^2b^2$ 10) $5x^2$ 11) $y^8-2y^4+1$
12) $8a^2$ 13) 0 14) $a^{2x}-2a^{x+1}+a^2$ 15) $x^{2k+2}+2x^{2k}+x^{2k-2}$ 16) $9y^{2k+2}+30y^{4k-1}+25y^{6k-4}$
17) $x^{2p}y^{2p+2}-2x^{4p}y^{p+2}+x^{6p}y^2$ 18) $a^{6n}-2a^{3n+4}b^n+a^8b^{2n}$ 19) $5a^2-55$ 20) $8xy$ 21) $24ab$
22) $46a$ 23) $8x^2+4x$ 24) $xyz$ 25) $a^4+1$ 26) $(1/81)w^4$ 27) $n^2$ 28) 0 29) 0 30) 15
31) 0 32) $b^{16}+1$ 33) $9a^{6n}-4a^{2n+2}$ 34) $1-a^{16k}$ 35) 0 36) 1 37) 0 38) $a^2+4b^2+9c^2$ 39) 0
40) $x^6+1$ 41) 0 42) $b^{6k}+b^{3k}+1$ 43) 0 44) $x^3$ 45) 7 46) $3x$ 47) $b^3$ 48) 0 49) $x^4+1$ 50) 0
51) $y$ 52) 1 53) $3ab$ 54) 0 55) $a^5$ 56) $x^4$ 57) 0 58) 0 59) $ab$ 60) $c^2$ 61) $8s$ 62) 65 63) 5
64) $18w^2$ 65) 0 66) $4x^2$ 67) $2x^3+10x$ 68) $2y$ 69) $12a$ 70) $y^2+y$ 71) $2ab$ 72) $-18a$ 73) $t^8$
74) $x^2+3y^2$ 75) $218c^3$ 76) 0 77) $a^4b+a^5b^2$ 78) $t^2$ 79) $f^2$ 80) $a+b$ 81) $r^{10}+r^9+r^8$ 82) $4b-6b^2$
83) $4a^{2x}-12a^{x+y}+9a^{2y}$ 84) $a^{2x}-a^{x+1}$ 85) $-a^{3x}+3a^{2x+1}-3a^{x+2}+a^3$ 86) $-a^{4x}-1=-(a^{4x}+1)$
87) 0 88) 1 89) $27a^3$ 90) 0 91) $(x+1)^2-x^2=\cancel{x^2}+2x+1\cancel{-x^2}=x+(x+1)$ 92) $1000x^{1996}$
93) I) $A^2-B^2=(k+10)^2-(k-2)^2=k^2+20k+100-k^2+4k-4=24k+96$
II) $(A+B)(A-B)=(k+10+k-2)(k+10-k+2)=(2k+8)\cdot 12=24k+96$
III) $(A+B)^2=(2k+8)^2=4k^2+32k+64$ IV) $A^2+2AB+B^2=\ldots=4k^2+32k+64$

94) $1331=10^3+3\cdot10^2+3\cdot10+1=(10+1)^3=11^3$; $1030301=10^6+3\cdot10^4+3\cdot10^2+1=(10^2+1)^3=101^3$
$1003003001=1001^3$; $1000300030001=10001^3$

95) c), perché $a^2-(a-m)^2=a^2-(a^2-2am+m^2)=\ldots$
96) $6(a+m)^2-6a^2=12am+6m^2$; $(a+m)^3-a^3=3a^2m+3am^2+m^3$ 97) 51 cm
98) $45a^6$ 99) $(9x^2+7)(9x^2-7)$ 100a) $(9x-2)^2$ *oppure* $(-9x+2)^2=(2-9x)^2$
100b) $(x^2-11x)^2$ *oppure* $(-x^2+11x)^2=(11x-x^2)^2$ 100c) $(2+x^3)^2=(x^3+2)^2$
101) $(2a+3b-4c)^2$ *opp.* $(-2a-3b+4c)^2=(4c-2a-3b)^2$ 102) $(x^2-x-1)^2$ *opp.* $(-x^2+x+1)^2=(1+x-x^2)^2$
103) c): $(x+12)^2=x^2+\mathbf{24}x+144$ 104) $+4$; $+4x^6$ 105) 765625. Infatti $876\cdot874=(875+1)(875-1)=875^2-1$
106) $857239^2-857243\cdot857235=857239^2-(857239+4)(857239-4)=857239^2-857239^2+16=16$
107) $n^2+6(n+1)+3=n^2+6n+6+3=n^2+6n+9=(n+3)^2$, *quadrato di un intero ossia "quadrato perfetto"*
108) Qualunque sia l'intero $n$, è sempre $n+n^2+(n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$

109) $\dfrac{n^2-[(n-1)^2-1]}{2}=\dfrac{n^2-[n^2-2n+1-1]}{2}=\dfrac{\cancel{n^2}-\cancel{n^2}+2n}{2}=n$ 110) $a=10, b=5$; 102

## VERIFICHE DI IDENTITA'

Cos'è un' "*identità*"? E' un'uguaglianza letterale, vera per tutti i valori "ammissibili" delle lettere coinvolte (gli eventuali valori "non ammissibili" sono quelli che darebbero luogo a un'operazione non eseguibile:
ad esempio, l'identità $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{1}{a(a+1)}$ vale per $a\neq0$, $a\neq-1$, ossia vale tutti i valori di $a$ TRANNE i valori $0$ e $-1$, non ammissibili perché renderebbero un denominatore uguale a 0).

**Esempio svolto A)** *Verifica che vale la seguente identità*: $\boxed{(2x+1)^2+x^2=(5x+1)(x+1)-2x}$

Eseguo i calcoli ai due membri, per constatare che si ottenga il medesimo risultato:
$\underline{4x^2}+4x+1\underline{+x^2}=\underline{5x^2}\underline{+5x}\underline{+x}+1\underline{-2x}$; $5x^2+4x+1=5x^2+4x+1$, *OK*!!!

**Esempio svolto B)**

*Verifica che vale la seguente identità*:

$\boxed{(a+b)(a+c)=(a-b)(a-c)+2a(b+c)}$

$\cancel{a^2}+ac+ab\cancel{+bc}=\cancel{a^2}\underline{-ac}\underline{-ab}\cancel{+bc}\underline{+2ab}\underline{+2ac}$

$ac+ab=ac+ab$ *OK*

(NOTA)



NOTA - Giannino ha svolto l'esercizio B) "a modo suo": nel secondo passaggio, avendo individuato a primo e a secondo membro coppie di termini uguali, le ha mandate via, come si fa nelle equazioni.

Il procedimento seguito da Giannino appare certamente comodo, ma … sarà corretto?
Sì, è correttissimo!!! Infatti, riflettiamo:
**se è vera l'uguaglianza "semplificata"**
$\square+\cancel{\triangle}=\bigcirc+\cancel{\triangle}$,
**allora vuol dire che era vera anche l'uguaglianza di partenza**
$\square+\triangle=\bigcirc+\triangle$ !!!

**ESERCIZI: IDENTITÀ (vedi riquadro a pag. 135) CON PRODOTTI NOTEVOLI, DA VERIFICARE**

1) A) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ B) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

2) $(a+b+c)^2+(a^2+b^2+c^2)=(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2=2(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$
(qui le identità sono 3, ma per la proprietà transitiva dell'uguaglianza basta verificarne 2 a scelta …)

3) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac)^2+(ad)^2+(bc)^2+(bd)^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

3') Le precedenti identità 3), dette "di Lagrange" o "di Fibonacci",
possono essere utilizzate per esprimere un numero intero come somma
- di 4 quadrati perfetti
- oppure di 2 quadrati perfetti (in due modi).

A) Ad es., sapresti fare questo per l'intero $4453=61\cdot73$? (Trova 2 interi $a, b$ tali che $a^2+b^2=61$, poi …)
B) Osservato che $2^2+12^2=148$, trova 4 numeri per cui la somma dei quadrati sia uguale a $148^2=21904$.

4) Controlla la validità dell'identità
$$(10d_1+u_1)(10d_2+u_2)=100d_1d_2+10(d_1u_2+d_2u_1)+u_1u_2$$
Spiega in che modo essa potrebbe aiutare a svolgere a mente il prodotto di due interi di due cifre ciascuno:
$x=10d_1+u_1$, $y=10d_2+u_2$ (esempio: $45\cdot67$, dove $d_1=4, u_1=5, d_2=6, u_2=7$)
Stupisci ora i compagni con la tua capacità di eseguire a mente il prodotto di due numeri con due cifre!
Particolarizza anche l'identità al caso in cui i numeri da moltiplicare sono uguali,
osservando la relazione di quest'ultimo procedimento con la formula per il quadrato di un binomio.
E calcola con questa modalità $84^2$.

5) $(a+b+c)^2-(a-b+c)^2=4b(a+c)$ 6) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$
7) $(a+b)^3-(a-b)^3=2b(3a^2+b^2)$ 8) $(a+b)^4-(a-b)^4=8ab(a^2+b^2)$

9) Formule di Waring:
A) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
B) $a^4+b^4=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2a^2b^2$
C) $a^5+b^5=(a+b)^5-5ab(a+b)^3+5a^2b^2(a+b)$

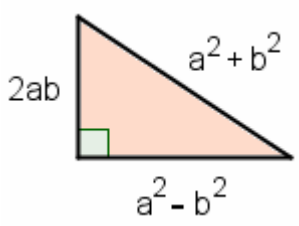
A), B), C) fanno parte di una famiglia di identità,
chiamate "formule di Waring" in onore del matematico inglese Edward Waring (1736-1798),
che permettono di esprimere una somma di due potenze di ugual grado
per mezzo della somma e del prodotto delle basi.

10) $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2)+6abc$

11) $a^5-a=(a-2)\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\cdot(a+2)+5\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)$. Quanto vale $8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+5\cdot9\cdot10\cdot11$?

11') (dal bellissimo sito francese dedicato ai numeri di Gérard Villemin: http://villemin.gerard.free.fr)
Serviti dell'identità 11) per dimostrare che
- se $a$ è un intero dispari, il numero $a^5-a$ è sempre divisibile per 120
- mentre se $a$ è un intero pari, il numero $a^5-a$ è sempre divisibile per 30.

12) $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$
che viene utilizzata per costruire *terne pitagoriche*
($a$, $b$ interi non nulli diversi fra loro qualunque).
Una "**TERNA PITAGORICA**" è una **terna di interi $a, b, c$, tutti non nulli, tali che $a^2+b^2=c^2$**.
Ad es., la (3, 4, 5) lo è in quanto $3^2+4^2=5^2$.
Anche (16, 30, 34) è una terna pitagorica: controlla!




… Come mai, piuttosto che l'uguaglianza $a^2+b^2=c^2$, è più semplice verificare la $a^2=c^2-b^2$?

12') Osservato che $5^2+11^2=146$, serviti dell'identità $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$
per determinare una terna pitagorica che abbia 146 come terzo elemento.

13) A) $a^2+\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$ B) $a^2+\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2-1\right)^2=\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+1\right)^2$

A) viene impiegata per costruire terne pitagoriche, prendendo *a* dispari,
B) serve allo stesso scopo con *a* pari

13') Applica le formule precedenti per determinare due terne pitagoriche che abbiano come primo elemento rispettivamente 31 e 32

**DA UN'IDENTITÀ, RICAVARNE ALTRE PER SOSTITUZIONE**

❑ Partiamo dalla $\boxed{a^2+b^2=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}}$ e facciamo le sostituzioni $\boxed{\begin{array}{l} a\to a \text{ (cioè, } a \text{ resta inalterato)} \\ b\to a+2 \end{array}}$

Otteniamo così $\boxed{a^2+(a+2)^2=\frac{(a+a+2)^2+(a-(a+2))^2}{2}}$ ossia

$a^2+(a+2)^2=\frac{(2a+2)^2+(-2)^2}{2}$; $a^2+(a+2)^2=\frac{[2(a+1)]^2+4}{2}$;

$a^2+(a+2)^2=\frac{4(a+1)^2+4}{2}$; $a^2+(a+2)^2=\frac{{}^{2}\!\not{4}(a+1)^2}{\not{2}}+\frac{{}^{2}\!\not{4}}{\not{2}}$; $\boxed{a^2+(a+2)^2=2(a+1)^2+2}$

Supponiamo che *a* sia un intero: l'ultima identità ci dice allora che la somma dei quadrati di due interi che differiscono di 2 unità si può ottenere prendendo l'intero fra essi compreso, elevandolo al quadrato, raddoppiando il numero ottenuto e aggiungendo 2 unità.
Prova ad eseguire in questo modo il calcolo $99^2+101^2$!

❑ (Paolo Pellegrini)

$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ da cui $a^x\cdot a^y=\left(\frac{a^x+a^y}{2}\right)^2-\left(\frac{a^x-a^y}{2}\right)^2$

che con $x=3$ e $y=2$ diventa $a^5=\left(\frac{a^3+a^2}{2}\right)^2-\left(\frac{a^3-a^2}{2}\right)^2$ o anche $a^5=\left(\frac{a^2(a+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{a^2(a-1)}{2}\right)^2$

14) Riparti dalle osservazioni di P. Pellegrini, e costruisci quella identità che permette di esprimere un cubo come differenza di due quadrati. Servitene poi per esprimere come diff. di quadrati il numero $343=7^3$.

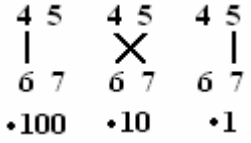
15) Se sostituiamo $-b$ al posto di $b$, cosa diventano le identità seguenti? A) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
B) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ C) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ D) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

16) Verifica che risulta, qualunque siano *a* e *b*, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ e scrivi l'identità che si può ricavare da questa con le sostituzioni $a\to a+1$; $b\to a$. Ricontrolla anche la nuova identità ottenuta.

**RISPOSTE**

3') A: $4453=61\cdot 73=(5^2+6^2)(3^2+8^2)=15^2+40^2+18^2+48^2=63^2+22^2=33^2+58^2$ B: 4, 24, 24, 144

4) $45\cdot 67=100\cdot 4\cdot 6+10\cdot(4\cdot 7+6\cdot 5)+5\cdot 7=2400+580+35=3015$
$84^2=100\cdot 8\cdot 8+10\cdot(8\cdot 4+8\cdot 4)+4\cdot 4=...$ →




*Moltiplicare due numeri di due cifre*

11') $a^5-a=(a-2)\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\cdot(a+2)+5\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)$
Il prodotto $(a-2)\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\cdot(a+2)$ di 5 interi consecutivi è certamente divisibile per 120, perché fra 5 interi consecutivi ce n'è uno (e uno solo) divisibile per 5, uno almeno per 3, due almeno pari consecutivi quindi divisibili uno per 2 e l'altro per 4; ma allora tale prodotto sarà certo divisibile per $5\cdot 3\cdot 2\cdot 4=120$.
Supponiamo *a* dispari: il prodotto $5\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)$ ha un fattore 5, uno certamente divisibile per 3, fra i due fattori $(a-1)$ e $(a+1)$, entrambi pari, uno è divisibile per 2 e l'altro per 4: allora tale prodotto sarà anch'esso divisibile per $5\cdot 3\cdot 2\cdot 4=120$. Ora, la somma di due multipli di 120 è divisibile per 120 …

12) $a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$ e l'ultimo prodotto è spesso facile da trattare … ad es., nel caso (16, 30, 34), è $34^2-30^2=(34+30)(34-30)=64\cdot 4=8^2\cdot 2^2=16^2$

12') 96, 110, 146

13') (31, 480, 481); (32, 255, 257)

14) $a^3=\left((a^2+a)/2\right)^2-\left((a^2-a)/2\right)^2$; $7^3=28^2-21^2$

15) A) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ B) Resta invariata C) Ovviamente ... D) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

16) $(a+1)^3-a^3=\left(a+1-a\right)\left((a+1)^2+(a+1)\cdot a+a^2\right)=(a+1)^2+a(a+1)+a^2$

**Matematica e Problemi della Realtà**

# I PRODOTTI NOTEVOLI E LA DILATAZIONE TERMICA DEI SOLIDI



Le molecole di cui è fatta una sostanza sono in continuo e perenne movimento.
Se si tratta di un solido esse vibrano avanti e indietro intorno a una posizione di equilibrio, nel caso di un gas si hanno invece spostamenti casuali in tutte le direzioni.
E **una sostanza al crescere della sua temperatura si espande**.
Infatti, se aumenta la temperatura, significa che aumenta la velocità media con cui le molecole si muovono; questo incremento della velocità media delle molecole determina un incremento delle vibrazioni e degli urti, quindi della distanza media fra le molecole stesse.
Per esempio, un binario ferroviario d'acciaio lungo 20 metri, quando la temperatura sale di 30 °C, subisce un allungamento di 7 centimetri circa: avrai forse notato che in una linea ferroviaria viene sempre lasciato un certo spazio fra un binario e quelli che lo precedono e lo seguono.
Nel caso del binario, una dimensione (la lunghezza) prevale nettamente sulle altre due, che rispetto ad essa sono trascurabili; nel caso di una lamiera sottile è invece trascurabile lo spessore.
Perciò, per quanto riguarda i solidi, si fa distinzione fra tre tipi di **dilatazione termica**:
a) **lineare**, quando l'effetto di dilatazione è apprezzabile praticamente soltanto nel senso della lunghezza;
b) **superficiale**;
c) **cubica**.
Prendiamo una barra di metallo di qualche metro di lunghezza e sezione trascurabile, e facciamola passare dalla temperatura di 0 °C a quella di $t$ °C .
Vedremo che **l'allungamento della barra è pressappoco proporzionale a $t$** ; vale a dire, almeno per un ampio intervallo di temperature, se raddoppia la temperatura finale raddoppia all'incirca anche l'allungamento subìto; se triplica la temperatura finale, triplica grossomodo anche l'allungamento, ecc.
Vale cioè, almeno approssimativamente, la relazione

$$\ell - \ell_0 = \Delta\ell = \lambda \ell_0 t \ .$$

- **Cosa significa quel simbolo $\Delta$ ("delta")?**
  E' un "**operatore di differenza**", è usato per indicare una differenza.
  - Ad esempio, due coniugi di età molto diverse, diciamo 50 anni e 24 anni, hanno un $\Delta e$ grande: $\Delta e = e_2 - e_1 = 50 - 24 = 26$ .
  - Se nel mio allenamento di corsa dopo 5' mi trovavo a 1 km da casa, e proseguendo nella stessa direzione dopo 20' mi trovavo a 4 km da casa, allora nell'intervallo di tempo (in minuti) $\Delta t = t_2 - t_1 = 20 - 5 = 15$ ho percorso uno spazio (in km) $\Delta s = s_2 - s_1 = 4 - 1 = 3$ quindi la velocità media del mio moto è stata
    $$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3\ km}{15\ min} = 0{,}2\ \frac{km}{min} = 0{,}2\ \frac{km}{1/60\ h} = 12\ km/h$$

- **E che cos'è quel $\lambda$ (lambda)?**
  E' un moltiplicatore fisso detto **"coefficiente di dilatazione lineare"**,
  il cui valore dipende dalle proprietà fisiche della sostanza di cui è fatta la barra.
  $\lambda$ esprime la variazione di lunghezza "unitaria",
  ossia relativa ad una barra di 1 metro sottoposta a un incremento di temperatura di 1 grado centigrado.

Ora la nostra relazione $\ell - \ell_0 = \lambda \ell_0 t$ può essere riscritta come

$$\ell = \ell_0 + \lambda \ell_0 t$$

e infine, raccogliendo a fattor comune, cioè applicando la proprietà distributiva al contrario,

$$\ell = \ell_0 (1 + \lambda t)$$

Bene … $\lambda$ in generale è davvero molto piccolo!
Per l'acciaio, ad esempio, vale circa $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ (la "dimensione fisica" di questa quantità è $°C^{-1}$),
per il cemento circa $1{,}2 \cdot 10^{-5}$, per il vetro circa $9 \cdot 10^{-6}$.

Il fatto che $\lambda$ sia *piccolo piccolo* entrerà in modo decisivo in quanto stiamo per dire ora.

Occupiamoci adesso di dilatazione "superficiale":
il nostro corpo ha due dimensioni nettissimamente prevalenti sulla terza, ad esempio è una lamina sottile dotata di una certa lunghezza e larghezza, rispetto alle quali lo spessore è trascurabile.

Siano dunque $a_0$ e $b_0$ le dimensioni della nostra lamina rettangolare, alla temperatura di 0 °C.
Se la sua temperatura aumenta fino a portarsi al valore $t$ tali dimensioni diverranno rispettivamente:

$$a = a_0(1 + \lambda t)\ ; \quad b = b_0(1 + \lambda t)$$

Quanto varrà la superficie finale? Varrà

$$S = ab = a_0 b_0 (1 + \lambda t)^2 = S_0 (1 + 2\lambda t + \lambda^2 t^2)\ .$$

Occhio adesso, perché è precisamente *qui* che si tiene conto del fatto che $\lambda$ è piccolissimo:
nell'espressione $\mathbf{1+2\lambda t+\lambda^2 t^2}$**, essendo** $\boldsymbol{\lambda << 1}$ **il termine che contiene** $\boldsymbol{\lambda^2}$ **potrà essere trascurato !!!**

- $\boldsymbol{\lambda << 1}$ **significa:** $\boldsymbol{\lambda}$ **MOLTO MINORE di 1, molto piccolo rispetto a 1.**
  **Ma se** $\boldsymbol{\lambda}$ **è un numero con questa caratteristica, quindi molto vicino a zero,** $\boldsymbol{\lambda^2}$ **sarà molto ma molto minore di** $\boldsymbol{\lambda}$ **quindi il termine** $\boldsymbol{\lambda^2 t^2}$ **sarà pochissimo rilevante nella somma.**
  Pensa, ad esempio: se fosse $\lambda = 0{,}0001$, allora $\lambda^2$ varrebbe $0{,}00000001$.

**Potendosi in pratica evitare di portarsi dietro la quantità** $\boldsymbol{\lambda^2 t^2}$**, la relazione si potrà riscrivere come**
$$\boldsymbol{S = S_0(1+2\lambda t)}$$
senza apprezzabile perdita di precisione.

**Pertanto il coeff. di dilatazione superficiale è circa uguale al doppio del coeff. di dilatazione lineare!**

Nel caso della dilatazione *cubica* avviene qualcosa di analogo.
Consideriamo un parallelepipedo del nostro materiale, che alla temperatura di 0 °C abbia dimensioni $a_0, b_0, c_0$ e quindi volume $a_0 \cdot b_0 \cdot c_0 = V_0$. Alla temperatura di $t$ °C, le lunghezze degli spigoli diventeranno $a = a_0(1+\lambda t)$; $b = b_0(1+\lambda t)$; $c = c_0(1+\lambda t)$ per cui il nuovo volume sarà:
$$\boldsymbol{V = abc = a_0 b_0 c_0 (1+\lambda t)^3 = V_0(1+3\lambda t+3\lambda^2 t^2+\lambda^3 t^3)}$$
**Considerazioni analoghe a quelle fatte per la dilatazione superficiale ci portano a trascurare i termini contenenti** $\boldsymbol{\lambda^2}$ **e** $\boldsymbol{\lambda^3}$**, da cui la relazione approssimata:**
$$\boldsymbol{V = V_0(1+3\lambda t)}$$
**Pertanto il coefficiente di dilatazione cubica è circa uguale al triplo del coeff. di dilatazione lineare**.

ESERCIZI

1) Calcola il valore della quantità $(1+\alpha)^2 - 1$, per $\alpha = 0{,}002$
   a) in modo preciso b) trascurando, nello sviluppo del prodotto notevole, il termine di 2° grado.
   Di che percentuale differisce il valore trovato col calcolo semplificato b), rispetto a quello esatto?

2) Calcola il valore della quantità $(1+\alpha)^3 - 1$, per $\alpha = 0{,}01$
   a) in modo preciso b) trascurando, nello sviluppo del prodotto notevole, i termini di 2° e di 3° grado.
   Di che percentuale differisce il valore trovato col calcolo semplificato b), rispetto a quello esatto?

3) Le maggiori montagne dei 7 continenti hanno rispettivamente le seguenti altezze $h$.
   Africa: 5.895 m; Nordamerica: 6.194 m; Sudamerica: 6.962 m; Asia: 8.844 m; Antartide: 4.892 m; Oceania continentale: 2.228 m; Europa (escluso il Caucaso): 4.810 m. Calcola il massimo valore del $\Delta h$.

**Matematica e Problemi della Realtà**

## I PRODOTTI NOTEVOLI E IL DOPPIO LANCIO DEL TAPPO DI PLASTICA



ESERCIZIO 4)

Se si lancia un tappino di plastica, la probabilità che cada fermandosi con la parte cava verso l'alto è diversa dalla probabilità che la parte cava risulti invece rivolta verso il basso (tali probabilità possono essere valutate annotando le "frequenze relative" su un numero elevato di lanci: se, ad esempio, lanciando il tappo 1000 volte vediamo che si ferma con la parte cava verso l'alto 612 volte, la probabilità che, lanciandolo ancora, si fermi con la parte cava verso l'alto, potrà essere valutata in circa 612/1000 ossia intorno al 61%).

Ma dette $p$ e $q$ queste due probabilità, qualunque esse siano, **si può dimostrare che, lanciandolo per due volte di seguito, è più facile che escano risultati fra loro uguali piuttosto che risultati differenti**!

Il fatto è che, come insegna il Calcolo delle Probabilità:

- se la probabilità di "parte cava verso l'alto" è $p$, allora la probabilità che "lanciando 2 volte il tappo, per 2 volte si ottenga parte cava verso l'alto" sarà $p^2$
- e analogamente, se la probabilità di "parte cava verso il basso" è $q$, allora la probabilità che "lanciando 2 volte il tappo, per 2 volte si ottenga parte cava verso il basso" sarà $q^2$;
- **la probabilità** quindi **dell'evento "lanciando per 2 volte un tappo, esce o per 2 volte la parte cava verso l'alto oppure per 2 volte la parte cava verso il basso" è** $\boldsymbol{p^2+q^2}$
- mentre **la probab. che, lanciando il tappo 2 volte, si abbiano esiti diversi, è data da** $\boldsymbol{pq+qp=2pq}$**.**

Ora, **è possibile dimostrare che, quando è** $\boldsymbol{p \neq q}$**, risulta sempre** $\boldsymbol{p^2+q^2>2pq}$**. COME SI FA?**

**RISPOSTE**: 1) a) 0,004004 b) 0,004; di meno dello 0,1% 2) a) 0,030301 b) 0,03; di meno dell'1%
3) 6616 m 4) La differenza $p^2+q^2-2pq$ equivale a … che è sempre $>0$ perché …

## 19. LA CONGETTURA DI GOLDBACH; LA FORMULA DI GAUSS; QUADRATI MAGICI

# LA CONGETTURA DI GOLDBACH

Per "**congettura**" si intende, in Matematica, un'**affermazione della cui verità si è fortemente convinti, e che tuttavia non si è riusciti a dimostrare**.
La "**CONGETTURA DI GOLDBACH**" fa la sua comparsa in uno scambio di lettere, datato 1742, fra il prussiano Christian Goldbach e il grande matematico svizzero Eulero (1707-1783). Essa afferma che

**QUALSIASI NUMERO PARI MAGGIORE DI 2 PUÒ SEMPRE ESSERE SCRITTO COME SOMMA DI DUE NUMERI PRIMI (eventualmente fra loro uguali)**.

Qualche esempio: $4 = 2 + 2$; $6 = 3 + 3$; $8 = 3 + 5$; $10 = 3 + 7 = 5 + 5$; $12 = 5 + 7$; $14 = 3 + 11 = 7 + 7$; …

♥ D'altra parte, **un'affermazione che chiama in causa infiniti casi non si può ritenere dimostrata neppure se si è constatato che è vera per un numero enorme di questi casi; essa, invece, richiede**

- ♪ **o un procedimento dimostrativo di carattere generale che ne provi la verità (trasformando, quindi, la "congettura" in un "teorema")**
- ♫ **oppure la scoperta di un controesempio che la faccia crollare, facendo vedere che è falsa.**

❑ Lo stesso Eulero riteneva plausibile che se una somma di $n$ quarte potenze di interi dava ancora la quarta potenza di un intero, allora $n$ dovesse essere per forza $\geq 4$.
Ma nel 1988 l'americano Elkies scoprì che invece
$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$,
con ciò provando la *falsità* della congettura.

❑ Ancora: Pierre de Fermat (1601-1665) aveva fiducia nel fatto che i numeri della forma $2^{2^n}+1$ fossero tutti primi. Ai suoi tempi non esistevano né i computer né le macchine calcolatrici, per cui egli si limitò a considerare i casi
$n=1: 2^{2^1}+1=5$, $n=2: 2^{2^2}+1=17$, $n=3: 2^{2^3}+1=257$, $n=4: 2^{2^4}+1=65537$;
… e tuttavia, se si va a fare il calcolo col valore successivo $n=5$, si ottiene $2^{2^5}+1=4294967297$ che *non è* un numero primo (già Eulero riconobbe che è divisibile per 641).

In quanto alla congettura di Goldbach, nell'anno 2000 accadde persino che una casa editrice, per scopi pubblicitari, mettesse in palio una ricompensa di un milione di dollari per chi fosse riuscito, entro il mese di aprile del 2002, a dimostrarla. Il ghiotto premio restò non aggiudicato, e ad oggi questa questione di teoria dei numeri è rimasta irrisolta, anche se sono stati provati parecchi interessanti teoremi ad essa correlati.

Qualche altro esempio di **congetture di teoria dei numeri semplici da enunciare, e che tuttavia non sono ancora state né provate né smentite**? Eccone qui di seguito quattro.

- Esiste un numero perfetto dispari? (Si dice "perfetto" un intero che sia uguale alla somma dei suoi divisori, inclusa l'unità ed escluso il numero stesso; ad esempio $6=1+2+3$ e $28=1+2+4+7+14$)
- I numeri primi della forma $n^2+1$ (ossia, superiori di un'unità a un quadrato perfetto) sono infiniti?
- Esistono infinite coppie di numeri primi "gemelli" ( = che differiscono di due unità, come 5 e 7 o 59 e 61)?
- Esiste sempre un numero primo compreso tra due quadrati perfetti consecutivi?

Invece **è stato dimostrato vero, dall'inglese Andrew Wiles in modo definitivo nel 1995, che**

♥ **SE $n>2$, NON ESISTE ALCUNA TERNA DI INTERI $a, b, c$ TUTTI $\neq 0$ PER CUI $a^n+b^n=c^n$**

**Questa congettura era nota come "ULTIMO TEOREMA DI FERMAT**" perché Pierre de Fermat, uno studioso del XVII secolo, aveva lasciato scritto, su di una copia del trattato *Arithmetica* di Diofanto:
"*Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina*".
**Pressoché tutti i matematici tuttavia ritengono, data l'estrema complessità della questione,** confermata dalla raffinatezza degli strumenti moderni di cui si servì Wiles nel suo lavoro, **che Fermat in realtà si sbagliasse quando sosteneva di saper giustificare l'enunciato in modo corretto.**

## ESERCIZI

1) Il 40 si può esprimere come somma di due primi in 3 modi ( $40 = 3+37$, $40 = 11+29$, $40 = 17+23$ ). Il 100 in 6 modi: quali?

2) Tra le seguenti catene, quale dimostra che la somma fra un multiplo di 12 e un multiplo di 30 è sempre un multiplo di 6?
   a) $12n+30=6(2n+5)$
   b) $n\cdot 12+n\cdot 30=2\cdot 6n+5\cdot 6n=7\cdot 6n=7n\cdot 6$
   c) $12n+30m=6(2n+5m)$



## LA FORMULA DI GAUSS PER LA SOMMA DEGLI INTERI DA 1 FINO A n

Dovendo eseguire una somma di tanti interi consecutivi a partire da 1, quale ad esempio $1+2+3+...+27$, possiamo pensare di procedere così:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots\ldots\ldots\ldots & + & 25 & + & 26 & + & 27 \\ S & = & 27 & + & 26 & + & 25 & + & \ldots\ldots\ldots\ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & 28 & + & 28 & + & 28 & + & \ldots\ldots\ldots\ldots & + & 28 & + & 28 & + & 28 \end{array}$$

[27 addendi, tutti uguali a 28]

quindi $2S = 27 \cdot 28$ da cui $\boxed{S = \frac{27 \cdot 28}{2} = 378}$

Passando ora più in generale alla somma $1+2+3+...+n$ dei primi *n* interi positivi, avremo:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots\ldots\ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots\ldots\ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots\ldots\ldots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

[n addendi, tutti uguali a $(n+1)$]

$2S = n \cdot (n+1)$ da cui $S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

♥ Ecco dunque la bella formula $\boxed{1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}}$ **FORMULA DI GAUSS**

detta "di Gauss" in onore del grande matematico tedesco (1777-1855)
che fu capace di costruirsela in modo autonomo quando era solo un bambino.

Ad esempio, $1+2+3+4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$; $1+2+3+...+10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$; $1+2+3+...+90 = \frac{90 \cdot 91}{2} = 4095$.

**ESERCIZI**

3) Quanto vale la somma degli interi positivi da 1 fino a 40? E da 1 fino a 1000?
4) Come calcoleresti la somma degli interi positivi da 100 compreso fino a 200?
5) Quanto vale la somma $2+4+6+...+1000$?
6) Quanto vale la somma $1+3+5+...+999$?

## QUADRATI MAGICI

Si dice "quadrato magico" una tabella di $2 \times 2$, oppure di $3 \times 3$, o di $4 \times 4$, … , numeri, con la proprietà che la somma dei numeri su ogni riga, o colonna, o diagonale, sia sempre la stessa.
Questa somma costante è chiamata la *costante di magia* o *costante magica* o *somma magica* del quadrato.

Se un quadrato magico $n \times n$ ha come termini gli interi da 1 fino a $n^2$, allora è detto *perfetto* o *normale*;

e nel caso dei quadrati magici perfetti, si può dimostrare che la costante magica è sempre data da $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

Ad esempio, qui a fianco è rappresentato un quadrato magico perfetto $3 \times 3$ (cioè: "di ordine 3").

La costante magica è $\frac{3 \cdot (3^2+1)}{2} = 15$.

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

**ESERCIZI**

7) Completa il quadrato perfetto di ordine 4 nella figura riportata qui a destra.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| | | 7 | |
| | 10 | 11 | |
| 13 | | | 16 |

8) Il fatto che nei quadrati magici perfetti di ordine *n*, la costante magica sia $\frac{n(n^2+1)}{2}$,

si può dimostrare con facilità a partire dalla formula di Gauss $1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$. In che modo?

**RISPOSTE** 1) $3+97$, $11+89$, $17+83$, $29+71$, $41+59$, $47+53$ 2) c 3) 820; 500500
4) Sottraendo dalla somma fino a 200 quella fino a 99. Si ottiene 15150
5) $2(1+2+3+...+500) = 250500$ 6) $(1+2+3+...+1000)-(2+4+6+...+1000) = 500500-250500 = 250000$
8) Un quadrato magico perfetto di ordine *n* contiene tutti gli interi successivi da 1 fino a $n^2$, distribuiti in *n* righe e in *n* colonne. Quanto vale la somma degli interi da 1 a $n^2$? Dividendo il risultato per il numero *n* delle righe o colonne ( = moltiplicandolo per 1/*n*), e semplificando, si ha il valore della costante magica.

# EQUAZIONI E PROBLEMI

## 1. ESEMPI DI PROBLEMI A UNA INCOGNITA

### ❑ PROBLEMA SVOLTO 1

**Per prender parte alla "festa del primino" ogni maschio deve pagare un biglietto da 5 euro, ogni femmina un biglietto da 3 euro. Si vendono in totale 90 biglietti, e si osserva che, complessivamente, i maschi hanno pagato 10 euro più delle femmine. Quante ragazze e quanti ragazzi hanno partecipato alla festa?**

RISOLUZIONE

Pongo la $x$ :

$x$ = *numero delle femmine*

Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di $x$ :

*numero dei maschi* $= 90 - x$

*cifra complessiva, in euro, pagata dai maschi* $= 5(90 - x)$

*cifra complessiva in euro, pagata dalle femmine* $= 3x$

Imposto l'equazione risolvente :

$5(90 - x) = 3x + 10$ (NOTA 1)

$450 - 5x = 3x + 10$

$-5x - 3x = 10 - 450$ (NOTA 2)

$-8x = -440$

$8x = 440$ (NOTA 3)

$x = \frac{\cancel{440}^{55}}{\cancel{8}}$ (NOTA 4)

da cui: 55 femmine, $90 - 55 = 35$ maschi

♥ Come ribadiremo in seguito, le TRE FASI per la risoluzione di un "problema con la $x$" sono:

I) porre la $x$ ( = decidere cosa indicare con $x$)

II) esprimere per mezzo di $x$ le varie quantità in gioco

III) impostare l'equazione risolvente

♥ VERIFICA DOPO LA RISOLUZIONE (sempre consigliata!)

Se le femmine sono 55 e i maschi 35,
la spesa totale delle femmine
è di euro $55 \cdot 3 = 165$
mentre la spesa totale dei maschi
è di euro $35 \cdot 5 = 175$

OK, i maschi complessivamente spendono 10 euro più delle femmine!!!

**NOTA 1**

Questa, che abbiamo scritto, è una "**equazione**".

**♥ Si dice "EQUAZIONE" un'uguaglianza, contenente un numero sconosciuto, "incognito" (generalmente indicato con $x$), di fronte alla quale ci si propone di determinare per quali valori di $x$, ammesso che esistano, l'uguaglianza stessa è verificata.**

Per risolvere un'equazione, prima di tutto si svolgono i calcoli, in modo da eliminare le parentesi e portare ciascuno dei due membri sotto la forma più semplice possibile.
L'obiettivo finale sarà di ottenere, con opportuni passaggi, il valore di $x$: $x = \ldots$

**NOTA 2**

Dall'equazione $450 - 5x = 3x + 10$
si passa all'equazione $-5x - 3x = 10 - 450$
con la "REGOLA DEL TRASPORTO":

**♥ In un'equazione, è possibile trasportare un termine (nel senso di: un addendo di somma algebrica) dall'altra parte del simbolo =, CAMBIANDOLO PERO' DI SEGNO**

Perché mai è possibile ciò? Vediamo.
L'equazione iniziale è $450 - 5x = 3x + 10$
ma noi desideriamo giungere, prima o poi, all'uguaglianza $x = \ldots$
quindi, innanzitutto, vorremmo che tutti i termini contenenti $x$ fossero a primo membro,
e tutti i termini "noti" (cioè: conosciuti, non contenenti $x$) a secondo membro.
Prendiamo ad esempio il termine $3x$: esso sta a secondo membro, ma "non è il posto giusto per lui".
Come toglierlo dal secondo membro?
Beh, toglierlo dal secondo membro significherebbe SOTTRARLO dal secondo membro;
d'altra parte, se in un'uguaglianza noi sottraiamo un numero da uno soltanto dei due membri,
l'uguaglianza "si rovina", "la bilancia perde il suo equilibrio".
Invece la bilancia resta in equilibrio se il numero che sottraiamo da uno dei due membri,
lo andiamo a sottrarre anche dall'altro!

Perciò:

$450-5x=3x+10$

$450-5x-3x=\cancel{3x}+10\cancel{-3x}$

Cos'abbiamo fatto? Abbiamo sottratto dai due membri uno stesso numero, il numero $3x$.
La bilancia, sottraendo lo stesso peso da entrambi i piatti, resta in equilibrio.
Il termine $3x$ è così scomparso dal secondo membro, ma simultaneamente è apparso al primo membro, cambiato però di segno!!!

Ora abbiamo

$450-5x-3x=10$

ma non siamo ancora soddisfatti!
Infatti c'è il termine noto 450, che "ci dà fastidio": vorremmo che fosse a secondo membro!
Facile: sottraiamo 450 da entrambi i membri e avremo:

$\cancel{450}-5x-3x\cancel{-450}=10-450$

Quindi, il termine 450 è scomparso dal primo membro,
ma in compenso eccolo comparire a secondo membro, cambiato però di segno!

Il discorso fatto giustifica dunque la "**regola del trasporto**".
Rileggiamo cosa dice questa regola:

**In un'equazione, è possibile trasportare un termine**
**(nel senso di: un addendo di somma algebrica)**
**dall'altra parte del simbolo =,**
**CAMBIANDOLO PERO' DI SEGNO**

Allora, ricapitolando, quando siamo passati
dall'equazione $450-5x=3x+10$ all'equazione $-5x-3x=10-450$,
abbiamo applicato, per due volte, la "regola del trasporto".

**NOTA 3**

In questo passaggio abbiamo applicato la REGOLA che dice:

♥ **In un'equazione, è possibile cambiare di segno tutti i termini**
**( = addendi delle due somme algebriche a primo e a secondo membro)**

Infatti, se due numeri sono uguali, anche i rispettivi opposti saranno uguali !!!

**NOTA 4**

A partire da $8x=440$ ricaviamo $x=\frac{440}{8}$

Questo è perfettamente comprensibile:
se 8 volte un certo numero dà un certo risultato, allora quel numero sarà uguale al risultato, DIVISO 8
(la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione).
Se 8 volte il mio stipendio dà 10000 euro, quant'è il mio stipendio? Ovvio: 10000:8 = 1250 euro.

Oppure, potremmo ragionare così:
noi abbiamo $8x=440$ ma vorremmo avere $x=\ldots$

Insomma, quel moltiplicatore 8, a sinistra di $x$, ci dà fastidio! Vorremmo sbarazzarcene.
Possiamo ottenere il nostro scopo, mantenendo la bilancia in equilibrio,

se dividiamo per 8 sia il primo che il secondo membro: $\frac{\cancel{8}x}{\cancel{8}}=\frac{440}{8}$.

Di qui la REGOLA:

♥ **"Ciò che moltiplica da una parte del simbolo =, divide dall'altra;**
**ciò che divide da una parte, moltiplica dall'altra".**

Ad esempio, un "moltiplicato 8" a sinistra dell'=, diventa un "fratto 8" a destra dell'=.

Questa potrebbe essere chiamata, volendo,
la "**REGOLA DEL TRASPORTO PER LA MOLTIPLICAZIONE-DIVISIONE**"
(mentre la precedente era, più precisamente, la "**regola del trasporto per la somma algebrica**").

Prima di passare a considerare altri problemi,
dedichiamo una pagina alla **RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI**,
prendendo in esame un paio di esempi.

$2(3x-1)+4x=9(2x+1)-5$ — *Svolgo i calcoli, per eliminare le parentesi*

$6x-2+4x=18x+9-5$ — *Sottolineo e riduco i termini simili a 1° e 2° membro*

$10x-2=18x+4$ — *Siccome il mio obiettivo finale è di ottenere $x=\dots$, porto tutti i termini con x a 1° membro e tutti i termini senza x (= termini "noti") a 2° membro. Naturalmente, se un termine "salta" dall'altra parte del simbolo =, deve cambiare di segno*

$10x-18x=4+2$ — *Riduco i termini simili*

$-8x=6$ — ♥ *Il coefficiente di x è negativo: non è obbligatorio, ma è conveniente cambiare i segni di entrambi i membri*

$8x=-6$ — *Divido per il coefficiente di x:* $\frac{8x}{8}=\frac{-6}{8}$

$x=\frac{-6^{3}}{8_{4}}=-\frac{3}{4}$

*Se voglio, faccio ora la verifica sostituendo il valore trovato,* $x=-\frac{3}{4}$,
*nell'equazione iniziale* $2(3x-1)+4x=9(2x+1)-5$
*per vedere se in effetti così facendo si ottiene un'uguaglianza vera.*

$$2\left[3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-1\right]+4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=9\left[2\cdot\left(-\frac{3}{4_{2}}\right)+1\right]-5$$

$$2\left[-\frac{9}{4}-1\right]-3=9\left[-\frac{3}{2}+1\right]-5;\quad 2\cdot\frac{-9-4}{4_{2}}-3=9\cdot\frac{-3+2}{2}-5;\quad -\frac{13}{2}-3=9\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-5;$$

$$-\frac{13}{2}-3=-\frac{9}{2}-5;\quad \frac{-13-6}{2}=\frac{-9-10}{2};\quad -\frac{19}{2}=-\frac{19}{2}\ \text{OK!!!}$$

$\frac{5x+1}{3}-\frac{x+5}{6}=4$ — *Faccio il denominatore comune, che dev'essere lo stesso sia a 1° che a 2° membro*

$\frac{2(5x+1)-(x+5)}{6}=\frac{24}{6}$ — *Mando via i due denominatori uguali (è come moltiplicare per lo stesso numero, il 6, entrambi i membri)*

$10x+2-x-5=24$ — *Svolgo i calcoli, riduco i termini simili*

$9x-3=24$ — *Trasporto (tutti i termini con x al 1° membro, tutti gli altri al 2°) e riduco*

$9x=27$ — *Divido per il coefficiente di x:* $\frac{9x}{9}=\frac{27}{9}$

$x=\frac{27^{3}}{9}=3$ — *Ho finito: se voglio, faccio la verifica sostituendo nell'equazione iniziale*

♥ Quando ci sono dei denominatori, conviene innanzitutto liberarsene.
IN GENERALE, NON È CONVENIENTE trasportare termini o ridurre termini simili mentre ci sono ancora i denominatori!
Altro esempio:

$$\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}x+2$$

$$\frac{4x-6}{12}=\frac{3x+24}{12}$$

$4x-3x=24+6;\quad x=30$

**ESERCIZI**

Risolvi queste equazioni, commentando ogni passaggio e facendo la verifica ⇨

1) $7x-5=3x-1$
2) $5x+1=6x-7$
3) $2(x-1)=5(x+2)$
4) $7x+1=3(x+1)$
5) $3(x+4)+8x=2(x+6)$
6) $x=10x+15$
7) $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}x=\frac{3}{10}x+\frac{1}{3}$
8) $\frac{x}{4}+1=2\left(\frac{1}{2}x-1\right)$

SOLUZIONI

1) $x=1$ 2) $x=8$
3) $x=-4$ 4) $x=\frac{1}{2}$
5) $x=0$ 6) $x=-\frac{5}{3}$
7) $x=-\frac{8}{3}$ 8) $x=4$

## ❑ PROBLEMA SVOLTO 2

**La mamma di Andrea è di 3 anni più giovane rispetto al papà.**
**La differenza fra i quadrati delle due età è 243. Quanti anni hanno i genitori di Andrea?**

RISOLUZIONE

Pongo la $x$ :

$x$ = *età del papà*

Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di $x$ :

*età della mamma* $= x-3$

Imposto l'equazione risolvente :

$$x^2-(x-3)^2=243$$

$$x^2-(x^2-6x+9)=243$$

$$\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+6x-9=243$$

$$6x=243+9;\quad 6x=252;\quad x=\frac{\cancel{252}^{42}}{\cancel{6}}$$

Essendo dunque l'età del *padre* 42 anni,
l'età della *mamma* sarà 42 – 3 = 39 anni.

VERIFICA DOPO LA RISOLUZIONE:

Controlliamo se la differenza dei quadrati delle due età trovate vale proprio 243.

$42^2-39^2=1764-1521=243$, OK!!!

OSSERVAZIONE

Evidentemente, avrei anche potuto scegliere di porre $x$ = *età della mamma* ;
avrei allora avuto *età del papà* $= x+3$
e l'equazione risolvente sarebbe stata $(x+3)^2-x^2=243$
con la soluzione $x=39$

## ❑ PROBLEMA SVOLTO 3

**Trovare due interi consecutivi, tali che**
**la differenza fra il loro prodotto e il quadrato del più piccolo sia uguale al numero più grande.**

RISOLUZIONE

Pongo la $x$ :

$x$ = *numero più piccolo*

Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di $x$ :

*numero più grande* $= x+1$

Imposto l'equazione risolvente :

$$x(x+1)-x^2=x+1$$

$$\cancel{x^2}+x\cancel{-x^2}=x+1$$

$$x-x=1$$

$0=1$ L'EQUAZIONE E' QUINDI IMPOSSIBILE, PRIVA DI SOLUZIONI!

Infatti

$x-x=0$ *o anche* $x-x=0\cdot x$, *e l'uguaglianza* $0\cdot x=1$ *non è verificata da nessun valore di* $x$

*Risposta* :

Non esiste *nessuna coppia di interi consecutivi* che soddisfi alla proprietà richiesta.

## ❑ PROBLEMA SVOLTO 4

**Pierino ha calcolato che con la sua paghetta settimanale potrebbe comprare**
- **8 crostate (e in questo caso la spenderebbe tutta),**
- **o in alternativa 13 gelati (e in questo caso avanzerebbe un euro).**

**Trovare l'ammontare in euro della paghetta di Pierino,**
**sapendo che un gelato costa 2 euro in meno rispetto a una crostata.**

CONFRONTIAMO, PER QUESTO PROBLEMA, DIVERSE ALTERNATIVE DI RISOLUZIONE.

RISOLUZIONE 1

Pongo la $x$ :

$x$ = *costo, in euro, di una crostata*

Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di $x$ :

*costo, in euro, di un gelato* $= x-2$
*ammontare, in euro, della paghetta di Pierino* $= 8x$ *oppure* $13(x-2)+1$

Imposto l'equazione risolvente :

$$8x = 13(x-2)+1$$
$$8x = 13x-26+1$$
$$8x-13x = -25$$
$$-5x = -25$$
$$5x = 25$$
$$x = 5$$

*Una crostata costa* $5$ *euro, un gelato* $5-2=3$ *euro, la paghetta di Pierino è di* $8\cdot 5 = 40$ *euro*

RISOLUZIONE 2

Pongo la $x$ :

$x$ = *ammontare, in euro, della paghetta di Pierino*

Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di $x$ :

*costo, in euro, di una crostata* $= \frac{x}{8} = \frac{1}{8}x$

*costo, in euro, di un gelato* $= \frac{1}{8}x-2$

Imposto l'equazione risolvente :

$$13\left(\frac{1}{8}x-2\right)+1 = x\,; \qquad \frac{13}{8}x-26+1 = x\,; \qquad \frac{13}{8}x-25 = x$$

*che posso affrontare in vari modi :*

*così…*

$$\frac{13}{8}x-25 = x$$
$$\frac{13}{8}x-x = 25$$
$$\frac{5}{8}x = 25$$
$$x = \frac{25}{\frac{5}{8}} = \cancel{25}^{5}\cdot\frac{8}{\cancel{5}} = 40$$

Porto tutti i termini contenenti $x$ a primo membro, riduco i termini simili, e infine divido per il coefficiente di $x$, che è, in questo caso, la frazione 5/8

*… oppure così …*

$$\frac{13}{8}x-25 = x$$
$$\frac{13}{8}x-x = 25$$
$$\frac{5}{8}x = 25$$
$$\frac{\cancel{8}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{8}}x = \cancel{25}^{5}\cdot\frac{8}{\cancel{5}}$$
$$x = 40$$

Come prima; questa volta, ho scelto di effettuare il passaggio finale sbarazzandomi del coeff. di $x$ (5/8) tramite moltiplicazione per il reciproco (che è 8/5)

*… o in quest'altra maniera, forse la più comoda*:

$$\frac{13}{8}x-25 = x$$
$$\frac{13x-200}{\cancel{8}} = \frac{8x}{\cancel{8}}$$
$$13x-8x = 200$$
$$5x = 200$$
$$x = 40$$

Qui ho scelto di eliminare innanzitutto il denominatore, facendo il denominatore comune uguale sia a 1° che a 2° membro poi mandando via questo denominatore comune tramite moltiplicazione per 8 di entrambi i membri

RISOLUZIONE 3

Pongo la $x$ :

$x$ = ammontare, in euro, della paghetta di Pierino

Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di $x$ :

costo, in euro, di una crostata $= \frac{x}{8} = \frac{1}{8}x$

costo, in euro, di un gelato $= \frac{x-1}{13}$ (NOTA 1)

Imposto l'equazione risolvente :

$$\frac{x-1}{13} = \frac{x}{8} - 2$$

$$\frac{8x-8}{104} = \frac{13x-208}{104}$$

$$8x - 13x = -208 + 8$$

$$-5x = -200$$

$$5x = 200$$

$x = 40$ (OSSERVAZIONE 1)

**ESERCIZI** (equazioni con denominatori) ⇨

1) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{4}x$ 2) $\frac{x+1}{4} + \frac{x-2}{3} = \frac{1}{6}$

3) $1 - \frac{x+3}{4} = \frac{1}{2}x$ 4) $\frac{2x-1}{3} = \frac{1}{2}(x-2)$

Sol.: 1) $x = 8/5$ 2) $x = 1$ 3) $x = 1/3$ 4) $x = -4$

NOTA 1

Se con la paghetta compro 13 gelati, mi rimane 1 euro d'avanzo; quindi, se prendo la paghetta $x$ e metto da parte 1 euro, con la cifra restante, che sarà $x-1$, potrò comprare esattamente 13 gelati.

Il costo di un singolo gelato è perciò $\frac{x-1}{13}$.

Potevo anche procedere mediante l'inversione di una formuletta:

$p = 13g + 1$ *( p paghetta, g gelato)*

$13g + 1 = p$ *(scambiando i due membri)*

$13g = p - 1$ *(isolando il termine con g )*

$g = \frac{p-1}{13}$

OSSERVAZIONE 1

Qui abbiamo forse faticato un po' di più; in effetti, la risoluzione 2) è preferibile rispetto alla 3), perché nella 2) l'informazione più complicata viene utilizzata soltanto alla fine, per impostare l'equazione risolvente, e non prima (vedi il paragrafo 2, "Problemi a una incognita: indicazioni generali")

## ❑ PROBLEMA SVOLTO 5

**Trovare tre numeri, sapendo che il primo è i 2/3 del secondo, il secondo supera di un'unità la metà del terzo, e la media dei tre numeri è 36.**

RISOLUZIONE

Pongo la $x$ :

$x$ = 3° *numero* (OSSERVAZIONE 2)

Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di $x$ :

$$2°\ numero = \frac{1}{2}x + 1$$

$$1°\ numero = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Imposto l'equazione risolvente :

$$\frac{x + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{3} = 36 \quad \text{(NOTA 2)}$$

$$x + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = 108 \quad \text{(NOTA 3)}$$

$$\frac{6x + 3x + 6 + 2x + 4}{\cancel{6}} = \frac{648}{\cancel{6}}$$

$$11x + 10 = 648 \ \ldots \ x = 58$$

*I tre numeri cercati sono :*

3° $n° = 58$; 2° $n° = \frac{1}{2} \cdot 58 + 1 = 30$; 1° $n° = \frac{2}{3} \cdot 30 = 20$

OSSERVAZIONE 2

E' conveniente porre come $x$ proprio il 3° numero, perché con questa scelta è più facile esprimere le altre quantità in gioco, ossia i due numeri rimanenti, per mezzo di $x$ (vedi il paragrafo 2, "Problemi a una incognita: indicazioni generali")

NOTA 2

Avremmo anche potuto evitare le fastidiose linee di frazione sovrapposte: bastava moltiplicare per 1/3 anziché dividere per 3, bastava cioè scrivere

$$\left(x + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = 36$$

NOTA 3

Per mandar via la linea di frazione principale (intendo, per mandar via il lungo "fratto 3") abbiamo moltiplicato per 3 sia il primo che il secondo membro

## 2. PROBLEMI A UNA INCOGNITA: INDICAZIONI GENERALI

- Alcuni problemi sono tali che per risolverli bastano **semplicemente dei calcoli**, senza che sia necessario introdurre incognite;
- in altri, è indispensabile (o, almeno, conveniente) **porre un'incognita** (di solito si usa, ma non è affatto obbligatorio, la lettera $x$);
- in altri problemi ancora, poi, è opportuno **porre più incognite** (che generalmente, ma non obbligatoriamente, si indicheranno con le lettere $x$, $y$, $z$, … )

**Nel caso in cui si decida di porre UNA SOLA INCOGNITA,** il procedimento risolutivo sarà sostanzialmente costituito da TRE FASI:



| | | |
|---|---|---|
| **I)** | **scegliere l'incognita** | *Come* scegliere l'incognita?<br>Non sempre conviene porre come incognita proprio la quantità che è richiesta dal problema.<br>**La scelta dell'incognita deve, sostanzialmente, avvenire già in vista della seconda fase, cioè cercando di scegliere la $x$ in modo che sia poi facile esprimere tutte le altre quantità non note che ci servono, per mezzo della $x$ scelta**. |
| **II)** | **esprimere tutte le quantità che sono in gioco nel problema** (a parte, naturalmente, quelle già note) **per mezzo dell'incognita scelta** (o, come si dice in "gergo" matematico, "*in funzione*" dell'incognita) | Per la seconda fase, ossia per esprimere le varie quantità mediante la $x$, conviene sempre utilizzare, fra le varie **informazioni** che ci dà il testo del problema, quelle **più semplici**.<br>**L'informazione più complicata sarà opportuno lasciarla per ultima: essa ci servirà per la terza fase, cioè per impostare l'equazione risolvente**. |
| **III)** | **impostare l'equazione risolvente** | ♥ A proposito dell'equazione risolvente: **bisogna sempre impostarla facendo uso di un'informazione che non sia stata già sfruttata nella fase precedente**.<br>Infatti, se, per caso, "ricicliamo" una seconda volta un'informazione già utilizzata, ci troveremo di fronte ad un'equazione "in cui va via tutto" (equazione indeterminata), e da questa non potremo in alcun modo pervenire al valore cercato di $x$. |

**Se, invece, si decide di usare più di una incognita, la tecnica di risoluzione consisterà nello scrivere un "sistema" (vedi capitolo successivo) formato di norma da un numero di equazioni uguale al numero delle incognite.**

♥ Domanda: *QUANDO conviene risolvere con una sola incognita e QUANDO invece con più incognite?*

Diciamo che **la risoluzione con una sola incognita è preferibile qualora sia abbastanza facile esprimere tutte le quantità non note in gioco, mediante una sola di esse.**

Esempi:

- Se il problema parla di "quattro numeri interi consecutivi", sarebbe un'inutile complicazione fare uso di 4 incognite $x$, $y$, $z$, $w$; si indicheranno invece i numeri in questione con
  $x,\ x+1,\ x+2,\ x+3$
- Se si sa che due numeri da determinare hanno per somma $s$ (essendo $s$ un numero noto), anziché "sprecare" due incognite $x$, $y$, basterà indicarli con:
  $x,\ s-x$
- Se è noto che la differenza fra due numeri da trovare è $d$ (essendo $d$ un numero noto), si potrà scrivere:
  $x$ (numero minore), $x+d$ (numero maggiore)
  oppure:
  $x$ (numero maggiore), $x-d$ (numero minore)
- ecc. ecc.

# 3. IL MONDO DELLE EQUAZIONI E' MOLTO VARIO

**EQUAZIONE = "UGUAGLIANZA PROBLEMATICA":**
**un'equazione è un'uguaglianza, contenente un numero sconosciuto, "incognito" (generalmente indicato con *x*), che ci chiede di determinare per quali valori di *x*, ammesso che esistano, l'uguaglianza stessa è verificata.**



**Esistono equazioni:**

**con una e una sola soluzione**

$7(x+1)=8x-(3x-5)$
$7x+7=8x-3x+5$
$7x-8x+3x=5-7$
$2x=-2;$ $\boxed{x=-1}$

Altro esempio: $7(x+1)=8x-(3x-7)$
$7x+7=8x-3x+7$
$7x-8x+3x=7-7$
$2x=0;$ $\boxed{x=0}$

**impossibili, cioè prive di soluzioni**

$7(x+1)=8x-(x-5)$
$7x+7=8x-x+5$
$7x-8x+x=5-7$
$0\cdot x=-2$

Noi cerchiamo dunque un numero *x* che, moltiplicato per 0, dia –2; ma NESSUN numero gode di questa proprietà, quindi questa equazione è IMPOSSIBILE , priva di soluzioni.

In generale, ogni equazione che si possa portare sotto la forma $0\cdot x=b,$ *con* $b\neq 0$, è IMPOSSIBILE

Nel nostro esempio, noi avremmo anche potuto semplificare al secondo passaggio:

$7(x+1)=8x-(x-5)$
$\cancel{7x}+7=\cancel{8x}\ \cancel{-x}+5$
$7=5$

ottenendo un'uguaglianza numerica FALSA.

Se, in un'equazione, è possibile semplificare in modo tale che l'equazione stessa si riduca ad **un'uguaglianza *numerica* ( = senza più la *x*) FALSA**, allora l'equazione è IMPOSSIBILE, cioè priva di soluzioni.

**indeterminate, cioè con infinite soluzioni**

$5(x+1)=8x-(3x-5)$
$5x+5=8x-3x+5$
$5x-8x+3x=5-5$
$0\cdot x=0$

Noi cerchiamo dunque un numero *x* che, moltiplicato per 0, dia 0; ma QUALSIASI numero gode di questa proprietà, quindi questa equaz. è INDETERMINATA , ovvero ha infinite soluzioni, perché qualsiasi numero ne è soluzione.

In generale, ogni equazione che si possa portare sotto la forma $0\cdot x=0$ è INDETERMINATA

Nel nostro esempio, noi avremmo anche potuto semplificare al secondo passaggio:

$5(x+1)=8x-(3x-5)$
$\cancel{5x}\ \cancel{+5}=\cancel{8x}\ \cancel{-3x}\ \cancel{+5}$
$0=0$

ottenendo un'uguaglianza numerica VERA.

Se, in un'equazione, è possibile semplificare in modo tale che l'equazione stessa si riduca ad **un'uguaglianza *numerica* ( = senza più la *x*) VERA**, allora l'equazione è INDETERMINATA ( = ha infinite soluzioni).

**dotate di un numero finito, ma maggiore di 1, di soluzioni**

$(2x-1)(3x-1)=1$
$6x^2-2x-3x\cancel{+1}=\cancel{1}$
$6x^2-5x=0$
$x(6x-5)=0$

$\boxed{x=0}$ *oppure* $6x-5=0;\ 6x=5;$ $\boxed{x=\frac{5}{6}}$

$x^3-4x=0;\quad x(x^2-4)=0$ *da cui*
$\boxed{x=0}$ $\boxed{\text{oppure}}$ $x^2-4=0;\ x^2=4;$ $\boxed{x=\pm 2}$

**Legge di annullamento del prodotto**
Se almeno uno dei fattori è nullo il prodotto vale 0; *e viceversa*: se un prodotto è uguale a 0, allora certamente almeno uno dei fattori è 0.

**IDENTITA'** ♥ **Un'identità è una UGUAGLIANZA LETTERALE SEMPRE VERIFICATA, per qualunque valore ammissibile dato alle lettere coinvolte**
(vanno tolti, se ce ne sono, i valori che fanno perdere significato a uno o a entrambi i membri)

Esempi: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\qquad 2(x+5)=2x+10$ $\qquad \frac{2x-6}{x-3}=2$ (verificata per ogni *x*, *tranne che* per $x=3$)

In che cosa, dunque, un'identità differisce da un'equazione indeterminata?
La differenza sta più che altro nell'atteggiamento psicologico con cui si guarda all'uguaglianza.
Se un'uguaglianza letterale è studiata allo scopo di determinare i valori delle lettere per cui è verificata, e alla fine si trova che tali valori sono infiniti, si concluderà che si è di fronte a un'equazione indeterminata.
Se un'uguaglianza viene costruita deliberatamente in modo tale da risultare verificata per qualsiasi valore ammissibile delle lettere in gioco, allora si parlerà di "identità".

# 4. COSA E' POSSIBILE FARE IN UN'EQUAZIONE

In un'**UGUAGLIANZA**, è possibile:

- ♪ addizionare, oppure sottrarre, ad entrambi i membri, uno stesso numero
- ♫ moltiplicare, oppure dividere, entrambi i membri, per uno stesso numero diverso da zero

nel senso che, così facendo, se è vera l'uguaglianza di partenza sarà vera anche quella di arrivo, e viceversa.

QUINDI nella risoluzione di un'**EQUAZIONE** si possono applicare (nel senso che portano ad un'equazione equivalente a quella di partenza, ossia con le stesse soluzioni), le regole seguenti:



| REGOLA | ESEMPIO | PERCHE' |
|---|---|---|
| **Se a primo e secondo membro abbiamo due termini** (nel senso di: addendi di somma algebrica) **uguali, li possiamo mandar via** | $4x+3=-12x+3$ | … perché è come fare: $4x+3=-12x+3$ $4x+3-3=-12x+3-3$ |
| **Possiamo trasportare un termine** (nel senso di: addendo di somma algebrica) **dall'altra parte del simbolo =, cambiandolo però di segno** ("**REGOLA DEL TRASPORTO**" **PER LA SOMMA ALGEBRICA**) | $7x-11=3$ $7x=3+11$ $5x=3x+8$ $5x-3x=8$ | … perché è come fare: $7x-11=3$ $7x-11+11=3+11$ $5x=3x+8$ $5x-3x=3x+8-3x$ |
| **Se tanto il 1° che il 2° membro sono due frazioni con lo stesso denominatore, possiamo mandar via i due denominatori uguali** | $\frac{5x+3}{4}=\frac{3x+1}{4}$ | … perché è come fare: $4\cdot\frac{5x+3}{4}=\frac{3x+1}{4}\cdot 4$ |
| **Possiamo semplificare tutti i termini** ( = addendi delle due somme algebriche a primo e a secondo membro) **per uno stesso numero** | $15^{5}x-21^{7}=6^{2}x+33^{11}$ | … perché è come fare: $15x-21=6x+33$ $\frac{15x-21}{3}=\frac{6x+33}{3}$ applicando poi la proprietà distributiva del quoziente rispetto alla somma (algebrica) |
| **Possiamo cambiare di segno tutti i termini** ( = addendi delle due somme algebriche a primo e a secondo membro) | $-4x-7=8$ $+4x+7=-8$ | … perché è come fare: $-4x-7=8$ $(-1)\cdot(-4x-7)=8\cdot(-1)$ $+4x+7=-8$ Anche: se due numeri sono uguali allora sono uguali anche i loro opposti, e viceversa |
| "**Ciò che moltiplica da una parte del simbolo =, divide dall'altra; ciò che divide da una parte, moltiplica dall'altra**" Questa viene a volte indicata come la "**REGOLA DEL TRASPORTO PER LA MOLTIPLICAZIONE - DIVISIONE**" | $7x=2$ $x=\frac{2}{7}$ $\boxed{ax=b \quad x=\frac{b}{a}}$ $(a\neq 0)$ | … perché è come fare: $7x=2$ $\frac{7x}{7}=\frac{2}{7}$ |
| | $\frac{x}{4}=3$ $x=3\cdot 4$ $\boxed{\frac{x}{c}=d \quad x=d\cdot c}$ $(c\neq 0)$ | $\frac{x}{4}=3$ $4\cdot\frac{x}{4}=3\cdot 4$ |
| | $\frac{3}{4}x=2$ $x=2\cdot\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{4}x=2$ $\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}x=2\cdot\frac{4}{3}$ |

## 5. IL CONCETTO DI "EQUAZIONI EQUIVALENTI"

Riassumendo all'osso:

♥ **in un'equazione noi possiamo fare sul primo membro una determinata operazione, purché però contemporaneamente facciamo la stessa operazione anche sul secondo membro, e purché** … attenzione, è molto importante …
**PURCHE' SI POSSA "TORNARE INDIETRO",** vale a dire:
**dall'equazione così ottenuta si possa nuovamente ricavare l'equazione iniziale (e questa soltanto).**

**ESEMPIO**

Dall'equazione

(1) $x^2 = 5x + 4$

io posso passare alla

(2) $x^2 - 5x = 4$

essendo sicuro che la (1) e la (2) saranno equivalenti, cioè avranno le stesse soluzioni (ogni soluzione di (1) è anche soluzione di (2), E VICEVERSA).

Infatti:

A) a partire dall'uguaglianza

(1) $x^2 = 5x + 4$

sottraggo $5x$ da ENTRAMBE le parti e ottengo la (2)

$x^2 - 5x = \cancel{5x} + 4 \cancel{-5x}$

ragionando così:

*se due numeri sono uguali, sottraendo da entrambi uno stesso numero si perviene ancora a numeri uguali, perciò, se un dato valore di x è soluzione di* (1)*, si è certi che il medesimo valore di x sarà soluz. anche di* (2)*; insomma: ogni soluzione di* (1) *è sicuramente anche soluzione di* (2). Dunque: $(1) \Rightarrow (2)$

B) E VICEVERSA,
dalla

(2) $x^2 - 5x = 4$

si può ricavare come conseguenza la (1):

$x^2 \cancel{-5x} \cancel{+5x} = 4 + 5x$

Il simbolo $\Rightarrow$ è quello di "implicazione logica": "se … allora … , qualunque sia il valore di *x* considerato"

*se due numeri sono uguali, allora, addizionando a entrambi uno stesso numero, si perviene a numeri uguali, perciò, se un dato valore di x è soluzione di* (2)*, si è certi che il medesimo valore di x sarà soluz. anche di* (1)*; insomma: ogni soluzione di* (2) *è sicuramente anche soluzione di* (1). Dunque: $(2) \Rightarrow (1)$

**CONTROESEMPIO**

Se dall'equazione

(1) $x = 2x - 5$

io passo alla

(2) $x^2 = (2x-5)^2$

potrò essere sicuro che ogni soluzione di (1) è anche soluzione di (2)
(*se due numeri sono uguali, allora saranno uguali anche i loro quadrati, perciò, se un dato valore di x è soluzione di* (1)*, si è certi che il medesimo valore di x sarà soluzione anche di* (2) );
PERO' NON E' DETTO che valga anche il viceversa, ossia:
NON posso essere sicuro che ogni soluzione di (2) sia anche soluz. di (1), in quanto *se i quadrati di due numeri sono uguali, allora i due numeri in gioco non è detto che siano per forza uguali: potrebbero pure essere opposti!*

Questa volta, dunque, vale l'implicazione $(1) \Rightarrow (2)$ ma NON vale l'implicazione inversa: $\cancel{(2) \Rightarrow (1)}$
per cui l'equazione (1) potrebbe non essere equivalente alla (2);
e in effetti si vede che non lo è, perché, mentre la (1) ammette come unica soluzione $x = 5$,
la (2) invece ammette come soluzioni $x = 5$ e anche $x = 5/3$.

♥ **Due equazioni si dicono "EQUIVALENTI" se hanno le stesse soluzioni, ossia se ogni soluzione della prima è anche soluzione della seconda, E VICEVERSA.**

Le regole esposte alla pagina precedente sono "**PRINCIPI DI EQUIVALENZA**", ossia consentono di passare da un'equazione assegnata ad un'altra, certamente equivalente a quella di partenza;
il **criterio generale** per passare da un'equazione ad un'altra, che sia sicuramente equivalente alla prima, è quello esposto nel riquadro in cima a questa pagina, riassumibile nello schema logico:

♥ **(1) è equivalente a (2) quando valgono ENTRAMBE le implicazioni $(1) \Rightarrow (2)$ e $(2) \Rightarrow (1)$**
**vale a dire, quando vale la DOPPIA IMPLICAZIONE $(1) \Leftrightarrow (2)$**

(l'implicazione $(1) \Rightarrow (2)$, da sola, ci assicura soltanto che ogni soluzione di (1) sarà pure soluzione di (2), ma non ci dice nulla riguardo al viceversa, che potrebbe anche non avvenire)

# 6. I PRINCIPI DI EQUIVALENZA DELLE EQUAZIONI

Ricordiamo che due equazioni si dicono "equivalenti" fra loro quando hanno le stesse soluzioni; quando, cioè, ogni soluzione della prima è anche soluzione della seconda, E VICEVERSA.

Ad esempio, le due equazioni $2(x-4)=x$ e $x+1=9$ sono fra loro equivalenti, perché entrambe hanno come unica soluzione $x=8$; due equazioni che siano entrambe impossibili sono equivalenti fra loro; le due equazioni $(x-2)(x-3)=0$ e $x^2+6=5x$ sono equivalenti, perché per entrambe l'insieme delle soluzioni è $S=\{2,3\}$. Invece le equazioni $x-2=0$ e $x^2=4$ NON sono equivalenti, in quanto l'insieme delle soluzioni della prima è $S_1=\{2\}$ mentre l'insieme delle soluzioni della seconda è $S_2=\{-2,+2\}$.

## 1° Principio di Equivalenza delle Equazioni

**Data un'equazione $A(x)=B(x)$, addizionando o sottraendo ad entrambi i membri uno stesso numero, oppure una stessa espressione contenente *x*, e che esiste per qualsiasi valore di *x*, si ottiene con certezza un'equazione equivalente a quella iniziale.**

Dimostriamolo.
Partiamo dall'equazione
(1) $A(x)=B(x)$,
e addizioniamo ad entrambi i membri una stessa espressione $C(x)$ che esiste per qualsiasi valore di *x*.
Vogliamo dimostrare che la nuova equazione
(2) $A(x)+C(x)=B(x)+C(x)$
è equivalente alla (1), ossia ha le stesse soluzioni della (1).

Supponiamo dunque che un dato numero $\alpha$ sia soluzione della (1).
Allora quel numero $\alpha$ sarà tale che, sostituendolo al posto di *x* nella (1), si ottenga un'uguaglianza vera; sarà dunque vera l'uguaglianza
$A(\alpha)=B(\alpha)$;
quindi sarà pure vera l'uguaglianza
$A(\alpha)+C(\alpha)=B(\alpha)+C(\alpha)$ (osserviamo che l'ipotesi ci *garantisce* l'esistenza del numero $C(\alpha)$)
perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà vera anche qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla prima addizionando ad entrambi i suoi membri uno stesso numero.
Ma se è vera l'uguaglianza
$A(\alpha)+C(\alpha)=B(\alpha)+C(\alpha)$
ciò significa che il numero $\alpha$ è soluzione della (2).

Con ciò abbiamo provato che ogni soluzione della (1) è soluzione pure della (2).

Vediamo se vale anche il viceversa.

Supponiamo che un dato numero $\alpha$ sia soluzione della (2).
Allora quel numero $\alpha$ sarà tale che, sostituendolo al posto di *x* nella (2), si ottenga un'uguaglianza vera; sarà dunque vera l'uguaglianza
$A(\alpha)+C(\alpha)=B(\alpha)+C(\alpha)$;
quindi sarà pure vera l'uguaglianza
$A(\alpha)=B(\alpha)$,
perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà anche vera qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla prima sottraendo da entrambi i suoi membri uno stesso numero ($C(\alpha)$ nel nostro caso).
Ma se è vera l'uguaglianza
$A(\alpha)=B(\alpha)$
ciò significa che il numero $\alpha$ è soluzione della (1).

Quanto abbiamo visto prova che ogni soluzione della (2) è soluzione pure della (1).

E allora, ricapitolando:
ogni soluzione della (1) è pure soluzione della (2); ogni soluzione della (2) è pure soluzione della (1);
… le due equazioni (1) e (2) hanno le stesse soluzioni, sono equivalenti!

Evidentemente i ragionamenti di cui sopra valgono anche nel caso in cui, anziché addizionare ai due membri una stessa *espressione* $C(x)$, noi addizioniamo ad essi uno stesso *numero* $k$.

Per quanto riguarda poi la possibilità di *sottrarre* (anziché addizionare) un numero o un'espressione, la dimostrazione è del tutto analoga e la lasciamo al lettore.

Dal 1° Principio di Equivalenza delle Equazioni dipendono le seguenti REGOLE di cui ci siamo già occupati:

- se a 1° e a 2° membro ci sono due termini (=addendi di somma algebrica) uguali, li possiamo mandar via
- possiamo trasportare un termine dall'altra parte del simbolo "=", cambiandolo però di segno ("REGOLA DEL TRASPORTO PER LA SOMMA ALGEBRICA")

## 2° Principio di Equivalenza delle Equazioni

**Data un'equazione $A(x) = B(x)$, moltiplicando o dividendo entrambi i membri per uno stesso numero diverso da 0, oppure per una stessa espressione contenente $x$, a patto però che questa espressione esista per qualsiasi valore di $x$ e non si annulli per nessun valore di $x$, si ottiene certamente un'equazione equivalente a quella di partenza.**

Partiamo dall'equazione (1) $A(x) = B(x)$, e moltiplichiamone ambo i membri per un'espressione $C(x)$, che esista per qualsiasi valore di $x$: $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists C(x)$ e che non si annulli mai: $\forall x \in \mathbb{R},\ C(x) \neq 0$.
Vogliamo dimostrare che la nuova equazione (2) $A(x) \cdot C(x) = B(x) \cdot C(x)$
è equivalente alla (1), ossia ha le stesse soluzioni della (1).

Supponiamo che un dato numero $\alpha$ sia soluzione della (1). Allora quel numero $\alpha$ sarà tale che, sostituendolo al posto di $x$ nella (1), si ottenga un'uguaglianza vera; sarà dunque vera l'uguaglianza $A(\alpha) = B(\alpha)$; quindi sarà pure vera l'uguaglianza $A(\alpha) \cdot C(\alpha) = B(\alpha) \cdot C(\alpha)$, perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà vera anche qualsiasi uguaglianza ottenibile da essa moltiplicandone entrambi i membri per uno stesso numero. Ma se è vera l'uguaglianza $A(\alpha) \cdot C(\alpha) = B(\alpha) \cdot C(\alpha)$, ciò significa che il numero $\alpha$ è soluzione della (2).

Con ciò abbiamo provato che ogni soluzione della (1) è soluzione pure della (2).

Vediamo se vale anche il viceversa. Supponiamo che un dato numero $\alpha$ sia soluzione della (2).
Allora quel numero $\alpha$ sarà tale che, sostituendolo al posto di $x$ nella (2), si ottenga un'uguaglianza vera; sarà dunque vera l'uguaglianza $A(\alpha) \cdot C(\alpha) = B(\alpha) \cdot C(\alpha)$; quindi sarà pure vera l'uguaglianza $A(\alpha) = B(\alpha)$, perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà anche vera qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla prima dividendone entrambi i membri per uno stesso numero diverso da 0 (qui interviene l'ipotesi $C(x) \neq 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$). Ma se è vera l'uguaglianza $A(\alpha) = B(\alpha)$, ciò significa che il numero $\alpha$ è soluzione della (1).

Quanto abbiamo visto prova che ogni soluzione della (2) è soluzione pure della (1).

Allora, ricapitolando: ogni soluzione della (1) è soluzione della (2); vale anche il viceversa;
… pertanto le due equazioni (1) e (2) hanno le stesse soluzioni, sono equivalenti.

Evidentemente i ragionamenti di cui sopra valgono anche nel caso in cui, anziché moltiplicare i due membri per una stessa *espressione* $C(x)$ che non si annulla mai, noi li moltiplichiamo per uno stesso *numero* $k \neq 0$.

Per quanto riguarda poi la possibilità di *dividere* (anziché di moltiplicare) per un numero non nullo o per un'espressione sempre esistente e mai nulla, la dimostrazione è del tutto analoga e la lasciamo al lettore.

Dal 2° Principio di Equivalenza delle Equazioni dipendono le seguenti REGOLE di cui ci siamo già occupati:

- se tanto il 1° che il 2° membro sono due frazioni con lo stesso denominatore, possiamo mandar via i due denominatori uguali
- possiamo semplificare tutti i termini per uno stesso numero
- possiamo cambiare di segno tutti i termini (=addendi delle due somme algebriche a 1° e a 2° membro)
- "ciò che moltiplica da una parte dell' "=", divide dall'altra; ciò che divide da una parte, moltiplica dall'altra" ("REGOLA DEL TRASPORTO PER LA MOLTIPLICAZIONE /DIVISIONE")

**E' importante tener presente che si può essere certi di pervenire a un'equazione equivalente a quella iniziale solo se l'espressione C($x$) che entra in gioco**

**♪ esiste sempre, nel caso del 1° Principio;**

**♫ esiste sempre e non si annulla mai, nel caso del 2° Principio.**

- Consideriamo, come controesempio, la coppia di equazioni $x+1=3$ e $x+1+\frac{1}{x-2}=3+\frac{1}{x-2}$.
  Qui la seconda è ottenibile dalla prima addizionando una stessa espressione ad entrambi i membri; ma si osserva che l'espressione stessa non rispetta la condizione di esistere sempre, per qualsiasi $x$ (in effetti, per via del denominatore, non esiste con $x=2$).
  NON siamo quindi certi che le due equazioni siano equivalenti; potrebbero esserlo, ma anche non esserlo. E in effetti non lo sono, perché, mentre la prima ha come soluzione $x=2$, la seconda è impossibile.
- Un altro controesempio. Le due equazioni $2x = x+1$ e $2x(x-3) = (x+1)(x-3)$ NON sono equivalenti (la prima ha come unica soluzione $x=1$, la seconda ha una soluzione in più, essendo verificata sia per $x=1$, che per $x=3$). Eppure la $2^a$ equazione è ottenibile dalla $1^a$ tramite moltiplicazione per $(x-3)$ … … Però l'espressione $(x-3)$ si può annullare, quindi non sono rispettati i requisiti del 2° Principio.

**Terminiamo col ricordare (l'avevamo già osservato a pag. 151) che ELEVANDO AL QUADRATO i 2 membri di una equazione NON si è certi di pervenire ad un'equazione equivalente a quella iniziale; infatti l'equazione così ottenuta conserva, sì, tutte le soluzioni dell'equazione data, ma può accadere che ne acquisti in più delle altre "estranee" all'equazione di partenza, perciò non accettabili.**

# 7. ESERCIZI SULLE EQUAZIONI

*Ogni tanto*, prima di guardare la soluzione, fai la VERIFICA!!!

♥ LA **VERIFICA DELLA CORRETTEZZA DI UNA SOLUZIONE CHE SI E' TROVATA** consiste semplicemente nel sostituire quel valore al posto di $x$ nell'uguaglianza iniziale: se questa risulta vera, allora il valore trovato è davvero soluzione, altrimenti qualcosa non va (o hai sbagliato nella risoluzione, o hai sbagliato nella verifica ☺ …)

- ESEMPIO SVOLTO

  $3(7x-8)=5x$ Svolgo i calcoli ...

  $21x-24=5x$ Trasporto i termini con $x$ a 1° membro, e quelli senza la $x$ ( = termini "noti") al 2° ...

  $21x-5x=24$ Riduco i termini simili ...

  $16x=24$ Divido ambo i membri per il coefficiente di $x$ ...

  $x=\frac{\cancel{24}^{3}}{\cancel{16}_{2}}$; $\boxed{x=\frac{3}{2}}$ (oppure, a partire da $16x=24$, si poteva dividere subito ambo i membri per 8, semplificarli insomma per 8, ottenendo $\cancel{16}^{2}x=\cancel{24}^{3}$ da cui poi $x=3/2$)

- ESEMPIO SVOLTO

  $7(x-2)=11(x+2)$ Calcoli ...

  $7x-14=11x+22$ Trasportiamo tutte le $x$ a 1° membro, e gli altri termini a 2° membro...

  $7x-11x=22+14$ Riduzione termini simili ...

  $-4x=36$

  QUANDO IL COEFF. DI $x$ NELL'ULTIMO PASSAGGIO E' <0, CONVIENE CAMBIARE I SEGNI ...

  $4x=-36$ Divisione per il coefficiente di $x$ ...

  $x=\frac{-\cancel{36}^{9}}{\cancel{4}_{1}}$; $\boxed{x=-9}$ (anche, ma non è raccomandato: $-4x=36$; $x=\frac{\cancel{36}^{9}}{\cancel{-4}_{1}}=-9$

- ESEMPIO SVOLTO

  $3(x+7)=11x+3$; $3x+21=11x+3$; $3x-11x=3-21$; $-8x=-18$; $8x=18$

  $\boxed{x=}\frac{\cancel{18}^{9}}{\cancel{8}_{4}}=\boxed{\frac{9}{4}}$ ... oppure, a partire da $8x=18$, si poteva dividere subito ambo i membri per 2 (semplificarli, insomma, per 2), ottenendo $\cancel{8}^{4}x=\cancel{18}^{9}$ da cui poi $x=9/4$

**ESERCIZI**

1) $7x-1=27$ 2) $7x+5=4x-1$ 3) $5x-3=2x-1$ 4) $4x+7=5x+8$ 5) $3x=7x-1$
6) $10x=20x$ 7) $10x+20=0$ 8) $6x-2=12x+1$ 9) $7x-6x=5x-4$ 10) $x+2x+3=4x+5x+6$
11) $x+1+4x+4=2+3x+3$ 12) $7x+3=8x+1$ 13) $3x-(2x+9)=5-(4x-1)$ 14) $4(x+1)=3(4-x)$
15) $2(x+1)=3x-1$ 16) $3(x+4)=5(x+6)$ 17) $4x-1=3(8x-1)$ 18) $3(x-1)=2\left[4(x+1)-3\right]$
19) $3\left[5(1-x)-4\right]=2\left[4-3(1+x)\right]$ 20) $3x-2+3(x-2)=4x-1+4(x-1)$ 21) $(x-2)^2=x^2$

- ES. SVOLTO: $4(x-1)(x-2)+14x-1=(4x+1)(x+1)+3(2-x)$

  $4(x^2-2x-x+2)+14x-1=4x^2+4x+x+1+6-3x$

  $\cancel{4x^2}-8x-4x+8+14x-1=\cancel{4x^2}+2x+7$; $\cancel{2x+7}=\cancel{2x+7}$; $0=0$

  L'equaz. ha perso tutti i termini con $x$ e si è ridotta ad un'uguaglianza numerica VERA ($0=0$, oppure, se non avessimo mandato via i "+7", $7=7$).

  E' dunque INDETERMINATA. Qualunque valore di $x$ ne è soluzione.

- ES. SVOLTO: $(x-1)^2-\left[(x+1)^2+8\right]+3(4x+1)=2x^2-2(x-2)^2$

  $x^2-2x+1-(x^2+2x+1+8)+12x+3=2x^2-2(x^2-4x+4)$

  $\cancel{x^2}-2x+1-\cancel{x^2}-2x-9+12x+3=\cancel{2x^2}-\cancel{2x^2}+8x-8$; $\cancel{8x}+3=\cancel{8x}$

  Qui tutti i termini con $x$ se ne sono andati, ed è rimasta un'uguaglianza puramente numerica, FALSA ($3=0$).

  Se ne conclude che l'equazione è IMPOSSIBILE, cioè priva di soluzioni: nessun valore di $x$ ne è soluzione.

- ES. SVOLTO: $(x-5)^2=(x-3)^2+4^2$

  $\cancel{x^2}-10x+25=\cancel{x^2}-6x+9+16$

  $-4x=0$; $\boxed{x=0}$

♥ **RICAPITOLANDO**

Le $x$ se ne vanno, uguaglianza numerica FALSA: IMPOSSIBILE

Le $x$ se ne vanno, uguaglianza numerica VERA: INDETERMINATA

$ax=0$ $(a\neq 0)$ : l'equazione ha UNA SOLA SOLUZIONE, $x=0$

**ESERCIZI**

22) $5x=2x$ 23) $5x=5x$ 24) $0\cdot x=5$ 25) $14+x=7(x+2)$ 26) $5x+3(x-1)=x+7(x+1)$
27) $4x+3(x+4)=12$ 28) $2(2x-1)+5=4(x+1)-1$ 29) $3(8x+16)=8(3x+6)$ 30) $3(x+8)=8(x+3)$

❑ ESEMPIO SVOLTO: $\frac{1}{4}x=\frac{2x}{3}+\frac{1}{6}$. Premesso che $\frac{1}{4}x=\frac{x}{4}$, $\frac{2x}{3}=\frac{2}{3}x$, possiamo:

a) fare il denominatore comune, uguale per entrambi i membri, che sarà quindi il minimo comune multiplo di TUTTI i denominatori presenti, sia quelli del 1° che quelli del 2° membro:

$\frac{3x}{\cancel{12}}=\frac{8x+2}{\cancel{12}}$; $3x-8x=2$; $-5x=2$; $5x=-2$; $x=-\frac{2}{5}$

b) oppure MOLTIPLICARE sia il 1° che il 2° membro, quindi ciascun termine, per quello che sarebbe stato il denominatore comune e semplificare a mente, mandando così via i denominatori ... senza aver fatto il denominatore comune!

$12\cdot\left(\frac{1}{4}x\right)=\left(\frac{2x}{3}+\frac{1}{6}\right)\cdot 12$; $3x=8x+2$ *eccetera*

♥ IMPORTANTE
Quando ci sono dei denominatori, conviene innanzitutto liberarsene con uno dei due metodi esposti qui a sinistra.
IN GENERALE, NON È CONVENIENTE trasportare termini o ridurre termini simili mentre ci sono ancora i denominatori!

❑ ESEMPIO SVOLTO: $\frac{x-7}{4}-\frac{3x+12}{8}=\frac{3}{2}x$

NOTA

$\frac{2x-14-3x-12}{\cancel{8}}=\frac{12x}{\cancel{8}}$

NOTA: OCCHIO!!! QUI *ENTRAMBI* I SEGNI DEVONO CAMBIARE!
Infatti il segno "−" si riferisce a TUTTO il binomio $3x+12$: $\frac{2x-14-(3x+12)}{\cancel{8}}=\frac{12x}{\cancel{8}}$

$-x-26=12x$; $-13x=26$; $13x=-26$; $\boxed{x=-2}$

**ESERCIZI**

31) $\frac{1}{3}x=4$ 32) $8x=\frac{1}{2}$ 33) $\frac{1}{4}x=\frac{1}{3}$ 34) $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}=0$ 35) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}$ 36) $\frac{2}{5}x=3+x$

37) $\frac{x}{5}-\frac{7}{10}=\frac{x+1}{2}$ 38) $\frac{3x-1}{6}=\frac{2+x}{9}$ 39) $\frac{3x}{8}-\frac{x-3}{4}=2$ 40) $\frac{x}{2}=\frac{x-1}{7}-\frac{3x+6}{14}$ 41) $\frac{x-3}{4}-\frac{2x}{3}=\frac{1-x}{2}$

42) $\frac{x+4}{5}+\frac{x+1}{10}=\frac{2x+1}{15}$ 43) $\frac{1}{2}x+\frac{x}{3}+\frac{1}{4}x=\frac{x+1}{6}$ 44) $\frac{7x+3}{5}-\frac{3}{2}x=0$ 45) $\frac{x+3}{5}-\frac{x+1}{4}=0$

46) $x-\frac{x+10}{12}=1$ 47) $\frac{5}{8}x-\frac{9x-1}{16}=0$ 48) $3\cdot\frac{x-1}{4}=5\cdot\frac{x+6}{2}$ 49) $\frac{1}{6}x=\frac{x}{4}-\frac{1}{3}$ 50) $\frac{x+21}{4}=x$

51) $0{,}01\cdot(x+5)=\frac{x-(7-2x)}{25}$ 52) $3\cdot\frac{x}{2}-2\cdot\frac{x}{3}=\frac{x+1}{8}+2$ 53) $\frac{x+5}{3}=\frac{1}{5}(x+1)$ 54) $2x-\frac{x+7}{4}=0$

55) $x=\frac{4x+1}{2}$ 56) $x^2+1=\frac{4x(x-3)+1}{4}+3\cdot\frac{x}{2}$ 57) $\frac{3}{5}\cdot\frac{4-x}{2}=\frac{2}{3}(2x-1)$ 58) $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}x=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}x$

59) $\frac{1}{3}(x-6)=\frac{1}{2}(x+2)$ *che puoi risolvere eseguendo i prodotti, oppure riscrivendo come* $\frac{x-6}{3}=\frac{x+2}{2}$

60) $\frac{1}{2}(x+4)=\frac{3-2x}{7}$ 61) $\frac{1}{4}(x+2)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}(x-6)$ 62) $1+\frac{x}{4}-\frac{1}{2}(2-x)=\frac{1}{8}x$ 63) $\frac{1}{3}(2x-1)=1-\frac{5x-1}{6}$

64) $\frac{x}{8}-1=\frac{x}{5+\frac{1}{3}}+\frac{7}{2^4}$ 65) $\frac{x-\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}}-\left[\frac{1}{3}(x+1)+\frac{11}{6}\right]=0$ 66) $\frac{x}{1+\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}(x+1)=\frac{1}{3}x-\frac{x}{12}$ 67) $\frac{x}{0{,}2}-\frac{x+1}{0{,}\overline{2}}=0$

**SOLUZIONI**

1) $x=4$ 2) $x=-2$ 3) $x=2/3$ 4) $x=-1$ 5) $x=1/4$ 6) $x=0$ 7) $x=-2$ 8) $x=-1/2$ 9) $x=1$
10) $x=-1/2$ 11) $x=0$ 12) $x=2$ 13) $x=3$ 14) $x=8/7$ 15) $x=3$ 16) $x=-9$ 17) $x=1/10$
18) $x=-1$ 19) $x=1/9$ 20) $x=-3/2$ 21) $x=1$ 22) $x=0$ 23) *indet.* 24) *imposs.* 25) $x=0$
26) *imposs.* 27) $x=0$ 28) *indet.* 29) *indet.* 30) $x=0$ 31) $x=12$ 32) $x=1/16$ 33) $x=4/3$
34) $x=-6/5$ 35) $x=7/2$ 36) $x=-5$ 37) $x=-4$ 38) $x=1$ 39) $x=10$ 40) $x=-1$ 41) $x=15$
42) $x=-5$ 43) $x=2/11$ 44) $x=6$ 45) $x=7$ 46) $x=2$ 47) $x=-1$ 48) $x=-9$ 49) $x=4$
50) $x=7$ 51) $x=3$ 52) $x=3$ 53) $x=-11$ 54) $x=1$ 55) $x=-1/2$ 56) $x=-1/2$ 57) $x=8/7$ 58) $x=-1$
59) $x=-18$ 60) $x=-2$ 61) *indet.* 62) $x=0$ 63) $x=1$ 64) $x=-23$ 65) $x=4$ 66) *imposs.* 67) $x=9$

**ALTRI ESERCIZI**

Nelle seguenti equazioni sono presenti dei prodotti notevoli: risolvile.

68) $(3x-1)^2+(4x-3)^2=(5x-2)^2+2^4$ 69) $(3x-5)(5+3x)-9(x-2)^2=11$ 70) $\frac{(7x+1)^2-(5x+1)^2}{24}=x^2$

71) $(8-x)^2=x^2$ 72) $(7-3x)^2+3=(4-3x)^2$ 73) $9(2x+1)(2x-1)+4=(6x+5)^2$ 74) $(9x-2)^2=(9x+2)^2$

75) $\frac{(2x-5)^2-21}{4}=(x+3)(x-3)$ 76) $(x+3)^2+(x+5)^2=(x+2)^2+(x+4)^2$ 77) $\frac{(10x+1)^2}{100}=x^2$

78) $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}(x-1)^2$ 79) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{(x+1)^2+8x^2}{2^3+1}$ 80) $(x-5)^3=x^2(x-15)$ 81) $x^2(x+12)=(x+4)^3$

82) $x^2=\frac{x(x-2)^2-(x-2)^3}{2}$ 83) $(3x-1)^3-1=(2x-1)^3+(x-1)^3+6x^2(3x-2)$ 84) $\frac{(1-2x)^3}{1-3^2}=x^2\left(x-\frac{3}{2}\right)$

Da www.amscopub.com:

85) Which equation has no solution?
A. $x-1=0$
B. $x+1=1$
C. $1-x=1$
D. $x+1=x$

86) Which equation has a solution of $-2$?
A. $3(x-2)=0$
B. $5(2x-1)=0$
C. $7(x+2)=0$
D. $9(x+4)=0$

87) Which equation has the same solution as $\frac{c}{4}+5=34$?
A. $4c+10=34$ B. $\frac{c}{4}=39$
C. $c-20=136$ D. $\frac{c}{4}=29$

88) Cerca di risolvere A MENTE, PER TENTATIVI, le equazioni seguenti:

*a*) $2+\frac{2}{x}=1$ *b*) $\frac{12}{x-5}=3$ *c*) $\frac{29}{15+12x}=\frac{29}{15+1234x}$ *d*) $\frac{1}{x}=\frac{1}{2-x}$ *e*) $\frac{1}{x}=x$ (*due soluzioni*!)

*f*) $\frac{3}{x}=\frac{x}{3}$ (*due soluzioni*!) *g*) $x^2+x=0$ (*due soluzioni*!) *h*) $x+\frac{8}{x}=9$ (*due soluzioni*!) *i*) $\frac{1}{x-4}=0$

*l*) $\frac{112}{113}(x+7)=0$ *m*) $4x^2=0$ *n*) $(x-8)(x-7)(x+3)=0$ (3 *soluzioni*!) *o*) $x=\sqrt{x}$ (*due soluzioni*!)

89) Risolvi le seguenti equazioncine. Volutamente, l'incognita non è sempre indicata con *x*!

*a*) $x=x$ *b*) $x-1=x$ *c*) $7y=3y$ *d*) $\frac{1}{2}z=4$ *e*) $\frac{3}{4}h=5$ *f*) $\frac{t}{2}=\frac{3}{5}$

*g*) $2-\frac{3}{5}m=0$ *h*) $3x-4=3x+4$ *i*) $3k-1=13k-1$ *l*) $x(x-1)+1=(x-1)^2+x$

*m*) $(w-1)^2=(w+1)^2$ *n*) $0,5q=0,4$ *o*) $0,5r=0,04$ *p*) $0,05s=0,4$ *q*) $3=-6x$

*r*) $b=1000b$ *s*) $1000=1000a$ *t*) $\frac{1}{3}c=\frac{1}{2}$ *u*) $3c=\frac{1}{2}$ *v*) $\frac{1}{3}c=\frac{1}{6}c-\frac{1}{2}c$ *z*) $\frac{1}{3}d=\frac{1}{2}d-\frac{1}{6}d$

90) Risolvi le seguenti equazioncine. Volutamente, l'incognita non è sempre indicata con *x*!

*a*) $0\cdot(a+2)=0\cdot(a-2)$ *b*) $5^{15}+5^{13}b=0$ *c*) $-c=c$ *d*) $7,7771y=7,777y+1$ *e*) $3,\overline{5}x+1=0$

*f*) $0,0\overline{3}=0,\overline{3}x$ *g*) $0,2x=0,\overline{2}$ *h*) $357=357(n+468)$ *i*) $444(s+7)+333=0$ *l*) $78,3045x+3,98349x=0$

*m*) $1+\frac{7}{3}q=0$ *n*) $13^{-3}x=13^{-2}$ *o*) $350^2x=490^2$ *p*) $(y-3)(y+3)=(y-4)(y+4)$ *q*) $3254(65x-4)=0$

91) Scrivi un'equazione, con 0 a 2° membro, e coefficienti interi, che abbia per soluzione $x=-\frac{99}{101}$

92) Scegliendo opportunamente i valori di *b* e *c*, scrivi una qualunque equazione, della forma $x^2+bx+c=0$, che abbia per soluzione $x=3$

93) Sapresti giustificare perché l'equazione $(x-2)^2+9=0$ è impossibile?

94) Che valore devi dare al numero $m$ se vuoi che l'equazione $x^2+mx+12=0$ abbia come soluzione
a) $x=4$? b) $x=-6$? c) $x=0$?

95) Un mattone pesa 1 kg + $\frac{1}{10}$ di mattone. Quanto pesa il mattone?

96) Che valore occorre dare alla lettera *a* affinché l'equazione seguente, nell'incognita *x*:
$a(2x-3)+5=10(x-1)$ NON abbia una e una sola soluzione? E in tal caso, quante soluzioni ha?

97) Per quale valore di *k* il polinomio $x^3+kx^2-4x-3$ è divisibile
(NOTA: "divisibile per" significa che la divisione ha resto 0)
a) per il binomio $(x-1)$? b) per il binomio $(x+3)$?
*Indicazione: si applica il "Teorema del Resto" …*

98) Per quale valore di *m* il polinomio $mx^3+3x^2-4mx-12$ è divisibile
a) per il binomio $(x-2)$? b) per il binomio $(x+1)$?

99) Per quale valore di *a* la divisione $(ax^4-x-22):(x-2)$ ha per resto 1000?

100) Per quale valore di *y* i due polinomi $A(y)=5y+1$; $B(y)=y-7$ assumono:
a) valori uguali? b) valori opposti? c) valori uno doppio dell'altro?

**SOLUZIONI**

68) $x=-1$ 69) $x=2$ 70) $x=0$ 71) $x=4$ 72) $x=2$ 73) $x=-\frac{1}{2}$ 74) $x=0$ 75) $x=2$ 76) $x=-\frac{7}{2}$

77) $x=-\frac{1}{20}$ 78) $x=\frac{1}{4}$ 79) $x=0$ 80) $x=\frac{5}{3}$ 81) $x=-\frac{4}{3}$ 82) $x=1$ 83) *indet.* 84) $x=\frac{1}{6}$

85) D 86) C 87) D

88) *a*) $-2$ *b*) 9 *c*) 0 *d*) 1 *e*) $+1,-1$ *f*) $+3,-3$ *g*) $0,-1$ *h*) 1, 8 *i*) *imp.* *l*) $-7$ *m*) 0 *n*) 8, 7, $-3$ *o*) 0, 1

89) *a*) *indeterminata* : *qualunque valore di x ne è soluzione* *b*) *impossibile* *c*) $y=0$ *d*) $z=8$ *e*) $h=\frac{20}{3}$
*f*) $t=\frac{6}{5}$ *g*) $m=\frac{10}{3}$ *h*) *impossibile* *i*) $k=0$ *l*) *indeterminata* : *qualunque valore di x ne è soluzione*
*m*) $w=0$ *n*) (*moltiplica innanzitutto per* 10) $q=\frac{4}{5}$ *o*) (*moltiplica per ...*) $r=\frac{4}{50}=\frac{2}{25}$ *p*) $s=8$
*q*) $x=-\frac{1}{2}$ *r*) $b=0$ *s*) $a=1$ *t*) $c=\frac{3}{2}$ *u*) $c=\frac{1}{6}$ *v*) $c=0$ *z*) *indet.* : *qualunque valore di d ne è soluz.*

90) *a*) *indet.* *b*) *semplificabile per* $5^{13}$ : $5^2+b=0,\ b=-25$ *c*) $c=0$ *d*) $y=10000$ *e*) $x=-\frac{9}{32}$
*f*) $x=\frac{1}{10}$ *g*) $x=\frac{10}{9}$ *h*) $1=n+468;\ n=-467$ *i*) $4(s+7)+3=0;\ s=-\frac{31}{4}$ *l*) $x=0$ (*inutile far calcoli*!)
*m*) $q=-\frac{3}{7}$ *n*) $x=13$ *o*) $x=\frac{49}{25}$ *p*) *imposs.* *q*) *equivale a* $65x-4=0;\ x=\frac{4}{65}$

91) $101x+99=0$

92) Uno dei tanti modi di procedere è di dare a *b* un valore a tuo piacimento, poi calcolare $3^2+3b$, infine assegnare a *c* il valore opposto di quello trovato.
Ad esempio, scegliendo $b=5$, è $3^2+5\cdot 3=24$ quindi l'equazione $x^2+5x-24=0$ farà al caso nostro.

93) Un quadrato non può mai assumere valore negativo, per nessun valore della base; aggiungendo dunque 9 a un quadrato, non si può pretendere di poter ottenere 0.

94) a) Sostituendo al posto di *x* il valore 4 si deve ottenere un'uguaglianza vera … $m=-7$
b) $m=8$ c) Impossibile: per nessun valore di *m* questa equazione può avere 0 come soluzione

95) $x=1+\frac{1}{10}x;\quad x=\frac{10}{9}kg\ \left(1\,kg\ e\ \frac{1}{9}\ di\ kg\right)$

96) $a=5$. In tal caso, l'equazione risulta indeterminata, quindi ha infinite soluzioni.
Infatti $a(2x-3)+5=10(x-1)$ equivale a $2ax-3a+5=10x-10$; ora, $2a=10$ quando $a=5$
e con $a=5$ l'equazione diventa $5(2x-3)+5=10(x-1);\ \cancel{10x-15+5=10x-10}$ *indeterminata*

97) a) $k=6$ : $P(x)=x^3+kx^2-4x-3$ è divisibile per $(x-1)$ se $P(1)=0$, ossia $1^3+k\cdot 1^2-4\cdot 1-3=0;\ k=6$
b) $k=2$

98) a) Per qualsiasi valore di *m* b) Per $m=3$

99) Per $a=64$

100) a) Per $y=-2$ b) Per $y=1$ c) Per $y=-5\ (A(y)=2B(y))$ o per $y=-1\ (B(y)=2A(y))$

## 8. UNA RASSEGNA DI PROBLEMI A UNA SOLA INCOGNITA (soluzioni a pag. 169)

1) Se aggiungessi 21 litri di benzina al serbatoio della mia auto, il cui contenuto è attualmente pari a 1/4 della capacità totale, il serbatoio raggiungerebbe i 3/5 della sua capacità.
Dimmi quanti litri al massimo può contenere il serbatoio.

RISOLUZIONE GUIDATA

**1a fase: pongo la *x*)** $x =$ n° litri che può contenere al massimo il mio serbatoio (=sua capacità)

**2a fase: esprimo le quantità in gioco per mezzo di *x*)** contenuto attuale in litri del serbatoio = $\frac{1}{4}x$

♥ *Molto sovente in matematica "di" significa "moltiplicato per"!*
*1/4 DELLA capacità = 1/4 MOLTIPLICATO la capacità*

**3a fase: imposto l'equazione risolvente)** $\frac{1}{4}x + \ldots = \ldots$ da cui si trae $x = 60$.

♥ OSSERVAZIONE
Questo problema, particolarmente semplice, avrebbe potuto anche essere risolto "*per via aritmetica*", cioè senza ricorrere alla *x*. Dal testo si ricava infatti che 21 litri rappresentano una frazione, del serbatoio, uguale a $\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{12-5}{20} = \frac{7}{20}$.

Ma se 21 litri sono i $\frac{7}{20}$ di un serbatoio, il serbatoio intero equivale a litri $\frac{21}{\frac{7}{20}} = 21 \cdot \frac{20}{7} = 60$.

2) Rossana esce di casa con una banconota da 20 euro e spende 7 euro al cinema; avendo poi acquistato 6 biglietti del metro e 4 dell'autobus (un biglietto per l'autobus costa 1 volta e mezza il biglietto per la metropolitana), rimane con 1 euro soltanto, che lascia a un mendicante per strada.
Quanto costa il biglietto della metropolitana?

RISOLUZIONE GUIDATA

1a fase) $x =$ costo di 1 biglietto per il metro

2a fase) costo di 1 biglietto per l'autobus = ... (*per quale frazione devo moltiplicare x se voglio ottenere "una volta e mezza x"?*)

3a fase) Equazione risolvente: $20 - \ldots - \ldots - \ldots = \ldots$
(oppure, è lo stesso: $\ldots + \ldots + \ldots + \ldots = 20$)

3) Mario e Vincenzo hanno in tasca, fra tutti e due, 52 euro. Ciascuno spende per un mega-gelato 4 euro, dopodiché Mario si trova ad avere in tasca esattamente il triplo di Vincenzo.
Quanto possedevano inizialmente i due?

RISOLUZIONE GUIDATA

1a fase) $x =$ n° euro posseduti inizialmente da Mario
2a fase) n° euro posseduti inizialmente da Vincenzo $= 52 - x$
3a fase) Equazione risolvente: $x - \ldots = \ldots \cdot (52 - x - \ldots)$

OSSERVAZIONI

- Evidentemente, si sarebbe potuto anche porre $x =$ n° euro posseduti inizialmente da Vincenzo. La risoluzione sarebbe stata molto simile: hai voglia di effettuarla anche in questo modo?
- Se avessimo posto $x =$ n° euro posseduti *dopo il gelato* da Vincenzo avremmo potuto scrivere, ad esempio:
  n° euro posseduti *dopo il gelato* da Mario $= 3x$
  n° euro posseduti *prima del gelato* da Vincenzo $= x + 4$
  n° euro posseduti *prima del gelato* da Mario $= 3x + 4$
  Equazione risolvente: $x + 4 + 3x + 4 = 52$

♥ D'ALTRONDE CI SAREBBERO, PER IL PROBLEMA DI MARIO E VINCENZO, ANCHE *ALTRE* POSSIBILI VARIANTI DI RISOLUZIONE:
TIENI SEMPRE PRESENTE CHE DI FRONTE A QUASI TUTTI I PROBLEMI POSSIAMO SCEGLIERE DI PROCEDERE IN PIU' MODI DIVERSI !!!

♥ In certi problemi, è possibile "saltare" l'esposizione della seconda fase perché la si "ingloba nella terza fase", vale a dire: dopo aver posto la *x*, se il problema è semplice, in pratica si può scrivere subito l'equazione risolvente.

4) Ho acquistato quattro confezioni di pennarelli; tre uguali fra loro, e la quarta con inchiostro di migliore qualità, ma con 4 pennarelli in meno. Se in totale i pennarelli sono in numero di 68, di quanti pennarelli era composta ciascuna confezione?

5) Pierino riceve la paghetta mensile e ne fa fuori subito metà per un regalo di compleanno a un amico. Successivamente, essendo molto goloso e per via della giornata davvero caldissima, si sbafa ben 4 gelati da euro 2,50 l'uno, e rimane a questo punto con la decima parte della paghetta soltanto. Determina l'ammontare di questa.

6) Paolo nei giorni feriali pranza in una trattoria molto alla buona, ma il sabato e la domenica preferisce concedersi il ristorante, dove un pasto gli costa 4 euro in più rispetto alla trattoria. Qual è il costo di un pranzo in trattoria, se in una settimana Paolo spende in tutto 71 euro?

7) Mi son procurato per una festa coi vecchi compagni di Liceo delle bottiglie di spumante e alcune torte. Sapendo che una torta costa due volte e mezza una bottiglia, e che in totale ho comprato 8 bottiglie e 6 torte, spendendo in tutto 115 euro, dimmi qual è il prezzo di una bottiglia e quale quello di una torta.

8) Se Arianna si è iscritta ad una palestra la cui frequentazione costa 20 euro al mese, più una tassa di iscrizione di 36 euro, e Carolina ha preferito un'altra palestra, per iscriversi alla quale sono necessari 50 euro ma la cui tariffa mensile è di euro 18, stabilisci, tramite un'equazione, dopo quanti mesi si troveranno ad aver speso la medesima cifra.

9) In una serata al pub durante una gita scolastica, vengono consumate 7 gassose, 23 aranciate (un'aranciata costa 50 centesimi più di una gassosa), e 15 birre (una birra costa 1,50 euro più di un'aranciata). Sapendo che la spesa complessiva è di euro 122,50, stabilisci qual è il prezzo di una gassosa.

10) Mumble mumble … Se il gestore del ristorante nel quale sono solito pasteggiare a prezzo fisso dal Lunedì al Venerdì mi concedesse uno sconto di 3 euro a pasto, per la stessa spesa complessiva potrei pranzare anche il Sabato.
… Hurrah! Ha accettato la mia proposta! Tu ora dimmi: quanto mi costa il pasto scontato?

11) Lauretta, proprietaria di un bar, ha acquistato un certo numero di bottiglie di sciroppo di orzata a 3 euro l'una; se ogni bottiglia fosse costata 50 centesimi in meno, ne avrebbe potute comprare per lo stesso prezzo 3 in più. Di quante bottiglie si tratta?

12) "*Tre fratelli, Anselmo, Beniamino e Carmelo, escono la domenica pomeriggio:*
*Anselmo con la metà dei soldi di Beniamino, e Carmelo con 10 euro in meno di Beniamino.*
*In totale i tre hanno in tasca 35 euro. Quanto possiede ciascuno*?"
Le tre compagne di scuola Alice, Brigitta e Cecilia si mettono all'opera per risolvere questo problema e a un certo punto confrontano i loro quaderni.

- Su quello di Alice c'è l'equazione: $x-10+\frac{1}{2}x+x=35$ con la soluzione $x=18$.
- Brigitta ha scritto invece l'equazione $2x+x+2x-10=35$ e risolvendola ha trovato $x=9$.
- Infine il quaderno di Cecilia porta l'equazione $x+x+10+\frac{1}{2}(x+10)=35$ da cui si ricava $x=8$.

Chi delle tre ha fatto giusto?

**♪♪♪ NON HO l'ETA' … ♪♪♪**

13) Fra 11 anni l'età di Mario sarà tripla di quella che egli aveva 9 anni fa. Qual è l'età attuale di Mario?
RISOLUZIONE GUIDATA
1a fase) $x=$ età *attuale* di Mario
2a fase) $x+\ldots=$ *età di Mario fra* 11 *anni*; $x-\ldots=$ *età di Mario* 9 *anni fa*
3a fase) Equazione risolvente: $x+\ldots=\ldots\cdot(x-\ldots)$

14) Oggi un padre ha il triplo dell'età di suo figlio, ma fra 14 anni le età saranno una *doppia* dell'altra. Quanti anni hanno i due ora?

15) Due fratelli hanno rispettivamente 15 e 21 anni, il loro padre 43 anni.
Si chiede fra quanti anni l'età del padre sarà uguale alla somma delle età dei due figli.

16) Anna e Barbara sono sorelle; Anna è nata 3 anni prima. Sapendo che 6 anni fa Anna aveva una volta e mezza l'età di Barbara, sapresti determinare le età attuali delle due?

17) Determina due numeri tali che la loro differenza sia 3 e che la differenza fra i 5/6 del maggiore e i 2/5 del minore sia 48 ( ♥ *tieni sempre presente, quando fai una "differenza", che devi seguire l'ORDINE in cui vengono menzionati i termini. Quindi la differenza fra* A *e* B *è* $A-B$, *NON* $B-A$ ).

18) Trova tre numeri sapendo che:
- il secondo supera di 12 la metà del primo;
- il terzo è il quintuplo della differenza fra il secondo e il primo;
- la media dei tre numeri è 20.

19) In un cortile, nel quale vi sono conigli e galline, si contano in totale 23 teste e 62 zampe.
Quanti sono i conigli e quante le galline?

20) In un'opera scritta fra il V e il VI secolo, nota come l'*Antologia Greca*,
l'autore Metrodoro di Bisanzio riferisce il seguente epigramma, riguardante il matematico Diofanto,
vissuto ad Alessandria d'Egitto in epoca piuttosto incerta, forse nel III secolo dopo Cristo:

*Il Maestro trascorse 1/6 della sua vita nella fanciullezza, 1/12 nell'adolescenza,*
*1/7 da adulto non ancora sposato; dopo 5 anni dal matrimonio ebbe un figlio, che per volontà*
*del Destino visse solo la metà degli anni del padre, morendo, ahimè, 4 anni prima di lui.*

Quanti anni visse Diofanto?

21) Trova due numeri sapendo che è uguale a 51 sia la loro somma che la differenza dei loro quadrati.

22) Due numeri (non interi) hanno come somma 18, come differenza dei quadrati 54. Determinali.

23) Trova tre numeri pari consecutivi, sapendo che la loro somma è 1542.

24) Trova tre numeri pari consecutivi, che diano per somma 3004.

25) Trova due interi positivi sapendo che si tratta di due multipli consecutivi di 7,
e che la differenza dei loro quadrati è 931.

26) Trova quattro numeri naturali consecutivi sapendo che la somma dei quadrati del primo
e del quarto è uguale alla somma dei quadrati degli altri due ( … *uh*, *che strana questa equazione*!)

27) Trova quattro numeri naturali consecutivi sapendo che la somma dei quadrati del primo
e del quarto supera di 4 unità la somma dei quadrati degli altri due ( … *che strana questa equazione*!)

28) Un carico di 111 kg viene suddiviso in tre parti, in modo che la seconda parte sia i ¾ della prima,
e la terza sia i ¾ della seconda. Quanto pesa ciascuna parte?

29) In un nuovissimo gioco a quiz televisivo, il concorrente può anche rimetterci! Si vincono infatti
150 euro per ogni risposta esatta, ma se ne perdono 120 per ogni risposta errata. Se un concorrente
dopo 18 domande ha perso 270 euro, quante risposte giuste e quante sbagliate ha fornito?

30) Con una grossa damigiana di vino potrei riempire, in alternativa, 160 bottiglie oppure 96
bottiglioni (un bottiglione ha una capacità di ½ litro superiore a quella di una bottiglia).
Quanti litri di vino contengono: una bottiglia, un bottiglione, la damigiana?

31) Ho trovato in soffitta 60 vecchie monete, alcune da 50 Lire e altre da 100 Lire,
per un totale di 4400 Lire. Mi sai dire quante di queste monete sono da 50 e quante da 100?

32) Quando nacque suo figlio Giuseppe, il signor Mario aveva 31 anni. Sapendo che fra 10 anni l'età
del signor Mario sarà uguale a 6 volte l'età che aveva Giuseppe 4 anni fa, trovare le età attuali dei due.

33) Per la festa del suo compleanno, Monica acquista meringhe e bignole, per un totale di 4 chili.
Durante la festa, vengono mangiati i 3/8 delle meringhe e i 5/6 delle bignole;
alla fine, il peso totale delle paste avanzate è di 1 kg e 4 etti.
Quanti etti di meringhe e quanti etti di bignole aveva comprato Monica?

34) Sei studenti discutono dei loro voti di Maturità.
I primi 5 hanno preso, rispettivamente: 100, 90, 90, 78, 72.
Che voto ha preso il rimanente, se la media dei loro voti è stata 88?

$$\textit{media aritmetica} = \frac{\textit{somma dei dati}}{\textit{numero dei dati}}$$

35) In una classe ci sono 25 allievi, parte maschi e parte femmine. In una impegnativa verifica scritta, la
media dei voti dei maschi è stata esattamente 6,5 mentre la media dei voti delle ragazze esattamente 7.
Stabilisci il numero esatto dei maschi e delle femmine componenti la classe sapendo che la media
complessiva di tutti i voti è risultata uguale a 6,64.

36) Un gruppo di amici, in "società", dopo tante giocate fallite ha finalmente vinto al Lotto una modesta
cifra. Stabilisci l'ammontare di questa, nonché il numero degli amici, sapendo che
se ogni persona incassasse 40 euro, ne rimarrebbero ancora 10 da spartire, mentre
affinché si potessero dare 45 euro a ciascuno la vincita avrebbe dovuto essere di 20 euro maggiore.

37) Antonio ha 38 anni, sua moglie Chiara 6 in meno; dal loro matrimonio sono nati ben 4 figli,
che hanno oggi 8, 10, 12 e 14 anni rispettivamente. Determina, tramite un'equazione,
fra quanti anni la somma delle età dei figli sarà uguale alla somma delle età dei genitori.

38) Mariuccia ha raccolto 40 steli in un prato di trifogli, salvo poi accorgersi che una parte di questi erano in realtà quadrifogli. Se si contano in totale 127 "lobi" ( = foglioline), quanti sono i quadrifogli?

39) I biglietti per uno spettacolo costano 8 € per gli adulti, ma i minorenni godono di uno sconto del 25%. Se sono stati venduti 240 biglietti e incassati 1720 euro, quanti sono stati gli spettatori minorenni?

40) Maledetto vizio delle carte!
Oggi sono andato al bar con una certa cifra e ho accettato di sedermi al tavolo del poker.
In questo modo ho subito perso la metà di ciò che possedevo, più 50 euro.
Poi mi sono messo a giocare a ramino, e ci ho lasciato i 3/5 di quello che mi restava.
Così sono rimasto - sob! ☹ - con 120 miseri euro, che ora devono bastarmi fino alla fine del mese.
Perché sono così stupido? E quanto possedevo inizialmente?

41) Due sacchi contengono complessivamente 96 kg di cemento. Se 9 kg vengono trasferiti dal più pesante al più leggero, la differenza fra i due pesi diventa di 6 kg. Quanto pesavano inizialmente i due sacchi?

42) Se a ciascuno dei quattro numeri 21, 31, 39, 55 si aggiungesse uno stesso numero $x$, i quattro numeri ottenuti formerebbero, nell'ordine, una proporzione. Quanto vale $x$?

## ♫ INVESTIMENTI E PERCENTUALI

43) Ho investito la somma di 6000 euro suddividendola in due parti A e B;
sulla prima parte ho guadagnato il 3%, mentre sulla seconda ho perso il 2%.
Complessivamente, sono rimasto esattamente con quanto avevo all'inizio!
A quanto ammontavano le due parti A e B?

RISOLUZIONE GUIDATA

1a fase) n° euro parte A = $x$

2a fase) n° euro parte B = ... $-x$

guadagno sulla parte A = $\frac{3}{100}x$ $\left(\textit{il 3\% di una data quantità } q \textit{ è la quantità } \frac{3}{100}q\right)$

perdita (*senza segno* "–") sulla parte B = ...

3a fase) Equazione risolvente: $\frac{3}{100}x =$ ...

44) Un grosso emporio acquista da una fabbrica, in previsione dell'inverno, una partita di 30 stufe, alcune del modello A (più costoso: 1400 euro), altre del modello B (un po' più economico: 1200 euro). Dato l'ammontare cospicuo dell'ordine, la fabbrica accorda uno sconto del 10% sui pezzi che sarebbero costati 1200 euro, e del 15% sui pezzi che sarebbero costati 1400 euro. Sapendo che in totale con questi sconti l'emporio ha risparmiato 4950 euro, stabilisci quante stufe del modello A e quante del modello B sono state acquistate.

45) Sul prezzo di una bella giacca ho ottenuto lo sconto del 15% e l'ho quindi pagata 178,50 euro. Qual era il prezzo iniziale?

46) Ho investito 20000 euro dei miei risparmi in azioni, dividendo la cifra in due "*tranche*", ma, purtroppo, perdendo su ciascuna. Se sulla prima tranche ci ho rimesso il 5%, sulla seconda il 3%, e in totale il mio capitale si è ridotto al valore di 19240 euro, stabilisci come l'avevo ripartito.

47) Se ho suddiviso il mio patrimonio in due parti A e B, investendo ciascuna in due modi diversi, e il mio guadagno è stato del 3% sulla parte A, del 4% sulla parte B, ma sia sulla parte A che sulla parte B ho guadagnato 600 euro, quanti euro possedevo inizialmente?

48) Nel salvadanaio di un bambino ci sono $k$ monetine da 50 centesimi, $k$+1 da 20, $k$+2 da 10, $k$+3 da 5, per un totale di euro 6,50. Quanto vale $k$?

♥ **OSSERVAZIONE**:
qui, se vuoi, puoi benissimo utilizzare nel ruolo di incognita il simbolo $k$ già presente.
**Non è obbligatorio indicare un numero incognito sempre con *x*!**

49) Per quale valore di $m$ i due monomi $a^{31m-1000}$ ; $x^5 y^{27m+2999}$ hanno il medesimo grado?

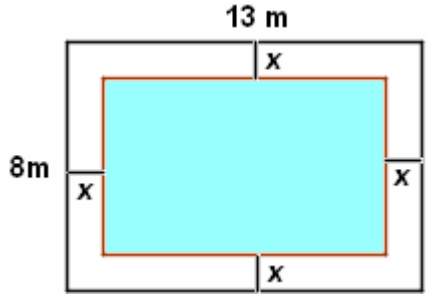
50) *Problema inventato da Christopher Clavius, 1538-1612*:
L'accordo fra un nobiluomo e un domestico prevede un salario annuale di un mantello + 100 franchi.
Passati 7 mesi, però, un inconveniente fa sì che il domestico debba interrompere il lavoro.
Il padrone gli paga a questo punto il servizio prestato col mantello + 20 franchi.
Quanti franchi vale il mantello?

51) Un turista vuole salire in cima ad una lunghissima scalinata che porta a una terrazza panoramica.
Dopo aver percorso i 2/3 dei gradini, si ferma per riposare.
Quindi percorre i 3/4 dei gradini che gli rimangono, e si ferma nuovamente.
A questo punto sale i 4/5 dei gradini ancora restanti e fa un'ultima piccola pausa.
Coraggio! Rimangono solamente 4 gradini! … Di quanti gradini in totale è composta la scalinata?

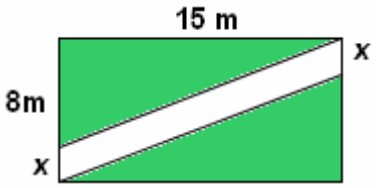
52) Fra gli iscritti a un circolo i 2/3 sono maschi, e fra questi maschi i 3/5 fa uso di alcoolici.
Fra le femmine, invece, solo la quarta parte beve alcoolici.
Se complessivamente 124 persone NON assumono alcoolici, quanti iscritti conta il circolo?

53) Dividere il numero 739 in 5 parti, tali che ciascuna (eccetto la prima)
superi di un'unità il doppio della precedente.

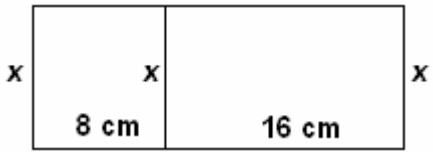
54) Il mese scorso una coppia di giovani sposi, che vive col solo stipendio del marito, ha speso:
400 euro per l'affitto della casa, i 2/5 di quanto restava per il mangiare, e i 5/6 del rimanente
per le altre necessità (luce, acqua, gas, telefono, vestiario, svago).
Miracolosamente sono avanzati ancora 100 euro. A quanto ammonta lo stipendio percepito?



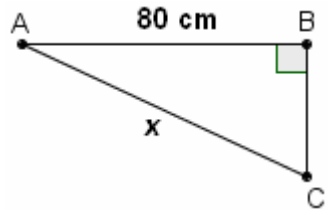

55) Determina *x* sapendo che la lunghezza del contorno della piscina
è uguale ai 2/3 della lunghezza del contorno del terreno
rettangolare, di lati 13 metri e 8 metri,
all'interno del quale la piscina è stata costruita
(*troverai una frazione, o un numero con la virgola*)




56) Le dimensioni del rettangolo di terreno raffigurato
qui a sinistra misurano 15 m e 8 m, e la superficie
occupata dal sentiero è la quarta parte della superficie restante.
Quanto misura *x*?




57) Sapendo che i perimetri
dei due rettangoli piccoli in figura
sono uno i 9/13 dell'altro,
determina l'area del rettangolo grande.




58) Una catenella chiusa è lunga complessivamente cm 180.
Se la si fa passare attorno a due paletti A e B distanti cm 80
e la si tende in modo che l'angolo $A\hat{B}C$ sia di 90°,
quanto misurerà il tratto AC?
(*Per impostare l'equazione risolvente puoi utilizzare il Teorema di …*)

59) In un triangolo ABC l'angolo $\hat{B}$ è il triplo dell'angolo $\hat{A}$, mentre l'angolo $\hat{C}$ supera $\hat{B}$ di 33°.
Determina le misure dei tre angoli. (*Ricorda che in ogni triangolo la somma degli angoli vale 180°*)

60) In un triangolo isoscele il lato obliquo supera la base di 2 m, e il perimetro è di m 58.
Trova lati obliqui e base.

61) Trova i lati di un triangolo isoscele di perimetro 64 cm, nel quale il lato obliquo è i 5/6 della base.

62) Di un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, si sa che $7BC - 3AB = 24$ cm ed è noto il perimetro:
cm 52. Quanto misurano base e lato obliquo?

63) In un rettangolo, il perimetro misura cm 78, mentre la somma fra i 5/6 della base e i 2/3 dell'altezza
è cm 30. Trova le dimensioni del rettangolo.

64) In un rettangolo, l'altezza supera di 2 cm la metà della base, e la metà dell'altezza è uguale alla
terza parte della base. Quanto misura il perimetro?

65) Trova la misura *x* del lato di un quadrato sapendo che, se questa misura venisse aumentata di 3 cm,
l'area del quadrato aumenterebbe di 81 $cm^2$.

*Altri problemi di argomento geometrico si trovano a pagina 219; altri ancora sul Volume 2*

## ♫ MISTURE E CONCENTRAZIONI

66) In 80 kg di soluzione, il sale rappresenta il 4% del peso totale. Quanti kg di acqua distillata devo aggiungere se voglio che il sale venga a costituire solamente il 2,5% del peso totale?

RISOLUZIONE GUIDATA

Osserviamo, per cominciare, che nella soluzione iniziale sono presenti $4/100 \cdot 80 = 3,2$ kg di sale.

Bene, ora io aggiungo $x$ kg di acqua distillata; così il peso totale della soluzione diventa di $80 + x$ kg; se voglio che il sale presente (sempre gli stessi 3,2 kg) rappresenti il 2,5 % del peso totale,

dovrà essere $3,2 = \frac{2,5}{100} \cdot (80 + x)$ da cui $x = \ldots$

67) Un commerciante di vini disonesto ha mischiato una partita di vino ottimo con una di vino scadente, ottenendo una mistura di 120 litri della quale il vino buono rappresenta il 50%. Quanti litri di vino buono dovrebbe aggiungere a questa mistura, se volesse portare la percentuale di vino buono al 70%?

68) Se si ha a disposizione un liquido A contenente il 10% di candeggina e il 90% di acqua e un liquido B contenente il 25% di candeggina e il 75% di acqua, quanti litri di A e quanti di B occorre mischiare se si vogliono ottenere 10 litri di soluzione acquosa al 15% di candeggina? (*Risultati non interi*)

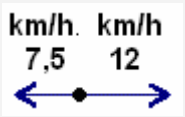
## ♫ VELOCITA'

69) Due veicoli partono dallo stesso punto procedendo in versi opposti, alle velocità di 7,5 e 12 km/h rispettivamente. Dopo quanti minuti la loro distanza sarà di 1200 metri?

RISOLUZIONE GUIDATA

Nel moto uniforme ( = a velocità costante): $\boxed{v = \frac{s}{t}}$ $\left( velocità = \frac{spazio\ percorso}{tempo\ impiegato} \right)$ $\boxed{s = v \cdot t}$ $\boxed{t = \frac{s}{v}}$

Innanzitutto converrà portare tutti i dati in metri e in minuti.

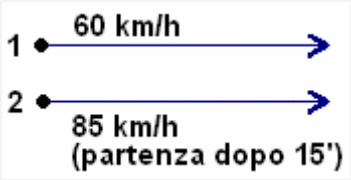



$7,5$ km/h $= 7,5 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{60 \text{ minuti}} = \frac{7500 \text{ m}}{60 \text{ minuti}} = 125$ metri/minuto; 12 km/h $= \ldots$ metri/minuto

Indichiamo con $t$ il numero di minuti che devono passare (meglio qui utilizzare il simbolo $t$, dall'iniziale di "tempo", piuttosto che $x$). Dopo $t$ minuti, i due veicoli avranno percorso rispettivamente $125t$ metri e $\ldots t$ metri. Allora l'equazione risolvente sarà $125t + \ldots t = \ldots$ da cui $t \approx 3,7$ minuti

70) Un treno merci parte da una stazione e marcia alla velocità di 60 km orari.
Un secondo treno parte dalla stessa stazione dopo 15' nella stessa direzione del primo, viaggiando su di un binario parallelo, alla velocità di 85 km orari.
Dopo quanto tempo il secondo treno raggiunge il primo, e a quale distanza dalla stazione di partenza?

RISOLUZIONE GUIDATA




Diciamo che il sorpasso avverrà dopo $t$ ore dalla partenza del 2° treno (quindi, dopo $t + 15/60 = t + 1/4$ ore dalla partenza del 1° treno).
Al momento del sorpasso, il secondo treno avrà viaggiato per $t$ ore, alla sua velocità di 85 km all'ora, e avrà quindi percorso $85t$ km, mentre il primo treno avrà viaggiato per $t + 1/4$ ore, alla sua velocità di 60 km all'ora, e avrà quindi percorso $60(t + 1/4)$ km.
Avremo dunque l'equazione risolvente $85t = 60(t + 1/4)$ da cui $t = \ldots$
Pertanto il sorpasso avviene dopo … di ora ossia … minuti dalla partenza del secondo treno; la distanza dalla stazione di partenza è calcolabile facendo, indifferentemente, … oppure …

71) Due treni partono simultaneamente, marciando su due binari paralleli, il primo da una città A e il secondo, venendo incontro al primo, da una città B.
Le due città distano 120 km, il primo treno procede a 60 km all'ora e il secondo a 100 km all'ora.
Dopo quanto tempo i due treni si incontrano e a quali distanze dalle due città?

72) Due autobus si vengono incontro, partendo simultaneamente da due località distanti 385 km; entrambi viaggiano a velocità costante, ma uno di essi mantiene una velocità di 15 km/h minore rispetto all'altro. Se ci mettono 2 h e 20' ad incrociarsi, quali sono le due velocità?

73) Due autobus partono per una gita scolastica da una stessa località, ma uno di essi, per un imprevisto, si avvia con 20 minuti di ritardo rispetto all'altro.
L'autista dell'autobus partito per primo viaggia alla velocità costante di 70 km/h, mentre il secondo autobus, per recuperare il ritardo, procede a una velocità di 20 km/h più elevata.
Si domanda quanto tempo ci metterà l'autobus partito per secondo, a raggiungere il primo.

## NUMERI INTERI DISGREGATI IN CIFRE

*Per i problemi in questo riquadro occorre tener presente che, se un numero intero si scrive, poniamo, come* $[abc]$*, allora è uguale a* $100a+10b+c$*. Ad esempio,* $348=3\cdot100+4\cdot10+8$.

74) Determina un intero di due cifre, sapendo che quella delle decine supera di 2 quella delle unità, e il numero stesso supera di 3 il sestuplo del valore della somma delle sue cifre.

RISOLUZIONE GUIDATA

*Cifra delle unità* $=x$; *cifra delle decine* $=x+2$; *valore dell'intero* $=10(x+2)+x$

$10(x+2)+x=\ldots$

75) In un intero di due cifre la cifra delle unità è il doppio di quella delle decine. L'intero è uguale alla somma delle sue cifre, aumentata di 27. Di che intero si tratta?

76) Un intero è composto da 3 cifre consecutive crescenti. Determinalo, sapendo che se lo si scrive all'incontrario, il nuovo intero ottenuto supera di 9 unità i 4/3 dell'intero originario.

77) Trova un intero di due cifre sapendo che la cifra delle decine supera di 2 quella delle unità, e che scrivendo il numero al rovescio, il nuovo valore è inferiore di 18 al valore iniziale.

## SEMPRE PIU' DIFFICILE!!!

I problemi che seguono sono più "tosti".
Se sei un duro lotterai a lungo prima di "sbirciare", cliccando sulla freccia, la correzione!!!



In Inglese si usa il termine "CHALLENGE" (letteralmente: "sfida") per indicare un problema o quesito più arduo del solito

78) Una contadina si reca al mercato con il suo paniere di uova.
Un primo cliente le acquista la metà delle uova più mezzo uovo,
un secondo cliente la metà delle uova rimaste più mezzo uovo,
un terzo (e ultimo) cliente la metà delle uova rimaste più mezzo uovo.
Voilà! La contadina ha così venduto tutte le uova con cui era partita!
… Ma quante erano queste uova?

79) ⇨ Per riempire una piscina vengono aperti, contemporaneamente, tre rubinetti.
Il primo rubinetto, se usato da solo, riempirebbe la piscina in 3 ore.
Il secondo, da solo, ce la farebbe in 4 ore. E il terzo, da solo, ci metterebbe 12 ore.
Ma visto che i rubinetti vengono adoperati insieme, in quanto tempo verrà riempita la piscina?
(*Indicazione: domandati quale frazione di piscina riempie, in 1 ora, ciascun rubinetto …*)

80) Un rubinetto A scarica 1 volta e mezza l'acqua scaricata dal rubinetto B nel medesimo tempo.
Se aperti in simultanea, impiegherebbero 36 minuti a riempire la vasca.
E se si utilizzasse solo il rubinetto A, quanto tempo occorrerebbe?

81) ⇨ E' mezzogiorno, e le lancette dell'orologio sono sovrapposte.
Fra quanti minuti torneranno di nuovo a sovrapporsi?

82) ⇨ Il tragitto di una gara sportiva è suddiviso in tre tappe. La prima tappa, uguale alla metà della distanza totale, è stata percorsa dal vincitore in bicicletta, alla velocità di 12 m al secondo. La seconda tappa, uguale a un terzo della distanza totale, è stata percorsa a piedi, alla velocità di 5 metri al secondo. E la tappa rimanente è stata percorsa a nuoto, alla velocità di 1 metro al secondo. Sapendo che il tempo totale impiegato è stato di 1 ora e 50 minuti, si chiede: di quanti chilometri è il tragitto complessivo?

83) ⇨ Quando un termometro in scala Celsius segna 0 gradi Celsius (0° C), un termometro Fahrenheit segna 32 gradi Fahrenheit (32° F); l'acqua bolle a 100° C e a 212° F.

| C | F |
|---|---|
| 0 | 32 |
| 100 | 212 |

a) Trova la formula che lega la temperatura F su di un termometro Fahrenheit alla stessa temperatura C misurata da un termometro Celsius: F = ... [*espressione contenente* C]

b) Rispondi ora a questa domanda: esiste una temperatura che è indicata con lo stesso numero tanto su di un termometro Celsius che su di un termometro Fahrenheit?

## ALTRI PROBLEMI DI RISERVA, TUTTI CON CORREZIONE

(le soluzioni sono a pagina 169, le correzioni a pagina 166-167)

84) Piero è un risparmiatore. A Gennaio mette da parte una certa somma; a partire da Febbraio, ogni mese riesce a risparmiare 50 euro in più rispetto al mese precedente. Se alla fine di Aprile i suoi risparmi dell'anno in corso ammontano a 2100 euro, quanto ha messo da parte ogni mese?

85) Il commerciante Paolo esce di casa con 200 euro, incassa alla fiera una certa somma di denaro, poi però ☹ deve pagare una multa per la sosta del suo furgone in area vietata, perdendo così il 10% di quanto aveva nel portafogli. Rincasa quindi con 585 euro. Quanto aveva incassato alla fiera?

86) Carlo ha 10 anni più di suo fratello Dario, e fra 6 anni le due età saranno una il doppio dell'altra. Quanti anni ha Carlo attualmente?

87) Trova due interi sapendo che si tratta di due multipli consecutivi di 5 e che la differenza dei loro quadrati è 975.

88) Trova due numeri sapendo che è uguale a 21 sia la loro differenza, che la differenza dei loro quadrati (*psst ... in confidenza ... non è che debbano per forza essere entrambi positivi*!)

89) Anna ha 5 anni in meno rispetto a suo fratello Bruno.
3 anni fa Anna aveva esattamente i 4/5 dell'età che aveva Bruno. Qual è l´età attuale dei due?

90) Una ditta vende due tipi di computer, uno più costoso, da 1000 euro, e uno più economico, il cui prezzo, rispetto all'altro, è il 25% in meno.
Dopo la vendita di 22 macchine in totale, l'incasso complessivo è stato di euro 20000.
Quanti computer di ciascun tipo sono stati venduti?

91) Trova due numeri sapendo che hanno per somma 50, mentre la differenza dei loro quadrati è 100.

92) Pierino è goloso dei grossi gelati di un certo banchetto, e pensa che se la sua paghetta settimanale fosse di 1 euro in più, riuscirebbe con essa a pagarsi 6 bei gelati. Ma alla fine Pierino, giudiziosamente, ricevuta la paghetta compra 2 gelati soltanto, compra anche una cassata, da mangiare in famiglia, che costa 4 euro in più rispetto al gelato, e avanza 5 euro e 50 centesimi.
A quanti euro ammonta la paghetta? E quanto costa un gelato?

93) Tre amici posseggono in totale 400 euro, ma questi non sono suddivisi equamente.
Mentre infatti Bruno risulta avere il triplo di Aldo, più ancora 32 euro, Carlo se avesse 6 euro in più avrebbe il doppio di Bruno. Quanto possiede ciascuno?

94) Un tragitto di 480 km viene suddiviso in 3 tappe, tali che ciascuna (a parte, ovviamente, la prima) è inferiore di 20 km al doppio della precedente. Quanti km misura ciascuna tappa?

95) La differenza fra i perimetri di due quadrati è di 16 cm, mentre la differenza delle aree è di 104 $cm^2$.
Quanto misura il lato di ciascun quadrato?

96) Se ho in tasca 36 monete, parte da 20 centesimi, le rimanenti da 50 centesimi, e il totale equivale a 12 euro, quante sono le monete da 20 centesimi e quante quelle da 50 centesimi?

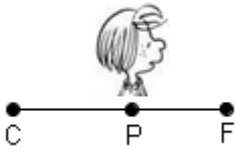
97) Pierino, guardando la vetrina del pasticcere, riflette:
vorrebbe comprare 8 piccole torte, ma gli manca 1 euro; se invece comprasse 6 crostate, avanzerebbe 1 euro. Sapendo che una torta costa 1 € in meno di una crostata, dimmi quanti euro ha in tasca Pierino.

98) Trova un intero di due cifre sapendo che la somma delle sue cifre è 9, e che se lo si scrive al rovescio il nuovo numero ottenuto supera di 45 quello iniziale.

99) La differenza fra i tempi, nel percorrere una determinata distanza ai 40 km/h oppure ai 45 km/h, è di 10 minuti. Qual è la distanza in questione?

100) Ho aggiunto 5 litri di acqua a una soluzione di 10 litri contenente una certa percentuale di acido cloridrico, ottenendo una diminuizione della concentrazione di questo, che si è ora ridotta all'1%. Sapresti risalire alla concentrazione originaria?

101) Carlo vuol andare a fare i compiti dalla compagna Patty, passando però prima dal Fornaio, distante da casa di Carlo 700 metri, per comprare due croissant da mangiare a merenda. In questo modo, farà due volte e mezza la strada che avrebbe fatto andando direttamente da Patty per la via più breve.
Quanto distano la casa di Carlo e quella di Patty?




102) Un tale ha cambiato una corona in monete da 1/10 di corona e da 1/20 di corona; in totale, le monete che ha ricevuto sono state 17. Quante monete di ciascun tipo? (*da "Elementi di Algebra" di Euléro*)

**RISOLUZIONI**

84)
$x = n°\ euro\ risparmiati\ a\ Gennaio$
$x+50 = n°\ euro\ risparmiati\ a\ Febbraio$
$x+100 = n°\ euro\ risparmiati\ a\ Marzo$
$x+150 = n°\ euro\ risparmiati\ ad\ Aprile$
$x+(x+50)+(x+100)+(x+150) = 2100$
$4x+300 = 2100$
$4x = 1800$
$\boxed{x = 450}$
*I risparmi perciò sono stati*:
*in Gennaio*, 450 *euro*; *in Febbraio*, 500 *euro*;
*in Marzo*, 550 *euro*; *in Aprile*, 600 *euro*.

85)
$x = n°\ euro\ incassati\ alla\ fiera$
$n°\ euro\ multa = \frac{10}{100}(200+x) = \frac{1}{10}(200+x)$
$200+x-\frac{1}{10}(200+x) = 585$
$\left(oppure\ direttamente: \frac{90}{100}(200+x) = 585\right)$
$200+x-20-\frac{1}{10}x = 585$
$2000+10x-200-x = 5850;\quad 9x = 4050$
$\boxed{x = \frac{4050}{9} = 450}$

86)
$età\ attuale\ Carlo = x$
$età\ attuale\ fratello\ Dario = x-10$
$età\ Carlo\ fra\ 6\ anni = x+6$
$età\ fratello\ Dario\ fra\ 6\ anni = x-10+6 = x-4$
$x+6 = 2(x-4);\quad x+6 = 2x-8;\quad -x = -14;$
$x = 14$
$\boxed{Carlo\ ha\ attualmente\ 14\ anni}$,
*suo fratello Dario* 4

87)
$x,\ x+5$
$(x+5)^2 - x^2 = 975$
$\cancel{x^2} + 10x + 25 \cancel{-x^2} = 975$
$10x = 950$
$x = 95$
*I due numeri sono* $\boxed{95}$ *e* $\boxed{100}$

88)
$x,\ x+21$
$(x+21)^2 - x^2 = 21;$
$\cancel{x^2} + 42x + 441 \cancel{-x^2} = 21;$
$42x = -420;$
$\boxed{x = -10};\ \boxed{x+21 = 11}$

89)
$età\ attuale\ Anna = x$
$età\ attuale\ Bruno = x+5$
$età\ Anna\ 3\ anni\ fa = x-3$
$età\ Bruno\ 3\ anni\ fa = x+5-3 = x+2$
$x-3 = \frac{4}{5}(x+2);\quad x-3 = \frac{4}{5}x+\frac{8}{5};\quad 5x-15 = 4x+8;$
$x = 23$
$\boxed{Anna\ ha\ attualmente\ 23\ anni,\ Bruno\ 28}$

90)
$costo\ computer\ più\ caro = 1000\ euro$
$costo\ computer\ più\ economico = \frac{75}{100}\cdot 1000\ euro = 750\ euro$
$n°\ computer\ da\ 1000\ euro\ venduti = x;\quad n°\ computer\ da\ 750\ euro\ venduti = 22-x$
$1000\cdot x + 750\cdot(22-x) = 20000;\quad 1000x+16500-750x = 20000;\quad 250x = 3500;\quad x = 14$
*Sono stati venduti* $\boxed{14}$ *computer del tipo più costoso*, $\boxed{8}$ *del tipo più economico.*

91)
*numero minore* $= x$
*numero maggiore* $= 50-x$
$(50-x)^2 - x^2 = 100$
$2500 - 100x \cancel{+x^2} \cancel{-x^2} = 100$
$-100x = -2400$
$x = 24$
$\boxed{I\ due\ numeri\ sono\ 24\ e\ 50-24 = 26}$

92)
*Costo in euro di un gelato* $= x$
*Costo in euro di una cassata* $= x+4$
$Ammontare\ in\ euro\ paghetta = \begin{cases} 6x-1 \\ 2x+x+4+5,5 \end{cases}$
$6x-1 = 2x+x+4+5,5$
$3x = 10,5$
$x = 3,5$
*Un gelato costa* $\boxed{3,5}$ *euro*,
*e la paghetta di Pierino ammonta a euro* $6\cdot 3,5-1 = \boxed{20}$

93)

$a = x;\ \ b = 3x + 32$

$c = 2(3x + 32) - 6 = 6x + 64 - 6 = 6x + 58$

$x + (3x + 32) + (6x + 58) = 400$

$10x + 90 = 400;\ \ 10x = 310$

$x = 31$

$a = \boxed{31},\ \ b = 3 \cdot 31 + 32 = 93 + 32 = \boxed{125},$

$c = 2 \cdot 125 - 6 = 250 - 6 = \boxed{244}$

95)

*lato* 1° *quadrato, il più piccolo* (*misura in cm*) $= x$

*lato* 2° *quadrato, il più grande* (*misura in cm*) $= x + 4$

(*se passando dal* 1° *al* 2° *il perimetro aumenta di* 16, *vuol dire che ciascun lato aumenta di* 4!)

$(x + 4)^2 - x^2 = 104$

$\cancel{x^2} + 8x + 16 \cancel{- x^2} = 104;\quad 8x = 88;\quad x = 11$

*Il lato del quadrato più piccolo misura* $\boxed{11\ cm}$,

*quello del più grande misura* $\boxed{15\ cm}$

97)

$x =$ *costo in euro di una crostata*

*costo in euro di una torta* $= x - 1$

$$n°\ euro\ posseduti\ da\ Pierino = \begin{cases} 8(x-1)-1 \\ 6x+1 \end{cases}$$

$8(x - 1) - 1 = 6x + 1$

$8x - 8 - 1 = 6x + 1;\ \ 2x = 10;\ \ x = 5$

*costo in euro di una crostata* $= 5$

*costo in euro di una torta* $= 4$

*n° euro posseduti da Pierino* $= 8 \cdot 4 - 1 = 32 - 1 = \boxed{31}$

*o anche* $6 \cdot 5 + 1 = \boxed{31}$

99)

$v = \dfrac{s}{t} \rightarrow t = \dfrac{s}{v}$

Detta ora $s$ la distanza richiesta,
avremo, ragionando in km, ore e km/h,

$\dfrac{s}{40} - \dfrac{s}{45} = \dfrac{1}{6} \quad \left(10'\ sono\ \dfrac{1}{6}\ di\ ora\right)$

$\dfrac{9s - 8s}{\cancel{360}} = \dfrac{60}{\cancel{360}};\ \ s = 60$

*La distanza in questione è di* $\boxed{60\ km}$

94)

*lunghezza in km* $1^a$ *tappa* $= x$

*lunghezza in km* $2^a$ *tappa* $= 2x - 20$

*lunghezza in km* $3^a$ *tappa* $= 2(2x - 20) - 20 =$
$= 4x - 40 - 20 = 4x - 60$

$x + (2x - 20) + (4x - 60) = 480 \quad x = 80$

*La* $1^a$ *tappa misura* $\boxed{80\,km}$,

*la* $2^a$ *misura* $2 \cdot 80 - 20 = 160 - 20 = \boxed{140\ km}$,

*la* $3^a$ *misura* $2 \cdot 140 - 20 = 280 - 20 = \boxed{260\ km}$

96)

$x = n°$ *monete da* 20 *centesimi*

$36 - x = n°$ *monete da* 50 *centesimi*

$20 \cdot x + 50 \cdot (36 - x) = 1200$

$20x + 1800 - 50x = 1200$

$-30x = -600;\quad x = 20$

*n° monete da* 20 *centesimi* $= \boxed{20}$

*n° monete da* 50 *centesimi* $= 36 - 20 = \boxed{16}$

98)

*Cifra delle unità numero originario* $= x$

*Cifra delle decine numero originario* $= 9 - x$

*Numero originario* $= 10(9 - x) + x$

*Cifra delle unità numero rovesciato* $= 9 - x$

*Cifra delle decine numero rovesciato* $= x$

*Numero rovesciato* $= 10x + (9 - x)$

$10x + (9 - x) = 10(9 - x) + x + 45$

... $x = 7$. *Il numero richiesto è dunque il* $\boxed{27}$

100)

Detto $x$ il peso dell'acido cloridrico nella soluzione originaria, prima dell'aggiunta dei 5 litri d'acqua, avremo:

$x = \dfrac{1}{100}(10 + 5);\ \ x = \dfrac{15}{100}$

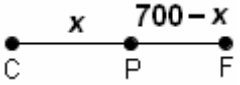
Perciò la soluzione originaria conteneva 15/100 di litro di acido cloridrico, e poiché tale soluzione era di 10 litri, in essa la percentuale di acido era data da

$\dfrac{\frac{15}{100}}{10} \cdot 100 = \boxed{1{,}5\ \%}$

Qui in fondo il valore cercato è stato determinato più con calcoli diretti che con una equazione …

101)

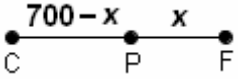
Così:




$x + 2(700 - x) = 2{,}5x$

da cui $x = \boxed{400}$

… oppure così:




$700 - x + 2x = 2{,}5(700 - x)$

da cui $x = 300 \rightarrow \overline{CP} = \boxed{400}$

102)

$x = n°$ *monete da* $1/10$ *di corona*

$17 - x = n°$ *monete da* $1/20$ *di corona*

$x \cdot \dfrac{1}{10} + (17 - x) \cdot \dfrac{1}{20} = 1 \quad x = 3$

$\boxed{3\ monete\ da\ 1/10\ e\ 14\ da\ 1/20}$

**ESEMPI DI PROBLEMINI IN LINGUA INGLESE, TROVATI SU INTERNET**

(basta digitare, su di un motore di ricerca, le parole chiave **equation** + **word** + **problem**
*word problems = problemi espressi a parole*)

Terminologia matematica inglese, da www.mathleague.com (The Math League)

| Word | Operation | Example | As an equation |
|---|---|---|---|
| sum | addition | The sum of my age and 10 equals 27 | $y+10=27$ |
| difference | subtraction | The difference between my age and my younger sister's age, who is 11 years old, is 5 | $y-11=5$ |
| product | multiplication | The product of my age and 14 is 168 | $y\cdot 14=168$ |
| times | multiplication | Three times my age is 60 | $3\cdot y=60$ |
| less than | subtraction | Seven less than my age equals 32 | $y-7=32$ |
| more than | addition | Eleven more than my age equals 43 | $y+11=43$ |

NOTA + e − in quanto *operazioni* si leggono "*plus*" (pron. *plàs*) e "*minus*" (pron. *mainəs*) ma in quanto *segni di numeri relativi* vanno invece letti come "*positive*" e "*negative*". Es. −7 "*negative seven*". La moltiplicazione si legge "*times*" (es. 5 × 4 "*five times four*"), più raramente "*multiplied by*".

Da www.themathpage.com (Lawrence Spector):

103) A class of 50 students is divided into two groups; one group has eight less than the other; how many are in each group?

104) Julie has $50, which is eight dollars more than twice what John has. How much has John?

105) Divide $80 among three people so that the second will have twice as much as the first, and the third will have $5 less than the second.

106) There are *b* boys in the class. This is 3 more than 4 times the number of girls. How many girls are there?

107) A woman is now 30 years older than her son. 15 years ago, she was twice as old. What are the present ages of the woman and her son?

108) A total of 925 tickets were sold for $5,925 (*cinquemilanovecentoventicinque*). If adult tickets cost $7.50, and children's tickets cost $3.00, how many tickets of each kind were sold?
( ♥ **Qui, ALL'ANGLOSASSONE, LA VIRGOLA FA DA SEPARATORE PER LE MIGLIAIA, IL PUNTO PER LA PARTE DECIMALE**)

Da www.stfx.ca/special/mathproblems/grade9.html (The Canadian School Math Page):

109) Flora had an average of 56% on her first 7 exams. What would she have to make on her eighth exam to obtain an average of 60% on 8 exams?

110) A classroom contained an equal number of boys and girls. Eight girls left to play hockey, leaving twice as many boys as girls in the classroom. What was the original number of students present?

Dal sito www.algebralab.org:

111) If 4 is subtracted from twice a number, the result is 10 less than the number. Find the number.

112) Karin's mom runs a dairy farm. Last year Betty the cow gave 375 gallons less than twice the amount from Bessie the cow. Together, Betty and Bessie produced 1464 gallons of milk. How many gallons did each cow give?

113) Twice a number is added to the number and the answer is 90. Find the number.

114) Jose has a board that is 44 inches long. He wishes to cut it into two pieces so that one piece will be 6 inches longer than the other. How long should the shorter piece be?

115) Paula received a paycheck of $585. This amount reflects her weekly earnings less 10% of her earnings for deductions. How much was she paid before deductions were taken out?

Dal sito www.analyzemath.com (Abdelkader Dendane)

116) At 9 am a car (A) began a journey from a point, traveling at 40 mph (*miles per hour, miglia per ora*). At 10 am another car (B) started traveling from the same point at 60 mph in the same direction as car A. At what time will car B pass car A? (*am=antimeridiane, pm=pomeridiane, dopo mezzogiorno*)

## SOLUZIONI DEI PROBLEMI

1) $\frac{1}{4}x+21=\frac{3}{5}x$; capacità = 60 litri 2) $20-7-6x-4\cdot\frac{3}{2}x=1$ opp. $1+4\cdot\frac{3}{2}x+6x+7=20$; biglietto metro = 1 euro
3) $x-4=3\cdot(52-x-4)$; Mario possedeva inizialmente 37 euro e Vincenzo 15 4) 18, 18, 18, 14 pennarelli
5) 25 euro 6) Costo pranzo in trattoria = 9 euro 7) Una bottiglia costa 5 euro, una torta 12,50 euro 8) 7 mesi
9) 1 euro e 80 10) costo pasto scontato = 15 euro 11) 15 bottiglie di orzata 12) Tutte! La $x$ non è la stessa …
13) $x+11=$ età di Mario fra 11 anni; $x-9=$ età di Mario 9 anni fa ; $x+11=3\cdot(x-9)$ ; Mario ora ha 19 anni
14) 42 anni e 14 anni 15) Fra 7 anni 16) Anna ha 15 anni, Barbara 12 17) 105, 108 18) 12, 18, 30
19) 8 conigli, 15 galline 20) Diofanto visse 84 anni 21) 25, 26 22) 15/2, 21/2 23) 512, 514, 516
24) Problema impossibile 25) 63, 70
26) Problema impossibile: nessuna quaterna di interi consecutivi può avere questa proprietà
27) Problema indeterminato: qualsiasi quaterna di interi consecutivi gode di questa proprietà
28) 48 kg, 36 kg, 27 kg 29) 7 risposte giuste e 11 sbagliate
30) Le capacità sono: bottiglia, 3/4 di litro; bottiglione, 5/4 di litro (1 litro e ¼); damigiana, 120 litri
31) 32 monete da 50 lire e 28 da 100 lire 32) 13 anni e 44 anni 33) 16 etti di meringhe e 24 di bignole
34) Ha preso 98 35) 18 maschi, 7 femmine 36) La vincita è stata di 250 euro, e gli amici sono 6
37) Fra 13 anni 38) I quadrifogli sono 7 39) 100 spettatori minorenni 40) Ero andato al bar con 700 euro
41) Il testo del problema è ambiguo, perché non chiarisce se dopo il trasferimento il sacco che era inizialmente più pesante resta ancora il più pesante, oppure diventa il più leggero.
Nel primo caso i due pesi iniziali sono 60 kg e 36 kg, nel secondo caso 54 kg e 42 kg
42) $x=9$ 43) n° euro parte A $=x$, n° euro parte B $=6000-x$,
guadagno su A $=\frac{3}{100}x$, perdita su B $=\frac{2}{100}(6000-x)$; eq. ris.: $\frac{3}{100}x=\frac{2}{100}(6000-x)$;
A = 2400 euro, B = 3600 euro
44) 15 di ciascun modello 45) Il prezzo iniziale della giacca era di 210 euro 46) 8000 e 12000 euro
47) 35000. $3/100\text{A}=600$ da cui A=… e analogamente per B 48) $k=7$ 49) $m=1001$ 50) Vale 92 franchi
51) 240 gradini 52) Gli iscritti al circolo sono 240 53) 23, 47, 95, 191, 383 54) 1400 euro
55) metri $7/4=1{,}75$ 56) m 1,6 57) 240 cm$^2$ 58) Pitagora: $80^2+(...)^2=x^2$; AC = 82 cm
59) 21°, 63°, 96° 60) Base = 18 m, lato obliquo = 20 m 61) Base = 24 cm, lato obliquo = 20 cm
62) Base = 12 cm, lato obliquo = 20 cm 63) Base = 24 cm, altezza = 15 cm
64) Base = 12 cm, altezza = 8 cm, perimetro = 40 cm 65) $(x+3)^2=x^2+81$; $x=12$ cm
66) $x=48$ : devo aggiungere 48 kg di acqua distillata 67) Dovrebbe aggiungere 80 litri di vino buono
68) 6 litri e 2/3 di litro di A, 3 litri e 1/3 di litro di B
69) 7,5 km/h $=7{,}5\cdot\frac{1000\text{ m}}{60\text{ minuti}}=\frac{7500\text{ m}}{60\text{ minuti}}=125$ metri/minuto; 12 km/h = 200 metri/minuto
Dopo $t$ minuti, i due veicoli avranno percorso rispettivamente $125t$ metri e $200t$ metri.
Allora l'equazione risolvente sarà $125t+200t=1200$ da cui $t\approx 3{,}7$ minuti
70) $t=3/5$; pertanto il sorpasso avviene dopo 3/5 di ora ossia 36 minuti dalla partenza del 2° treno;
la distanza in km dalla stazione di partenza è calcolabile facendo, indifferentemente,
$85\cdot 3/5$ oppure $60\cdot(3/5+1/4)$. Perciò il 2° treno, quello che parte dopo ed è più veloce,
raggiunge il più lento dopo aver viaggiato per 36 minuti, e a 51 km dalla stazione di partenza.
NOTA: Si poteva anche ragionare più "alla buona" dicendo che, visto che le velocità sono rispettivamente di 85 e di 60 km/h, nel suo "inseguimento" il secondo treno recupera ogni ora 25 km sull'altro;
siccome i km di distacco da recuperare sono 15 (nei 15 minuti = 1/4 di ora in cui ha viaggiato da solo,
il primo treno ha percorso $60\cdot 1/4=15$ km), basterà fare $15:25=3/5$ di ora.
71) Dopo ¾ d'ora, a 45 km dalla città A e a 75 km da B 72) 90 e 75 km/h (2 h 20'= h 7/3) 73) 1 h 10'
74) *valore dell'intero* $=10(x+2)+x$; $10(x+2)+x=6(x+2+x)+3$. L'intero è 75 75) 36 76) 567
77) L'equazione risolvente è indeterminata. Sono soluzioni del problema tutti i numeri di due cifre, nei quali la cifra delle decine supera di 2 quella delle unità, ossia: 97, 86, 75, 64, 53, 42, 31, 20.
78) Le uova erano 7 79) $t\cdot(1/3+1/4+1/12)=1$; 1 ora e ½ 80) 1 ora
81) Fra 720/11 di minuto, ossia 1 ora + 60/11 di minuto, oppure 1 h, 5 minuti e 5/11 di minuto.
82) 24 km 83) a) $\text{F}=\frac{180}{100}\text{C}+32$ b) $-40°\text{C}=-40°\text{F}$ 84) 450 euro, ecc. 85) 450 euro 86) 14 anni
87) 95 e 100 88) −10 e 11 89) Anna : 23 anni; Bruno : 28 90) 14 (tipo più costoso) e 8 91) 24 e 26
92) Paghetta: 20 euro; gelato: 3,50 93) 31, 125, 244 euro 94) 80, 140, 260 km 95) 11 e 15 cm
96) 20 da 20, 16 da 50 97) 31 euro 98) 27 99) 60 km 100) 1,5 % 101) 400 m 102) 3 e 14 103) 29, 21
104) $21 105) 17, 34, 29 106) $\frac{b-3}{4}$ 107) 75, 45 108) 700, 225 109) 88% 110) 32 111) −6 ("negative six")
112) 851, 613 gallons 113) 30 114) 19 inches 115) $650 116) Car B passes car A at 12 am

## 9. QUESITI TRATTI DA GARE MATEMATICHE (risposte in fondo alla pagina)

[*Inutile osservare che in una gara matematica una risposta si può A VOLTE dare più rapidamente se si procede per tentativi, o per esclusione, o con ragionamenti vari, anziché tramite un'equazione*!]

115) The Calgary Mathematical Association - Junior High School Mathematics Contest 2005

Il punteggio di Semra in una prova matematica fu registrato in modo errato dall'insegnante. Il vero punteggio era esattamente 4 volte quello segnato. Quando la prof. corresse l'errore, il punteggio medio della classe, composta da 24 studenti Semra inclusa, si alzò di 2 punti. Quale era stato il punteggio reale di Semra?

116) PRISM: Problem Solving for Irish Second level Mathematicians, 2007

Un giocatore si reca al Casinò e raddoppia il suo denaro. Se ne va, pagando 8 € per il parcheggio. Cambia Casinò, raddoppia nuovamente il suo denaro ed esce, pagando altri 8 € per il parcheggio e … restando a questo punto senza il becco di un euro. Con quanti soldi era entrato nel primo Casinò?

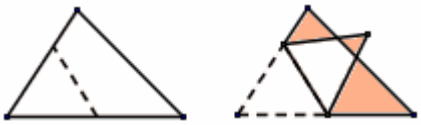
117) University of New Brunswick and Université de Moncton - Junior High School Math. Comp. 1992

Un emporio vende succo di frutta in bottiglie piccole e grandi; una bottiglia grande costa il triplo di una piccola. Jack ha comprato 10 bottiglie piccole e 6 grandi; spendendo la stessa cifra, Lise ha acquistato 24 bottiglie. Quante di queste erano piccole?

a) 16 b) 18 c) 20 d) 22 e) Le informazioni non sono sufficienti per rispondere

118) Kangourou 2010

Un triangolo (figura di sinistra) viene ripiegato lungo la linea tratteggiata, a formare una figura con sette lati, la cui area è i 2/3 di quella del triangolo di partenza. Quanto vale l'area di questo, se la regione scura ha area 1?



119) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round 1997

E' stato richiesto a Tanya di aggiungere 14 a un certo numero e di dividere poi il risultato per 4. Tanya invece si è confusa e ha prima aggiunto 4, poi diviso per 14. Se così facendo ha ottenuto alla fine 5, quale sarebbe stato il risultato corretto? a) 5 b) 20 c) 25 d) 66 e) 70

120) UK Junior Mathematical Olympiad 2011

Alcuni fogli rettangolari di carta sono disposti uno sull'altro. La pila è poi ripiegata a metà a formare un libretto, di cui vengono numerate le pagine: 1, 2, 3, … dalla prima fino all'ultima. Ora, la somma dei 4 numeri su di uno stesso foglio dà 58. Quanti fogli sono stati utilizzati?

Dal sito **www.regentsprep.org**

Remember when solving equations
to "**KEEP THE EQUATION BALANCED**"
by making the **SAME CHANGES**
to **BOTH SIDES** of the equal sign.




Example. Solve this equation for $x$: $\mathbf{5x-2=13}$

First, undo the subtraction by adding 2.
Then, undo the multiplication by dividing by 5.

(Remember to perform your changes to both sides of the equation to "keep the equation balanced")

$$\mathbf{5x-2=13}$$
$$\mathbf{+2\quad +2}$$
$$\mathbf{5x=15}$$
$$\mathbf{\frac{5x}{5}=\frac{15}{5}}$$
$$\mathbf{x=3}$$

**CHECK YOUR ANSWER!**
You will always know if your answer is correct by doing a simple "check":
**SUBSTITUTE** your answer into the original equation and see if the result is true.

**Check:**
$$\mathbf{5\cdot 3-2=13}$$
$$\mathbf{15-2=13}$$
$$\mathbf{13=13}$$
**true**

**RISPOSTE** 115) 64 116) 6 € 117) d (possono sembrare necessarie due incognite, ma in realtà …)
118) 3 119) b 120) $(1, 2, 4n, 4n-1)$; $(3, 4, 4n-2, 4n-3)$; ... $8n+2=58 \rightarrow n=7$

## 10. DUE RIGHE DI STORIA (GRAZIE a Nadir Murru dell'Università di Torino!)

I primi a utilizzare, sostanzialmente, equazioni di 1° grado nella risoluzione di problemi furono i **Babilonesi**, intorno al 2000 a.C.
Le questioni esaminate venivano esposte e risolte tramite il linguaggio, senza notazioni e formule specifiche. Per indicare le incognite si usavano termini come *us* (lunghezza), *sag* (larghezza) e *asa* (area), dal momento che i quesiti inizialmente affrontati riguardavano la suddivisione e determinazione di terreni.

Per quanto attiene all'**Antico Egitto**, la più antica testimonianza nel campo delle equazioni risale al famoso **Papiro di Rhind** oggi conservato presso il British Museum. Esso è anche detto Papiro di Ahmes dal nome di uno scriba che verso il 1650 a.C. vi trascrisse un documento preesistente, redatto tra il 2000 e il 1800 a.C.
Si tratta di una raccolta di problemi e di loro risoluzioni attraverso equazioni di primo grado; in esso l'incognita dell'equazione viene chiamata *aha*, cioè *mucchio*.

Ecco un esempio tra i tanti problemi raccolti nel papiro:
"determinare il valore di *aha* se la somma di *aha* col suo quarto dà come risultato 15"

Tale problema è equivalente all'equazione di primo grado $x+\frac{1}{4}x=15$, da cui $x=...$

… A te la facile risposta, lettore! ☺

Il 24esimo, che porta all'equazione che noi scriveremmo come $x+\frac{1}{7}x=19$,

viene affrontato dal solutore col cosiddetto "**metodo di falsa posizione**".

Egli assegna al "mucchio" (noi diremmo: alla $x$) un valore a caso, scegliendo nella fattispecie il 7,

e calcola il corrispondente valore di $x+\frac{1}{7}x$ ottenendo come risultato 8.

Successivamente, confronta l'8 col 19, trovando la relazione $8\cdot\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=19$.

E a questo punto conclude:

il "mucchio" si otterrà moltiplicando il 7 per la quantità $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$.

La risoluzione di un'equazione di primo grado è molto elementare. Però per rintracciare uno scritto che indaghi il soggetto in modo esauriente dobbiamo attendere l'*Arithmetica* di **Diofanto** (250 d. C.), il primo trattato esclusivamente dedicato alla teoria dei numeri, nel quale l'autore si applica principalmente allo studio di equazioni a una o più incognite, di cui ricerca le soluzioni intere e razionali.
Tali equazioni sono chiamate Diofantee o Diofantine e la più semplice è appunto quella del tipo $ax=b$, con $a, b$ numeri interi.

Se misurarsi con un'equazione di primo grado è agevole, ben più complicata si presenta l'impostazione di *problemi* attraverso equazioni.
In questo caso occorrono infatti un certo ingegno e una certa abilità per interpretare correttamente il quesito, intuendo quale sia la quantità che conviene porre come incognita e utilizzando in modo corretto i dati.

Lo stesso Diofanto volle che sulla sua tomba venisse scritto il seguente epitaffio, dalla lettura del quale è possibile risalire (attraverso un'equazione!) all'età fino a cui visse il Maestro:
"Dio gli concesse di rimanere fanciullo per un sesto della sua vita, e trascorso un altro dodicesimo, gli coprì le guance di peluria; dopo un altro settimo Egli gli accese la fiaccola del matrimonio, e cinque anni dopo il matrimonio gli concesse un figlio. Purtroppo questo bambino nato dopo tanto tempo fu sfortunato: raggiunta la metà della vita di suo padre, fu portato via da un destino crudele. Dopo aver consolato il suo dolore con la scienza dei numeri per quattro anni, pervenne al termine della propria esistenza".

Le equazioni di primo grado, seppur legate a problemi di quotidiano interesse, per la loro semplicità non offrono un gran divertimento alle menti dei matematici sempre protese a sfide che le impegnino adeguatamente.
Però è a partire da questi primi mattoncini che è possibile volgere lo sguardo a orizzonti più lontani!
Da qui infatti le basi dell'Algebra, punto di partenza verso studi superiori, come per esempio quello delle equazioni di 2° grado … o ancora più avanti di terzo o di quarto … per non parlare del "terribile" grado quinto.
La comprensione del motivo per cui la risoluzione della generica equazione di quinto grado $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$ risultava così tremendamente ostica è dovuta a due giovani geniali: il norvegese Niels Henrik **Abel** (1802-1829) e il francese Évariste **Galois** (1811-1832).
Ne riparleremo sul Volume 2, col quale proseguirà fra tante novità e sorprese il nostro viaggio nel fantastico mondo delle equazioni.

# INVERSIONE DI FORMULE

- **COS'È UNA "FORMULA"?** E' **un'uguaglianza che lega fra loro due o più lettere, indicanti quantità le quali possono essere variabili o costanti**.

  Esempi: $s = vt$ (spazio = velocità · tempo); $S = \pi r^2$ (formula per l'area del cerchio)

  Una "formula" può anche essere considerata come una "*equazione*", perché è un'uguaglianza che è verificata *solo per certe combinazioni di valori* delle lettere che in essa compaiono.

- **CAPITA SOVENTE DI AVERE UNA FORMULA E DI VOLERLA "INVERTIRE"**, cioè di voler isolare una delle lettere contenute nella formula stessa.
  Si dice anche "*risolvere rispetto a una lettera*", o "*esprimere una lettera in funzione delle altre*".
  **A tale scopo, si possono applicare le tecniche già viste per la risoluzione delle equazioni …**
  **… ma si possono anche utilizzare degli altri "trucchi" che, spesso,**
  ♥ **permettono di realizzare l'inversione della formula in modo molto più rapido e comodo:**
  1) quando la lettera da isolare è a 2° membro, può essere utile "*scambiare fra loro i due membri*" (il che è diverso dal trasportare i termini da un membro all'altro cambiandoli di segno);
  2) *se due numeri non nulli sono uguali, allora lo sono pure i loro reciproci*;
  3) quando si vuole moltiplicare o dividere l'uguaglianza per uno stesso numero (o lettera o espressione), il moltiplicatore o il divisore *non deve per forza coincidere* col denominatore comune o col coefficiente dell'incognita

**ESEMPIO** $\boxed{a+b=\dfrac{c}{m+k}}$ RISOLVERE RISPETTO A $\boxed{m}$

$\dfrac{c}{\boxed{m}+k}=a+b$ (*tecnica* 1: **scambio dei due membri**, *per portare* $\boxed{m}$ *a* 1° *membro*)

$\dfrac{\boxed{m}+k}{c}=\dfrac{1}{a+b}$ (*tecnica* 2: **passaggio ai reciproci**, *per portare* $\boxed{m}$ *a numeratore*)

$\boxed{m}+k=\dfrac{c}{a+b}$ (*tecnica* 3: **moltiplicazione dei due membri per c**)

$\boxed{m}=\dfrac{c}{a+b}-k$ (*trasporto*)

**ESERCIZI**

| | FORMULA | Risolvi rispetto a |
|---|---|---|
| 1) | $v=\dfrac{x'-x}{t'-t}$ | $x',\ x,\ t',\ t$ |
| 2) | $\dfrac{F_1}{s_1}=\dfrac{F_2}{s_2}$ | $F_1,\ F_2,\ s_1,\ s_2$ |
| 3) | $x'=k(x-vt)$ | $t$ |
| 4) | $\dfrac{ab}{r}=1+c$ | $a,\ b,\ r,\ c$ |
| 5) | $F=\dfrac{Gmm'}{r^2}\ (r>0)$ | $m,\ r$ |
| 6) | $K=\dfrac{1}{2}mv^2\ (v\geq 0)$ | $m,\ v$ |
| 7) | $q=m_1v_1+m_2v_2$ | $m_1,\ v_1$ |
| 8) | $\dfrac{a}{x+y}=\dfrac{a'}{x'+y'}$ | $x',\ a'$ |
| 9) | $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$ | $d \rightarrow$ *vedi NOTA a destra* |

NOTA: QUANDO PASSI AI RECIPROCI, ricorda che "il reciproco di una somma NON è uguale alla somma dei reciproci!!!"



$\dfrac{1}{x+y}\neq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

**RISPOSTE** 1) $x'=x+v(t'-t)$ $x=x'-v(t'-t)$ $t'=t+\dfrac{x'-x}{v}$ $t=t'-\dfrac{x'-x}{v}$

2) $F_1=s_1\dfrac{F_2}{s_2}$ $F_2=s_2\dfrac{F_1}{s_1}$ $s_1=F_1\dfrac{s_2}{F_2}$ $s_2=F_2\dfrac{s_1}{F_1}$ 3) $t=\dfrac{1}{v}\left(x-\dfrac{x'}{k}\right)$

4) $a=\dfrac{r}{b}(1+c)$ $b=\dfrac{r}{a}(1+c)$ $r=\dfrac{ab}{1+c}$ $c=\dfrac{ab}{r}-1$ 5) $m=\dfrac{Fr^2}{Gm'}$ $r=\sqrt{\dfrac{Gmm'}{F}}$

6) $m=\dfrac{2K}{v^2}$ $v=\sqrt{\dfrac{2K}{m}}$ 7) $m_1=\dfrac{q-m_2v_2}{v_1}$ $v_1=\dfrac{q-m_2v_2}{m_1}$

8) $x'=\dfrac{a'(x+y)}{a}-y'$ $a'=\dfrac{a(x'+y')}{x+y}$ 9) $d=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}}$

♥ **INDICI E APICI**
Si usano per poter utilizzare una stessa lettera più volte, per indicare oggetti o quantità distinte, della stessa natura.
Ad esempio due velocità potrebbero essere indicate con:
$v_1$, $v_2$ (leggi: v uno, v due: "indici", in basso a destra);
o $v'$, $v''$ (v primo, v secondo: "apici", in alto a destra).
L'indice, o l'apice,
è come se fosse "fuso con la propria lettera",
a formare un nuovo simbolo, unico e indivisibile.

## ALTRI ESERCIZI

10) *Considera le formule seguenti, e risolvi ciascuna rispetto a una delle sue lettere.*
*Per verificare la correttezza della formula inversa ottenuta, puoi risostituirne il 2° membro al posto della lettera nella formula di partenza per vedere se l'uguaglianza così ottenuta è esatta.*

a) $f = \frac{1}{T}$ (relazione fra periodo e frequenza)

b) $F = ma$ (2° principio della dinamica)

c) $v = \frac{s}{t}$ (definizione di velocità nel moto uniforme)

d) $F = -kx$ (forza elastica)

e) $v = v_0 + at$ (velocità in un moto uniformemente accelerato)

f) $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ (principio dei vasi comunicanti; "$\rho$" si legge "rho")

g) $F_m \cdot m = F_r \cdot r$ (legge della leva)

h) $s = s_0 + v(t - t_0)$ (legge del moto rettilineo uniforme)

i) $a = \frac{h}{\ell} g$ (accelerazione su di un piano inclinato)

l) $pV = \frac{2}{3}U$ (equazione di Joule-Clausius)

m) $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ (rendimento massimo di una macchina termica; "$\eta$" si legge "éta")

n) $F = \frac{9}{5}C + 32$ (formula che lega la temperatura Celsius alla Fahrenheit)

o) $x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$ (ascissa del centro di massa di un sistema di due punti materiali)

p) $F = m\frac{v^2}{r}$ (forza centripeta in un moto circolare uniforme; $v > 0$)

q) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (due resistenze in parallelo)

r) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = -\frac{2}{r}$ (legge dei punti coniugati per uno specchio convesso)

11) (*risposte in fondo alla pagina; le quantità in gioco sono tutte positive*)

a) Risolvi rispetto a T: $\frac{a^3}{T^2} = K$ (Terza legge di Keplero)

b) Risolvi rispetto a $g$: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ (periodo di un pendolo)

c) Risolvi rispetto a $c$: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ (fattore di Lorenz)

Dal sito **www.regentsprep.org**

12) Shoe sizes and foot length are related by the formula

$$S = 3F - 24,$$

where $S$ represents the shoe size and $F$ represents the length of the foot, in inches.

Solve the formula for $F$.

| **Solution:** | **Steps:** |
|---|---|
| $S = 3F - 24$ | add 24 to both sides |
| $S + 24 = 3F$ | divide both sides by 3 |
| $\frac{S + 24}{3} = \frac{3F}{3}$ | simplify |
| $\frac{S + 24}{3} = F$ | Done. |



13) Sam says that the following equations are two ways to write the SAME formula. Decide whether or not you agree with Sam. Explain how you made your decision.

$$s = \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{s}{s-1} = n$$

## RISPOSTE all'esercizio 11

11a) $\frac{a^3}{T^2} = K;\ \frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{K};\ T^2 = \frac{a^3}{K};\ T = \sqrt{\frac{a^3}{K}}$

11b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}};\ 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = T;\ \sqrt{\frac{\ell}{g}} = \frac{T}{2\pi};\ \frac{\ell}{g} = \frac{T^2}{4\pi^2};\ \frac{g}{\ell} = \frac{4\pi^2}{T^2};\ g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2}$

11c) $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma};\ 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2};\ \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2};\ \frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma^2}};\ c^2 = \frac{v^2}{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \frac{v^2}{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}} = \frac{v^2\gamma^2}{\gamma^2 - 1};\ c = \sqrt{\frac{v^2\gamma^2}{\gamma^2 - 1}} = \frac{v\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}$

# PROPORZIONI E PROPORZIONALITA'

## 1. PROPORZIONI

Si dice "**proporzione**" un'**uguaglianza fra due rapporti** ( = quozienti).

Esempio

**12 : 16 = 15 : 20**

Questa proporzione è corretta, perché effettivamente i due rapporti ( = quozienti)

12:16 e 15:20

sono uguali fra loro (valgono entrambi ¾, o, se si preferisce: 0,75).

Di solito si legge "**12 *sta a* 16 *come* 15 *sta a* 20**",
proprio per evidenziare il fatto che si va a confrontare il "peso di un numero rispetto all'altro":
12, nei confronti di 16, è i ¾ e quindi è proprio come 15 nei confronti di 20.

ESERCIZI (risposte in fondo a questa pagina)

a) Quanto deve valere $x$ se si vuole che la proporzione $24:12 = x:11$ sia corretta?
b) Quanto deve valere $y$ se si vuole che la proporzione $5:15 = y:18$ sia corretta?
c) Quanto deve valere $z$ se si vuole che la proporzione $6:4 = 30:z$ sia corretta?

Un po' di **terminologia**.

In una proporzione,

- i due dividendi (cioè: il 1° e il 3° termine) si dicono "**antecedenti**";
- i due divisori (cioè: il 2° e il 4° termine) si dicono "**conseguenti**";

antecedenti
12 : 16 = 15 : 20
conseguenti

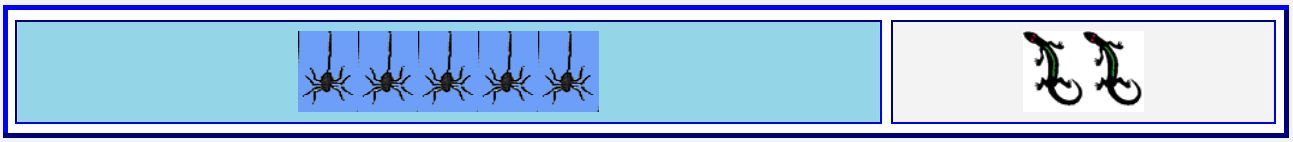
- il 1° e il 4° termine si dicono "**estremi**";
- il 2° e il 3°, "**medi**".

estremi
12 : 16 = 15 : 20
medi

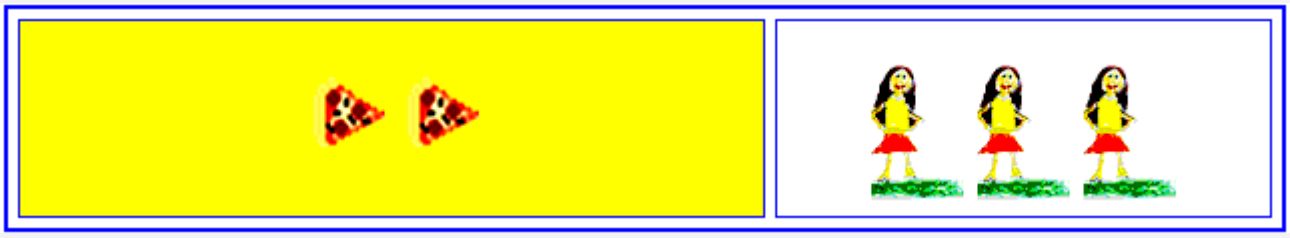
Dal sito http://math.rice.edu/~lanius/Lessons/index.html di Cynthia Lanius (USA) :

All About Ratios (*ratio = rapporto, sia in Latino che in Inglese*!)

1. If you have spiders to lizards at the ratio below and have 12 lizards,
   how many spiders do you have?



2. If you have pizza slices to girls at the ratio below, and if you have 33 girls,
   how many slices of pizza do you have?



*Risposte agli esercizi di questa pagina*:

a) Il quoziente 24:12 vale 2, quindi anche il quoziente $x$:11 dovrà valere 2,
e ciò avviene a condizione che $x$ sia uguale a 22.
Anche: così come 24 è il doppio di 12, altrettanto $x$ dovrà essere il doppio di 11 da cui $x = 22$.

b) Così come 5 è la terza parte di 15, anche $y$ dovrà essere la terza parte di 18. Perciò $y = 6$.

c) 6:4 =1,5 ossia il 6 è 1 volta e mezza il 4. Il 30 è una volta e mezza … che cosa? 20, evidentemente!
Anche ragionando "da destra a sinistra":
$z$, rispetto al 30, dovrà avere lo stesso "peso" che ha il 4 rispetto al 6.
Ma 4 è i 4/6 di 6, cioè i 2/3 di 6, e allora $z$ dovrà essere i 2/3 di 30, cioè 20.

## PROPRIETA' FONDAMENTALE DELLE PROPORZIONI

**In una proporzione, il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi;**

**E, VICEVERSA (importante!!!),**

**se 4 numeri non nulli sono tali che il prodotto di due di essi è uguale al prodotto degli altri due, allora con tali quattro numeri si può costruire una proporzione, a patto di prendere come medi (o come estremi) i fattori di un medesimo prodotto.**

Brevemente:
se a, b, c, d sono quattro numeri non nulli,
vale la **doppia implicazione**

$$\mathbf{a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc}$$

Dimostrazione $a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad = bc$

♥ Il simbolo $\Leftrightarrow$ è quello di "biimplicazione logica": "*se … allora … e viceversa*", *per qualsiasi valore delle lettere coinvolte*

♥ E' davvero di grande importanza tener presente che **questa proprietà consta di DUE enunciati**:
un enunciato **diretto**, e il rispettivo **inverso** (*).

Essa fornisce perciò una condizione
NECESSARIA E SUFFICIENTE
affinché quattro numeri non nulli, presi in un dato ordine, formino una proporzione valida.

**(*) Per verificare se una proporzione è corretta**,
anziché calcolare i due quozienti per vedere se coincidono,
**si può andare a vedere se il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi**:
così facendo si applica, appunto, la "Proprietà Fondamentale"
… precisamente - nota bene! - nel suo "aspetto **INVERSO**"!

La Proprietà Fondamentale delle proporzioni ha importanti **CONSEGUENZE**.

Ad esempio, supponiamo che in una proporzione siano noti i primi tre termini ma non il quarto; allora si può scrivere

$$a : b = c : x; \quad ax = bc; \quad x = \frac{bc}{a}.$$

E in generale, è facile vedere che:

**se il termine incognito è un estremo, sarà uguale al prodotto dei medi FRATTO l'estremo noto;**
**se il termine incognito è un medio, sarà uguale al prodotto degli estremi FRATTO il medio noto**

Esempio:

$$\mathbf{25 : x = 20 : 12} \qquad \mathbf{x = \frac{\cancel{25}^{5} \cdot \cancel{12}^{3}}{\cancel{20}_{4}} = 15}$$

Se più termini di una proporzione sono espressi in funzione di una stessa incognita $x$, la proporzione si può interpretare come un'equazione che permetterà di trovare il valore di $x$.

Applicare la Proprietà Fondamentale è in questo caso un modo veloce e comodo per liberarsi dai denominatori.

Esempio:

$$\mathbf{(x+4) : 10 = (2x+1) : 15}$$
$$\mathbf{(x+4) \cdot 15 = 10 \cdot (2x+1)}$$
$$15x + 60 = 20x + 10$$
$$-5x = -50$$
$$x = 10$$

In alternativa, si poteva trasformare in una "classica" equazione coi denominatori:

$$(x+4) : 10 = (2x+1) : 15$$
$$\frac{x+4}{10} = \frac{2x+1}{15}; \quad \frac{3(x+4)}{\cancel{30}} = \frac{2(2x+1)}{\cancel{30}} \quad \text{ecc.}$$

Le proporzioni godono di diverse altre **proprietà**, che si possono facilmente dimostrare con semplici passaggi algebrici, utilizzando eventualmente la "Proprietà Fondamentale".

Queste proprietà permettono, a partire da una proporzione fissata $\boxed{\mathbf{a : b = c : d}}$,

di ricavarne altre, che saranno corrette anch'esse *se e solo se* lo è quella di partenza.

Ecco qui di seguito un elenco delle **PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI**.

**b : a = d : c** (**invertire**)

**a : c = b : d** (**permutare i medi**)

**d : b = c : a** (**permutare gli estremi**)

$\left.\begin{array}{l}\mathbf{(a \pm b) : a = (c \pm d) : c}\\ \mathbf{(a \pm b) : b = (c \pm d) : d}\end{array}\right]$ (**comporre e scomporre**) *In una proporzione, la somma del 1° e del 2° termine sta al 1° (o al 2°) come la somma del 3° e del 4° sta al 3° (o al 4°). Idem per la differenza.*

$\left.\begin{array}{l}\mathbf{(a \pm c) : (b \pm d) = a : b}\\ \mathbf{(a \pm c) : (b \pm d) = c : d}\end{array}\right]$ **(comporre e scomporre applicato agli antecedenti e ai conseguenti)** *In una proporzione, la somma (o la differenza) degli antecedenti sta alla somma (o alla differenza) dei conseguenti, come ciascun antecedente sta al proprio conseguente.*

ESERCIZIO: parti da una proporzione corretta di tua invenzione e controlla che le varie proporzioni ottenibili da quella applicando le varie proprietà di cui sopra, sono ancora corrette.

- **Dimostriamo**, ad esempio, la proprietà del **permutare i medi**:

  $a : b = c : d \underset{(\text{NOTA})}{\Leftrightarrow} bc = ad \underset{(\text{NOTA})}{\Leftrightarrow} a : c = b : d$ NOTA - Proprietà Fondamentale

- Come ulteriore esempio, **dimostriamo** una delle proprietà denominate "del **comporre**":

  $$a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow (a+b) : b = (c+d) : d$$

Alle proprietà sopra elencate si può aggiungere la seguente, relativa alle "catene di rapporti uguali":
"**data una CATENA DI RAPPORTI UGUALI, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come ciascun antecedente sta al proprio conseguente**".

Es.: dalla catena $14 : 7 = 6 : 3 = 10 : 5$ si possono ricavare le 3 proporzioni $(14+6+10) : (7+3+5) = \begin{cases} 14 : 7 \\ 6 : 3 \\ 10 : 5 \end{cases}$

Applicazione: trovare 3 numeri sapendo che la loro somma è 90 e che sono proporzionali ai numeri 4, 11, 3 (o, come anche si dice, "stanno fra loro come 4:11:3")

$x : 4 = y : 11 = z : 3$ $\quad (x+y+z) : (4+11+3) = x : 4$ $\quad 90 : 18 = x : 4$ $\quad x = \dfrac{90 \cdot 4}{18} = 20$ ... e analogamente per $y$, $z$

**Il quarto termine di una proporzione è detto "QUARTO PROPORZIONALE dopo i primi tre termini".**

Ad esempio, nella proporzione 8:6 = 12:9 abbiamo che 9 è il quarto proporzionale dopo 8, 6, 12.

- *Trovare il quarto proporzionale dopo* 24, 6, 8

  $\boxed{24 : 6 = 8 : x}$ da cui: $x = \dfrac{6 \cdot 8}{24} = 2$ (anche molto più semplicemente: così come 24 è il quadruplo di 6, 8 è il quadruplo di cosa? Di 2, è ovvio!)

**Una proporzione in cui i due medi sono uguali si dice "PROPORZIONE CONTINUA".**

Ad esempio, 9:6 = 6:4 è una proporzione continua.

**In una proporzione continua, ciascuno dei due medi uguali si dice "MEDIO PROPORZIONALE fra il 1° e il 4° termine".**

Ad esempio, in 9:6 = 6:4 , il 6 è medio proporzionale fra 9 e 4.

- *Trovare il medio proporzionale fra* 2 *e* 32

  $\boxed{2 : x = x : 32}$ $\quad x^2 = 2 \cdot 32;$ $\quad x^2 = 64;$ $\quad x = 8$ (oppure $x = \pm 8$, a seconda del contesto)

## ESERCIZI

1) Verifica che le seguenti proporzioni sono tutte corrette,
controllando che in ciascuna il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi

a) $12:16=15:20$ b) $12:6=6:3$ c) $40:12=100:30$ d) $1,2:2,16=1,5:2,7$

2) Determina il termine incognito nelle seguenti proporzioni,
pensando direttamente all'uguaglianza dei due rapporti e quindi *senza applicare le formule*
"prodotto dei medi fratto l'estremo noto", "prodotto degli estremi fratto il medio noto"

a) $6:3=x:5$ b) $6:3=5:x$ c) $15:3=35:x$ d) $15:3=x:4$
e) $1:2=2:x$ f) $x:10=4:8$ g) $3:4=x:28$ h) $2:3=x:10$
i) $4:3=x:12$ j) $x:4=6:30$ k) $40:50=x:2$ l) $18:x=30:40$
m) $7:y=6:3$ n) $24:8=z:11,25$ o) $t:2,6=12:8$ p) $0,05:5=x:0,2$

3) Determina il termine incognito nelle seguenti proporzioni, *applicando le formule*
"prodotto dei medi fratto l'estremo noto", "prodotto degli estremi fratto il medio noto"

a) $12:20=18:x$ b) $10:25=x:10$ c) $x:3=4:5$ d) $15:x=35:30$
e) $12:5=x:8$ f) $x:\frac{3}{4}=\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$ g) $x:2,4=3,2:5$ h) $0,8:0,2=0,1:x$

4) Le seguenti proporzioni contengono più volte un'incognita. Determina il valore di questa.

a) $18:(x+4)=15:x$ b) $(x+2):14=(x+3):16$ c) $x:(x+1)=(x+2):(x+7)$
d) $h:(h-2)=(h-3):h$ e) $(w+1,2):4=(w-1,2):3$ f) $a:(2a+3)=5:10$

5) Determina il *quarto proporzionale* dopo:

a) 4, 8 e 10 b) 5, 15 e 15 c) 40, 25 e 32 d) 3, 4 e 5
e) 3; 3,3; 4 f) 2,5; 3,6; 4,7 g) $3^7$, $3^{11}$, $3^{10}$ h) $5\cdot10^{12}$, $3\cdot10^{13}$, $2\cdot10^{8}$

6) Determina il *medio proporzionale* (positivo) fra:

a) 3 e 48 b) 24 e 6 c) 2 e 3 d) 2,5 e 6,4
e) $3^7$ e $3^{11}$ f) 3,3 e $3,\overline{3}$ g) 1 e $5^6$ h) 100 e 1000

7) **Dividere un numero in parti proporzionali a due numeri dati**

Dividere il numero 30 in parti proporzionali ai numeri 5 e 7 significa trovare due numeri $x$, $y$ tali che
I) $x+y=30$
II) $x:5=y:7$.

Se, partendo dalla proporzione, si applica la proprietà del "comporre gli antecedenti e i conseguenti",
si ottiene: $\underbrace{(x+y)}_{30}:(5+7)=\begin{cases}x:5\\y:7\end{cases}$ da cui: $x=12,5;\ y=17,5$

In generale, comunque, per dividere un numero $c$ in due parti proporzionali ai due numeri $a$ e $b$,
basta dividere $c$ per la somma $a+b$ poi moltiplicare il risultato ottenuto prima per $a$ poi per $b$.

Dividi il numero dato in parti proporzionali ai numeri a fianco specificati:

a) 30; 1 e 4 b) 30; 2 e 3 c) 100; 2 e 3 d) 1; 9 e 11
e) 0,07; 5 e 9 f) 30; 5 e 2 g) 72; 3 e 5 h) 72; 2 e 3

8) Pierino, alla richiesta di determinare $x$ nella proporzione $x:(x-4)=20:15$, scrive: $x=\frac{(x-4)\cdot20}{15}$,
ma non è molto convinto di questo procedimento. Cosa gli consiglieresti?

## RISULTATI

2a) 10 2b) 2,5 2c) 7 2d) 20 2e) 4 2f) 5 2g) 21 2h) 20/3
2i) 16 2j) 4/5 2k) 8/5 2l) 24 2m) 3,5 2n) 33,75 2o) 3,9 2p) 0,002
3a) 30 3b) 4 3c) 12/5 3d) 90/7 3e) 96/5 = 19,2 3f) 5/8 3g) 1,536 3h) 0,025
4a) 20 4b) 5 4c) 1/2 4d) 6/5 4e) 8,4 4f) impossibile
5a) 20 5b) 45 5c) 20 5d) 20/3 5e) 4,4 5f) 6,768 5g) $3^{14}$ 5h) $1,2\cdot10^{9}$
6a) 12 6b) 12 6c) $\sqrt{6}\approx2,45$ 6d) 4 6e) $3^9$ 6f) $\sqrt{11}\approx3,317$ 6g) $5^3$ 6h) $\sqrt{100000}\approx316$
7a) 6 e 24 7b) 12 e 18 7c) 40 e 60 7d) 0,45 e 0,55 7e) 0,025 e 0,045 7f) $150/7\approx21,4$ e $60/7\approx8,6$
7g) 27 e 45 7h) 28,8 e 43,2 8) Di fare *prodotto dei medi = prodotto degli estremi* poi risolvere l'equazione

# 2. PROPORZIONALITA' DIRETTA E INVERSA

## a) PROPORZIONALITA' DIRETTA

**"Se le mie ore di lavoro sono il doppio, anche il guadagno è il doppio".**

Così riflette questa paziente e volonterosa signora immigrata,
che viene chiamata da famiglie italiane per fare qualche servizio di pulizia nelle case.

- 8 euro per 1 ora di pulizia;
- 16 euro per 2 ore, dunque,
- 24 euro per 3 ore,
- 32 euro per 4 ore,
- ecc.

Se *raddoppiano* le *ore* lavorate, *raddoppia* anche il *guadagno*;
se *triplicano* le *ore* lavorate, *triplica* il *guadagno*,
... ecc.

Vale la formula $\boxed{euro = 8 \cdot ore}$ da cui, ad esempio,

- se $ore = 5$, si avrà $euro = 8 \cdot 5 = 40$;
- se $ore = 5 \cdot 2 = 10$ $(il\ doppio\ di\ prima)$,
  sarà $euro = 8 \cdot (5 \cdot 2) = (8 \cdot 5) \cdot 2 = 40 \cdot 2 = 80$ $(il\ doppio\ di\ prima)$.

Vale anche, per ogni prestazione lavorativa, l'uguaglianza $\boxed{\frac{euro}{ore} = 8}$

da cui, per esempio, l'altra uguaglianza $\boxed{\frac{euro_{\text{MARTEDI'}}}{ore_{\text{MARTEDI'}}} = \frac{euro_{\text{GIOVEDI'}}}{ore_{\text{GIOVEDI'}}} = 8}$

che può essere scritta pure come proporzione: $\boxed{euro_{\text{MARTEDI'}} : ore_{\text{MARTEDI'}} = euro_{\text{GIOVEDI'}} : ore_{\text{GIOVEDI'}}}$

Si dice che **due grandezze *x*, *y* in relazione fra loro** (nell'es.: le ore lavorate, gli euro guadagnati) sono **DIRETTAMENTE PROPORZIONALI (l'avverbio "direttamente" si può anche omettere)** quando **la legge che le lega è della forma**

$\boxed{y = k \cdot x}$

dove $k$ è una costante che prende il nome di "**coefficiente di proporzionalità** (diretta)".

**In questo caso vale l'uguaglianza**

$\boxed{\frac{y}{x} = k}$ **(il loro RAPPORTO si mantiene COSTANTE!)**

da cui, per coppie di valori corrispondenti $(x_1, y_1)$; $(x_2, y_2)$; $(x_3, y_3)$; ...

l'uguaglianza di rapporti $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = ...$

**e quindi la possibilità di scrivere proporzioni come**

$\boxed{y_1 : x_1 = y_2 : x_2}$ *ossia*

| $y_1$ | : | $x_1$ | = | $y_2$ | : | $x_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *un valore di una grandezza ...* | | *... sta al valore corrispondente dell'altra ...* | | *... come un altro valore della prima grandezza ...* | | *... sta al valore corrispondente dell'altra* |

*OPPURE* (*permutando i medi*)

$\boxed{y_1 : y_2 = x_1 : x_2}$ *ossia*

*rapporto fra due valori di una grandezza* = *rapporto fra i valori corrispondenti dell'altra grandezza, presi NELLO STESSO ORDINE*

## b) PROPORZIONALITA' INVERSA

**"Se percorro quel tratto di strada a velocità doppia, ci metto metà del tempo".**

Da casa mia al posto dove lavoro ci sono 2 km.
Detesto spostarmi in automobile:
vado invece a piedi, viaggiando, all'andata, a 6 km/h, e mettendoci dunque 1/3 di ora (20 minuti).
Il ritorno lo faccio poi di corsa, a velocità doppia: 12 km/h, e ci metto quindi 1/6 di ora (10 minuti).

- 2 km, a 6 km all'ora: 1/3 di ora
- 2 km, a 12 km all'ora: 1/6 di ora
- 2 km, a 18 km all'ora: 1/9 di ora (la corsa di un bravo podista)
- 2 km, a 24 km all'ora: 1/12 di ora (in bici)
- ecc.

Se *raddoppia* la velocità di percorrenza di una distanza fissata, il tempo *si riduce alla metà*;
se *triplica* la velocità di percorrenza della stessa distanza, il tempo *si riduce alla terza parte*;
... ecc.

Vale la formula

$$\boxed{tempo = \frac{2}{velocità}}$$ (*tempo* in ore, *distanza fissa* di 2 km, *velocità* espressa in km all'ora)

da cui, ad esempio, se

$velocità = 8\ km/h$, si avrà $tempo = \frac{2\ km}{8\ km/h} = \frac{1}{4}h$ $(un\ quarto\ d'ora, 15\ minuti)$;

$velocità = 16\ km/h$ $(il\ doppio\ di\ prima)$, si avrà $tempo = \frac{2\ km}{16\ km/h} = \frac{1}{8}h$ $(7'\ e\ 30'', la\ metà\ di\ prima)$.

Vale anche l'uguaglianza

$$\boxed{tempo \cdot velocità = 2}$$

da cui, per esempio, l'altra uguaglianza

$$\boxed{tempo_{\text{CORSA}} \cdot velocità_{\text{CORSA}} = tempo_{\text{BICI}} \cdot velocità_{\text{BICI}} = 2}$$

che, grazie alla proprietà fondamentale delle proporzioni applicata in senso inverso,
può essere scritta pure sotto forma di proporzione:

$$\boxed{tempo_{\text{CORSA}} : tempo_{\text{BICI}} = velocità_{\text{BICI}} : velocità_{\text{CORSA}}}$$

Si dice che **due grandezze *x*, *y* in relazione fra loro**
(nel nostro esempio: la velocità e il tempo di percorrenza di una distanza fissata)
sono **INVERSAMENTE PROPORZIONALI** quando **la legge che le lega è della forma**

$$\boxed{y = \frac{k}{x}}$$

dove $k$ è una costante che prende il nome di "**coefficiente di proporzionalità inversa**".

**In questo caso vale l'uguaglianza**

$$\boxed{x \cdot y = k}$$ **(il loro PRODOTTO si mantiene COSTANTE!)**

da cui, per coppie di valori corrispondenti $(x_1, y_1)$; $(x_2, y_2)$; $(x_3, y_3)$; ...

le uguaglianze di prodotti $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = ...$

**e quindi la possibilità di scrivere proporzioni come**

$$\boxed{y_1 : y_2 = x_2 : x_1}$$ *ossia*

*rapporto fra due valori di una grandezza* = *rapporto fra i valori corrispondenti dell'altra grandezza, ma IN ORDINE SCAMBIATO*

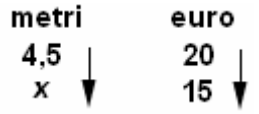
## Esempi di problemi del "TRE SEMPLICE"

**Premettiamo che viene detto "problema del tre semplice" un problema nel quale è coinvolta UNA COPPIA DI GRANDEZZE direttamente o inversamente PROPORZIONALI, e si considerano 4 VALORI (2 DI UNA GRANDEZZA, PIÙ I 2 CORRISPONDENTI DELL'ALTRA). Di tali valori, 3 SONO NOTI, mentre IL RESTANTE È INCOGNITO ed è la richiesta del problema.**

*Problema (*"TRE SEMPLICE DIRETTO*")*:

*se 4,5 metri di stoffa costano 20 euro, quanti metri di stoffa si potranno comprare con 15 euro?*

Qui è evidentemente in gioco una coppia di grandezze (i metri di stoffa, il costo in euro) direttamente proporzionali: raddoppiando i metri, infatti, raddoppierebbe il costo.




Le frecce puntano nella stessa direzione proprio per il fatto che la proporzionalità è DIRETTA.
Si scriverà poi la proporzione, seguendo l'ordine delle frecce.

**4,5 : *x* = 20 : 15** da cui subito $x = \frac{4,5 \cdot 15}{20} = 3,375$.

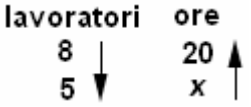
- Ovviamente si può anche ricorrere a semplicissime "SCORCIATOIE" tipo:
  se 4,5 metri costano 20 euro, con 15 euro potrò acquistare
  i $\frac{15}{20}$, ossia i $\frac{3}{4}$, di 4,5 metri, vale a dire $\frac{3}{4} \cdot 4,5 = 3,375$ metri.

- C'è da dire che un METODO ALTERNATIVO altrettanto efficace per risolvere problemi di questo tipo è sempre la "RIDUZIONE ALL'UNITÀ":
  dato che 4,5 metri di stoffa costano 20 euro,
  con 1 euro si potranno acquistare $\frac{4,5}{20}$ metri di stoffa ossia 0,225 metri di stoffa;
  ma se con 1 euro si comprano 0,225 metri di stoffa,
  con 15 euro se ne acquisteranno $0,225 \cdot 15 = 3,375$

*Problema (*"TRE SEMPLICE INVERSO*")*:

*8 braccianti portano a termine un dato lavoro in 20 ore.*
*E se invece gli operai fossero solo 5, quante ore ci vorrebbero per ultimare il lavoro?*

Qui la proporzionalità è evidentemente inversa,
perché raddoppiando il numero di lavoratori si dimezza il numero delle ore occorrenti.




Le frecce puntano in direzioni opposte proprio per il fatto che la proporzionalità è INVERSA.
Si scriverà poi la proporzione, seguendo l'ordine delle frecce.

**8 : 5 = *x* : 20** da cui $x = \frac{8 \cdot 20}{5} = 32$

- SCORCIATOIA: se il numero di operai dimezzasse $(\cdot 1/2)$, il numero di ore raddoppierebbe $(\cdot 2)$.
  Quando il numero di operai passa da 8 a 5, subendo quindi una moltiplicazione per 5/8,
  il numero di ore risulterà moltiplicato per il RAPPORTO INVERSO 8/5;
  perciò basta fare 20 moltiplicato 8/5, che dà 32.

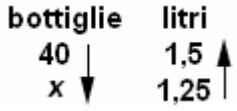
- IN ALTERNATIVA, senza proporzioni, con la "RIDUZIONE ALL'UNITÀ":
  8 braccianti completano il lavoro in 20 ore;
  allora se ci fosse 1 solo bracciante, lui ci metterebbe $20 \cdot 8 = 160$ ore.
  Quindi se i braccianti sono 5, ci metteranno $\frac{160}{5} = 32$ ore.

- SE PREFERIAMO, possiamo anche pensare di aver effettuato,
  piuttosto che una "riduzione all'unità", un "CALCOLO DEL TOTALE":
  il totale delle ore di lavoro necessarie (da ripartirsi poi fra i vari operai) è $20 \cdot 8 = 160$.
  Poiché però si vogliono utilizzare 5 braccianti, ciascuno dovrà essere impiegato per $\frac{160}{5} = 32$ ore.

Un altro esempio.

*Con una damigiana di vino, si riempiono 40 bottiglie da 1,5 litri.*
*E se si usassero invece bottiglie da 1,25 litri, quante ce ne vorrebbero?*

Qui abbiamo una coppia di grandezze (la capacità di 1 bottiglia, il numero di bottiglie) inversamente proporzionali:
raddoppiando la capacità, infatti, dimezzerebbe il numero di bottiglie occorrenti.




Le frecce puntano in direzioni opposte proprio per il fatto che la proporzionalità è INVERSA.
Si scriverà poi la proporzione, seguendo l'ordine delle frecce.

**40 : *x* = 1,25 : 1,5** da cui $x = \frac{40 \cdot 1{,}5}{1{,}25} = 48$.

IN ALTERNATIVA, senza proporzioni ("CALCOLO DEL TOTALE"):
la nostra damigiana equivale a 40 bottiglie da 1,5 litri;
bene, quindi la damigiana contiene $40 \cdot 1{,}5 = 60$ litri.

Quante bottiglie da 1,25 sono necessarie allora? Ovviamente, $\frac{60}{1{,}25} = 48$.

Volendo, anche qui sarebbe possibile interpretare il procedimento come se si trattasse di una "RIDUZIONE ALL'UNITÀ".
Di bottiglie da 1 litro, quante ce ne vorrebbero?
Evidentemente, $40 \cdot 1{,}5 = 60$.
Dunque di bottiglie da 1,25 litri ce ne vogliono invece 60/1,25 = 48.

- Dai tre esempi forniti si trae che quando si fa la "RIDUZIONE ALL'UNITÀ", L'UNITÀ IN QUESTIONE SI RIFERISCE SEMPRE A QUELLA QUANTITÀ, FRA LE DUE, DELLA QUALE SONO NOTI ENTRAMBI I VALORI.

## Qualche esempio di problema del "TRE COMPOSTO"

**Nei problemi del "tre composto" si hanno *più* di 2 grandezze in gioco (3 o più grandezze, quindi), tali che prese due qualsiasi di tali grandezze, fra esse si riscontra sempre una proporzionalità, diretta o inversa.**

Volendo, esisterebbero anche per i problemi di questo tipo specifiche schematizzazioni e tecniche "standard"; tuttavia, ci sembra preferibile suggerire, come idea di fondo, quella di cercare opportune RIDUZIONI ALL'UNITÀ o CALCOLI DI TOTALI, come negli esempi che seguono.

Esempio 1 - *Nel magazzino di una caserma ci sono 25 kg di sapone.*
*Questa quantità basta per 40 soldati e per 20 giorni.*
*Se ci fossero 30 kg e 50 soldati, per quanti giorni basterebbe il sapone?*

1 solo soldato, nei 20 giorni, ha bisogno di 25/40 = 0,625 kg di sapone.
1 solo soldato, in 1 solo giorno, necessita di 0,625/20 = 0,03125 kg di sapone.
50 soldati, in 1 solo giorno, consumano $0{,}03125 \cdot 50 = 1{,}5625$ kg di sapone.
Essendoci ora 30 kg di sapone, questi basteranno, a 50 soldati, per 30/1,5625 = 19,2 giorni.

Esempio 2 - *La quantità di fieno che riempie questo camion basta a 15 mucche per 12 giorni, qualora se ne diano a ogni mucca 25 kg al giorno. E se si diminuisse la razione a 20 kg al giorno, quante mucche si potrebbero alimentare in un periodo di 18 giorni?*

In totale, quanti kg di fieno contiene il camion? $25 \cdot 15 \cdot 12 = 4500$ kg.
Pensando di distribuire questa quantità in 18 giorni, sono allora disponibili 4500/18 = 250 kg al giorno.
Con razioni da 20 kg, si potrebbero fare 250/20 = 12,5 razioni, quindi alimentare 12,5 mucche.

Esempio 3 - *30 operai, lavorando ciascuno 8 ore, riescono a produrre in una fabbrica 1500 pezzi.*
*Quante ore dovrebbero lavorare 20 operai per una produzione di 2500 pezzi?*

1 operaio in 8 ore produce 1500/30 = 50 pezzi. 1 operaio in 1 ora produce 50/8 = 6,25 pezzi.
20 operai in 1 ora producono $6{,}25 \cdot 20 = 125$ pezzi.
Per produrre 2500 pezzi i 20 operai ci metteranno dunque 2500/125 = 20 ore.

**ESERCIZI**

**Per le seguenti coppie di grandezze, stabilisci se sono legate da proporzionalità diretta o inversa. Scrivi anche la formula che lega una grandezza all'altra.**
**Quanto vale, in ciascun caso, la costante di proporzionalità?**

1) Base *b* e altezza *h* (misure in cm) di un rettangolo la cui area è di $24\ cm^2$
2) Guadagno *g* del proprietario di una casa, e numero *n* di mesi di permanenza dell'inquilino, supponendo che il canone di affitto mensile *c* rimanga costante
3) Raggio *r* della ruota di una data bicicletta, e numero *n* di giri occorrenti per coprire una distanza fissa $\bar{d}$ (*leggi* : "*d segnato*")
4) Lato $\ell$ e perimetro 2*p* di un quadrato
5) Altezza *h* e volume *V* dell'acqua in una data piscina a forma di parallelepipedo
6) Velocità *v* (in litri al secondo) con cui l'acqua esce dal rubinetto, e volume *V* (in litri) dell'acqua nella vasca, inizialmente vuota, dopo un numero di secondi fissato $\bar{t}$ ("*t segnato*")
7) Velocità *v* (in litri al secondo) con cui l'acqua esce dal rubinetto, e tempo *t* (in secondi) impiegato perché un dato serbatoio passi da vuoto a pieno
8) Costo *c* al litro del vino, e numero *n* di litri acquistabili, se si intende spendere 800 euro
9) Numero *n* di giri compiuti dalla ruota anteriore di una data bicicletta, e distanza *d* percorsa
10) Densità *d* di un liquido e suo peso *p*, per un dato volume costante *V*
11) Numero *n* di lati e misura $\ell$ del lato di un poligono regolare di perimetro 2*p* assegnato
12) Numero *n* di lavoratori da assumere per portare a termine un dato lavoro (es. la vendemmia in una data vigna), e numero *k* di ore nel quale si desidera che il lavoro venga ultimato

*I successivi problemi del "tre semplice" e del "tre composto" sono strati tratti dal ricco e simpatico sito Ubimath (www.ubimath.org) grazie all'autorizzazione del gentile Autore Ubaldo Pernigo.*

**Problemi del "tre semplice"**

13) Giovanni acquista 6 kg di caffè pagandoli 2 euro il chilogrammo. Quanto caffè avrebbe potuto acquistare, disponendo dello stesso importo, se il costo fosse stato di 2,40 euro il chilogrammo?
14) Un libro di 400 pagine contiene in media in ogni pagina 27 righe.
Nella ristampa del libro l'editore cambiando il formato della pagina fa rientrare più righe.
Dal nuovo formato il libro risulta ora di 360 pagine.
Da quante righe è composta una pagina nel nuovo formato?
15) Giovanni lavorando 20 giorni, ha riscosso 900 euro.
Se volesse percepire 450 euro in più, quanti giorni dovrebbe lavorare alle stesse condizioni?
16) Su di una nave sono stati imbarcati i viveri occorrenti per una crociera di 18 giorni con 950 persone.
A metà viaggio sbarcano 95 persone: per quanti giorni basterebbero ora i viveri?
17) Per confezionare 41 scatole sono stati necessari 82 kg di cartone.
Quanti kg ne occorrono per confezionare 95 scatole?
18) Per trasportare della merce un camionista compie 6 viaggi con un carico medio di 30 quintali.
Con un mezzo più piccolo che porti mediamente 18 quintali, quanti viaggi dovrebbe prevedere?
19) Una stampante laser produce 120 stampe in 3 minuti. Quanto impiegherà per eseguire 200 stampe?
20) Per misurare l'altezza del campanile viene rilevata la lunghezza della sua ombra, che misura 11,7 m, e di quella di un'asta di 1,2 m che risulta essere di 45 cm. Quanto è alto il campanile?
21) Una stampante laser produce 120 pagine in 3 minuti. In 10 minuti quante pagine stamperà?
22) Michele, per raggiungere la filiale da ispezionare, ha viaggiato in auto per 4 ore ad una velocità media di 70 km/h. Quanto avrebbe impiegato agli 80 km/h?
23) In sette giorni le ghiandole salivari di un individuo adulto producono circa dieci litri e mezzo di saliva.
Quanta saliva produce mediamente un individuo adulto in un mese (30 giorni)?
24) Per creare una rotonda ad un incrocio 8 operai impiegano 27 giorni lavorativi.
Se vengono impiegati 12 operai quanto tempo in meno si impiegherebbe nella stessa costruzione?
25) Per fornire il primo piatto a 150 persone vengono usati 45 kg di pasta.
Quanta pasta occorre utilizzare per 200 persone?

26) Un rotolo di cavo metallico, che svolto si sviluppa per una lunghezza di 15 m, pesa 45 kg. Quanto peserebbe un cavo analogo lungo 75 m?

27) Per tinteggiare il vano scale della propria casa Giacomo e Giovanni stimano di impiegare 9 ore di lavoro. Quanto impiegherebbero con l'aiuto di papà?

**Problemi del "tre composto"**

28) Per dipingere 30 metri quadrati di stanza sono stati utilizzati 12 barattoli di colore da 2,5 kg. Quanti barattoli da 15 kg saranno necessari per dipingere una superficie di 270 metri quadrati?

29) Una ditta di pulizie per mantenere una superficie di 400 metri quadrati chiede per 5 mesi 2500 euro. Quale sarà la spesa per un anno, alle stesse condizioni, per una superficie di 500 metri quadrati?

30) Per stendere 600 m di linea elettrica, 5 elettricisti impiegano 8 ore. Quante ore impiegherebbero 4 elettricisti per stenderne 60 metri in meno?

31) Un artigiano paga 1000 euro per trasportare 18 quintali di merce a 30 chilometri di distanza. Quanti quintali potrà inviare a 6 chilometri con 300 euro?

32) Lavorando 9 ore al giorno per 8 giorni lavorativi si riceve una paga di 416 euro. Quanto si riceverebbe lavorando un'ora in meno al giorno ma per 18 giorni?

33) 30 operai, lavorando 8 ore al giorno, impiegarono 15 giorni per aprire un fosso lungo 210 metri e largo 1,5 metri. Quanto impiegheranno 40 operai, lavorando 9 ore al giorno, per aprire un fosso lungo 840 metri e largo 3 metri?

34) Mario, che dirige un centro ippico, ha calcolato che i suoi 6 cavalli mangiano 15 quintali di biada in 25 giorni. Quanti quintali servono per alimentare 18 cavalli per 30 giorni?

35) Lavorando 6 ore per 4 giorni vengono prodotti in uno stabilimento 3840 giocattoli. Lavorando 8 ore al giorno, quanti giocattoli si produrrebbero in 8 giorni?

36) In 21 giorni, 18 operai lavorando 8 ore al giorno costruiscono un tratto di strada lungo 420 m. Quanti giorni dovrebbero lavorare 20 operai per 6 ore al giorno per costruire un'opera analoga ma lunga 600 m?

*Copyright © 1987-2008 owned by Ubaldo Pernigo, please contact: ubaldo@pernigo.com*
*Tutti i contenuti, ove non diversamente indicato, sono coperti da licenza*
*Creative Commons Attribuzione-Non commerciale-Non opere derivate 3.0 Italia*
*http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0 (Attribution-Noncommercial-No Derivative Works 3.0)*
*La riproduzione di tutto o parte dei contenuti potranno avvenire solo senza alcun scopo di lucro*
*e dovranno riportare l'attribuzione all'autore ed un link a UbiMath e/o a quella dell'autore/i originario.*

**RISPOSTE (la costante di proporzionalità, diretta o inversa, è evidenziata in un quadratino)**

1) *Inv.* $b \cdot h = \boxed{24},\ b = \boxed{24}/h,\ h = \boxed{24}/b$ 2) *Dir.* $g = \boxed{c} \cdot n$

3) *Inv.* $2\pi r \cdot n = \overline{d},\ r \cdot n = \boxed{\frac{\overline{d}}{2\pi}},\ n = \frac{\overline{d}}{2\pi r} = \frac{\boxed{\frac{\overline{d}}{2\pi}}}{r},\ r = \frac{\overline{d}}{2\pi n} = \frac{\boxed{\frac{\overline{d}}{2\pi}}}{n}$ 4) *Dir.* $2p = \boxed{4}\ell$

5) *Dir.* $V = \boxed{B}h$, *se con B si indica l'area della base* 6) *Dir.* $V = v \cdot \boxed{\overline{t}}$

7) *Inv.* $v \cdot t = \boxed{s},\ v = \boxed{s}/t,\ t = \boxed{s}/v$, *essendo s la capacità in litri del serbatoio*

8) *Inv.* $c \cdot n = \boxed{800}$ 9) *Dir.* $d = \boxed{2\pi r} \cdot n$, *se con r si indica il raggio della ruota*

10) *Dir.* $d = \frac{p}{V},\ p = \boxed{V}d$ (*densità = peso per unità di volume*) 11) *Inv.* $\ell \cdot n = \boxed{2p}$

12) *Inv.* $nk = \boxed{c},\ n = \frac{\boxed{c}}{k},\ k = \frac{\boxed{c}}{n}$ *dove c è il numero totale di ore che ci metterebbe un uomo solo per fare il lavoro. Ovviamente, qui i valori sono stimati, approssimativi.*

13) 5 kg 14) 30 righe 15) 30 giorni 16) 10 giorni ancora 17) 190 kg
18) 10 viaggi 19) 5 minuti 20) 31,2 metri 21) 400 pagine 22) 3,5 ore (3 h 30')
23) 45 litri 24) 9 gg. in meno 25) 60 kg 26) 225 kg 27) 6 ore 28) 18 barattoli
29) 7500 euro 30) 9 ore 31) 27 quintali di merce 32) 832 euro 33) 80 giorni
34) 54 quintali 35) 10240 giocattoli 36) 36 giorni

**Matematica e Problemi della Realtà**

# PROBLEMI DELLA REALTA'
# CON RAPPORTI E PROPORZIONI

Per i problemi seguenti, puoi ricorrere ai ragionamenti più vari nonché a tutte le tue conoscenze su RAPPORTI, PROPORZIONI (eventualmente: RIDUZIONI ALL'UNITA'), PERCENTUALI, EQUAZIONI.
Mi raccomando: verifica alla fine se il valore da te trovato è corretto, prima di andare a vedere i risultati!

1) In una carta stradale la scala è 1:500000.
Qual è la distanza reale in km di due città che sulla mappa distano cm 5,5?
Se due località distano 35 km nella realtà, quanti cm disteranno sulla carta?




2) Ho una cartina geografica senza l'indicazione della scala.
Tuttavia, so che fra il paese dove vivo e il capoluogo di provincia ci sono in linea d'aria 15 km.
Se sulla cartina questa distanza è di 4 cm, quanto disteranno nella realtà due località che sul foglio si trovano a 3,2 cm l'una dall'altra?
E viceversa, a una distanza reale di 19 km quale distanza in cm corrisponderà sulla cartina?



3) Camilla è alta 1 metro e 72 cm.
In questo momento si trova nei giardinetti pubblici e la sua ombra sul terreno è lunga 1 metro e 40.
L'ombra di un pino invece è lunga 8 metri.
Quanto è alto il pino?

4) In media in una località di villeggiatura si sono avuti quest'anno 3 giorni di pioggia ogni 5 giorni di sole; in un'altra, mediamente, ogni 10 giorni ce ne sono stati 6 di sole e 4 di pioggia.
In quale delle due località si può dire, con questi dati, che il tempo sia stato migliore?

5) Su di un sacco di semi di erba per giardino di provenienza inglese c'è scritto che "per 100 piedi quadrati (square feet) di prato occorre 1 libbra (pound) di semi".
Ora, arrotondando, 1 libbra vale circa 450 grammi, e 1 piede circa 30 cm.
Se il praticello di casa mia è formato da 1 rettangolo di 12 metri per 3 più un altro rettangolo di metri 5 per 4, quanti kg di semi dovrò impiegare?



6) Gli ingredienti di una ricetta per una torta alle fragole da 25 cm di diametro, tolti quelli di peso trascurabile, sono:

160 gr di zucchero,
250 gr di farina,
150 ml di latte,
80 gr di burro,
200 gr di fragole.

**TORTA ALLE FRAGOLE**



a) E' andato però perso lo stampo del diametro di 25 cm e ce n'è uno di riserva, della stessa altezza ma col diametro di soli 20 cm.
Come andrà modificata la quantità di ciascun ingrediente?
(Occhio: passando da un diametro di 25 a uno di 20 cm, la torta *non* si riduce ai 20/25 … Perché?)

| | |
|---|---|
| gr di zucchero | … |
| gr di farina | … |
| ml di latte | … |
| gr di burro | … |
| gr di fragole | … |

b) La mamma vuole, a grande richiesta, riprendere la ricetta per la torta alle fragole; ha ritrovato, in soffitta, lo stampo da 25 cm di diametro, ma intende fare il dolce un po' più basso in modo che venga a pesare soltanto 7 etti.
Come vanno modificate le dosi degli ingredienti (1 ml di latte pesa circa 1 grammo)?

| | |
|---|---|
| gr di zucchero | … |
| gr di farina | … |
| ml di latte | … |
| gr di burro | … |
| gr di fragole | … |

7) Per stimare il numero *a* di animali presenti in un dato territorio, si opera come segue. *s* animali vengono catturati, e marcati con un segno di riconoscimento, poi liberati. Dopo un certo tempo, si catturano *b* esemplari e si conta il numero *s'* di quelli che portano il marchio. Ad es., se sono stati catturati, segnati e rimessi in libertà 60 pesci, e successivamente ne sono stati pescati 160 osservando che 12 portavano il segno, quanti pesci si può presumere che contenga quel piccolo specchio d'acqua?
Dopo aver risposto, esprimi, in generale, il numero *a* in funzione di (= per mezzo di) *b*, *s*, *s'*



Da www.kwiznet.com

8a) At the rate of 28 lines per page, a book has 300 pages. If the book has to contain only 280 pages, how many lines should a page contain? a) 29 lines b) 30 lines c) 32 lines

8b) A farmer has enough grain to feed 50 cattle for 10 days. He sells 10 cattle. For how many days will the grain last now?



9) It takes 4 men 6 hours to repair a road. How long will it take 7 men to do the job if they work at the same rate? (da www.onlinemathlearning.com; *il risultato non è intero*)

## Dividere un numero in parti proporzionali a due (o più) numeri dati

Dividere il numero 30 in parti proporzionali ai numeri 5 e 7 significa trovare due numeri *x*, *y* tali che

a. $x + y = 30$
b. $x : 5 = y : 7$

Se, partendo dalla proporzione, si applica la proprietà del "comporre gli antecedenti e i conseguenti",

si ottiene $\underbrace{(x+y)}_{30} : (5+7) = \begin{matrix} x:5 \\ y:7 \end{matrix}$ da cui $x = 12{,}5;\ y = 17{,}5$

In generale, comunque, per dividere un numero *c* in due parti proporzionali ai due numeri *a* e *b*, basta dividere *c* per la somma $a + b$ poi moltiplicare il risultato ottenuto prima per *a* poi per *b*.

10) Dividi il numero dato in parti proporzionali ai numeri a fianco specificati:

a) 45; 4 e 5 b) 60; 11 e 4 c) 100; $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ d) 0,075; 1 e 5 e) 40; 2, 3 e 5

11) Il papà ha invitato i tre figli Anna, Benedetta e Corrado a collaborare alla vita familiare con piccoli lavori come strappare le erbacce in giardino, lavare i piatti, stendere i panni … Se alla fine della settimana Anna ha lavorato per 1 ora e ½, Betty per 2 ore e Corrado per 4, e i genitori decidono di assegnare un premio di 30 euro suddividendolo in parti direttamente proporzionali al tempo impiegato, quanto spetterà a ciascuno dei tre ragazzi?

12) La mamma, insegnante di matematica, al termine dell'anno scolastico decide di assegnare ai 3 figlioli un premio, ottenuto suddividendo una cifra fissa in tre parti, INVERSAMENTE PROPORZIONALI al numero di insufficienze prese nell'anno scolastico. Ora, poiché Anna ha preso 1 sola insufficienza, Benedetta 4 e Corrado 3, e il premio da suddividere è di 100 euro, determina quanto tocca a ciascuno (approssimativamente, perché i valori esatti sono da arrotondare in quanto decimali illimitati …)

*Ragiona per conto tuo, in modo assolutamente libero, su questo problema!*
*Andare "alla caccia della regola" non serve assolutamente a niente!*
*In fondo a questa pagina, nella sezione "Risposte", c'è un'indicazione, che però - insisto - dovresti leggere soltanto alla fine, dopo aver cercato di arrivare alla soluzione senza aiuti.*

**RISPOSTE**

1) 27,5 km; 7 cm 2) 12 km; poco più di 5 cm 3) Circa 10 m (il calcolo dà ≈m 9,8) 4) Nella 1ª 5) 2,8 kg
6) a) La torta si riduce ai 400/625 = 16/25 ossia a 0,64 = 64% . 102,4; 160; 96; 51,2; 128.
b) Occorre moltiplicare la quantità di ciascun ingrediente per 700/840 ossia 5/6 (circa 0,83)
7) Si può stimare appross. in 800 pesci; $a = b \cdot s / s'$ 8a) b 8b) 12 days and ½ 9) 3+3/7 hours
10) a) 20 e 25 b) 44 e 16 c) 40 e 60 d) 0,0125 e 0,0625 e) 8, 12 e 20 11) 6, 8 e 16 euro
12) Cosa vuol dire, innanzitutto, "inversamente proporzionali a 1, 4, 3"?
Vuol dire che se Anna con 1 insufficienza prende *tot*, allora Benedetta con 4 deve prendere la 4ª parte … e allora *inversamente proporzionali a 1, 4 e 3* significa *direttamente proporzionali a 1, 1/4 e 1/3* …
Controlla, alla fine del procedimento, che, ad esempio, il premio spettante ad Anna sia il quadruplo di quello di Benedetta, che Benedetta prenda i ¾ di Corrado, ecc.; controlla anche che la somma dei tre premi dia effettivamente 100 €. Comunque, approssimando all'intero, i valori spettanti risultano essere di euro 63, 16 e 21. I tre ragazzi hanno una mamma molto originale … e, immaginiamo, simpatica ☺.

## 3. I GRAFICI DELLA PROPORZIONALITA' DIRETTA E INVERSA

A) Riprendiamo ancora l'esempio di GRANDEZZE DIRETTAMENTE PROPORZIONALI da cui eravamo partiti (pag. 178):
gli *euro* guadagnati dalla signora delle pulizie e le sue *ore* di lavoro (il costo orario era di 8 euro).

| ore $x$ | euro $y$ |
|---|---|
| 1 | 8 |
| 2 | 16 |
| 3 | 24 |
| 4 | 32 |
| 5 | 40 |
| … | ... |

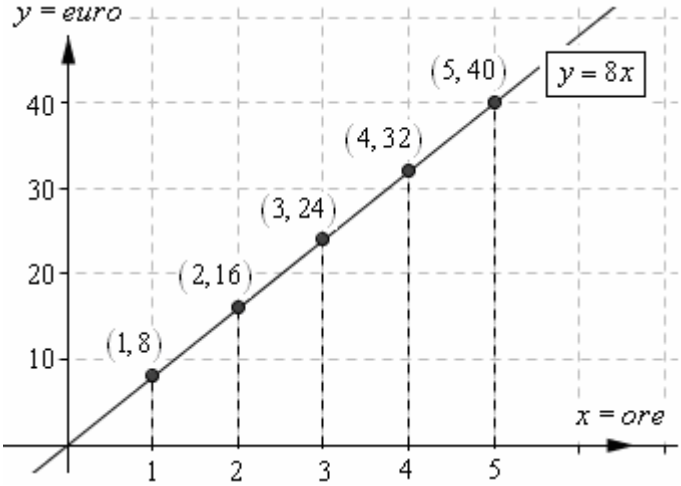
Indicato con $x$ il numero di *ore*, e con $y$ il numero corrispondente di *euro*,
la relazione che lega $x$ con $y$ è la

$$y = 8x$$

e rappresentando questa funzione $y = 8x$ in un riferimento cartesiano,
ossia evidenziando nel riferimento quei punti le cui coordinate $(x, y)$
sono costituite da una coppia di valori che si corrispondono

$(1,8)$ $(2,16)$ $(3,24)$ $(4,32)$ $(5,40)$ ...

vediamo che questi punti sono ALLINEATI fra loro:
stanno tutti su di una RETTA (passante per l'origine).




Abbiamo scelto,
per ovvi motivi di opportunità,
unità di misura diverse
in orizzontale (1 quadretto = 1 ora)
e in verticale (1 quadretto = 10 euro).

I punti sarebbero risultati allineati
anche scegliendo le unità di misura
in modo diverso.

Se si rappresenta sul piano cartesiano la legge che lega due grandezze
**DIRETTAMENTE PROPORZIONALI** $x$, $y$

$$y = k \cdot x$$

si ha sempre che i punti del grafico sono *allineati* fra loro:
essi giacciono su di una **RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE**.

- Una particella materiale libera (non soggetta, cioè, a forze) appare, ad un osservatore "inerziale" (ossia, libero a sua volta), in quiete oppure in moto rettilineo uniforme con velocità $v$ costante.
  La legge spazio-tempo è $s = vt$ e lo spazio percorso è direttamente proporzionale al tempo del moto.
- Una molla che sia stata allungata o compressa di una certa lunghezza $x$ esercita una forza elastica definita dalla relazione $F = -kx$ (il segno $-$ sta a indicare che il verso della forza è opposto a quello della deformazione), essendo $k$ la "costante elastica" della molla.
  La forza $F$ è perciò direttamente proporzionale all'allungamento o compressione $x$.
- Un corpo di massa $m$ che si trovi ad una altezza $h$ da terra ha una "energia potenziale gravitazionale" $U = mgh$, dove $g$ è una costante, data dall'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre. Perciò l'energia potenziale gravitazionale di un corpo è direttamente proporzionale all'altezza a cui si trova.
- La legge di Stevino afferma che la pressione di un liquido di densità $\rho$ ad una data profondità $h$ è data da $p = \rho gh$ ed è quindi direttamente proporzionale alla profondità.

B) E il grafico di una PROPORZIONALITÀ INVERSA, che forma avrà?

Riprendiamo l'esempio del tragitto fisso di 2 km percorso a differenti velocità (pag. 179): velocità e tempo di percorrenza erano grandezze inversamente proporzionali, perché raddoppiando la velocità dimezzava il tempo impiegato.

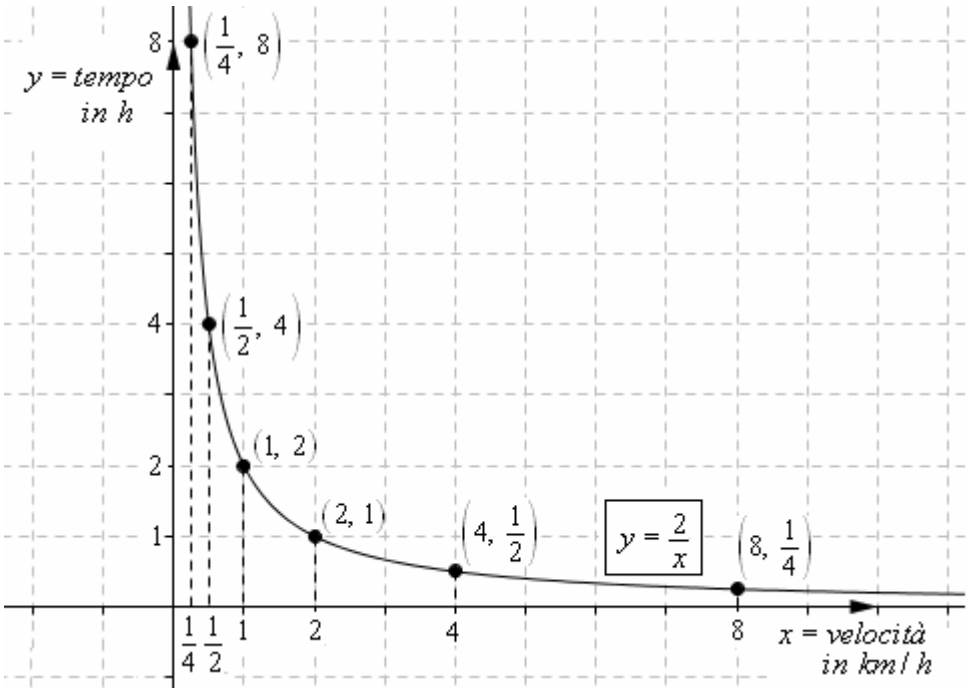
| Velocità $x$ in km all'ora | tempo $y$ in ore per fare i 2 km |
|---|---|
| 1/4 | 8 |
| 1/2 | 4 |
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |
| 4 | 1/2 |
| 8 | 1/4 |
| … | ... |

La formula era

$tempo = \dfrac{2}{velocità}$ (*tempo* in ore, *distanza fissa* di 2 km, *velocità* espressa in km all'ora)

ossia

$\boxed{y = \dfrac{2}{x}}$ $(xy = 2)$




Se si rappresenta sul piano cartesiano la legge che lega due grandezze
**INVERSAMENTE PROPORZIONALI** $x$, $y$

$\boxed{y = \dfrac{k}{x}}$

i punti del grafico giacciono su di un **RAMO DI IPERBOLE**.

- La 2ª legge di Newton, se viene scritta nella forma $a = F / m$, ci dice che l'accelerazione $a$ subita da un corpo di massa $m$ quando gli viene applicata una forza di intensità $F$,
  - è direttamente proporzionale alla forza,
  - ed è (per una forza fissata) inversamente proporzionale alla massa.

- Per un gas perfetto sottoposto a una trasformazione isoterma ( = a temperatura costante) vale la legge di Boyle-Mariotte, secondo la quale pressione e volume sono inversamente proporzionali:

$p \cdot V = \text{costante}, \quad V = \dfrac{\text{costante}}{p}, \quad p = \dfrac{\text{costante}}{V}$

## 4. PROPORZIONALITA' RISPETTO AL QUADRATO, E RISPETTO ALL'INVERSO DEL QUADRATO

Se lasciamo cadere un sassolino nel fiume da un viadotto molto alto,
la legge che regola la caduta dei gravi ci dice che il sasso percorrerà uno spazio *s* dato da

$s = 4{,}9 \cdot t^2$ (spazio *s* misurato in metri, tempo *t* misurato in secondi): quindi

dopo 1 secondo dall'inizio della caduta il sasso avrà percorso in discesa un tratto di $4{,}9 \cdot 1^2 = 4{,}9$ metri
dopo 2 secondi dall'inizio della caduta avrà percorso $4{,}9 \cdot 2^2 = 19{,}6$ metri
dopo 3 secondi avrà percorso $4{,}9 \cdot 3^2 = 44{,}1$ metri
eccetera.

Pertanto
se il tempo di caduta raddoppia, la distanza percorsa dall'oggetto è il quadruplo,
se il tempo di caduta triplica, la distanza percorsa risulta moltiplicata per 9, ecc.

> Quando la legge che lega due grandezze *x*, *y* è della forma
>
> $\boxed{y = kx^2}$
>
> si dice che ***y* è DIRETTAMENTE PROPORZIONALE AL QUADRATO di *x***.

La legge di attrazione gravitazionale afferma che due masse $m_1, m_2$ esercitano sempre l'una sull'altra una forza di reciproca attrazione la cui intensità è data da

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

essendo *G* una costante della natura detta "costante di gravitazione universale",
ed essendo *d* la distanza delle due masse.
Pertanto se la distanza raddoppia, la forza attrattiva si riduce alla quarta parte,
se la distanza triplica, la forza attrattiva si riduce a 1/9 di quella iniziale, ecc.

La legge che lega *F* a *d* è quindi della forma $F = \frac{k}{d^2}$

> Quando la legge che lega due grandezze *x*, *y* è della forma
>
> $\boxed{y = \frac{k}{x^2} = k \cdot \frac{1}{x^2}}$
>
> si dice che ***y* è INVERSAMENTE PROPORZIONALE AL QUADRATO di *x***
> **( = PROPORZIONALE ALL'INVERSO DEL QUADRATO di *x*)**.

### ESEMPI (SUI VARI TIPI DI PROPORZIONALITA')

- Lo spazio *s* percorso da un corpo che, inizialmente fermo, viene lasciato cadere a terra per effetto della forza peso, è *direttamente proporzionale al quadrato* del tempo *t* di caduta, secondo la relazione

  $$s = \frac{1}{2}gt^2$$

  (*g* è costante: è l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre, uguale a $\approx 9{,}8$ m/s per ogni secondo).
  Più in generale, qualunque corpo soggetto ad una forza costante *F* subisce una accelerazione costante *a* e se inizialmente (istante $t = 0$) era fermo, comincia a muoversi secondo la legge

  $$s = \frac{1}{2}at^2$$

- L'energia cinetica ( = dovuta al movimento) di un corpo di massa $m$, che si muove con velocità $v$, è

  $$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$ (NOTA: per indicare l'energia cinetica si possono utilizzare i simboli $E_c$, $E_k$, K)

  e risulta perciò *direttamente proporzionale al quadrato* della velocità.

- Una molla che sia stata allungata o compressa di una certa lunghezza $x$ ha "immagazzinato energia", ed è in grado di compiere un lavoro uguale al lavoro che è stato necessario per comprimerla o allungarla.
  Detta $k$ la "costante elastica" della molla,
  l'energia potenziale elastica posseduta dalla molla dopo la deformazione è data da

  $$U = \frac{1}{2}kx^2$$

  NOTA: per indicare l'energia potenziale ( = legata alla posizione) sono utilizzati sia il simbolo $E_p$ che il simbolo U, ma U è più frequente

  ed è perciò *direttamente proporzionale al quadrato* di *x*.

- La forza di attrazione gravitazionale fra due masse $m_1$ e $m_2$ è regolata dalla legge

  $$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$ dove *G* è una costante della natura detta "costante di gravitazione universale",

  ed è quindi *inversamente proporzionale al quadrato* della distanza *d*.

- Similmente, la forza di attrazione o repulsione fra due cariche elettriche $Q_1$ e $Q_2$ è regolata dalla legge

  $$F = \frac{kQ_1Q_2}{d^2}$$

  dove *k* è una costante che dipende dal mezzo in cui le due cariche sono immerse (il vuoto, l'aria, ecc.).
  Quindi l'intensità di tale forza è *inversamente proporzionale al quadrato* della distanza *d* delle cariche.

- L'intensità di un suono che è stato prodotto da una sorgente puntiforme
  è *inversamente proporzionale al quadrato* della distanza *R* dalla sorgente, secondo la formula

  $$I = \frac{P}{4\pi R^2}$$

  dove *P* è una costante ("potenza", ovvero energia emessa nell'unità di tempo, dalla sorgente sonora).

- Se un solido viene ingrandito, o rimpicciolito, di un dato "fattore di scala",
  il volume cambia in modo *direttamente proporzionale al cubo* del fattore di scala:
  ad esempio,
  - se le misure lineari vengono moltiplicate per 2, il volume risulta moltiplicato per 8;
  - se le misure lineari vengono moltiplicate per 3, il volume risulta moltiplicato per 27.

  $$V_2 = V_1\left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)^3$$

- Terza legge di Keplero: i quadrati dei periodi *T* di rivoluzione dei pianeti sono
  *direttamente proporzionali ai cubi* dei semiassi maggiori *d* delle loro orbite.

  $$T^2 = kd^3 \quad o \quad \frac{T^2}{d^3} = k$$

- Il periodo *T* di un pendolo ( = il tempo occorrente al pendolo per compiere un'oscillazione completa)
  è *direttamente proporzionale alla radice quadrata* della sua lunghezza $\ell$: vale infatti la relazione

  $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{g}}$$ dove *g* è costante, essendo l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre.

- La prima legge di Ohm, scritta nella forma

  $$I = \frac{V}{R},$$

  afferma che l'intensità *I* della corrente elettrica che percorre un filo conduttore di data resistenza *R*
  è *direttamente proporz*ionale alla differenza di potenziale *V* applicata agli estremi del filo.
  Se invece si pensa fissata la differenza di potenziale,
  l'intensità *I* di corrente è *inversamente proporzionale* alla resistenza *R* del filo.
  La "resistenza" misura la difficoltà che la corrente incontra nel fluire attraverso il filo.

- Per un filo conduttore di sezione *S* costante, il valore *R* della resistenza è *direttamente proporzionale* alla lunghezza $\ell$. Se invece è $\ell$ che resta costante, *R* è *inversamente proporzionale* alla sezione *S*.
  La relazione $R = \rho\frac{\ell}{S}$ è detta "seconda legge di Ohm".
  La costante $\rho$ si chiama "resistività"; dipende dal materiale di cui è fatto il filo (e dalla temperatura).

# PROBLEMI IN PIU' INCOGNITE - SISTEMI DI EQUAZIONI

## 1. I SISTEMI DI EQUAZIONI E IL METODO DI "SOSTITUZIONE"

### ❑ PROBLEMA SVOLTO 1

**Trovare due numeri interi sapendo che:**

- **se si diminuisce il più grande di 4 unità e si aumenta di 3 unità il più piccolo, il prodotto dei due numeri diminuisce di 8 unità;**
- **se si divide la somma dei due numeri per la loro differenza si ottiene quoziente 6 e resto 2.**

E' subito evidente **la grande difficoltà a cui si andrebbe incontro se si cercasse di risolvere con una sola incognita**.
Infatti, riflettiamo: qualunque numero fra i due decidessimo di indicare con *x*, come faremmo poi ad esprimere l'altro numero per mezzo di *x* ? Sarebbe un bel grattacapo!!!

Pertanto **imposteremo questo problema con DUE INCOGNITE anziché con una sola**.

**Quando si risolve con più di una incognita**
**(e ciò è opportuno specialmente quando non è facile esprimere tutte le quantità in gioco in funzione di una sola di esse)**
**si scrivono tante equazioni quante sono le incognite poste**
**e le si riunisce entro una "graffa di sistema",**
**che equivale, dal punto di vista logico, a un connettivo "ET".**



**Risolvere un sistema significa determinare quei valori delle incognite in gioco che soddisfano CONTEMPORANEAMENTE TUTTE le equazioni da cui il sistema è formato.**

RISOLUZIONE

*x = numero più grande*
*y = numero più piccolo*

$$\begin{cases}(x-4)(y+3)=xy-8\\ 6(x-y)+2=x+y\end{cases}$$

NOTA *a:b dà* 6 *col resto di* 2 *quando* $6b+2=a$ $(e\ 2<b)$

Innanzitutto, svolgiamo i calcoli e portiamo il sistema in "**FORMA NORMALE**".
Ciò significa che, in ciascuna equazione, dovremo fare in modo di avere:

- **a primo membro, un termine per ognuna delle incognite poste;**
- **a secondo membro, il termine noto.**

$$\begin{cases}\cancel{xy}+3x-4y-12=\cancel{xy}-8\\ 6x-6y+2=x+y\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x-4y=-8+12\\ 6x-x-6y-y=-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x-4y=4\\ 5x-7y=-2\end{cases}$$ **FORMA NORMALE**

A questo punto, possiamo proseguire scegliendo a piacere fra:

1) **il metodo di sostituzione** (*il più semplice e generale*)
2) **il metodo di riduzione** (*molto brillante e divertente*)
3) **il metodo di Cramer** (*basato sui "determinanti", completamente "meccanico"; pagg. 201 … 203*)
4) **il metodo del confronto** (*applicabile solo con 2 equazioni e 2 incognite; vedi pag. 200*)

Occupiamoci innanzitutto del metodo 1).

Il metodo di **SOSTITUZIONE** consiste
nell'**isolare un'incognita da una delle due equazioni**
**per sostituire poi** l'espressione così ottenuta **nell'altra equazione,**
**che in tal modo si troverà a contenere un'incognita sola**.

$$\begin{cases} 3x-4y=4 \\ 5x-7y=-2 \end{cases}$$

(*)

♥ **Teoricamente si può isolare un'incognita qualsiasi da un'equazione qualsiasi, ma nella pratica converrà, per comodità di calcolo, privilegiare l'equazione più semplice e soprattutto il termine col coefficiente più semplice,** perché questo coefficiente è poi destinato a passare a denominatore! … E avere un denominatore piccolo è vantaggioso quando poi lo si manda via.

$$\begin{cases} 3x=4y+4; \quad x=\dfrac{4y+4}{3} \\ 5\cdot\dfrac{4y+4}{3}-7y=-2 \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{4y+4}{3} \\ \dfrac{20y+20}{3}-7y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{4y+4}{3} \\ \dfrac{20y+20-21y}{\cancel{3}}=\dfrac{-6}{\cancel{3}} \;;\; -y=-26 \;;\; y=26 \end{cases} \quad (**)$$

♥ La **VERIFICA**, in un sistema, si effettua sostituendo, nel sistema iniziale, al posto delle singole incognite, i valori rispettivamente trovati.

**TUTTE le equazioni devono trasformarsi in uguaglianze vere**, altrimenti c'è qualcosa che non va.

Vuoi un **CONSIGLIO DA AMICO**? **DAVVERO UTILISSIMO**?



**Falla sempre, questa verifica, alla fine della risoluzione!** In questo modo sarai davvero sicuro di aver fatto giusto, oppure scoprirai inequivocabilmente che c'è un errore!!!

$$\begin{cases} y=26 \\ x=\dfrac{4y+4}{3}=\dfrac{4\cdot 26+4}{3}=\dfrac{104+4}{3}=\dfrac{108}{3}=36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=36 \\ y=26 \end{cases}$$

VERIFICA sul sistema (**):

$$\begin{cases} (36-4)(26+3)=36\cdot 26-8 \\ 6(36-26)+2=36+26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32\cdot 29=936-8 \\ 6\cdot 10+2=62 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 928=928 \\ 62=62 \end{cases} \quad OK!!!$$

La VERIFICA direttamente sul *problema* (che poi è la più completa e "sicura"), è lasciata al lettore.

## ❑ PROBLEMA SVOLTO 2

**Anna dice al fratello Bruno:**
**"Il numero dei miei fratelli è uguale al doppio del numero delle mie sorelle".**
**E Bruno replica:**
**"Io, invece, ho tanti fratelli quante sorelle".**
**Quanti figli maschi e quante figlie femmine ci sono in famiglia?**

$x$ = *numero figlie femmine*
$y$ = *numero figli maschi*

$$\begin{cases} y=2(x-1) \\ y-1=x \end{cases}$$

NOTA
Il sistema ottenuto è molto elementare, e con un'equazione già nella forma $y=\ldots$
In casi simili, si potrebbe anche evitare di portare in forma normale; tuttavia, l'abbiamo fatto ugualmente "per buona abitudine", dato che nella maggioranza dei casi è utilissimo, anche in vista di altri metodi di risoluzione (riduzione, Cramer).

$$\begin{cases} y=2x-2 \\ -x+y=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} -2x+y=-2 \\ -x+y=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=x+1 \\ -2x+x+1=-2; \;\; -x=-3; \;\; x=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=3 \\ y=x+1=3+1=4 \end{cases}$$

VERIFICA, direttamente sul problema

*3 femmine e 4 maschi :* $\underset{\text{ANNA}}{F} \quad F \quad F \quad M \quad M \quad M \quad \underset{\text{BRUNO}}{M}$

*Giusto*: *Anna può dire che il numero dei suoi fratelli è due volte quello delle sue sorelle ...*
*... e Bruno ha ragione quando afferma di avere tanti fratelli quante sorelle.*

## 2. LA RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA CON PIU' DI UNA INCOGNITA: CONSIDERAZIONI GENERALI

Di fronte ad un problema, *di norma è preferibile la risoluzione con una sola incognita*, la quale, come sappiamo, si svolge in tre fasi:

1) Porre l'incognita
2) Esprimere le varie quantità in gioco per mezzo dell'incognita
3) Impostare l'equazione risolvente

Se, tuttavia, la fase 2) si preannuncia come *particolarmente difficoltosa*, ossia:

**se accade che, comunque si ponga l'incognita,**
**si prospetti poi molto complicato**
**esprimere le varie quantità in gioco tramite l'incognita scelta,**
**allora si passerà ad una impostazione con due o più incognite**.

**Si dovranno in tal caso scrivere tante equazioni quante sono le incognite poste,**
**e raggruppare queste equazioni nella cosiddetta "graffa di sistema".**

Vedremo più avanti, in un capitolo apposito (pag. 402), cosa accade quando il numero delle condizioni non coincide col numero delle incognite.

**Si dice dunque**
**"SISTEMA DI EQUAZIONI"**
**un gruppo di due o più equazioni,**
**contenenti due o più incognite,**
**rispetto al quale l'obiettivo è**
**di trovare quei valori delle incognite che verificano**
**♥ CONTEMPORANEAMENTE TUTTE**
**le equazioni in gioco, NESSUNA ESCLUSA.**

In lingua Inglese, in effetti, troviamo scritto "system of equations" oppure, in alternativa, "SIMULTANEOUS equations", ossia equazioni per le quali cerchiamo quei valori delle incognite che le soddisfino *simultaneamente tutte quante*.



*La "graffa di sistema" $\begin{cases}\\\\\end{cases}$ significa "ET":*

$$\begin{cases}(1)\\(2)\\(3)\end{cases} \quad \text{è come dire} \quad \begin{matrix}(1)\\ET\\(2)\\ET\\(3)\end{matrix}$$

## 3. SISTEMI DI EQUAZIONI: ALTRI ESEMPI SVOLTI (SOSTITUZIONE)

Ecco qui di seguito due altri esempi svolti e commentati

❑ $\begin{cases}3x+4y=5\\ \frac{1}{3}-\frac{y}{6}=\frac{1}{2}-x\end{cases}$; $\begin{cases}3x+4y=5\\ \frac{2-y}{6}=\frac{3-6x}{6}\end{cases}$

$\begin{cases}3x+4y=5\\ 6x-y=1\end{cases}$ (*)

$\begin{cases}-y=1-6x;\ \ y=6x-1\\ 3x+4(6x-1)=5\end{cases}$

$\begin{cases}y=6x-1\\ 3x+24x-4=5;\ \ 27x=9;\ \ x=1/3\end{cases}$

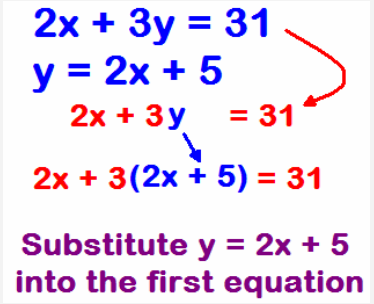
$\begin{cases}x=1/3\\ y=6x-1=6\cdot\frac{1}{3}-1=2-1=1\end{cases}$

Verifica: $\begin{cases}3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot 1=5\\ 6\cdot\frac{1}{3}-1=1\end{cases}$; $\begin{cases}1+4=5\\ 2-1=1\end{cases}$ *OK*

**♥ SE CI SONO DEI DENOMINATORI, ELIMINARLI IN MODO CORRETTO;**

**PORTARE IN FORMA NORMALE (quasi sempre molto conveniente)**

(*) In questo caso è conveniente isolare *y* dalla seconda equazione; infatti questa contiene il termine $-y$, nel quale *y* ha come coefficiente $-1$, per cui, per isolare la *y*, occorrerà a un certo punto effettuare un cambiamento dei segni, ma in compenso non verrà introdotto alcun denominatore!




Dal sito http://maths.nayland.school.nz

❑ $\begin{cases} \dfrac{x-2y-2}{3}-\dfrac{4x-y}{6}=1 \\ \dfrac{x+y-3}{5}=\dfrac{x-y-1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \left(\dfrac{x-2y-2}{3}-\dfrac{4x-y}{6}\right)\cdot\dfrac{1}{2}=1 \quad (1) \\ \dfrac{2x+2y-6}{\cancel{10}}=\dfrac{5x-5y-5}{\cancel{10}} \quad (2) \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{2x-4y-4-4x+y}{6}\cdot\dfrac{1}{2}=1 \\ 2x+2y-6=5x-5y-5 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{-2x-3y-4}{12}=1 \\ 2x-5x+2y+5y=6-5 \end{cases}$

$\begin{cases} -2x-3y-4=12 \quad (3) \\ -3x+7y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} -2x-3y=16 \\ -3x+7y=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x+3y=-16 \\ 3x-7y=-1 \end{cases} \quad (4)$

$\begin{cases} 2x=-16-3y; \quad x=\dfrac{-16-3y}{2} \\ 3\cdot\dfrac{-16-3y}{2}-7y=-1 \quad (5) \end{cases}$

$\dfrac{-48-9y}{2}-7y=-1$

$-48-9y-14y=-2$

$-23y=46; \quad y=-2$

$\begin{cases} y=-2 \\ x=\dfrac{-16-3y}{2}=\dfrac{-16+6}{2}=\dfrac{-10}{2}=-5 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-5 \\ y=-2 \end{cases} \quad (6)$

Per esercizio,
puoi risolvere i sistemi seguenti:

I) $\begin{cases} 3x+4y=50 \\ 7x+y=0 \end{cases}$

II) $\begin{cases} 2x-y+10=0 \\ 3(x+5)-7y=0 \end{cases}$

III) $\begin{cases} 3(x-y)=7-y \\ \dfrac{2x+3}{5}+\dfrac{1}{2}y=0 \end{cases}$

IV) $\begin{cases} x-2y=\dfrac{1+2y}{3} \\ 4(x-1)-4(y-1)=3x \end{cases}$

facendo poi la
VERIFICA PER SOSTITUZIONE.

(1)

L'equazione $\dfrac{\dfrac{x-2y-2}{3}-\dfrac{4x-y}{6}}{2}=1$

è stata riscritta come $\left(\dfrac{x-2y-2}{3}-\dfrac{4x-y}{6}\right)\cdot\dfrac{1}{2}=1$

allo scopo di eliminare le linee di frazione sovrapposte.

A dire il vero, sarebbe stato qui molto più "furbo" raggiungere lo stesso obiettivo moltiplicando per 2 entrambi i membri:

$\cancel{2}\cdot\dfrac{\dfrac{x-2y-2}{3}-\dfrac{4x-y}{6}}{\cancel{2}}=1\cdot 2; \quad \dfrac{x-2y-2}{3}-\dfrac{4x-y}{6}=2$

(2)

L'equazione $\dfrac{x+y-3}{5}=\dfrac{x-y-1}{2}$

avrebbe potuto essere privata dei denominatori anche col

♥ **metodo delle "MOLTIPLICAZIONI INCROCIATE"**:

$$\frac{x+y-3}{5}=\frac{x-y-1}{2} \quad \leftrightarrow \quad 2\cdot(x+y-3)=5\cdot(x-y-1)$$

Infatti, in generale, è

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}} \Leftrightarrow \cancel{b}d\cdot\frac{a}{\cancel{b}}=\frac{c}{\cancel{d}}\cdot b\cancel{d} \Leftrightarrow \boxed{ad=bc}$$

(3)

Qui abbiamo eliminato il denominatore nell'equazione

$$\frac{-2x-3y-4}{12}=1$$

moltiplicandone ambo i membri per 12.

(4)

**E' preferibile, in linea di massima,**
**fare in modo che**
**i coefficienti delle incognite**
**siano prevalentemente positivi**
**(soprattutto, è ritenuto "elegante", anche se**
**non è per nulla indispensabile, che sia positivo il primo).**
A tale scopo, è possibile cambiare tutti i segni
(è come moltiplicare sia il 1° che il 2° membro per –1).

(5)

Ecco ottenuta l'equazione risolvente del sistema,
quella a una sola incognita.

Se, come in questo caso,
la sua risoluzione richiede diversi passaggi,
direi che sia inutile trascrivere sempre,
per ciascuno dei passaggi, la graffa di sistema;
risolviamo "a parte" l'equazione,
poi, quando avremo finalmente trovato la soluzione,
ritorneremo al sistema con la sua graffa.

(6)

E' **opportuno** che nell'**ultimo passaggio**
le **incognite** siano **trascritte**
**nel loro ordine alfabetico-logico.**

## 4. SISTEMI A DUE INCOGNITE: IL METODO DI "RIDUZIONE" (DETTO ANCHE "DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE")

Si tratta di un metodo che in taluni casi "fortunati"
può rendere la risoluzione di un sistema assai rapida e divertente.

*Non ci credi? Considera gli esempi che seguono.*

- $\begin{cases} 9x+8y=22 \\ 5x-8y=6 \end{cases}$

Possiamo notare che **nelle due equazioni date, i termini contenenti *y* sono OPPOSTI** $(+8y,\ -8y)$.
**Se quindi noi andiamo ad ADDIZIONARE MEMBRO A MEMBRO le due equazioni, otterremo un'equazione che non conterrà più la *y*, ma soltanto la *x*!**

$(1)+(2)\begin{cases} 14x=28 & (*) \\ 5x-8y=6 & (**) \end{cases}$

$\begin{cases} x=2 \\ 5\cdot 2-8y=6 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2 \\ 10-8y=6 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2 \\ -8y=-4;\quad y=1/2 \end{cases}$

(*)
Questa equazione proviene dalla somma membro a membro delle due equazioni iniziali:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $9x$ | $+8y$ | $=$ | $22$ |
| $5x$ | $-8y$ | $=$ | $6$ |
| $14x$ | // | $=$ | $28$ |

(**)
♥ **Il sistema, che era partito con due equazioni, deve proseguire sempre con due equazioni. Quindi una (a scelta) fra le due equazioni di partenza va "recuperata". E' chiaro che, siccome si può scegliere, sarà preferibile recuperare la più semplice.**

- Vediamo quest'altro esercizio.

$\begin{cases} 5x+y=2 \\ 5x+4y=-19 \end{cases}$

**Questa volta abbiamo due termini nella stessa incognita (la *x*) che sono UGUALI. Perciò potremo far scomparire la *x*: ci basterà SOTTRARRE MEMBRO A MEMBRO le due equazioni.**

$(1)-(2)\begin{cases} -3y=21 & (*) \\ (1)\quad 5x+y=2 & (**) \end{cases}$

$\begin{cases} y=-7 \\ 5x-7=2;\ 5x=9;\ x=9/5 \end{cases}$

(*)
Questa equazione proviene dalla sottrazione membro a membro delle due equazioni iniziali:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $5x$ | $+y$ | $=$ | $2$ |
| $5x$ | $+4y$ | $=$ | $-19$ |
| // | $-3y$ | $=$ | $21$ |

$y-4y=-3y$

$2-(-19)=2+19=21$

(**)
Equazione "recuperata" scegliendola fra le due di partenza, per completare il sistema.

- Nel caso del sistema seguente:

$\begin{cases} 12x-5y=14 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$

il metodo di riduzione sembrerebbe non applicabile,
in quanto né la *x* né la *y* hanno, nelle due equazioni,
ugual coefficiente, o coefficienti opposti.
Possiamo però osservare che i due termini con *x*
hanno coefficienti che sono uno multiplo dell'altro (infatti è $12=4\cdot 3$).
**Se** dunque **moltiplichiamo la seconda equazione per 4,**
**ci porteremo ad avere 12*x* anche nella seconda equazione,**
**dopodiché potremo sottrarre membro a membro e sbarazzarci di *x*.**

$$4\cdot\begin{cases}12x-5y=14\\3x+2y=10\end{cases}$$

$$\begin{cases}12x-5y=14\\12x+8y=40\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(2)-(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}13y=26\ (*);\ y=2\\3x+2y=10\ (**);\ 3x+4=10;\ x=2\end{cases}$$

(*) Abbiamo preferito fare $(2)-(1)$ anziché $(1)-(2)$ esclusivamente per una piccola questione di opportunità: infatti in questo modo abbiamo ottenuto, sottraendo, un termine in $y$ con coefficiente positivo ($+13y$)

(**) Delle due equazioni in gioco abbiamo recuperato la più semplice, che era poi la $(2)$, presa PRIMA della moltiplicazione per 4.

- Ed ecco ora una situazione ancora più generale. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases}10x+7y=31\\4x-3y=-5\end{cases}$$

Qui non abbiamo, su di una stessa colonna, né due coefficienti uguali, né due coefficienti opposti, e nemmeno due coefficienti che siano uno multiplo dell'altro.

Tuttavia, **se proprio lo si desidera, il metodo di riduzione è applicabile anche in questo caso. Occorrerà, però, moltiplicare dapprima ENTRAMBE le equazioni, scegliendo i due moltiplicatori in modo che, al termine del procedimento, o la *x* o la *y* si trovi ad avere, nelle due equazioni, coefficienti uguali, o in alternativa opposti.**

A tale scopo:

- se vogliamo eliminare la *x*, moltiplicheremo la prima equazione per 2 e la seconda per 5, così da ottenere il termine $20x$ in entrambe e poi sottrarre membro a membro (oppure, potremmo moltiplicare la prima equazione per 2 e la seconda per $-5$ e poi *sommare* membro a membro);
- se vogliamo eliminare la *y*, moltiplicheremo la prima equazione per 3 e la seconda per 7, per ottenere $+21y$ nella prima equazione e $-21y$ nella seconda, e poi sommare membro a membro.

$$\begin{matrix}2\cdot\\5\cdot\end{matrix}\begin{cases}10x+7y=31\\4x-3y=-5\end{cases}$$

$$\begin{cases}20x+14y=62\\20x-15y=-25\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)-(2)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}29y=87;\ y=3\\4x-3y=-5;\ 4x-9=-5;\ 4x=4;\ x=1\end{cases}\qquad\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$$

NOTA
Le annotazioni a sinistra della graffa non sono, evidentemente, obbligatorie, ma sono estremamente utili per fissare le idee e per agevolare la rilettura.
L'annotazione (vedi esempio) "$(1)-(2)$" è opportuno che venga collocata *sulla riga nella quale viene effettuata la combinazione lineare.*

*L'ultimo esercizio proposto mostra che, VOLENDO, il metodo di riduzione è applicabile SEMPRE.*

*Ma, ci si chiederà, IN QUALI CASI questo metodo è effettivamente PIU' CONVENIENTE rispetto al metodo di sostituzione?*

*La risposta dipende in una certa misura dalle preferenze dello studente …*
*Tuttavia, direi senz'altro che, almeno nei casi in cui due coefficienti di una stessa incognita risultino, fin dall'inizio, uguali oppure opposti, "riduzione" appare di gran lunga "vincente" rispetto a "sostituzione".*

- *Ecco a proposito un ultimissimo esempio:*

$$\begin{cases}\dfrac{2x-1}{7}=\dfrac{1}{3}y\\4(x+1)-7y+1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{6x-3}{21}=\dfrac{7y}{21}\\4x+4-7y+1=0\end{cases}$$

***OCCHIO***!!! RICORDA che **QUASI SEMPRE, quando si deve risolvere un sistema di equazioni, CONVIENE INNANZITUTTO**
♪ **MANDAR VIA GLI EVENTUALI DENOMINATORI**
♫ **e PORTARE IN "FORMA NORMALE"**:
in ciascuna equazione si dovrà avere
**a 1° membro, un termine per ogni incognita presente;**
**a 2° membro, il termine noto.**



$$\begin{cases}6x-7y=3\\4x-7y=-5\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)-(2)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}2x=8;\ x=4\\16-7y=-5;\ -7y=-21;\ y=3\end{cases}$$

Volendo, nel sistema qui a fianco risolto (preso nella sua "forma normale") avremmo potuto cambiare i segni di una delle due equazioni in gioco, dopodiché, avendosi $7y$ nell'una e $-7y$ nell'altra, avremmo *sommato* membro a membro anziché sottratto.

# 5. SISTEMI CON PIU' DI DUE INCOGNITE: METODO DI SOSTITUZIONE

- Esempio 1

$$\begin{cases} 2(x-z)=1+3y \\ 4x-y-4z=7 \\ \dfrac{x-6}{4}+\dfrac{x+y}{3}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-2z=1+3y \\ 4x-y-4z=7 \\ \dfrac{3x-18+4x+4y}{12}=\dfrac{0}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3y-2z=1 \\ 4x-y-4z=7 \\ 7x+4y=18 \end{cases}$$ *Così il sistema è in* FORMA NORMALE

$$(2)\ -y=-4x+4z+7;\quad y=4x-4z-7$$

$$\begin{cases} (1)\ 2x-3(4x-4z-7)-2z=1 \\ (3)\ 7x+4(4x-4z-7)=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4x-4z-7 \\ 2x-12x+12z+21-2z=1 \\ 7x+16x-16z-28=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4x-4z-7 \\ -10x+10z=-20^{2} \\ 23x-16z=46 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4x-4z-7 \\ z=x-2 \\ 23x-16(x-2)=46;\ \ldots\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ z=2-2=0 \\ y=8-0-7=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

**♥ Coi sistemi in tre o più incognite è più che mai RACCOMANDATA la comoda VERIFICA FINALE sostituendo nel sistema di partenza. TUTTE le equazioni dovranno essere verificate dai valori trovati!**

**PRIMO OBIETTIVO:**
**PORTARE IN "FORMA NORMALE" !!!**

♥ Ricordiamo (è davvero importante!) che quando si deve risolvere un sistema di equazioni, quasi sempre conviene **innanzitutto portarlo in "FORMA NORMALE"**.

Insomma, **in ciascuna equazione** si farà in modo di avere:
**a 1° membro, un termine per ogni incognita presente;**
**a 2° membro, il termine noto;**
**il tutto, SENZA DENOMINATORI.**

**COME SI APPLICA IL METODO DI SOSTITUZIONE CON PIU' INCOGNITE**

**Si isola un'incognita** da una qualsiasi delle n equazioni e poi **si va a sostituire** nelle n–1 equazioni restanti l'espressione che si è ottenuta a secondo membro.

Si perviene così ad un "**sottosistema**" di n–1 equazioni in n–1 incognite.

**Iterando** ( = ripetendo) eventualmente **il procedimento** su questo sotto-sistema, si può abbassare progressivamente il numero delle equazioni e delle incognite su cui lavorare, fino ad ottenere **un'equazione con un'incognita sola**.

- Esempio 2

$$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 3x+2y+z=5 \\ 5x+4y+4z=11 \end{cases}$$ *Questo sistema è già in* FORMA NORMALE

$$\begin{cases} x=5-2y-3z \\ 3(5-2y-3z)+2y+z=5;\ \ldots;\ -4y-8z=-10; \\ 5(5-2y-3z)+4y+4z=11;\ \ldots;\ -6y-11z=-14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5-2y-3z \\ 2y+4z=5 \\ 6y+11z=14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5-2y-3z \\ y=\dfrac{5-4z}{2} \\ 6\cdot\dfrac{5-4z}{2}+11z=14;\ \ 15-12z+11z=14;\ -z=-1;\ \ z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=1 \\ y=\dfrac{5-4}{2}=\dfrac{1}{2} \\ x=5-1-3=1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=1 \end{cases}$$

- Esempio 3

Col sistema seguente opereremo ancora sostanzialmente per **sostituzione**, ma con una **variante**.

$$\begin{cases} a-2b=2 \\ b+c=-3 \\ d-b=3 \\ b+2e=1 \\ a+b+c+d+e=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2+2b \\ c=-3-b \\ d=3+b \\ e=\dfrac{1-b}{2} \\ 2+2b-3-b+3+b+\dfrac{1-b}{2}=0;\ \ldots\ ;\ b=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2-2=0 \\ b=-1 \\ c=-3-(-1)=-3+1=-2 \\ d=3-1=2 \\ e=\dfrac{1-(-1)}{2}=\dfrac{1+1}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \end{cases}$$

Avendo notato che tramite le prime 4 equazioni
**le 4 incognite *a*, *c*, *d*, *e* potevano essere facilmente espresse per mezzo della sola *b***,
abbiamo operato di conseguenza, col vantaggio che, sostituendo poi nell'ultima equazione, questa si è immediatamente ridotta a contenere un'unica incognita. E vai!

# 6. SISTEMI CON PIU' DI DUE INCOGNITE: METODO DI RIDUZIONE

❑ Esempio 1

$$2\cdot\begin{cases}2x-3y-2z=1\\4x-y-4z=7\\7x+4y+3z=18\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x-6y-4z=2\\4x-y-4z=7\\7x+4y+3z=18\end{cases}$$

$$(1)-(2)\ \begin{cases}-5y=-5;\ y=1\\2x-3y-2z=1\\7x+4y+3z=18\end{cases}$$
(1)
(3)

$$\begin{cases}y=1\\2x-3-2z=1\\7x+4+3z=18\end{cases}\qquad\begin{cases}y=1\\2x-2z=2\\7x+3z=14\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=1\\x=z+2\\7(z+2)+3z=14;\ z=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2\\y=1\\z=0\end{cases}$$

## ♥ L'INCOLONNAMENTO

❑ Esempio 2



**dei termini con la stessa incognita dà veramente una marcia in più al metodo di riduzione**

$$\begin{cases}2y+3z=4\\3x+2y+z=8\\5x+4y+4z=16\end{cases}$$

Per prima cosa, metto in colonna …

$$\begin{cases}2y+3z=4\\3x+2y+z=8\\5x+4y+4z=16\end{cases}$$

$$(1)+(2)-(3)\ \begin{cases}-2x=-4;\ x=2\\2y+3z=4\\3x+2y+z=8\end{cases}$$
(1)
(2)

$$\begin{cases}x=2\\2y+3z=4\\6+2y+z=8\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2\\2y+3z=4\\2y+z=2\end{cases}$$

$$(2)-(3)\ \begin{cases}x=2\\2z=2\\2y+z=2\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2\\z=1\\\dots\ y=1/2\end{cases}$$
(3)

**NOTA: cos'è una "combinazione lineare"**

Si dice "combinazione lineare"
una somma algebrica i cui termini
sono oggetti matematici della stessa specie,
ciascuno moltiplicato per un suo coefficiente.
Gli "oggetti" in questione potranno essere
vettori, equazioni, funzioni, ecc. ecc. ecc.:
si possono "combinare linearmente"
tutte le entità per le quali abbia senso parlare
(I) di somma
(II) e di moltiplicazione per un coefficiente.
Il risultato della combinazione lineare
sarà ancora un oggetto della stessa specie.
Ad esempio, $3\vec{v}+4\vec{w}$ o $-\vec{v}+0,3\vec{w}$
sono due fra le infinite possibili
combinazioni lineari dei due vettori $\vec{v}, \vec{w}$.

**COME SI APPLICA IL METODO DI RIDUZIONE CON PIU' INCOGNITE**

Si tratta di coinvolgere 2 o più equazioni
in addizioni o sottrazioni membro a membro,
eventualmente dopo aver moltiplicato
una o più di queste equazioni per opportuni coefficienti
(*combinazione lineare* delle equazioni:
vedi NOTA in fondo alla pagina),
con lo scopo di pervenire ad un'equazione con 1 sola incognita,
o, almeno, di rendere più semplice il sistema.

❑ OCCHIO AL "RECUPERO" delle equazioni!
♥ **Se un'equazione non è stata coinvolta nelle addizioni o sottrazioni, è OBBLIGATORIO recuperarla**.

❑ Almeno in generale, qualunque sia il metodo di risoluzione, **se il sistema conteneva inizialmente n equazioni,** occorre **procedere ad ogni passaggio sempre con n equazioni. Vedremo più avanti (pag. 400) casi che fanno eccezione.**

❑ **Dopo aver iniziato a risolvere per riduzione, si può proseguire indifferentemente ancora con riduzione, oppure con sostituzione.**

❑ Esempio 3

$$\begin{cases}3x+4y+6z=7\\4x+6y+7z=8\\3x+5y+7z=9\end{cases}$$

$$(3)-(1)\ \begin{cases}y+z=2\\x+y=-1\\3x+4y+6z=7\end{cases}$$
(2)−(3)
(1)

dopodiché, avendo semplificato parecchio il sistema dato, potremo procedere tranquillamente per sostituzione.

❑ Esempio 4

Concludiamo con un sistema "notevole", molto particolare (il "**sistema delle somme a due a due**"):

$$\begin{cases}x+y=1\\y+z=11\\x+z=6\end{cases}$$
(1)
(2)
(3)

Mi conviene innanzitutto INCOLONNARE …

$$\begin{cases}x+y\ \ =1\\\ \ y+z=11\\x\ \ +z=6\end{cases}$$

dopodiché sommo membro a membro le tre equazioni, ottenendo

$$2x+2y+2z=18,$$

da cui, se divido per 2,

$$(4)\ \ x+y+z=9$$

A questo punto, dall'equazione (4), sottraggo una dopo l'altra le tre equazioni iniziali:

$$(4)-(1)\ \begin{cases}x+y+z-(x+y)=9-1;\quad z=8\\x+y+z-(y+z)=9-11;\quad x=-2\\x+y+z-(x+z)=9-6;\quad y=3\end{cases}$$
(4)−(2)
(4)−(3)

## 7. ESERCIZI SUI SISTEMI DI EQUAZIONI

**Sistemi in due incognite, da risolversi col metodo di SOSTITUZIONE:**

1) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-4y=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ 3x+y=4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 4x+3y=-4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x+2y=11 \\ 3x+7y=-5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x+5y=27 \\ 7x-y=25 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2(x-y)=1+x \\ 3x+5y=36 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} \frac{1}{6}y+\frac{17}{15}+\frac{x}{3}=-\frac{1}{5}y \\ x-y=\frac{5(4-x)}{3} \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5(y+1)=6(x+y)+4 \\ 3(x-y)=2(3+y) \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x-2y=-3 \\ 5x-4y=-4 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{25}{6} \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{3}x=y-\frac{1}{2}x \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 6x-y=4 \\ \frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x+y}{3}-7\frac{x}{6} \end{cases}$ 12) $\begin{cases} -7x-3y+4=0 \\ 2x-5y=7 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 9x-4y=10 \\ 5x-3y=4 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}x-\frac{1}{12}y=\frac{1}{24} \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 3x-t=5 \\ 12x+5t=20 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{x-y}{6}=1 \\ y+\frac{1}{4}(x+1)^2=\frac{x^2}{4} \end{cases}$

**Sistemi in due incognite, da risolversi col metodo di RIDUZIONE:**

17) $\begin{cases} 9x+7y=20 \\ 5x+7y=8 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} 4x+3y=6 \\ 11x-3y=-96 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} 14x-9y=1 \\ 10x-9y=-7 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} 15x-7y=43 \\ 3x-8y=35 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 7x+4y=25 \\ 10x+3y=33 \end{cases}$ 22) $\begin{cases} 6x-5y=15 \\ 11(y+3)=-2x \end{cases}$ 23) $\begin{cases} 3(x-1)-2y=0 \\ \frac{x}{5}-\frac{y}{3}-\frac{1}{30}=0 \end{cases}$ 24) $\begin{cases} 6y-45x+1=0 \\ 7y=15x \end{cases}$

25) $\begin{cases} \frac{3}{40}a-\frac{b}{8}-\frac{1}{5}=0 \\ \frac{a}{3}-\frac{b}{4}-\frac{3}{2}=0 \end{cases}$ 26) $\begin{cases} \frac{t+w}{6}-\frac{t-1}{4}=0 \\ \frac{1}{3}(2t-2w)-\frac{1}{2}(w-1)=0 \end{cases}$ 27) $\begin{cases} 3y-2x=-1 \\ 4x+7y=15 \end{cases}$ 28) $\begin{cases} 5a+6b=1 \\ 7a+9b=2 \end{cases}$

**SOLUZIONI**

1) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x=1/3 \\ y=-1 \end{cases}$

9) $(-2, -3/2)$ 10) $(5, 5)$ 11) $(1, 2)$ 12) (fai la verifica!)

13) (verifica!) 14) $\left(x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{2}\right)$ 15) $\left(x=\frac{5}{3},\ t=0\right)$ 16) $\left(\frac{25}{2}, -\frac{13}{2}\right)$

17) $(3, -1)$ 18) $(-6, 10)$ 19) $(2, 3)$ 20) $(1, -4)$

21) $(3, 1)$ 22) $(0, -3)$ 23) $\left(\frac{14}{9}, \frac{5}{6}\right)$ 24) $\left(\frac{7}{225}, \frac{1}{15}\right)$

25) $\begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases}$ 26) $\begin{cases} t=-27 \\ w=-15 \end{cases}$ 27) (verifica!) 28) (verifica!)

**♥ OSSERVAZIONE**

NON è corretto affermare che un sistema in 2 incognite ha, in generale, 2 soluzioni.

Infatti, per "soluzione" si deve intendere la COPPIA ordinata di valori $\begin{cases} x=\dots \\ y=\dots \end{cases}$

e quindi, se si è trovata UNA COPPIA, si dirà che si è trovata UNA SOLUZIONE.

Così pure, quando le incognite sono 3, per "soluzione" (al singolare) si intende la TERNA $\begin{cases} x=\dots \\ y=\dots \\ z=\dots \end{cases}$; ecc.

**Sistemi in più incognite, da risolversi col metodo di SOSTITUZIONE:**

1) $\begin{cases} 5x-3y-2z=4 \\ 7x+2y+4z=21 \\ 3x+8y+6z=9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 3x+2y+z=7 \\ y+z=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=3-z \\ x+z=\dfrac{3z+4}{2} \\ 3x-y+2z=5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x-y-z=0 \\ 2x+2y+5z=20 \\ 6x-5y-3z=-1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 11(x-y)=19-4y \\ 5x=3(1+y+2z) \\ 3x-z=8 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3a-4b+7c=-3 \\ 7a-3b-5c=42 \\ 10a+2b-3c=58 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2(x+2y)=-(5t+11) \\ 4x-3y+t+10=0 \\ \dfrac{1}{5}x-1=\dfrac{1}{15}y+\dfrac{1}{5}t \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x+2y-3z=-2 \\ 2x+9z=1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b+c=8 \\ \dfrac{1}{4}(a-3b)+\dfrac{1}{5}(6a+c)=7 \end{cases}$

**Sistemi in più incognite, da risolversi col metodo di RIDUZIONE:**

10) $\begin{cases} 23x+5y+8z=33 \\ 11x+5y+8z=9 \\ x-6y+4z=21 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 7x-8y+z=-2 \\ 3x-2y-6z=32 \\ 5x+8y-z=14 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 3x+5y-6z=10 \\ 12x+20y-5z=21 \\ x+3y+11z=-7 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x-3y+4z=5 \\ 3x+4y-z=2 \\ 2x+7y-10z=-33 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 9a+5(b+c)-7c-27=0 \\ 2(3a-c)=5(5-b) \\ 15a+7b+c=9 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x+y+t=-10 \\ 5x-4y-t=16 \\ 3(x-2y)=t+14 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 3x-4z=48 \\ 15y-z=3 \\ x+5y-11z=45 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} a+b+c=-6 \\ a+b+3=0 \\ b+c+5=0 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x-z+2=0 \\ x-y+2z+1=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$

**ALTRI ESERCIZI, CON CORREZIONE (clicca sulla freccia)**

19) ⇨ $\begin{cases} 5(y-1)=3(2y-x) \\ \dfrac{x+y}{3}=\dfrac{3y+1}{4} \end{cases}$ 20) ⇨ $\begin{cases} x=\dfrac{2(6-x)+7y}{3} \\ x+7=8(2x+y) \end{cases}$ 21) ⇨ $\begin{cases} 8x-9y-10=0 \\ 11x-12y-13=0 \end{cases}$

22) ⇨ $\begin{cases} x-2z=0 \\ 3x-2y+4z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 23) ⇨ $\begin{cases} 5x+4y+3t=2 \\ 2x+y+4t=1 \\ x-y+t=0 \end{cases}$ 24) ⇨ $\begin{cases} 4x-3y+2z=-5 \\ x-y+z=-2 \\ 2x+3y+z=2 \end{cases}$

25) ⇨ $\begin{cases} x+y-z=t \\ x-z=4 \\ 2x-t=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$ 26) ⇨ $\begin{cases} 3x-2y-z-w=3 \\ 2x+y+3w=0 \\ 4x-y=3 \\ x+z+2w=-2 \end{cases}$ 27) ⇨ $\begin{cases} b+c+d=3 \\ a+c+d=4 \\ a+b+d=5 \\ a+b+c=6 \end{cases}$

**SOLUZIONI**

1) $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=4 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ t=-5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=1/3 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} a=3 \\ b=-3 \\ c=2 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=1/4 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x=1 \\ y=1/2 \\ z=-5 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x=-4 \\ y=5 \\ z=6 \end{cases}$

14) $\begin{cases} a=2/3 \\ b=1 \\ c=-8 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ t=-11 \end{cases}$ 16) $(12, 0, -3)$ 17) (verifica!) 18) $(-2, -1, 0)$

19) $(2, 1)$ 20) $(1, -1)$ 21) $(-1, -2)$ 22) $\left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{16}, \frac{1}{16}\right)$ 23) $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$

24) $(0, 1, -1)$ 25) $(3, 2, -1, 6)$ 26) $(1, 1, -1, -1)$ 27) $(3, 2, 1, 0)$

## 8. IL METODO DEL CONFRONTO

E' utilizzato di rado, e solo quando le incognite sono due. Consiste nell'**isolare la stessa incognita in entrambe le equazioni, per poi uguagliare i secondi membri delle due uguaglianze così ottenute**.

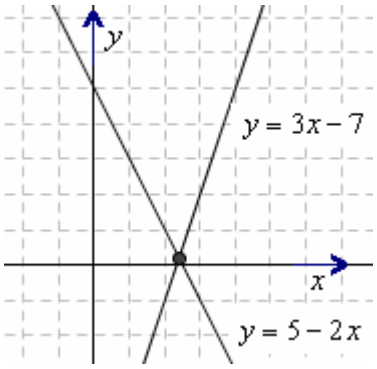
$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\boxed{5-2x} \\ y=\boxed{3x-7} \end{cases}$; $\boxed{5-2x=3x-7}$ ... $x=\frac{12}{5}$ $\begin{cases} x=\frac{12}{5} \\ y=5-2x=5-2\cdot\frac{12}{5}=5-\frac{24}{5}=\frac{1}{5} \end{cases}$ (*si può recuperare una a scelta fra le due equazioni*)

**Volendo, è possibile abbinare al procedimento una risoluzione grafica**.

Riferimenti cartesiani e risoluzioni grafiche di equazioni sono trattati in un capitolo successivo di questo testo. Facciamo qui una breve anticipazione, dando per scontato che lo studente sappia già qualcosa sul metodo delle coordinate cartesiane, oppure voglia preliminarmente andare a consultare quel capitolo.

Nel caso del sistema sopra considerato, la risoluzione grafica sarebbe la seguente.

Si tracciano, in uno stesso riferimento cartesiano, i grafici delle due funzioni $y=5-2x$, $y=3x-7$ (poiché le funzioni sono di 1° grado, usciranno delle rette) …




… poi si cerca la coppia $(x, y)$ che appartiene ad entrambi i grafici: quindi, in pratica, si va a prendere il **punto di intersezione** fra i due grafici tracciati.

La $x$ e la $y$ di quel punto costituiranno la coppia $\begin{cases} x=... \\ y=... \end{cases}$ soluzione del sistema.

Nel nostro caso, graficamente non siamo in grado di stabilire quale sia il valore *esatto* di questa coppia $(x, y)$; possiamo solo osservare che è $2<x<3$ e $0<y<1$ (con $y$ molto più vicina a 0 che a 1). In effetti, **di norma, queste risoluzioni grafiche ci permettono di *approssimare* la soluzione, non di determinarla perfettamente**.

♥ Tuttavia, il metodo del confronto può essere un'utile occasione per osservare che (salvo rare eccezioni) *una singola* equazione in due incognite è INDETERMINATA, vale a dire è verificata da INFINITE coppie $(x, y)$.

Consideriamo, ad esempio, la retta "in discesa", che "rappresenta" l'equazione $2x+y=5$ $(y=5-2x)$.
Se nell'equazione $y=5-2x$ noi poniamo, ad esempio, $x=1$, otteniamo $y=5-2\cdot1=3$;
bene, ciò significa che la coppia $x=1$, $y=3$ (brevemente: la coppia $(1, 3)$) è soluzione dell'equazione $y=5-2x$ quindi anche della sua equivalente $2x+y=5$ (controlliamo: $2\cdot1+3=5$ *OK*).
Dando poi a $x$ altri valori possiamo determinare *altre* coppie $(x, y)$ che rendono vera l'equazione $y=5-2x$:

$$(0,5);\ (2,1);\ (3,-1);\ (10,-15);\ (-1,7);\ \left(\frac{1}{2},4\right);\ (3,7;\ -2,4);\ ...$$

Tali infinite coppie $(x, y)$ sono per l'appunto le coordinate degli infiniti punti che compongono la retta in discesa; mentre le coordinate $(x, y)$ degli infiniti punti della retta in salita sono quelle coppie $(x, y)$ che "vanno bene" per l'equazione $y=3x-7$ (o per la sua equivalente $3x-y=7$).
Le coordinate del punto in cui le due rette si intersecano sono dunque quei valori $x=...$, $y=...$ per i quali sono verificate SIMULTANEAMENTE ENTRAMBE le equazioni in gioco.

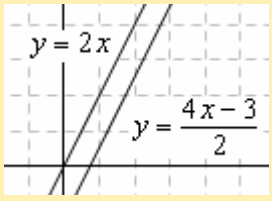
♥ **Un'equazione si dice INDETERMINATA quando ammette infinite soluzioni.**
**A volte, questo "infinite" significa "qualsiasi"**: ad es., l'equazione $0\cdot x=0$ è verificata da qualsiasi valore di $x$.
♥ **Ma a volte, "infinite" NON equivale a "qualsiasi"**:
l'equazione in due incognite $2x+y=5$ è verificata da *infinite* coppie $(x, y)$, ma NON da *qualsiasi* coppia $(x, y)$, perché soltanto quelle particolari coppie che sono della forma $(x, 5-2x)$ "vanno bene", le altre no.

**Un'equazione nella quale si abbiano 2 o più incognite è generalmente indeterminata, salvo casi eccezionali**, fra i quali possiamo citare equazioni come la $x^2+(y-4)^2=0$; quest'ultima infatti, pur avendo 2 incognite, ammette una e una sola soluzione: poiché un quadrato non può assumere valore negativo, una somma di quadrati può valere 0 solo qualora sia nullo *ciascuno* dei due quadrati … il che avviene solamente con $x=0 \wedge y=4$.

Per terminare, osserviamo solo che **se le due rette dovessero risultare parallele, come nell'esempio qui a fianco, il sistema sarebbe impossibile ( = privo di soluzioni)**: non ci sarebbe alcuna coppia $(x, y)$ che vada bene simultaneamente per entrambe le equazioni.

$\begin{cases} 2x-y=0 \\ 4x-2y=3 \end{cases}$

$\begin{cases} y=2x \\ y=\frac{4x-3}{2} \end{cases}$




Rette parallele: SISTEMA IMPOSSIBILE

**ESERCIZI** Risolvi col "confronto" alcuni sistemi "pescati" fra gli esercizi in due incognite di questo capitolo.

# 9. DETERMINANTI

**Si dice "determinante" uno schema, contenente quattro numeri a, b, c, d, della forma $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix}$;**

**lo schema ha il compito di indicare che sui 4 numeri in gioco va effettuata l'operazione $\mathbf{ad-bc}$.**

E' dunque $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix} = \mathbf{ad-bc}$.

❑ $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 5\cdot 10 - 4\cdot 3 = 50 - 12 = 38$

❑ $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) - (-3)\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{4} = \frac{-2+15}{20} = \frac{13}{20}$

**In questo modo noi abbiamo dato la definizione** di determinante, **nel caso in cui i numeri coinvolti nello schema siano 4, disposti su 2 righe e 2 colonne (determinante "del 2° ordine")**.

**Ma è possibile anche considerare determinanti del 3° ordine (3 righe e 3 colonne; 9 termini), del 4° ordine (4 righe e 4 colonne; 16 termini), e così via**.

Un determinante del 3° ordine si sviluppa come segue:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

Abbiamo qui scelto una simbologia, molto utilizzata in matematica, secondo la quale ciascun elemento del determinante si può indicare con una lettera munita di **due indici, il primo dei quali corrisponde alla riga e il secondo alla colonna,** su cui l'elemento è posizionato.

In generale, **lo sviluppo di un determinante di ordine n viene sempre ricondotto a determinanti dell'ordine inferiore n–1.**

Ad esempio, per il 4° ordine, è:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = a_{1,1}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{1,2}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + a_{1,3}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{1,4}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix}$$

Tutto ciò potrebbe apparire terrificante, ma in realtà corrisponde alla non difficilissima **REGOLA**:

Per **sviluppare un determinante di ordine n**, si sceglie una **linea** (riga o colonna) **qualsiasi** (qui sopra è stata sempre scelta la prima riga) e si prende ciascun termine della linea

- col proprio segno se la somma dei suoi due indici è pari,
- con segno cambiato se la somma dei due indici è dispari;

poi si moltiplica il termine in esame (col segno opportuno) per il determinante di ordine $n-1$ ottenibile cancellando la riga e la colonna su cui sta il termine in questione.
I prodotti così ottenuti vengono sommati algebricamente.
Si dimostra che **il risultato è indipendente dalla linea scelta**.

Ad esempio, sviluppiamo un determinante del 3° ordine secondo la sua prima riga, poi secondo la sua seconda colonna:

In modo equivalente, si sarebbe potuto scrivere che il calcolo di un determinante consiste nel sommare algebricamente i prodotti dei termini di una linea per i rispettivi "*complementi algebrici*", dove il "complemento algebrico" di un termine $a_{i,k}$ è il numero $A_{i,k}$ ottenibile prendendo il determinante che rimane se si cancellano la riga e la colonna su cui sta il termine in questione, e moltiplicandone il valore per $+1$ o $-1$ a seconda che $i+k$ sia pari o sia dispari.

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 7(-3-0) - 2\cdot(-12-8) + 5\cdot(0+1) = -21+40+5 = 24$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = -2(-12-8) + 1\cdot(-21+5) - 0 = +40-16 = 24$$

**ESERCIZI** Calcola i seguenti determinanti.

**1)** $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$

**2)** $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}$

**3)** $\begin{vmatrix} -15 & 1 \\ -14 & 0 \end{vmatrix}$

**4)** $\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$

**5)** $\begin{vmatrix} x+y & z \\ z & x-y \end{vmatrix}$

Sviluppa i determinanti 6) e 7) secondo:
a) la prima riga b) la prima colonna
c) la seconda riga d) la seconda colonna
per verificare che il risultato non cambia.

**6)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

**7)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

**8)** $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

**9)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

**RISULTATI** 1) –8 2) 58 3) 14 4) 0 5) $x^2 - y^2 - z^2$ 6) 17 7) 0 8) –16 9) 1

## 10. RISOLUZIONE DEI SISTEMI DI 1° GRADO COL METODO DI CRAMER

Consideriamo il sistema (che è poi il generico sistema composto da due equazioni di 1° grado):

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

e proponiamoci di ricavare $x$ col metodo di riduzione. Avremo:

$$b' \cdot \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$b \cdot \begin{cases} ab'x + bb'y = b'c \\ a'bx + bb'y = bc' \end{cases}$$

$$(1) - (2) \quad (ab' - a'b)x = b'c - bc'$$

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \quad (se \;\; ab' - a'b \neq 0)$$

Si può notare ora che numeratore e denominatore possono essere scritti in forma di determinanti:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

… e quest'ultima forma ha il pregio di essere **davvero facile da ricordare**! Infatti:

- a denominatore abbiamo il determinante costruito prendendo, nel sistema dato, i coeff. delle incognite
- mentre a numeratore abbiamo lo stesso determinante, nel quale però la colonna relativa ai coeff. di $x$ (l'incognita che si sta calcolando) è stata sostituita dalla colonna dei termini noti.

Se operiamo in modo analogo per ricavare $y$, otterremo

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

Anche qui, analogamente al caso della $x$,

- a denominatore ci ritroviamo il determinante dei coefficienti delle incognite
- e a numeratore abbiamo lo stesso determinante, nel quale però la colonna relativa ai coefficienti di $y$ (l'incognita che si sta calcolando) è stata sostituita dalla colonna dei termini noti.

Ricapitolazione.

**Un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite:** $\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

**può, volendo, essere risolto ("metodo di Cramer") per mezzo delle due formule** $\begin{cases} x = \dfrac{\mathbf{D}_x}{\mathbf{D}} \\ y = \dfrac{\mathbf{D}_y}{\mathbf{D}} \end{cases}$,

**dove:**

$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ = determinante dei coefficienti delle incognite

$\mathbf{D}_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$

$\mathbf{D}_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$

$\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$ (in queste scritture, lette "Di $x$", "Di $y$", $x$ e $y$ hanno il ruolo di *indici*) **sono i determinanti ottenibili a partire dal determinante D, sostituendo, al posto della colonna dei coefficienti dell'incognita che si vuole in quel momento ricavare, la colonna dei termini noti.**

OSSERVAZIONE: Per completezza, occorre puntualizzare che le formule di Cramer valgono a condizione che sia $D \neq 0$. Nel caso risulti $D = 0$ il sistema è, a seconda dei casi, *impossibile* o *indeterminato* (pagg. 400, 401).

❑ Esempio di applicazione

$$\begin{cases} 3x-y=4 \\ x+5y=-2 \end{cases} \qquad x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{20-2}{15+1}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8} \qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{-6-4}{15+1}=\frac{-10}{16}=-\frac{5}{8}$$

**Si può dimostrare poi che il "metodo di Cramer"** *(Gabriel Cramer, 1704-1752)*
**vale anche per i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite, di 4 equazioni in 4 incognite, ecc.**
**(in generale: di *n* equazioni in *n* incognite).**

♥ OSSERVAZIONE TERMINOLOGICA

L'aggettivo "**LINEARE**", in Algebra, significa "**DI 1° GRADO**".
Un'equazione è di 1° grado quando è riconducibile a un'uguaglianza fra due polinomi di 1° grado, oppure ad un polinomio di 1° grado, uguagliato a 0.
Un sistema di equazioni è di 1° grado quando tutte le equazioni che lo compongono sono di 1° grado.

Ad es., nel caso $n=3$, abbiamo: $\begin{cases} \boldsymbol{a\,x+b\,y+c\,z=d} \\ \boldsymbol{a'\,x+b'\,y+c'\,z=d'} \\ \boldsymbol{a''\,x+b''\,y+c''\,z=d''} \end{cases}$. Bene, sarà $\boldsymbol{x=\frac{D_x}{D};\ y=\frac{D_y}{D};\ z=\frac{D_z}{D}}$,

dove: $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$; $D_x=\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$; $D_y=\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}$; $D_z=\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$

**D è il determinante dei coefficienti delle incognite**
**mentre $D_x$, $D_y$, $D_z$ sono i determinanti ottenibili a partire dal determinante D, sostituendo,**
**al posto della colonna dei coefficienti dell'incognita che si vuole ricavare, la colonna dei termini noti.**

❑ Esempio:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-z=0 \\ 3x-y-4z=0 \end{cases}$$ INCOLONNO, innanzitutto! $$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-z=0 \\ 3x-y-4z=0 \end{cases}$$ Incolonnare è molto importante, per poter poi scrivere senza errori i vari determinanti

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{4\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{4\cdot(-1)-1\cdot 0+0}{1\cdot(-1)-1\cdot(-5)+0}=\frac{-4}{-1+5}=\frac{-4}{4}=-1$$

Per esercizio, puoi calcolare tu stesso i valori di $y$ e di $z$.
Alla fine, verifica la correttezza dei risultati sostituendo nelle tre equazioni del sistema iniziale.

## ESERCIZI (METODO DI CRAMER)

1) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x+5y=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x-2y=10 \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a+b-1=0 \\ b-3a+1=0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+z=1 \\ 2x-y+2z=1 \\ 5y+4z=7 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x=y-1 \\ 3z-2x=5 \end{cases}$

**Evidentemente, puoi, volendo, rifare con Cramer anche qualunque altro esercizio fra i tanti proposti.**

7) $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ y-z-t=2 \\ x+2z=1 \\ 2y-t=3 \end{cases}$

8) ♥ Il metodo di Cramer, puramente "automatico", è il più adatto ad essere utilizzato su di un computer, o comunque quando i coefficienti sono numeri con tante cifre. L'esercizio qui a fianco va svolto con l'aiuto di una calcolatrice o di un foglio elettronico; alla fine, fai la verifica.

$$\begin{cases} 35,58x-57,73y=23,09 \\ 10,78x+25,43y=-2,37 \end{cases}$$

## SOLUZIONI

1) $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a=1/2 \\ b=1/2 \end{cases}$ 5) $\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$ 6) $(-1,\,0,\,1)$ 7) $(x=1,\ y=1,\ z=0,\ t=-1)$

## 11. ESERCIZI VARI SUI SISTEMI

1) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x-y=0 \\ 8x-y=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=y+10 \\ x=5y+2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=2y \\ 5x+7y+34=0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=5y \\ y=5x \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=2x+y \\ y=2x+1 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 3(x-y)=y+23 \\ 5x+2y=21 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 0,7x+0,4y=1 \\ 0,23x-0,2y=0,66 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} a-b=a+b \\ a+2b+3=0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 14m-5n=143 \\ 3m-10n=111 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} y=4x-3 \\ y=3x-7 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 5(x+4)=2(4x-y) \\ x+y=9(y+4) \end{cases}$ 13) $\begin{cases} 3(y+1)=7(x+1) \\ 5(20-x)=3(y+12) \end{cases}$

14) $\begin{cases} 4(y-x)+3(x-4)=0 \\ 12(x+y)+7(4-x)=0 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 3(x+3y)=12(1-x)-2(2+3y) \\ 3(x-y)=2y \end{cases}$ 16) $\begin{cases} 5p+2=5(2q+1) \\ 5(p-q)+7=5(2-p) \end{cases}$

17) $\begin{cases} 2(2x-3y)=3(12-y) \\ 3x-7y-46=0 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} 11-y=6(x-y) \\ 7x-11(2+y)+2(1+x)=0 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} \frac{x}{3}=4-y \\ x-2=\frac{y}{3} \end{cases}$

20) $\begin{cases} 18x-6y=96 \\ 7x+7y-56=0 \end{cases}$ Innanzitutto conviene semplificare entrambe le equazioni! 21) $\begin{cases} 3y+1=x \\ 2y+7=x \end{cases}$ 22) $\begin{cases} 3a-b=b \\ 2(a+b+1)=3(a-b-1) \end{cases}$

23) $\begin{cases} 15x-2y=0 \\ 4x+7y=0 \end{cases}$ 24) $\begin{cases} s+p=0 \\ \frac{s}{3}-\frac{p}{2}-1=\frac{s}{4}-\frac{p}{3}-\frac{1}{2} \end{cases}$ 25) $\begin{cases} \frac{a+b-1}{4}=\frac{2a-b}{3} \\ 1-b=3(a-b) \end{cases}$ 26) $\begin{cases} 5x=4y \\ \frac{4}{5}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{10}=0 \end{cases}$

27) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x-2z=7 \end{cases}$ 28) $\begin{cases} x=2t \\ 2(t+1)=5(x-1) \end{cases}$ 29) $\begin{cases} x=y-1 \\ y=2(x+1) \end{cases}$ 30) $\begin{cases} 3x+2y=19 \\ 2x-y=8 \end{cases}$

31) $\begin{cases} \frac{x}{8}-1=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+y\right) \\ \frac{3-2y}{2}=\frac{1}{18}(x-1) \end{cases}$ 32) $\begin{cases} 2^{-1}x+2y=-2 \\ 3^{-2}(x-y)-\frac{y}{3}=0 \end{cases}$ 33) $\begin{cases} \frac{\frac{x-1}{2}+y}{3}=\frac{x+3y}{4} \\ y=-\frac{2x+y}{5} \end{cases}$ 34) $\begin{cases} \frac{w}{12}-\frac{t}{2^4}=5\cdot\frac{w+t}{2^5} \\ \frac{w+30}{6}-\frac{t+2}{3^2+1}=0 \end{cases}$

35) $\begin{cases} 6\cdot\left[\frac{2}{3}(x+y-1)-\frac{1}{2}\right]+19=0 \\ \left[\frac{3}{5}(x-2y)+1\right]\cdot\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}x \end{cases}$ 36) $\begin{cases} [1+5(x+2y)]:3=y+4 \\ 2x+y-1=2^{-3}(x-1) \end{cases}$ 37) $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=x^2+(y+3)^2 \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{4}=\frac{3x+1}{8} \end{cases}$

38) $2x-y=4x+y-16=x-3y+13$ 39) $\frac{3x-y}{2}=\frac{2x+y}{3}=x+y+1$ 40) $\begin{cases} 0,03x-0,02y=0,26 \\ 0,09x-0,05y=0,77 \end{cases}$

41) $\begin{cases} x-y=z \\ 2x+3y+4z=16 \\ 5x-3y-z=8 \end{cases}$ 42) $\begin{cases} x=2z \\ z=3y \\ x-z=y-4 \end{cases}$ 43) $\begin{cases} x+y+t=6 \\ x-y+t=10 \\ x-y-t=4 \end{cases}$ 44) $\begin{cases} 3a+2b+c=2 \\ a+2b+3c=2 \\ a-5b+c=7 \end{cases}$

45) $\begin{cases} x=3y+z-1 \\ y=z-x-1 \\ z=2x+5y-2 \end{cases}$ 46) $\begin{cases} x=y+1 \\ y=z+2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 47) $\begin{cases} 4x+5y-2z=53 \\ 3x-2y+z=10 \\ x+7y+3z=13 \end{cases}$ 48) $\begin{cases} \frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=\frac{1}{12} \\ 3(y+2)-y=0 \\ x+\frac{4}{3}y-\frac{3}{2}z+6=0 \end{cases}$

49) $\begin{cases} 2p-3q=2 \\ 3p-2q=1 \end{cases}$ 50) $\begin{cases} 6x-6y=1 \\ 3x+24y=5 \end{cases}$ 51) $\begin{cases} \frac{a}{2}=\frac{b}{3} \\ \frac{1}{2}(a-b)=1-\frac{a+b}{4} \end{cases}$ 52) $\begin{cases} u+v=0 \\ \frac{u}{3}=\frac{v}{5} \end{cases}$ 53) $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ 2\alpha-\gamma=4(1-\beta) \\ \alpha-\beta-\gamma-1=0 \end{cases}$

54) $\begin{cases} a+2c=5 \\ b-2d=4 \\ c=a-d \\ b+d=c-a \end{cases}$ 55) $\begin{cases} \alpha+2\beta=3 \\ \alpha+\gamma=\beta+\delta+\varepsilon \\ \varepsilon-\delta=\beta-2\gamma \\ \alpha+1=3-\beta \\ \gamma-\varepsilon=\alpha \end{cases}$ 56) $\begin{cases} \frac{1}{2}m-\frac{3}{4}p=\frac{1}{6} \\ 3m-p=2 \end{cases}$ 57) $\begin{cases} 3(x-2)=5x \\ 2(y-3)=3(y-1-x) \end{cases}$

58) $\begin{cases} a+2b+3c+4d=9 \\ 3a+2b+c-d=-6 \\ a-b-c+d=-5 \\ a+b+c+d=1 \end{cases}$ 59) $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ y+z-t+5=0 \\ x-z-t+6=0 \\ x-y+t-6=0 \end{cases}$ 60) $\begin{cases} x+y+z+u+v=3 \\ x-y+z-u+v=5 \\ x+y-z+u-v=-3 \\ x-y-2u=3 \\ x+y+3v=7 \end{cases}$

61) ⇨ $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1 \end{cases}$ Qui conviene porre $\frac{1}{x}=u,\ \frac{1}{y}=v$ 62) $\begin{cases} \frac{4}{x}+\frac{5}{y}=6 \\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=1 \end{cases}$ 63) $\begin{cases} \alpha=\beta \\ \alpha=-\beta \end{cases}$ 64) $\begin{cases} 2x-y+2t=3 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+t=3 \\ x+y-2t=3 \end{cases}$

65) Il sistema $\begin{cases} ax-by=38 \\ (a+1)x+(2a+b+1)y=61 \end{cases}$ ha per soluzione la coppia $\begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$. Quali sono i valori di $a$ e $b$?

66) Determina i valori di $a$, $b$, $c$ in modo che il sistema $\begin{cases} ax+by+cz=2 \\ ax-by+cz=6 \\ ax-by-cz=4 \end{cases}$ abbia per soluzione $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

**SOLUZIONI**

1) $\begin{cases} x=\frac{9}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=12 \\ y=2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ Per prima cosa, qui è conveniente moltiplicare la prima equazione per 10 e la seconda per 100 … 9) $\begin{cases} a=-3 \\ b=0 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} m=7 \\ n=-9 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x=-4 \\ y=-19 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x=4 \\ y=-4 \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x=5 \\ y=13 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x=-8 \\ y=1 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x=1/3 \\ y=1/5 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} p=1/5 \\ q=-1/5 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} x=6 \\ y=-4 \end{cases}$

18) $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ 21) $\begin{cases} x=19 \\ y=6 \end{cases}$ 22) $\begin{cases} a=-10/13 \\ b=-15/13 \end{cases}$ 23) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 24) $\begin{cases} s=2 \\ p=-2 \end{cases}$

25) $\begin{cases} a=13/11 \\ b=14/11 \end{cases}$ 26) $\begin{cases} x=-4/7 \\ y=-5/7 \end{cases}$ 27) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ 28) $\begin{cases} x=7/4 \\ t=7/8 \end{cases}$ 29, 30) Fai la verifica, sostituendo!

31) $\begin{cases} x=10 \\ y=1 \end{cases}$ 32) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1/2 \end{cases}$ 33) $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ 34) $\begin{cases} w=-24 \\ t=8 \end{cases}$ 35) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 36) $\begin{cases} x=-\frac{3}{5} \\ y=2 \end{cases}$ 37) $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

38) La catena equivale a un sistema formato da due qualsiasi fra le tre uguaglianze
$2x-y=4x+y-16$
$2x-y=x-3y+13$ (la rimanente è conseguenza delle altre due). Si trova $x=3,\ y=5$.
$4x+y-16=x-3y+13$

39) $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ 40) $\begin{cases} x=8 \\ y=-1 \end{cases}$ 41) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ 42) $\begin{cases} x=-12 \\ y=-2 \\ z=-6 \end{cases}$ 43) $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \\ t=3 \end{cases}$ 44) $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$ 45) $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=4 \end{cases}$ 46) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$

47) $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \\ z=-5 \end{cases}$ 48) $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=2 \end{cases}$ 49, 50, 51, 52) Fai la verifica!
53) $(1/2,\ 1/2,\ -1)$
54) $(1,\ 2,\ 2,\ -1)$
55) $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)$
56, 57) Verifica!
58) $\begin{cases} a=-3 \\ b=1 \\ c=2 \\ d=1 \end{cases}$ 59) $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=1 \\ t=5 \end{cases}$ 60) $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \\ u=-1 \\ v=2 \end{cases}$

61) $x=1/5,\ y=1/4$ 62) $x=-1,\ y=1/2$ 63) $\alpha=0,\ \beta=0$ 64) $x=2,\ y=3,\ t=1$
65) Sostituisci 5 al posto di $x$ e 6 al posto di $y$: otterrai un altro sistema. $a=4,\ b=-3$ 66) $a=1,\ b=-1,\ c=1$

## 12. PROBLEMI DA RISOLVERE CON 2 O PIU' INCOGNITE (soluzioni a pagina 209)

1) 10 penne biro e 6 quaderni costano 29 euro; 6 penne biro e 10 quaderni, 27 euro.
Qual è il costo di una penna biro? E di un quaderno?

2) Due macchinari A e B in una ditta producono *a* pezzi all'ora e *b* pezzi all'ora rispettivamente.
Dopo 60 ore ininterrotte di funzionamento sono stati prodotti complessivamente 1980 pezzi,
e A ne ha prodotti 180 in più rispetto a B. Quanto valgono *a* e *b*?
(*Puoi tranquillamente utilizzare i simboli a, b anziché x, y per indicare le incognite*!)

3) Nel campionato di calcio italiano la vittoria vale 3 punti, e 1 punto il pareggio.
Dopo 20 partite, una squadra si trova a quota 42 punti, avendo vinto un numero di partite doppio
rispetto al numero delle partite pareggiate. Si domanda: quante partite ha perso quella squadra?

4) Un macchinario A produce 40 pezzi all'ora, mentre un altro macchinario meno moderno B soltanto 25.
Se hanno funzionato complessivamente per 15 ore producendo 480 pezzi, determina il numero di ore
nel quale ciascuno è stato in funzione.

5) Una ditta distribuisce ai suoi dipendenti meritevoli dei buoni sconto utilizzabili presso la mensa
aziendale, dove vengono serviti pasti a prezzo fisso. Angela ha pasteggiato in mensa 4 volte,
questa settimana, utilizzando 3 buoni sconto, e spendendo 17 euro.
Ilaria ha pranzato in mensa solo 3 volte, e ha usufruito di 2 buoni sconto: la sua spesa è stata di 14 euro.
E il pigro Ubaldo, che ha mangiato in mensa 5 volte senza disporre di sconto alcuno, quanto ha speso?

6) Ho in tasca 28 monete, parte da 20 centesimi e parte da 50. Ho calcolato che se le monete da 20 fossero
tante quante quelle da 50 e viceversa, il mio gruzzolo aumenterebbe di 3 euro. Quanto posseggo?

7) Se in un negozio di prelibatezze, al costo di 100 euro si possono acquistare 4 bottiglie di ottimo vino
e 11 confezioni di riso o in alternativa 6 bottiglie e 4 confezioni, quanto spenderà chi voglia comprare
1 bottiglia + 1 confezione?

8) Anna dice a Bruno: "Dammi 50 euro, così verrò a possedere esattamente il doppio di ciò che avrai tu".
"No" – dice Bruno – "dammi TU 10 euro, così sarò io a possedere il doppio di te".
Sentito questo dialogo, saresti capace di determinare la cifra che ha in tasca ciascuno dei due?
(*Puoi indicare le incognite con x, y o anche, se preferisci, con a, b*: *è lo stesso*!)

9) Abito in una casa di campagna, in una zona archeologica, nella quale capita a volte, lavorando la terra,
di portare alla luce monete antiche. Se ne trovano di due varietà: argento e bronzo.
Ho saputo che un vicino ha venduto a un collezionista 5 monete d'argento e 6 monete di bronzo,
ricavandone 840 euro; un altro conoscente ha venduto allo stesso collezionista
4 monete d'argento e 3 di bronzo, ricavandone 600 euro.
Ma io posseggo la bellezza di 50 monete d'argento e 100 di bronzo! Quanto vale il mio piccolo tesoro?

10) 1/3 di ciò che possiede Anna, più la metà di ciò che possiede Bruno, equivale a 38 euro.
La metà di ciò che possiede Anna, più 1/3 di ciò che possiede Bruno, equivale a 37 euro.
Quanto posseggono complessivamente i due?

11) Due numeri hanno per rapporto 4 e per differenza 21. Quali sono?

12) Determina le misure degli angoli di un triangolo isoscele
sapendo che i 3/5 dell'angolo al vertice superano di 30° i 3/4 di un angolo alla base.

13) Trova due numeri interi sapendo che:
- dividendo la loro semisomma per la loro differenza si ottiene quoziente 6 e resto 5;
- dividendo la loro somma per la loro semidifferenza si ottiene quoziente 27 e resto 1.

14) Due secchi contengono alcuni mattoni.
Se si spostassero 7 mattoni dal secchio più leggero al più pesante, quest'ultimo verrebbe a contenere il
triplo dei mattoni dell'altro. Se invece 4 mattoni venissero presi dal più pesante e messi nel più leggero,
i due secchi verrebbero a contenere lo stesso numero di mattoni.
Ora … quanti sono in totale i mattoni?

15) Sommando numeratore e denominatore di una frazione ridotta ai minimi termini si ottiene 34; e se
si aggiungesse 5 ad ambo i termini della frazione, questa equivarrebbe a 5/6. Di che frazione si tratta?

16) In un parco giochi si vedono veicoli di 3 tipi: macchinine, biciclettine, e tricicli.
Le biciclettine sono il doppio delle macchinine, e si contano in totale 19 veicoli e 52 ruote.
Determina quante sono le macchinine, quante le biciclettine, e quanti i tricicli.

17) In un triangolo la media dei due lati più corti è 11 cm, la media dei due più lunghi è 14 cm,
e il perimetro è 38 cm. Quanto misura il lato di lunghezza intermedia?

18) Il borsellino della nonna contiene esclusivamente monete da 50, 20 e 10 centesimi. Se ti dico che quelle da 50 e da 20, insieme, fanno un totale di 5 euro e 80 centesimi, che quelle da 20 e da 10, insieme, valgono 3 euro e 30 centesimi, e che il valore di quelle da 50 e da 10 assomma a 5 euro e 50 centesimi, sapresti determinare il numero totale di monete presenti nel borsellino?

19) In un *fast food* vengono distribuiti primi piatti al costo di 3 euro, secondi piatti a 4 euro l'uno, e dolci a 2 euro. Se ti dico che quest'oggi l'incasso complessivo relativo ai soli primi e secondi piatti è stato di 480 euro, quello relativo ai secondi piatti e ai dolci di 320 euro, e che sono state servite 180 portate, sei in grado di stabilire quante sono state le portate di ciascun tipo?

*Due problemi dello svizzero Euléro, 1707-1783*:

20a) Un tale ha due coppe d'argento, e un solo coperchio. La prima coppa pesa 12 once, e se le si mette sopra il coperchio, viene a pesare il doppio dell'altra; ma se il coperchio si sposta sull'altra coppa, questa viene a pesare il triplo della prima. Quanto pesano la seconda coppa, e il coperchio?

20b) Tre persone A, B, C giocano fra loro tre partite a carte consecutive.
Nella prima partita A perde in favore di B tanti denari quanti B ne possedeva all'inizio, e a favore di C tanti denari quanti C ne possedeva all'inizio.
Nella seconda partita, allo stesso modo, B perde in favore di A e di C rispettivamente, tanti denari quanti ciascuno dei due possedeva all'inizio della seconda partita.
E infine, nella terza partita, C perde in favore di A e di B rispettivamente, tanti denari quanti ciascuno dei due possedeva all'inizio della terza partita.
Se alla fine ognuno dei tre si trova a possedere 24 denari, con quanti denari si erano seduti al tavolo?

21) In una certa scuola privata, a ogni diplomato viene assegnato un giudizio finale che può essere "Sufficiente", "Buono", "Distinto" o "Ottimo". Trova il numero degli alunni diplomatisi l'anno scorso se si conoscono le seguenti informazioni: $S = \frac{1}{2} B$; $S+B = D+O$; $O = D+30$; $\frac{1}{5} S + \frac{1}{3} D = \frac{1}{5} O$
(S = numero alunni usciti col "sufficiente"; B = n° "buoni"; D = n° "distinti"; O = n° "ottimi")

21') *Prova a riprendere il problema precedente e a risolverlo con una sola incognita.*
*Converrà porre x = numero degli studenti usciti col "distinto", perché questa scelta dell'incognita è quella che rende più facile esprimere per mezzo di x tutte le altre quantità in gioco.*

22) Si può dimostrare che la somma degli angoli di un pentagono qualsiasi misura sempre 540°.
Tenendo presente questo, trova le misure degli angoli di un pentagono irregolare ABCDE, sapendo che l'angolo $\hat{A}$ : supera di 1° la terza parte di $\hat{B}$, supera di 2° la quarta parte di $\hat{C}$, è uguale alla quinta parte di $\hat{D}$ ed è inferiore di 117° all'angolo $\hat{E}$.

22') *Risolvi il problema 22) con una sola incognita* (*ti converrà scegliere come incognita la misura di* $\hat{A}$)

23) Determina un numero di 3 cifre sapendo che:
- la somma delle sue cifre è 8;
- invertendo l'ordine delle cifre, il numero diminuisce di 198 unità;
- se si scambia la prima cifra con la seconda, il numero aumenta di 90 unità.

*Indicazione per i problemi di questo tipo: il numero di tre cifre che si scrive come "abc" è uguale a* $100a+10b+c$. *Ad esempio,* $789 = 7\cdot 100 + 8\cdot 10 + 9$

24) Determina un numero di 3 cifre sapendo che la cifra delle unità è doppia di quella delle decine, la somma delle cifre è 15, e scrivendo le cifre in ordine invertito si ottiene un numero inferiore di 495 unità a quello iniziale.

25) Determina un intero di 2 cifre sapendo che supera di 20 unità il quintuplo della somma delle sue cifre, e che se lo si riscrivesse scambiando fra loro le cifre, diminuirebbe di 27 unità.

26) Un intero di due cifre è tale che dividendolo per la somma delle sue cifre si ottiene quoziente 6 e resto 8, mentre dividendolo per la differenza delle sue cifre (la cifra delle decine è maggiore di quella delle unità) si ottiene quoziente 24 e resto 2. Di che numero si tratta?

## ♫ POLINOMI DEI QUALI DOBBIAMO DETERMINARE I COEFFICIENTI

27) Nel polinomio $P(x) = x^2 + ax + b$ la variabile è $x$; le lettere $a$, $b$ rappresentano due coefficienti. Determina i numeri $a$, $b$ in modo che si abbia $P(2) = 10$ e $P(-1) = -5$
[*Indicazione*: dovrà essere $2^2 + 2a + b = 10$ e … ; di qui un sistema nel quale $a$, $b$ fanno da incognite]

28) Nel polinomio $P(w) = aw^2 + bw + c$ la variabile è $w$; le lettere $a$, $b$, $c$ rappresentano i tre coefficienti. Determina $a$, $b$ e $c$ sapendo che $P(1) = P(2) = -7$ e $P(-3) = 13$.

29) Il polinomio $P(y) = y^3 + ay^2 + by + c$ è tale che $P(1) = 3$; $P(-1) = -3$; $P(2) = 9$. Quanto valgono $a$, $b$, $c$?

30) Determina $a$, $b$, $c$ e $d$ in $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ sapendo che $P(0) = 2$, $P(1) = 1$, $P(2) = 4$, $P(3) = 17$.

31) Quando il papà Giuseppe aveva l'età che ha attualmente sua moglie Francesca, la figlia Benedetta aveva 11 anni. Sapendo che Francesca aveva 27 anni quando nacque Benedetta, e che la somma delle età attuali dei tre è uguale a 99 anni, determina l'età di ciascuno.

## ♫ MISTURE E CONCENTRAZIONI

32) Si vogliono ottenere 10 litri di soluzione al 10% di alcool, e a tale scopo si mescoleranno quantità opportune dei due liquidi disponibili, che sono: una soluzione A al 5% di alcool, e di una soluzione B al 12% di alcool. Quanti litri di A e quanti di B occorrono?

RISOLUZIONE

$x =$ n° litri di A occorrenti; $y =$ n° litri di B occorrenti

Gli $x$ litri di A contengono il 5% di alcool, quindi contengono $\frac{5}{100}x$ litri di alcool

Gli $y$ litri di B contengono il 12% di alcool, quindi contengono $\frac{12}{100}y$ litri di alcool

Mescolando, si vogliono ottenere 10 litri al 10% quindi

$$\begin{cases} x+y=10 \\ \frac{5}{100}x+\frac{12}{100}y=\frac{10}{100}\cdot 10 \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} x+y=10 \\ 5x+12y=100 \end{cases} \text{ e perciò } \begin{cases} x=\frac{20}{7}=2+\frac{6}{7} \\ y=\frac{50}{7}=7+\frac{1}{7} \end{cases}$$

33) Acqua e alcool denaturato sono mescolati, e la concentrazione di alcool è al 15%. Si vogliono mescolare $x$ litri di questo liquido con $y$ litri di acqua pura in modo da ottenere 10 litri di soluzione al 12% di alcool.
Che valore devono avere a questo scopo $x$ e $y$?

34) Un liquido A è formato da un 80% di acqua insieme con un 20% di disinfettante, un altro liquido B contiene invece il 10% di disinfettante (e il 90% di acqua).
Se vogliamo ottenere 20 litri di liquido nel quale la concentrazione del disinfettante sia al 16%, quanti litri di A e quanti di B dovremo mescolare fra loro?

## ♫ VELOCITA'

35) Due aerei identici spingono il loro motore a tutto gas, andando in direzioni opposte, il primo favorito e il secondo ostacolato dal vento. Sapendo che il primo in 1 ora e 20' riesce a percorrere 1120 km mentre il secondo nello stesso tempo copre una distanza di soli km 960, determina la velocità che avrebbe ciascun aereo se il vento non ci fosse, nonché la velocità del vento.

RISOLUZIONE

Indichiamo con $v$ la velocità che avrebbe ciascun aereo in aria calma, e con $w$ la velocità del vento. Allora l'aereo col vento in favore sarà portato alla velocità $v+w$, mentre quello frenato dal vento procederà alla velocità inferiore $v-w$. Il tempo di percorrenza di cui il testo ci parla è 1 h e 20 minuti, ossia (dobbiamo portare tutto in ore) 1 ora e 20/60 di ora, 1 ora e 1/3 di ora, 4/3 di ora.

Allora avremo: $\begin{cases} (v+w)\cdot\frac{4}{3}=1120 \\ (v-w)\cdot\frac{4}{3}=960 \end{cases}$ ; ... ; $\begin{cases} v=780 \\ w=60 \end{cases}$

36) Una zattera a motore impiega 2 ore e ½ a percorrere un tratto di fiume di 30 km contro corrente. La stessa zattera, col motore funzionante allo stesso modo, ridiscende successivamente il fiume percorrendo 24 km nello stesso senso della corrente in 1 ora e ½.
Determina la velocità della corrente, e quella che avrebbe l'imbarcazione in assenza di corrente.

37) Andando in motorino per ¼ d'ora ad $x$ km/h, poi in bici per 20 minuti ad $y$ km/h, si percorrono 23 km; Se invece, con le stesse velocità, i tempi si invertono, i km percorsi sono 26. Determina $x$ e $y$.

38) Un signore, terminato il lavoro in ufficio, si dirige, a piedi e con passo regolare (4 km/h), verso casa. A un certo punto, riceve sul telefonino una chiamata della moglie che gli comunica tutta emozionata di aspettare il tanto desiderato primo bambino. Allora cambia bruscamente il ritmo della sua camminata, procedendo, in questo secondo tratto, più rapidamente di prima (6 km/h).
Sapendo che la distanza dell'ufficio dalla casa è di km 3,4 e che il tempo totale del rientro è stato di 39', determina i tempi di percorrenza dei due tratti (in minuti).
(*Suggerimento: trasforma innanzitutto quei 39' in una frazione di ora …*)

## ♫ RITMI DI LAVORO

39) Un'azienda dispone di parecchie macchine tessili, di due tipologie differenti: tipo A e tipo B.
3 macchine di tipo A e 4 di tipo B sarebbero in grado di effettuare la produzione richiesta da un certo cliente, funzionando simultaneamente per 28 ore, mentre la stessa produzione potrebbe essere portata a termine in 20 ore soltanto se a lavorare in simultanea fossero 4 macchine di tipo A e 6 di tipo B.
Si domanda quanto ci metterebbe una singola macchina di tipo A a compiere quel lavoro.
E una singola macchina di tipo B? E una di tipo A più una di tipo B insieme?

RISOLUZIONE

Chiediamoci che frazione $\frac{1}{x}$ del lavoro è in grado di svolgere in 1 ora una singola macchina di tipo A e che frazione $\frac{1}{y}$ del lavoro è in grado di svolgere in 1 ora una singola macchina di tipo B.

Dunque: poiché 3 macchine di tipo A e 4 di tipo B ci mettono, insieme, 28 ore a effettuare il lavoro, avremo $3\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{28}$; e allo stesso modo, tenendo conto dell'altra informazione, $4\cdot\frac{1}{x}+6\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{20}$.

Il sistema $\begin{cases}3\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{28}\\4\cdot\frac{1}{x}+6\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{20}\end{cases}$ può essere risolto agevolmente con una "posizione": si pone $\begin{cases}\frac{1}{x}=u\\\frac{1}{y}=v\end{cases}$

e si trova $\begin{cases}3u+4v=\frac{1}{28}\\4u+6v=\frac{1}{20}\end{cases}$ che, risolto, ci dà $\begin{cases}u=\frac{1}{140}\\v=\frac{1}{280}\end{cases}$. Allora sarà $\begin{cases}x=\frac{1}{u}=140\\y=\frac{1}{v}=280\end{cases}$

per cui 1 singola macchina di tipo A ci metterebbe 140 ore a ultimare quella produzione,
1 singola macchina di tipo B 280 ore e, se lavorassero assieme, poiché in 1 ora effettuerebbero una frazione, della produzione richiesta, data da $\frac{1}{140}+\frac{1}{280}=\frac{3}{280}$,
completerebbero l'intero lavoro in un numero di ore pari a $\frac{1}{\frac{3}{280}}=\frac{280}{3}=93+\frac{1}{3}=93\ h\ 20'$ (NOTA)

NOTA - Sei d'accordo su questo passaggio al reciproco?
Per convincerti della sua correttezza, immagina casi numericamente più semplici, ad esempio:
supponi che in 1 ora venga svolto 1/5 di un lavoro;
allora, evidentemente, per fare quel lavoro ci vorranno 5 ore.
E se in un ora viene fatto 3 volte un certo lavoro?
Allora per quel lavoro è necessario impiegare 1/3 di ora!

40) 8 esperti e 8 apprendisti sono in grado di eseguire un lavoro in 1 giorno e ½;
4 esperti e 10 apprendisti ci metterebbero 2 giorni.
Quanto ci vorrebbe ad un lavoratore esperto da solo?

## SOLUZIONI DEI PROBLEMI

1) Una penna costa 2 euro, un quaderno 1,50 2) $a = 18$, $b = 15$ 3) Ne ha perse 2 4) 7 ore A, 8 ore B
5) Ha speso 40 euro 6) 8 euro e 30 centesimi 7) 14+4=18 euro 8) Anna possiede 70 euro, Bruno 110
9) Una moneta d'argento vale 120 euro, una di bronzo 40 euro; il mio tesoro vale 10000 euro
10) 42+48=90 euro 11) Rapporto=quoziente; 28 e 7 12) 40°, 40°, 100° 13) 44 e 38 14) 26+18=44
15) 15/19 16) 5 macchinine, 10 biciclettine, 4 tricicli 17) 12 centimetri 18) 8+9+15=32
19) 80 primi, 60 secondi, 40 dolci 20a) 16 e 20 once 20b) A aveva inizialmente 39 denari, B 21 e C 12
21) S=20, B=40, D=15, O=45; in totale, gli studenti sono 20+40+15+45=120
22) $\hat{A}$=31°, $\hat{B}$=90°, $\hat{C}$=116°, $\hat{D}$=155°, $\hat{E}$=148° 23) 341 24) 924 25) 85 26) 74
27) $a=4, b=-2$ : il polinomio è $P(x)=x^2+4x-2$ 28) $a=1, b=-3, c=-5$ 29) $a=-1, b=2, c=1$
30) $a=1, b=-1, c=-1, d=2$ : il polinomio è $P(x)=x^3-x^2-x+2$
31) 44 anni Giuseppe, 41 anni Francesca, 14 anni Benedetta
32) I litri di A sono 20/7 (2+6/7), quelli di B sono 50/7 (7+1/7) 33) $x=8, y=2$ 34) 12 litri di A, 8 di B
35) La velocità che avrebbe ciascun aereo in aria calma è di 780 km/h, la velocità del vento è di 60 km/h
36) La corrente procede a 2 km/h, la zattera senza corrente andrebbe a 14 km/h 37) 60 km/h, 24 km/h
38) 15' a 4 km/h e 24' a 6 km/h 39) 140 ore, 280 ore, 93 h 20' 40) 18 giorni

**ESEMPI DI PROBLEMINI IN INGLESE, TROVATI SU INTERNET**
(parole chiave: "word problems", "simultaneous equations", …)
♥ **Nel mondo anglosassone, la virgola fa da separatore per le migliaia, il punto per la parte decimale**

Da www.gcseguide.co.uk (Matthew Pinkney):

41) A man buys 3 fish and 2 chips for £2.80; a woman buys 1 fish and 4 chips for £2.60.
How much are the fish and how much are the chips?

Da www.themathpage.com (Lawrence Spector):

42) 1000 tickets were sold.
Adult tickets cost $8.50, children's cost $4.50, and a total of $7300 was collected.
How many tickets of each kind were sold?

43) It takes 3 hours for a boat to travel 27 miles upstream.
The same boat can travel 30 miles downstream in 2 hours.
Find the speeds of the boat and the current.

44) Edgar has 20 dimes and nickels, which together total $1.40. How many of each does he have?
(dime = moneta da 10 cents; nickel = moneta da 5 cents)

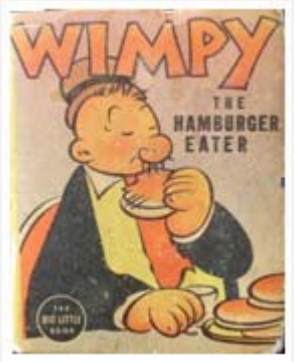
45) Mr. B. has $20000 to invest. He invests part at 6%, the rest at 7%, and he earns $1280 interest.
How much did he invest at each rate?

46) How many gallons of 20% alcohol solution and how many of 50% alcohol solution
must be mixed to produce 9 gallons of 30% alcohol solution?

47) 15 gallons of 16% disinfectant solution is to be made from 20% and 14% solutions.
How much of those solutions should be used?

48) An airplane covers a distance of 1500 miles in 3 hours when it flies with the wind,
and in 3 1/3 hours (3+1/3 hours) when it flies against the wind.
What is the speed of the plane in still air?

Da www.cut-the-knot.org
(Alexander Bogomolny, Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles)




49) It takes two hours for Tom and Dick to do a job.
Tom and Harry take three hours to do the same job.
Dick and Harry take six hours for the job.
Prove that Harry is a freeloader
( = scroccone, parassita, mangiapane a tradimento)

50) Billy is twice as old as Sally was when Billy was as old as Sally is now;
and the sum of their ages is 28. How old are they now?

( ♣ *Trovi tanti altri bei problemi, completi di risoluzione,*
*sullo stesso - fantastico! - sito di A. Bogomolny*)

Da www.regentsprep.org:

51) A test has twenty questions worth 100 points. The test consists of
True/False questions worth 3 points each and multiple choice questions worth 11 points each.
How many multiple choice questions are on the test?

Dal sito http://en.allexperts.com:

52) When a man cycles for 1 hour at $x$ km/h and 2 hours at $y$ km/h, he travels 32 km.
When he cycles for 2 hours at $x$ km/h and 1 hour at $y$ km/h, he travels 34 km. Find $x$ and $y$.

53) A man on foot covers the 25 km between two towns in 3 and three quarter hours.
He walked at 4 km/h for the first part of the journey and ran at 12 km/h for the remaining part.
a) How far did he run?
b) For how long was he running?

**SOLUZIONI**

41) £0.60, £0.50  42) 700, 300  43) 12 miles per hour, 3 miles per hour  44) 8 dimes, 12 nickels
45) $12000, $8000  46) 6 gallons, 3 gallons  47) 5 gallons, 10 gallons  48) 475 mph
49) Dal sistema si trae che Harry dà un contributo orario = 0 al lavoro!  50) 16, 12
51) There are 5 multiple choice questions  52) $x = 12$, $y = 10$  53) 15 km; 1.25 h

# 13. QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA SU EQUAZIONI E SISTEMI




1) In un club di cacciatori, i 3/8 vanno anche a pesca, mentre 15 lasciano in pace almeno i pesci. Quanti membri conta quel club?
a) 48 b) 40 c) 32 d) nessuna delle risposte precedenti è corretta

2) Il perimetro di un rettangolo misura 34 cm, e l'altezza supera il doppio della base di 2 cm. Quanto misura l'area?
a) $60\,\text{cm}^2$ b) $\frac{2240}{9}\,\text{cm}^2$ c) $\frac{285}{4}\,\text{cm}^2$ d) non si può determinare con sicurezza

3) L'area di un rettangolo, la cui base è doppia dell'altezza, misura $\text{cm}^2\,50$. La diagonale misura allora:
a) fra gli 11 e i 12 cm b) fra i 12 e i 13 cm c) fra i 13 e i 14 cm d) fra i 14 e i 15 cm

4) Quante soluzioni ha l'equazione $x(x-1)(2x+1)(x^2-16)=0$? a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

5) Dal sito www.analyzemath.com:
Due differenti compagnie di noleggio automobili offrono due piani tariffari differenti: A e B.
Nel piano A, un cliente paga 25 dollari fissi più 10 centesimi per ogni chilometro percorso.
Nel piano B, il cliente paga 15 centesimi per ciascuno dei primi 100 chilometri e 20 centesimi per ogni chilometro dopo i primi 100. Per quanti km i due piani prevederebbero la stessa spesa?
a) 400 b) 300 c) 200 d) 120 e) 100

6) Se $2(3+2x)=1$, quanto vale $4-12x$? a) 17 b) 18 c) 19 d) non si può determinare

7) Se $(a+b)^2$ supera di 1584 unità $(a-b)^2$, che numero si ottiene moltiplicando $a$ per $b$?
a) 792 b) 396 c) 198 d) Ci sono 2 possibilità

8) Se $a+3b=11$ e $2a+b=2$, quanto vale $a+b$? a) 3 b) 3,5 c) 4 d) 4,5

9) Se $\frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{2}$, il valore di $\frac{x}{y}$ è: a) $-4$ b) $-3$ c) $-2$ d) $-1$ e) 0

10) L'equazione $2(x-a)=2a+1$, dove $a$ è un numero fissato, ha come soluzione il numero $a+1$
a) mai b) per infiniti valori di $a$ c) solo se $a=0$ d) solo se $a=1/2$

11) La coppia $(x, y)$ soluzione del sistema $\begin{cases}4x-3y=25\\8x+7y=11\end{cases}$ verifica l'equazione $x+ky=10$. Quanto vale $k$?
a) $-2$ b) $-1$ c) 0 d) 1 e) 2

12) UKMT - United Kingdom Mathematics Trust - Intermediate Mathematical Challenge 2007
The mean ( = media) of three numbers $x$, $y$ and $z$ is $x$. What is the mean of $y$ and $z$?
a) $\frac{1}{2}x$ b) $x$ c) $2x$ d) $3x$ e) $4x$

13) UKMT - United Kingdom Mathematics Trust - Intermediate Mathematical Challenge 2005
Granny has taken up deep-sea fishing! Last week, she caught a fish so big that she had to cut it into three pieces (head, body and tail) in order to weigh it ( = per pesarlo).
The tail weighed 9 kg and the head weighed the same as the tail plus one third of the body.
The body weighed as much as the head and tail together. How much did the whole fish weigh?
a) 18 kg b) 27 kg c) 54 kg d) 77 kg e) 84 kg

14) University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition 1991
On an exam with $q$ questions, Marie correctly answered 15 of the first 20 but just 1/3 of the rest.
If her total score was 50%, what was $q$? a) 29 b) 50 c) 55 d) 65 e) 100

15) In una scuola superiore, quest'anno, si è avuto un *boom* di iscrizioni alle classi prime: il 10% di femmine in più, addirittura il 40% di maschi in più, mentre il totale degli iscritti è aumentato del 20%. Quante erano state, l'anno scorso, le iscrizioni femminili rispetto a quelle maschili?
a) Una volta e mezza b) Il doppio c) Due volte e mezza d) Il triplo e) Il quadruplo

**RISPOSTE AI QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA :** 1d2a3a4e5b6c7b8a9b10d11a12b13c14b15b

## 14. PROBLEMI VARI, A UNA O PIU' INCOGNITE (se c'è la freccia, manda alla correzione)

1) La somma delle età di due sorelle è 36 anni. 6 anni fa la maggiore aveva età doppia della minore.
Trova le due età attuali. ⇨

2) *Un problemino di Eulero (1707-1783)*
Un padre lasciò in eredità ai suoi 4 figli un patrimonio complessivo di 8600 sterline. Secondo il testamento, al primogenito dovevano andare 100 sterline meno del doppio di ciò che spettava al secondogenito; il secondogenito, a sua volta, avrebbe ereditato 200 sterline in meno rispetto al triplo del terzogenito. E questi (il terzogenito), avrebbe dovuto ricevere 300 sterline in meno rispetto al quadruplo del più giovane. Si domanda l'ammontare dell'eredità di ciascuno. ⇨

3) Si vincono 4 gettoni per ogni risposta giusta, se ne perdono 7 per ogni risposta sbagliata; dopo 30 domande io sto perdendo 89 gettoni. Quante volte ho risposto sbagliato? ⇨

4) Determina i tre coefficienti *a, b, c* di un trinomio di 2° grado $ax^2+bx+c$ sapendo che:
- se si assegna a $x$ il valore 1, il trinomio assume il valore 0
- se si assegna a $x$ il valore 2, il trinomio assume il valore 1
- se si assegna a $x$ il valore 3, il trinomio assume il valore 6. ⇨

5) Un commerciante si reca successivamente a Lucca, poi a Firenze e infine a Pisa.
In ogni città prima raddoppia i soldi con cui arriva, poi spende per la locanda 12 denari.
Se alla fine si ritrova senza denari, con quanti denari aveva iniziato il suo giro? ⇨
*(Soluzione frazionaria; il problema è tratto dal Liber Abaci di Leonardo Pisano, pubblicato nel 1202).*

6) Un aeroplano percorre un tragitto di 390 km in 30 minuti in condizioni di vento contrario, poi torna indietro, sempre in presenza del medesimo vento, che però in questo caso gioca a favore, e ci impiega 26 minuti soltanto. Trova:
a) la velocità che avrebbe l'aereo, in assenza di vento
b) la velocità del vento ⇨



*Alcuni di questi problemi non sono facili. Non darti subito per vinta/o!!! Non facevano così nel vecchio West!*

7) Se di una scalinata io ne percorro la metà più 4 gradini,
poi la metà di ciò che resta più 8 gradini,
e a quel punto mi rimane ancora la quinta parte dell'intera scalinata,
sapresti dirmi quanti sono i gradini in totale? ⇨

8) Trovare un intero di 2 cifre, sapendo che è uguale a 15 volte la cifra delle unità, e che scambiandone le cifre diminuisce di 18 unità. ⇨

9) I due podisti Aldo e Bruno corrono a due velocità costanti, ma diverse fra loro (Aldo è più veloce), su di un circuito di 360 metri. Determinare le loro velocità in m al secondo e anche in km/h, sapendo che se marciano in direzioni opposte, si incontrano ogni 40 secondi, mentre se marciano nella stessa direzione, Aldo, ogni volta che supera Bruno, ci mette 6 minuti a raggiungerlo nuovamente. ⇨

10) Ho in tasca 43 monete, parte da 10, parte da 20, e parte da 50 centesimi. Il totale equivale a 9 euro, e il numero delle monete da 20 centesimi è ¾ di quello delle monete da 10.
Quante sono le monete da 10, quante quelle da 20, e quante quelle da 50? ⇨

11) Ai Giochi di Archimede una risposta esatta viene valutata 5 punti, una sbagliata 0 e una non data 1. Supponiamo che Pierino abbia totalizzato 64 punti senza sbagliare mai; a quante domande, sulle 20 proposte, ha allora scelto di non rispondere?

12) Ho in portafogli monetine da 10, 20 e 50 centesimi; quante di ciascun tipo, se il valore di quelle da 10 e da 20 è complessivamente di 2,80 euro, il valore di quelle da 10 e da 50 di 4,80 euro, e il valore di quelle da 20 e da 50 di esattamente 6 euro?

13) Se dopo uno sconto del 20% su di un articolo il venditore, non riuscendo a trovare un acquirente, decide di praticare un ulteriore sconto del 25 %, offrendolo per euro 108, qual era il prezzo originario?

14) Una bella signora, quando il goffo e incolto Gennarino le domanda quanti anni abbia, con l'intento di metterlo in difficoltà gli risponde: "Cinque anni fa, avevo i 5/6 dell'età che avrò fra 3 anni". Aiuteresti Gennarino a ricostruire l'età della dama?

15) Disponendo una sopra l'altra 12 monete, alcune da 20 centesimi di corona e le altre da 50 centesimi, si ottiene una colonna di monete alta 26 mm. Sapendo che una moneta da 20 centesimi di corona è spessa 2 mm e una da 50 centesimi 2,4 mm, qual è il valore totale delle monete in colonna?

16) Quanti litri di soluzione al 12% di alcool devono essere mescolati con quanti litri di soluzione alcoolica al 22% se si vogliono ottenere 5 litri di soluzione al 20%?



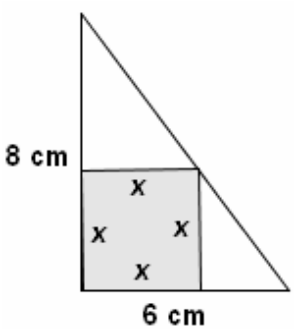
17) All'entrata di un supermercato, si trovano due trenini di carrelli ben incastrati, uno composto da 10 carrelli e lungo 2,9 metri e l'altro formato da 20 carrelli e lungo 4,9 metri. Qual è la lunghezza di un carrello? (Kangourou 2010)

18) Se un padre è in grado di tagliare l'erba nel giardino di casa mettendoci ½ ora e il figlioletto ¾ d'ora, stabilisci quanti minuti ci metterebbero a sistemare l'intero giardino, lavorando insieme.

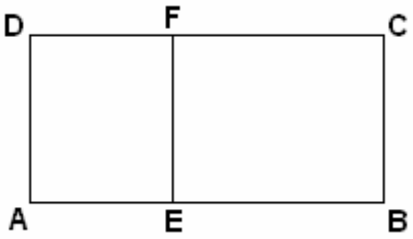
19) Due rubinetti che si affacciano su di una grossa vasca vengono aperti simultaneamente. Il primo rubinetto sarebbe in grado, se usato da solo, di riempire la vasca in 1 ora e mezza, il secondo, che è assai piccolino, sempre se usato da solo, ce la farebbe in 6 ore; ora i due rubinetti sono aperti entrambi, ma per distrazione è stato lasciato in funzione pure lo scarico della vasca, il quale, quando questa è piena, riesce a vuotarla in 2 ore. Determina il tempo necessario affinché la vasca si riempia in queste condizioni.

20) Dimostra che il sistema $\begin{cases} 3\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}=-8 \\ 2\cdot\frac{1}{x}-5\cdot\frac{1}{y}=10 \end{cases}$ è impossibile $\left[ \textit{Indicazione}: \textit{poni } \frac{1}{x}=u,\ \frac{1}{y}=v \ldots \right]$

21) Un quadrato è "inscritto in un triangolo rettangolo" di cateti 6 cm e 8 cm, come nella figura qui a fianco. La misura del lato del quadrato si può determinare utilizzando i "triangoli simili"; ma anche senza scomodare le similitudini, ci si può riuscire ugualmente, tramite … le aree! Indica con *x* il lato da determinare, e provaci.




22)




Sapendo che il perimetro di AEFD è inferiore di 4 cm rispetto a quello di EBCF, e che $AB = 18$ cm, è possibile determinare AE, EB, AD?

23) Una candela ci mette 5 ore per consumarsi completamente. Una seconda candela è alta il doppio della prima; tuttavia, essendo questa molto più sottile, il tempo affinché si consumi è di sole 4 ore. Se vengono accese simultaneamente, dopo quanto tempo si troveranno ad avere la stessa altezza?

Da www.cut-the-knot.org:

24) There are 9 coins all together, some of them pennies, some nickels and some dimes. If you collect up all the pennies and nickels, there are 7. If you collect up all the nickels and dimes, there are 5. How many of the 9 coins are pennies, how many nickels, how many dimes?
(*Penny, nickel, dime = monetina da - rispettivamente - 1, 5, 10 centesimi di dollaro*)




Da www.analizemath.com:

25) A swimming pool can be filled by pipe A in 3 hours and by pipe B in 6 h, each pump working on its own. At 9 am pump A is started. At what time will the swimming pool be filled if pump B is started at 10 am?

26) Se un viaggiatore fosse andato 1 km/h più veloce, avrebbe risparmiato la sesta parte del tempo impiegato; mentre se fosse andato 1 km/h più lento, ci avrebbe messo ¾ d'ora in più. Trova la distanza percorsa.

## SOLUZIONI DEI PROBLEMI

1) 22 e 14 anni 2) 4900, 2500, 900, 300 sterline 3) 19 sbagliate 4) $a = 2,\ b = -5,\ c = 3$
5) 10 denari e ½ 6) vel. aereo: 14 km al minuto = 840 km all'ora; vel. vento: 1 km al minuto = 60 km/h
7) 200 gradini 8) 75 9) Aldo va a 5 m/s = 18 km/h; Bruno a 4 m/s = 14,4 km/h 10) 20, 15, 8
11) 9 12) 8, 10, 8 13) 180 euro 14) 45 anni 15) 390 centesimi di corona = 3 corone e 90 centesimi
16) 1 litro, 4 litri 17) m 1,1 18) 18 minuti (*senza equazioni*) 19) 3 ore
20) Si trova $u = 0$, ma non esiste alcun valore di *x* per cui si abbia $1/x = 0$
21) La somma delle tre aree piccole dà l'area grossa: $x^2 + \frac{(6-x)\cdot x}{2} + \ldots = \ldots \quad x = \text{cm}\,\frac{24}{7}$
22) $AE = 8$ cm, $EB = 10$ cm, mentre AD non si può determinare, potrebbe avere una misura qualsiasi.
23) Dopo 3 ore e 20 minuti 24) $p = 4,\ n = 3,\ d = 2$ 25) $t\cdot(1/3)+(t-1)\cdot(1/6)=1$; at 11:20 26) 15 km

# IL TEOREMA DI PITAGORA IN BREVE

Per una trattazione accurata, e per la dimostrazione, rimandiamo all'apposito capitolo del Volume 2. Qui ci limitiamo a dare l'*enunciato* (enunciato *algebrico*; il *geometrico* è sul Vol. 2) e alcuni esempi di *esercizi*.

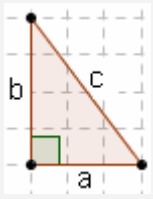
Dunque (**Teorema di Pitagora**):

"**In un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati dei cateti è sempre uguale al quadrato dell'ipotenusa**".

E anche (**Inverso del Teorema di Pitagora**):

"**Se in un triangolo accade che la somma dei quadrati di due lati sia uguale al quadrato del lato rimanente, allora il triangolo è rettangolo**".

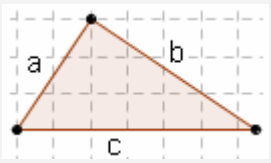
Il triangolo è rettangolo. Allora $\boxed{a^2+b^2=c^2}$ da cui




$c=\sqrt{a^2+b^2}$; $a=\sqrt{c^2-b^2}$; $b=\sqrt{c^2-a^2}$

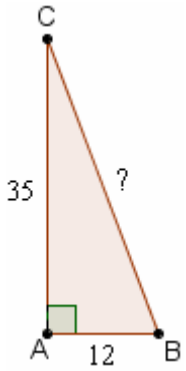
♪♪♪ **"Guarda che cosa astrusa: la somma dei quadrati dei cateti mi dà il quadrato dell'ipotenusa!"** ♪♪♪

VICEVERSA, se si sa che $\boxed{a^2+b^2=c^2}$,




allora si può essere certi che il triangolo è rettangolo (l'angolo retto è quello opposto al lato di misura c)

a) Un triangolo ABC, rettangolo in A, ha i cateti che misurano AB = 12 cm, AC = 35 cm. Quanto è lunga l'ipotenusa BC?




$BC^2 = AB^2 + AC^2$

da cui

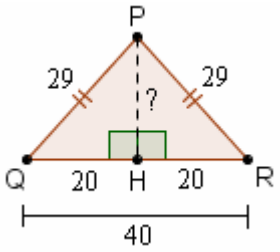
$BC = \sqrt{AB^2+AC^2} =$

$= \sqrt{12^2+35^2} =$

$= \sqrt{144+1225} =$

$= \sqrt{1369} = 37$ cm

b) Nel triangolo isoscele PQR i lati obliqui PQ e PR misurano ciascuno cm 29, e si ha QR = cm 40. Determinare l'area.




Tracciando l'alt. PH, si ha QH = HR = QR/2 = 20 cm

Allora, nel triangolo rettangolo PHR, è

$PH = \sqrt{PR^2-HR^2} = \sqrt{29^2-20^2} =$

$= \sqrt{841-400} = \sqrt{441} = 21$ cm

quindi $Area = \dfrac{QR\cdot PH}{2} = \dfrac{40\text{ cm}\cdot 21\text{ cm}}{2} = 420\text{ cm}^2$

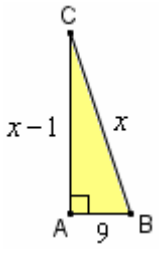
c) Un triangolo i cui lati misurano metri 7, 24 e 25 ha qualcosa di speciale???

… Sì, perché se osserviamo che

$7^2+24^2 = 49+576 = 625 = 25^2$

potremo dedurre che il triangolo è rettangolo, in quanto la somma dei quadrati di due dei suoi lati uguaglia il quadrato del terzo lato. Abbiamo applicato ♥ L'INVERSO DEL TEOREMA DI PITAGORA.

d) In un triangolo rettangolo, un cateto misura metri 9, e l'altro cateto è inferiore di 1 metro all'ipotenusa. Determina tutti i lati del triangolo.




$AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\boxed{9^2+(x-1)^2 = x^2}$

$81 \cancel{+x^2} - 2x + 1 = \cancel{x^2}$

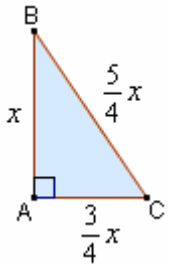
$-2x = -82;\ x = 41$

BC = 41 m, AC = 40 m

♥ **In questo problema, dunque, PITAGORA È STATO UTILIZZATO PER IMPOSTARE L'EQUAZIONE RISOLVENTE.**

*Inutile, nella fattispecie, sarebbe stato utilizzare formule inverse o radici quadrate: per scrivere un'uguaglianza contenente x, è bastata la relazione pitagorica "originaria".*

e) In un triangolo rettangolo, i cateti sono uno i ¾ dell'altro e il perimetro misura 36*a*. Determinare l'area.




$BC = \sqrt{AB^2+AC^2} =$

$= \sqrt{x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2} = \ldots = \frac{5}{4}x$

$x + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}x = 36a \quad \ldots \quad x = 12a$

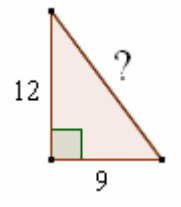
$AC = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}\cdot 12a = 9a$

$S = \dfrac{AC\cdot AB}{2} = \dfrac{9a\cdot 12a}{2} = 54a^2$

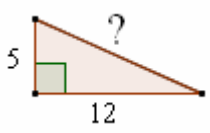
♥ **In questo problema, dunque, PITAGORA È STATO UTILIZZATO PER ESPRIMERE UN SEGMENTO IN FUNZIONE DI *x*.**

# ESERCIZI SUL TEOREMA DI PITAGORA

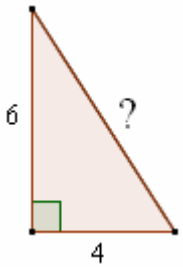
1)



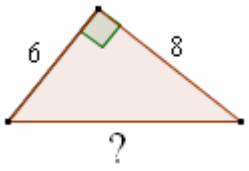

2)



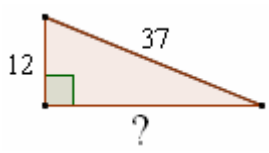

3)



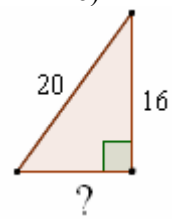

4)



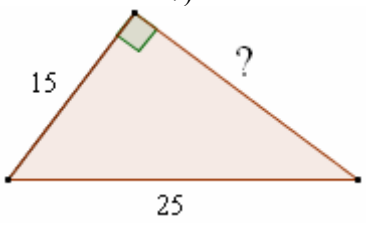

5)



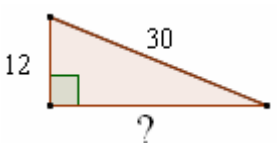

6)



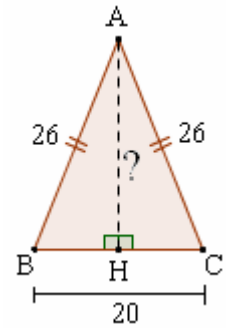

7)



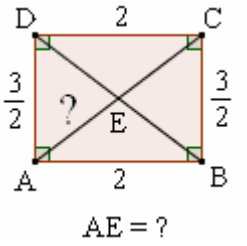

8)



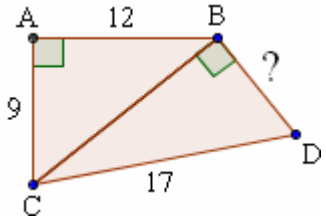

9)



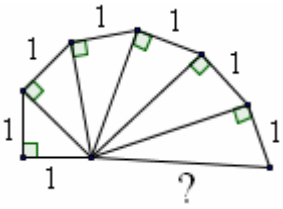

10)




11)




12)




Dal sito www.proprofs.com:



13) Two joggers run 8 miles north and then 15 miles west.
What is the shortest distance they must travel to return to their starting point?

Dal sito www.transum.org:

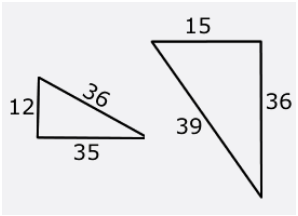


14a) A rectangular swimming pool is 21 m wide and 50 m long.
Calculate the length of a diagonal to 1 decimal place.



14b) A ladder is 6 m long. How far from the base of a wall should it be placed
if it is to reach 5 m up the wall? Give your answer correct to 1 decimal place.

Dal sito www.emathematics.net: 15) Are these right triangles? →




**RISPOSTE**

1) 15 2) 13 3) $\sqrt{52} = 7,\ldots$ 4) 10 5) 35 6) 12
7) 20 8) $\sqrt{756} = 27,\ldots$ 9) 24 10) 5/4 = 1,25 11) 8 12) $\sqrt{7} = 2,6\ldots$
13) 17 miles 14a) m 54,2… 14b) m 3,3…

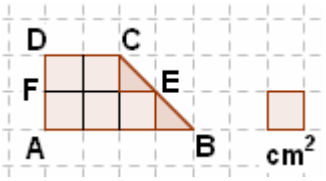
15) We can use the Converse of the Pythagorean Theorem to find if the triangles are right triangles.
If the equation $a^2 + b^2 = c^2$ is true, then we will have a right triangle.
The first triangle is not a right triangle; the second triangle is a right triangle.

# AREE E VOLUMI IN BREVE

Un discorso approfondito sulle aree si trova nel capitolo di Teoria della Misura del Volume 2.
Qui ci accontentiamo di accennare a qualche idea elementare, riportando le formule principali.

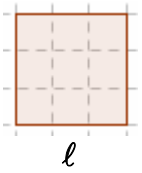
**Cosa vuol dire calcolare l' "area" di una superficie?**
Vuol dire chiedersi quante volte è contenuta,
nella superficie in questione,
*un'altra* superficie, quella che farà da "*unità di misura*",
ad esempio: il quadrato di lato 1 cm
(detto "centimetro quadrato", che si abbrevia in $cm^2$)

*Il quadrilatero ABCD qui a fianco ha un'area di* $6\ cm^2$.
*L'area di ABEF è di* $3{,}5\ cm^2$.



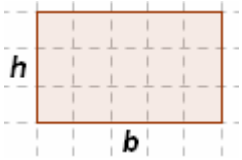

Si dimostra che valgono le seguenti formule, che permettono di calcolare le aree di alcune superfici particolari conoscendo le misure delle lunghezze di determinati segmenti.
Il simbolo indicante l'area in queste formule è S
(S come "Superficie"; si usa spesso dire, infatti, "superficie" per significare "area di una superficie")

**QUADRATO**



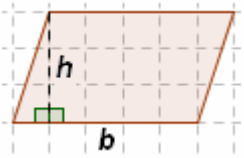

$S = \ell \cdot \ell = \ell^2$

**RETTANGOLO**



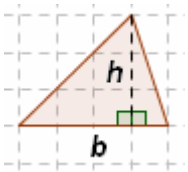

$S = base \cdot altezza = b \cdot h$

**PARALLELOGRAMMO**



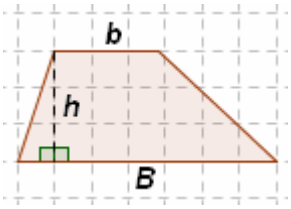

$S = base \cdot altezza = b \cdot h$

**TRIANGOLO**



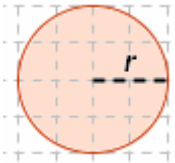

$$S = \frac{base \cdot altezza}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

**TRAPEZIO**




$$S = \frac{(base_{MAGG} + base_{min}) \cdot altezza}{2} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

**CERCHIO**




$S = \pi \cdot r^2$
$con\ \pi = 3{,}14159...$

Se una superficie viene ingrandita in scala in modo che le sue DIMENSIONI LINEARI RADDOPPINO (es.: un poligono "gonfiato" in maniera che gli angoli restino uguali, ma raddoppino le misure dei lati), allora la sua AREA diventerà il QUADRUPLO.
Se il "rapporto di scala" è 3, il rapporto fra le aree (della figura ingrandita e di quella originaria) è 9.
Se il "rapporto di scala" è $k$, il rapporto fra le aree (della figura ingrandita e di quella originaria) è $k^2$.

## CENNI SUI VOLUMI; COS'E' UN "LITRO"

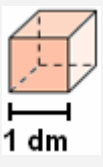
**Il discorso per i volumi** (trattato più in dettaglio nel capitolo di Geometria Solida del Vol. 2) **è analogo.**
Trovare il volume di un solido vuol dire chiedersi quante volte ci sta dentro, in quel solido, un *altro* solido, che farà da "*unità di misura*", ad es.: il cubo di lato 1 cm (detto "centimetro cubo", che si abbrevia in $cm^3$).

Se un solido viene ingrandito in scala in modo che le sue DIMENSIONI LINEARI vengano MOLTIPLICATE PER 2, allora il suo VOLUME ne risulterà MOLTIPLICATO PER 8.
In generale, se il "rapporto di scala" è $k$, il rapporto fra i volumi è $k^3$.

Il "LITRO" è a tutti gli effetti una misura di VOLUME, perché 1 litro di un liquido non è altro che 1 "decimetro cubo" ($1\ dm^3$) di quel liquido, vale a dire: una quantità di quel liquido, pari a un cubo il cui lato misuri 1 decimetro (0,1 metri).
In un metro cubo di spazio ci stanno dunque 1000 litri.



**1 litro = 1 $dm^3$**




## TERMINOLOGIA ALGEBRICA … DI ISPIRAZIONE GEOMETRICA

L'area di un quadrato ABCD si calcola elevando alla seconda la misura della lunghezza del lato: $S = \ell^2$.
"Elevare alla 2ª potenza, elevare all'esponente 2" fa venire in mente il calcolo dell'area di un quadrato.
Ecco perché si è affermata l'abitudine di dire "*eleviamo al quadrato*" anziché "*eleviamo all'esponente 2*".
Allo stesso modo, dato che il volume di un cubo si calcola con la formula $V = \ell^3$, dove $\ell$ è la lunghezza del lato del cubo, ci si è abituati a dire "*elevamento al cubo*" anziché "*elevamento all'esponente 3*".

# PROBLEMI GEOMETRICI (DI 1° GRADO)

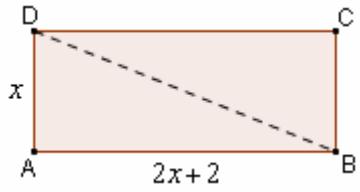
❑ In un rettangolo, la base supera di 2 cm il doppio dell'altezza e il perimetro è di 34 cm.
Trovare l'area e la diagonale.

Facciamo il **disegno, cercando di restare più fedeli possibile ai dati del problema.**

*In questo caso, ad esempio, occorrerà disegnare la base in modo che sia lunga più del doppio dell'altezza …*

**Accanto ad disegno, scriviamo tutti i dati**, sia quelli geometrici che quelli numerici.

**E scriviamo anche**, con accanto dei punti interrogativi, quali sono **le richieste del problema**.




ABCD rettangolo
$AB = 2AD + 2\ cm$
$2p(ABCD) = 34\ cm$
$S(ABCD) = ?\quad BD = ?$

Valgono le solite indicazioni generali (vedi pag. 148) date in relazione ai problemi di soggetto qualsiasi:
**la risoluzione di un problema a una incognita si può suddividere in 3 fasi 1), 2), 3)**

**1) Pongo la *x* :**
$\boxed{AD = x}$

♥ **La *x* non deve per forza coincidere con una delle richieste del problema; va scelta in modo che sia poi facile esprimere gli altri segmenti in gioco, per mezzo di *x***

**2) Esprimo gli altri segmenti in gioco per mezzo ("in funzione") di *x* :**
$\boxed{AB = 2x + 2}$

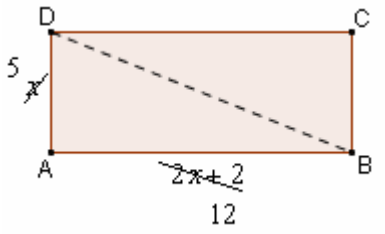
♥ **E' ESTREMAMENTE UTILE riportare sul disegno, in matita, sia la *x* che le varie espressioni contenenti *x* via via ricavate.**

**3) Imposto l'equazione risolvente :**
$\boxed{2(2x+2) + 2x = 34}$
$4x + 4 + 2x = 34$
$6x = 30$
$x = 5$

♥ **L'equazione risolvente si imposta utilizzando un dato che non sia mai stato sfruttato fino a quel momento** *(nel nostro caso, il perimetro).*
Se ci servissimo, per l'equazione risolvente, di un'informazione già utilizzata prima, ci ritroveremmo fra le mani un'equazione *indeterminata*!

Quindi
$AD = 5\ cm$,
$AB = 2x + 2 = 10 + 2 = 12\ cm$ (NOTA 1)

**Converrà a questo punto riportare sulla figura i valori ottenuti!**




$\boxed{S =}\ AB \cdot AD = 12 \cdot 5 = \boxed{60\ cm^2}$ (NOTA 2)

$\boxed{BD =}\ \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} =$
$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = \boxed{13\ cm}$ (NOTA 3)

NOTA 1
*A stretto rigore, l'unità di misura andrebbe indicata in tutti gli anelli della catena e non solo nell'ultimo, scrivendo quindi, in questo caso,*
$AB = (2x+2)\ cm = (10+2)\ cm = 12\ cm$
*Tuttavia noi, per brevità, la scriveremo solo alla fine.*

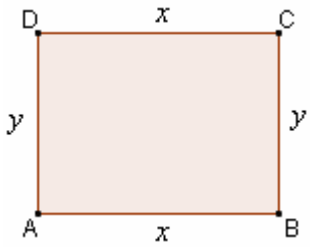
NOTA 2
*L' "area" si può indicare con A oppure con S (il termine "superficie" è usato, seppure impropriamente, anche per indicare l' "area di una superficie"). A rigore, "superficie" indica invece l'entità* ***geometrica****, "area" il* ***numero*** *che esprime la misura dell'estensione di una superficie.*

NOTA 3
*Qui abbiamo applicato il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABD.*

Certo, **sovente sono possibili più risoluzioni alternative**!
Anche nel nostro caso: il dato *perimetro = 34* ci diceva che la somma *base+altezza* era *17*, quindi avremmo potuto, ad es., porre
*base* $= x$; *altezza* $= 17 - x$ da cui l'equazione risolvente : $x = 2(17 - x) + 2$; ... $x = 12$ *eccetera*

❑ Trovare le dimensioni di un rettangolo nel quale
il perimetro supera di 10 cm il triplo dell'altezza,
e la differenza fra il triplo della base e il doppio dell'altezza è 12 cm.

**Disegno**




**Dati**

ABCD rettangolo
$2p(\text{ABCD}) = 3\text{AD} + 10\ cm$
$3\text{AB} - 2\text{AD} = 12\ cm$
$\text{AB} = ?\quad \text{AD} = ?$

Questa volta i dati sono tali che, comunque si ponga la *x*,
sarebbe poi un po' scomodo esprimere l'altro segmento in gioco per mezzo di *x*.
In questi casi è preferibile PORRE PIU' INCOGNITE e impostare un SISTEMA,
costituito da TANTE EQUAZIONI, QUANTE SONO LE INCOGNITE POSTE.

$\boxed{\begin{matrix}\text{AB} = \text{DC} = x \\ \text{AD} = \text{BC} = y\end{matrix}}$

$\boxed{\begin{cases}2x + 2y = 3y + 10 \\ 3x - 2y = 12\end{cases}}$

Risolvendo ora il sistema, otteniamo:

$$2 \cdot \begin{cases}2x - y = 10 \\ 3x - 2y = 12\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x - 2y = 20 \\ 3x - 2y = 12\end{cases}$$

$$(1) - (2) \begin{cases}x = 8 \\ (1)\quad 2 \cdot 8 - y = 10;\ 16 - y = 10;\ y = 6\end{cases}$$

Quindi
$\text{AB} = \text{DC} = 8\ cm$
$\text{AD} = \text{BC} = 6\ cm$

**♥ La risoluzione in più incognite è consigliabile quando, comunque si ponga la *x*, è poi difficoltoso o se non altro scomodo esprimere per mezzo della *x* scelta, le altre quantità in gioco.**

**In tal caso, si pongono due o più incognite, e si scrive un sistema, nel quale LE EQUAZIONI SIANO TANTE QUANTE LE INCOGNITE PRESENTI.**

*L'eventualità che il numero delle equazioni, indipendenti fra loro, che si possono impostare, sia diverso dal numero delle incognite, è assai rara nei problemi "scolastici".*

**Volendo, avremmo anche potuto risolvere con una incognita sola**:
se si osservano i dati

$2p(\text{ABCD}) = 3\text{AD} + 10\ cm$
$3\text{AB} - 2\text{AD} = 12\ cm$

si capisce che nell'ultima uguaglianza si può isolare con un paio di passaggi AB, ottenendo

$3\text{AB} = 2\text{AD} + 12\ cm$
$\text{AB} = \dfrac{2\text{AD} + 12\ cm}{3}$

per cui, se si pone ora $\boxed{\text{AD} = x}$,

si ha $\boxed{\text{AB} = \dfrac{2x + 12}{3}}$

e si può scrivere dunque l'equazione risolvente

$2p(\text{ABCD}) = 3\text{AD} + 10\ cm$

$\boxed{2 \cdot \dfrac{2x + 12}{3} + 2x = 3x + 10}$

con la quale si trova

$\boxed{x = \text{AD} = 6}$.

Se confrontiamo i due metodi di risoluzione,
vediamo che per *questo* particolare problema,
pur essendo possibile risolvere con 1 sola incognita,
la risoluzione con più incognite e quindi col sistema
si rivela migliore,
anche per la possibilità di affrontare poi il sistema
col simpatico metodo di riduzione.

*In generale*, comunque,
di fronte a un problema geometrico,
*la risoluzione con una incognita sola è preferibile*,
perché risulta di norma più comoda
e perché mette maggiormente in risalto
le interrelazioni fra le varie quantità.
*Tranne, ribadiamolo, in quei casi in cui sia eccessivamente laborioso esprimere tutte le quantità in gioco, in funzione di una sola di esse.*

## PROBLEMI GEOMETRICI DI 1° GRADO: ESERCIZI (la freccia è un link alla correzione)

1) ⇨ In un triangolo isoscele il lato obliquo è i 5/6 della base, e la differenza fra base e lato obliquo è di 3 cm. Quanto misura il perimetro? E l'area?

2) In un triangolo isoscele, di perimetro 72 cm, il lato obliquo supera la base di 6 cm. Determina i tre lati.

3) Di un triangolo si conosce il perimetro (48 cm), e si sa che due dei lati hanno per somma 27 cm e per rapporto 4/5. Quanto misura ciascuno dei tre lati?

4) ⇨ In un triangolo isoscele, la somma del triplo della base col doppio del lato obliquo misura 82 cm ed è di 19 cm la differenza fra il triplo del lato obliquo e il doppio della base. Determina il perimetro.

5) In un triangolo rettangolo i cateti sono uno i ¾ dell'altro, e la loro somma misura cm 21. Quanto misura il perimetro?

6) Di un trapezio isoscele si conoscono: l'area $(44\ \text{cm}^2)$, l'altezza $(4\ \text{cm})$ e il rapporto fra le due basi $(4/7)$. Quanto vale il perimetro?

7) In un triangolo isoscele il lato obliquo è inferiore di 4 cm rispetto alla base. Il perimetro è di cm 64. Trovare i lati, l'area, l'altezza relativa al lato obliquo.

8) In un triangolo isoscele DEF, di base $\overline{EF}$, si ha $\overline{EF}+\overline{DE}=\text{m}\,11$, e $2\overline{EF}+3\overline{DE}=\text{m}\,27$. Determina i lati del triangolo e la sua area.

9) Se il perimetro di un quadrato aumentasse di 8 cm, l'area aumenterebbe di $36\ \text{cm}^2$. Quanto misura il lato del quadrato?

10) In un triangolo PQR i due angoli più ampi sono rispettivamente il doppio e il quintuplo del più piccolo. Quanto misurano i tre angoli?

11) In un triangolo ABC si sa, riguardo agli angoli interni, che $3\hat{A}+2\hat{B}=195°$ e che $4\hat{B}-3\hat{C}=30°$. Quanto misurano i tre angoli?

12) Determinare perimetro e area di un rombo del quale si conoscono la somma delle diagonali (62 cm) e la loro differenza (34 cm).

13) Un trapezio isoscele ha la base minore uguale al lato obliquo. Il perimetro del trapezio misura 52 cm, e la somma della quinta parte del lato obliquo con la metà della base maggiore vale 13 cm. Determinare le misure dei quattro lati e dell'area.

14) ABCD è un trapezio rettangolo. La base maggiore $\overline{AB}$ supera di 4 cm la somma di altezza e lato obliquo; questi differiscono di 8 cm, mentre la differenza fra base maggiore e lato obliquo è di 9 cm. Determinare il perimetro e l'area.

15) Un parallelogrammo ha il perimetro di 2 m; un lato supera l'altro di 22 cm. Quanto misurano i due lati? Sapendo inoltre che la proiezione del lato maggiore sul minore vale 11 cm, trovare l'area della figura.

16) ⇨ Un trapezio rettangolo ha la base minore uguale all'altezza. Il lato obliquo supera di 2 cm la base minore, mentre la differenza fra le due basi è di 8 cm. Sapresti determinare i quattro lati? (*In questo problema si può applicare il Teorema di Pitagora per impostare l'equazione risolvente*)

17) Sapendo che la mediana $\overline{CM}$ relativa all'ipotenusa $\overline{AB}$ di un triangolo rettangolo ABC supera di 18 cm la propria proiezione $\overline{HM}$ sull'ipotenusa, e che l'altezza $\overline{CH}$ relativa all'ipotenusa misura 24 cm, determinare perimetro e area di ABC (qui occorre sapere che la mediana relativa all'ipotenusa, in un triangolo rettangolo, è sempre uguale alla metà dell'ipotenusa stessa).

18) ⇨ Trovare il perimetro di un triangolo isoscele di area $108\ \text{cm}^2$, sapendo che il lato è i 5/8 della base. (*Qui si può applicare il Teorema di Pitagora per esprimere un segmento in funzione di x, cioè: per mezzo di x; l'equazione risolvente non è di 1° grado, ma è comunque di risoluzione immediata*)

19) Trova il perimetro di un rettangolo nel quale la diagonale è di 1 metro più lunga rispetto a una delle dimensioni, e l'altra dimensione misura 9 metri.

20) Un rombo, nel quale le diagonali sono una i ¾ dell'altra, ha il perimetro di 60 cm. Quant'è la sua area?

**RISPOSTE**

1) 48 cm; $108\ \text{cm}^2$ 2) 20, 26 e 26 cm 3) 12, 15 e 21 cm 4) 50 cm 5) $2p = 36$ cm 6) 32 cm
7) lato obliquo = cm 20, base = cm 24, area = $\text{cm}^2$ 192; alt. rel. al lato obl. = cm 19,2 $(b\cdot h = 2S \rightarrow h = 2S/b)$
8) EF = m 6, DE = DF = m 5, S = $\text{m}^2$ 12 9) 8 cm 10) 22°30', 45°, 112°30' 11) 15°, 75°, 90°
12) 100 cm, $336\ \text{cm}^2$ 13) 10, 10, 10 e 22 cm; $128\ \text{cm}^2$ 14) 50 cm, $80\ \text{cm}^2$ 15) 61 cm e 39 cm; $2340\ \text{cm}^2$
16) 15, 15, 23 e 17 cm 17) 120 cm; $600\ \text{cm}^2$ 18) 54 cm 19) 98 m 20) $216\ \text{cm}^2$

# SCOMPOSIZIONE IN FATTORI ( = FATTORIZZAZIONE) DI UN POLINOMIO

**Scomporre in fattori**
( = fattorizzare)
**un polinomio**
**significa trasformarlo,**
**se possibile**:

a) **nel prodotto di due polinomi,**
b) **oppure nel prodotto di un monomio per un polinomio,**
c) **oppure ancora nella potenza di un polinomio.**

*Studieremo in questo capitolo le principali tecniche di fattorizzazione, a cominciare dalle più semplici.*

Dal mirabile "**Teorema Fondamentale dell'Algebra**" (Volume 2) si trae fra l'altro, come conseguenza, che QUALSIASI polinomio a una sola variabile ammette SEMPRE una scomposizione in fattori di 1° o di 2° grado.
D'altra parte, è stato pure dimostrato che non esiste nessun algoritmo di carattere generale capace di fattorizzare un polinomio arbitrario, nemmeno se ci si limita ad una sola lettera, per cui poi, nella pratica, la fattorizzazione viene effettuata solo su polinomi particolarmente "docili".

Negli esercizi di base per l'apprendimento, vengono proposti di solito polinomi a coefficienti interi, intendendo che pure la scomposizione venga realizzata utilizzando esclusivamente coefficienti interi (se poi nel polinomio di partenza compaiono coefficienti frazionari, ammetteremo che possano entrare coefficienti frazionari anche nella scomposizione; escluderemo comunque, almeno in questa prima fase, l'impiego di coefficienti irrazionali).

**In My Humble Opinion**

**Se sei un insegnante** e stai utilizzando questo testo coi tuoi allievi, mi permetto di invitarti a … non dedicare UN TEMPO ECCESSIVO alla fattorizzazione.
E' vero che questo argomento contribuisce a sviluppare la "sensibilità algebrica" dello studente; d'altra parte, si tratta di esercizi abbastanza "meccanici" e in una certa misura artificiosi, ed è forse allora preferibile ridurne un poco il "peso", dando più spazio ad altre attività atte a valorizzare il ragionamento, le capacità di analisi e di *problem solving*, l'immaginazione.

## 1. RICONOSCIMENTO DI PRODOTTI NOTEVOLI

**Se il polinomio che si vuole fattorizzare è il risultato dello svolgimento di un prodotto notevole, la scomposizione consisterà semplicemente nel risalire al prodotto notevole di partenza.**

**a)** $x^2-6x+9$. Riconosciamo facilmente che si tratta del quadrato di un binomio. Dunque:
$$x^2-6x+9=(x-3)^2 \quad \text{oppure, in alternativa,} \quad x^2-6x+9=(-x+3)^2=(3-x)^2$$

**b)** $\frac{1}{16}a^4+\frac{1}{10}a^3+\frac{1}{25}a^2$

Dal fatto che ci siano 3 termini, due dei quali (il 1° e il 3°) sono quadrati di monomi, si è portati a pensare che si abbia anche qui il quadrato di un binomio. Proviamo a scrivere allora
$$\frac{1}{16}a^4+\frac{1}{10}a^3+\frac{1}{25}a^2=\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{5}a\right)^2$$
ma ci converrà *controllare* attentamente, svolgendo il prodotto notevole, se si ottiene davvero il polinomio di partenza.
In effetti, vediamo che è proprio così.
Dunque la scomposizione da noi ipotizzata è OK.

Osserviamo che anche in questo caso ci sarebbe stata un'altra possibilità: $\left(-\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{5}a\right)^2$.

Fra le due alternative, di norma si sceglie la più semplice ed elegante, ossia la prima.

♥ **SUGGERIMENTO DA AMICO!**

**Dopo che hai effettuato una scomposizione, il modo più sicuro ed efficace per verificare se è corretta consiste nel**



**RIFARE IL CALCOLO A RITROSO, allo scopo di controllare se effettivamente, rimoltiplicando, o svolgendo la potenza, si riottiene il polinomio iniziale.**

CALDAMENTE RACCOMANDATO, specie a chi è – pardòn – "alle prime armi". Utile anche per capire bene i meccanismi algebrici e mentali della fattorizzazione!

**c)** $9x^2-6xy+y^2-24x+8y+16$

Qui abbiamo 6 termini, di cui tre ($9x^2$, $y^2$, $16$) sono quadrati di monomi. Potrebbe perciò trattarsi del quadrato di un trinomio; se così fosse, i termini sarebbero, a parte i segni che per ora lasciamo in sospeso, $3x$, $y$, $4$. Prepariamoci dunque lo schema $(3x \quad y \quad 4)^2$ dopodiché decideremo i segni in modo che, svolgendo il quadrato, ci venga restituito (almeno, speriamo!) il polinomio di partenza.
Ipotizziamo che sia : $9x^2-6xy+y^2-24x+8y+16=(3x-y-4)^2$
e, svolgendo il prodotto notevole, vediamo che in effetti si riottiene esattamente il polinomio dato.
Dunque la scomposizione è confermata. Anche, in alternativa: $9x^2-6xy+y^2-24x+8y+16=(-3x+y+4)^2$

♥ **Ogniqualvolta la scomposizione porta ad un quadrato, c'è sempre una seconda "soluzione", nella quale tutti i termini del polinomio che è base del quadrato vengono cambiati di segno. In effetti, due numeri opposti hanno sempre lo stesso quadrato!**
*Ad esempio, il numero* $49$ *è il quadrato di* $7$*, ma è anche il quadrato di* $-7$

**d)** $x^2-25=(x+5)(x-5)$



♥ Una **differenza di quadrati** si scompone facendo **la somma delle basi moltiplicato la loro differenza**:

♥ **FORMULA IMPORTANTISSIMA!!!**
$\boxed{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$

**e)** $\frac{9}{4}a^{12}-49b^8c^6=\left(\frac{3}{2}a^6+7b^4c^3\right)\left(\frac{3}{2}a^6-7b^4c^3\right)$

**f)** $y^4-16=\underbrace{(y^2+4)}_{\text{SOMMA di quadrati: NON scomponibile!}}\underbrace{(y^2-4)}_{\text{DIFF. di quadrati, scomponibile}}=(y^2+4)(y+2)(y-2)$

**g)** $x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$

**h)** $a^8-4a^6+6a^4-4a^2+1=(a^2-1)^4=\left[(a+1)(a-1)\right]^4=(a+1)^4(a-1)^4$



♥ Intenderemo che ogni esercizio di scomposizione debba essere portato a termine *completamente*: dunque **dovrai sempre domandarti se i fattori ottenuti siano a loro volta scomponibili e, in caso affermativo, fattorizzare anche questi**

## ESERCIZI (riconoscimento di prodotti notevoli)

1) $x^2-8x+16$
2) $9a^2+12ab+4b^2$
3) $t^4+1+2t^2$
4) $a^2b^2-14abc+49c^2$
5) $9r^2-6r+1$
6) $25+36y^6+60y^3$
7) $x^2-9$
8) $16t^4-1$
9) $49a^2-36b^2$
10) $1-t^8$
11) $8x^3+60x^2+150x+125$
12) $a^{15}-6a^{10}+12a^5-8$
13) $t^3+1+3t^2+3t$
14) $27a^3-27a^2xy+9ax^2y^2-x^3y^3$
15) $y^4-8y^3+24y^2-32y+16$
16) $a^8+4a^6+6a^4+4a^2+1$
17) $1+5b+10b^2+10b^3+5b^4+b^5$
18) $4a^2+9b^2+1-12ab-4a+6b$
19) $t^2x^2-2tx^2+x^2+4tx-4x+4$
20) $9a^6-12a^4-6a^3+4a^2+4a+1$
21) $a^4-2a^2+1$
22) $\frac{1}{4}y^2+y+1$
23) $\frac{1}{4}y^2-1$
24) $\frac{4}{9}a^2+\frac{9}{4}b^2-2ab$
25) $1-c+\frac{1}{3}c^2-\frac{1}{27}c^3$
26) $s^4+\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{9}+s^2p-\frac{2}{3}s^2-\frac{1}{3}p$
27) $a^{12}+3a^8+3a^4+1$
28) $a^{12}-3a^8+3a^4-1$
29) $a^{2k}+6a^k+9$
30) $y^{2a+2}-1$

## RISULTATI

1) $(x-4)^2$ o anche $(4-x)^2$
2) $(3a+2b)^2$ o anche $(-3a-2b)^2$
3) $(t^2+1)^2$
4) $(ab-7c)^2$
5) $(3r-1)^2$
6) $(5+6y^3)^2=(6y^3+5)^2$
7) $(x+3)(x-3)$
8) $(4t^2+1)(2t+1)(2t-1)$
9) $(7a+6b)(7a-6b)$
10) $(1+t^4)(1+t^2)(1+t)(1-t)$
11) $(2x+5)^3$
12) $(a^5-2)^3$
13) $(t+1)^3$
14) $(3a-xy)^3$
15) $(y-2)^4$ oppure $(-y+2)^4$
16) $(a^2+1)^4$ oppure $(-a^2-1)^4$
17) $(1+b)^5$
18) $(2a-3b-1)^2=(-2a+3b+1)^2$
19) $(tx-x+2)^2$
20) $(3a^3-2a-1)^2$
21) $(a+1)^2(a-1)^2$
22) $\left(\frac{1}{2}y+1\right)^2$
23) $\left(\frac{1}{2}y+1\right)\left(\frac{1}{2}y-1\right)$
24) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}b\right)^2$
25) $\left(1-\frac{1}{3}c\right)^3$
26) $\left(s^2+\frac{1}{2}p-\frac{1}{3}\right)^2$
27) $(a^4+1)^3$
28) $(a^2+1)^3(a+1)^3(a-1)^3$
29) $(a^k+3)^2$
30) $(y^{a+1}+1)(y^{a+1}-1)$

## 2. SCOMPOSIZIONE PER RACCOGLIMENTO DI UN FATTORE COMUNE (SI DICE PREFERIBILMENTE: "RACCOGLIMENTO *A* FATTOR COMUNE")

Del raccoglimento a fattor comune abbiamo già parlato (a pag. 106), dicendo che si tratta sostanzialmente dell'applicazione della *proprietà distributiva in senso inverso*, "a ritroso".

**Data una somma algebrica i cui termini siano dei prodotti,
se c'è un fattore che è comune a tutti questi prodotti, esso potrà essere "raccolto", ossia:
potrà essere scritto fuori da una parentesi, al cui interno si metterà
quella somma algebrica la quale, moltiplicata per il numero scritto fuori,
permette di riottenere l'espressione iniziale.**

**La somma algebrica che finisce fra parentesi sarà, evidentemente, ricavabile da quella di partenza, privando ciascun prodotto del fattore raccolto (=dividendo ciascun prodotto per il fattore raccolto).**

❑ Esempi:

$$5\cdot 7+5\cdot 8+5\cdot 9=5\cdot(7+8+9)=5\cdot 24=120$$

$$93-75+36-21=3\cdot(31-25+12-7)=3\cdot 11=33$$

$$2^{12}-3\cdot 2^{10}=2^{10}\cdot(2^2-3)=2^{10}\cdot 1=1024$$

Riferendoci, ora, in special modo ai polinomi, diremo che

**dato un polinomio, se ci si accorge che tutti i suoi termini hanno un fattore comune,
questo, volendo, si potrà "raccogliere":
si scriverà allora il fattore comune trovato, si aprirà una parentesi
e all'interno della parentesi si scriverà quel polinomio che,
se viene rimoltiplicato per il monomio che sta fuori, riproduce il polinomio di partenza.**

❑ Due esempi: $ab+ac+ad=a(b+c+d)$; $35x-14y=7(5x-2y)$

**In un polinomio, il massimo monomio che si può raccogliere è quello che**

- **ha come coefficiente il massimo comun divisore (M.C.D.) DEI COEFFICIENTI**
- **e contiene nella sua parte letterale solo le LETTERE COMUNI a tutti i termini del polinomio, ciascuna presa UNA SOLA VOLTA e con L'ESPONENTE PIU' BASSO.**

Ecco una piccola rassegna di fattorizzazioni con questa tecnica:

**a)** $15x^4y-35x^3y^3+30x^3y^4z=5x^3y(3x-7y^2+6y^3z)$

**b)** $t^5+t^4=t^4(t+1)$

**c)** $6x-12y+9=3(2x-4y+3)$

**d)** $54x^4-36x^3+6x^2=6x^2(9x^2-6x+1)=6x^2(3x-1)^2$

**e)** $50x^2-2=2(25x^2-1)=2(5x+1)(5x-1)$

**♥ Di fronte a QUALUNQUE esercizio di scomposizione in fattori, la PRIMA COSA che conviene domandarsi è SEMPRE: "SI PUO' RACCOGLIERE UN FATTORE COMUNE?"**

**E in caso affermativo, il raccoglimento a fattor comune è sempre il modo più "furbo" per avviare la scomposizione.**

**E' un SUG-GERI-MENTO DA AMICO!**



Esempio: se mi vien dato da scomporre il polinomio $4x^4-40x^3+100x^2$,

io *potrei anche* scrivere $4x^4-40x^3+100x^2=(2x^2-10x)^2$

*ma successivamente* constaterei che la base del quadrato è ancora scomponibile (si può raccogliere $2x$), e quindi dovrei continuare, nel modo seguente:

$$4x^4-40x^3+100x^2=(2x^2-10x)^2=[2x(x-5)]^2=4x^2(x-5)^2$$

MOLTO MEGLIO, quindi, iniziare con il raccoglimento a fattor comune e scrivere:

$4x^4-40x^3+100x^2=4x^2(x^2-10x+25)=4x^2(x-5)^2$. Et voilà, senza complicazioni!

**ESERCIZI** (raccoglimento a fattor comune)

1) $3ax+2bx$
2) $x^4+5x^3+x^2$
3) $3x-6y+15$
4) $30a^4b-12a^3b^3$
5) $6x^3yz^3-2x^3z^5+2x^2y^2z^4$
6) $t^3-t$
7) $48a^2b^3+144a^2b^2c+108a^2bc^2$
8) $5n^2-45$
9) $t^{n+3}+t^{n+1}+4t^n$
10) $3ax^4y-6ax^2y^3+3ay^5$
11) $16x^4-8x^3+x^2$
12) $\frac{1}{7}a^2+\frac{2}{7}a+\frac{1}{7}$
13) $ab+a^2b^2$
14) $ab+ac+bc$
15) $60n^5-15n^3$
16) $x^4y^4-3x^3y^3t+3x^2y^2t^2-xyt^3$
17) $6x^4+12x^2+6$
18) $a^{3x+2}+2a^{2x+2}b^y+a^{x+2}b^{2y}$
19) $18bc^3d^3-24ac^2d^5$
20) $\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{2}ab+\frac{3}{4}b^2$
21) $\frac{3}{4}a^2-\frac{27}{4}b^2$

**RISULTATI**

1) $x(3a+2b)$
2) $x^2(x^2+5x+1)$
3) $3(x-2y+5)$
4) $6a^3b(5a-2b^2)$
5) $2x^2z^3(3xy-xz^2+y^2z)$
6) $t(t+1)(t-1)$
7) $12a^2b(2b+3c)^2$
8) $5(n+3)(n-3)$
9) $t^n(t^3+t+4)$
10) $3ay(x+y)^2(x-y)^2$
11) $x^2(4x-1)^2$
12) $\frac{1}{7}(a+1)^2$
13) $ab(1+ab)$
14) NON SCOMPONIBILE
15) $15n^3(2n+1)(2n-1)$
16) $xy(xy-t)^3$
17) $6(x^2+1)^2$
18) $a^{x+2}(a^x+b^y)^2$
19) $6c^2d^3(3bc-4ad^2)$
20) $\frac{3}{4}(a-b)^2$ oppure $3\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\right)^2$
21) $\frac{3}{4}(a+3b)(a-3b)$ oppure $3\left(\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}b\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}b\right)$

♥ **GIANNINO E LA "FALSA SCOMPOSIZIONE"**

Il professore ha proposto a Giannino il seguente polinomio da scomporre:
$a^2+ab+4b^2$.
In realtà, l'insegnante ha sbagliato:
per distrazione, ha assegnato un polinomio che non è fattorizzabile!
Ma Giannino ci si mette di buona lena e alla fine scrive:
$a^2+ab+4b^2=a(a+b)+4b^2$

**Eh no, Giannino!**
**Purtroppo questa NON è una scomposizione in fattori.**
Sarebbe come dire che il numero 17 è scomponibile in $3\cdot5+2$.
Falso, $3\cdot5+2$ NON è una scomposizione in fattori,
perché l'operazione da eseguire per **ultima** è un'**addizione**
e **NON** una **moltiplicazione**.



## 3. SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO PER RACCOGLIMENTI PARZIALI

Consideriamo il polinomio

$$ax+ay+bx+by$$

Non si tratta di un prodotto notevole svolto, e non c'è alcun fattore che sia comune a tutti i termini.
Tuttavia, se prendiamo i primi due termini soltanto, vediamo che essi hanno in comune il fattore $a$;
raccogliendolo, si otterrebbe $a(x+y)$;
allo stesso modo, gli ultimi due termini hanno in comune il fattore $b$,
e, raccogliendolo, si otterrebbe $b(x+y)$;
quindi così facendo, in entrambe le scomposizioni parziali, comparirebbe uno stesso fattore:
il binomio $(x+y)$!
Dunque

$$\underbrace{ax+ay}+\underbrace{bx+by}=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$$

L'ultimo passaggio è consistito nel raccogliere, fra i due "pezzi" $a(x+y)$ e $+b(x+y)$, il binomio $(x+y)$.
In pratica, il "blocco" $(x+y)$ è stato "trattato" come un numero unico.

Si dice che la scomposizione $ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$ è stata eseguita "per **raccoglimenti parziali**".

Per convincerci della validità del procedimento, possiamo:

- svolgere il prodotto ottenuto $(x+y)(a+b)$
  e constatare che, in effetti, si riottiene proprio il polinomio di partenza
- pensare di sostituire, per un istante, il blocco $(x+y)$ con una singola lettera: poniamo ad esempio
  $x+y=z$ e avremo $ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=az+bz=z(a+b)=(x+y)(a+b)$

**La scomposizione avrebbe potuto essere effettuata anche abbinando i termini in modo diverso:**

$$\underbrace{ax}_{\bullet}+\underbrace{ay+bx}+\underbrace{by}_{\bullet}=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$$

**Di fronte a un esercizio di scomposizione per raccoglimenti parziali,**
**è SEMPRE possibile abbinare i termini in due modi differenti.**
**Non staremo ad evidenziare tutte le volte questo fatto, che, ripeto, è normale si verifichi SEMPRE.**

Ecco qui di seguito altri esempi di scomposizione per raccoglimenti parziali.

Una scomposizione per raccoglimenti parziali richiede di procedere per tentativi:
si tratta di **suddividere il polinomio dato in più "pezzi" tali che,**
**raccogliendo in ciascun "pezzo" un opportuno fattore,**
♥ **si riesca a FAR COMPARIRE FRA PARENTESI SEMPRE LO STESSO POLINOMIO**.
Dopo questa prima fase di raccoglimenti "**parziali**", si effettuerà il raccoglimento "**totale**"
del polinomio che è stato fatto comparire, come fattore, in ciascun "pezzo".

**a)** $\underbrace{3a^2+3ax}+\underbrace{2a+2x}=3a(a+x)+2(a+x)=(a+x)(3a+2)$

**b)** $\underbrace{2ab-6a}\ \underbrace{-7b+21}=2a(b-3)-7(b-3)=(b-3)(2a-7)$

raccogliamo il fattore NEGATIVO -7

**Qui è stato necessario raccogliere, fra gli ultimi due termini, un fattore NEGATIVO** $(-7)$

**c)** $ax+4x-ay-4y=x(a+4)-y(a+4)=(a+4)(x-y)$

**d)** $6ax+2bx+3a+b=2x(3a+b)+1\cdot(3a+b)=(3a+b)(2x+1)$

♥ **Qui sopra abbiamo dovuto, fra gli ultimi due termini, raccogliere il fattore "banale" +1.**
**Di norma, in casi come questo,**
**si apre semplicemente una parentesi, sottintendendo il moltiplicatore 1.**
Ci si accontenta cioè di raggruppare tra parentesi i termini in gioco, scrivendo soltanto

$$6ax+2bx+3a+b=2x(3a+b)+(3a+b)=(3a+b)(2x+1)$$

**e)** $3ab+15a-b-5=3a(b+5)-1\cdot(b+5)=(b+5)(3a-1)$

♥ **Qui abbiamo dovuto, fra gli ultimi due termini, raccogliere il fattore $-1$.**
**Di norma, in casi come questo, ci si limita a "METTERE IN EVIDENZA IL SEGNO $-$".**
Vale a dire, **si scrive il segno "$-$" seguito da una parentesi nella quale finirà il polinomio con tutti i segni cambiati.**

$$3ab+15a-b-5=3a(b+5)\ \underbrace{-(b+5)}_{\text{si è "messo in evidenza il segno }-\text{"}}\ =(b+5)(3a-1)$$

Riflettiamo: un segno "$-$" davanti equivale sempre a "$-1\bullet$" (moltiplicazione per $-1$).
Infatti,
un segno "$-$" davanti a un numero ne indica l'opposto, cioè indica che quel numero va cambiato di segno;
e una moltiplicazione per $-1$ porta esattamente allo stesso effetto!
$-(b+5)=-1\cdot(b+5)$

**f)** $t^3-t^2-t+1=t^2(t-1)-(t-1)=(t-1)(t^2-1)=(t-1)(t+1)(t-1)=(t-1)^2(t+1)$

**g)** $xy^2-4xy+4x-3y^2+12y-12=x(y^2-4y+4)-3(y^2-4y+4)=(y^2-4y+4)(x-3)=(y-2)^2(x-3)$

oppure, abbinando i termini diversamente,

$$\underset{}{xy^2}\ \underset{*}{-4xy}\ \underset{\bullet}{+4x}\ \underset{}{-3y^2}\ \underset{*}{+12y}\ \underset{\bullet}{-12}=y^2(x-3)-4y(x-3)+4(x-3)=(x-3)(y^2-4y+4)=(x-3)(y-2)^2$$

**h)** $a^{15}+a^{13}+a^{11}+a^9=a^9(a^6+a^4+a^2+1)=a^9\left[a^4(a^2+1)+(a^2+1)\right]=a^9(a^2+1)(a^4+1)$

## ESERCIZI (scomposizione per raccoglimenti parziali)

1) $ac+bc+3a+3b$
2) $6xy+5x-12y-10$
3) $a^2c+a^2d-b^2c-b^2d$
4) $3a^3+18a^2+4a+24$
5) $ax+ay-x-y$
6) $ax+ay+x+y$
7) $a^2+ab+ac+bc$
8) $xy-y^2-xz+yz$
9) $abcd-ab-cd+1$
10) $t^3+2t^2-t-2$
11) $a^3+a^2+a+1$
12) $14ax-6bx-7ay+3by$
13) $6ab+6cd-9ac-4bd$
14) $x^4+x^3-x^2-x$
15) $ax+4x-ay-4y$
16) $xy-x-y+1$
17) $ab+1+a+b$
18) $4a^3-8a^2-9a+18$
19) $t^3-6t^2+t-6$
20) $x^3y^3+x^2y^2+x^4y+xy^4$
21) $12ac^2-6ac-4c+2$
22) $a^{x+y}-3a^x-2a^y+6$
23) $e^{3t}-e^{2t}+e^t-1$
24) $x^{2a+b+c}+x^{a+b}+x^{a+c}+1$
25) $ax-ay+at+bx-by+bt$
26) $3a^2+3ac-3a^2c-4ab-4bc+4abc$
27) $ax-bx-ay+by-a+b$
28) $ax-2bx-2ay+4by+3az-6bz$
29) $18xw-15yw-12tx+10ty+20y-24x$
30) $b^{2x+y}-2b^{x+y}+b^y-b^{2x}+2b^x-1$
31) $ax+bx-x-ay-by+y-a-b+1$
32) $a^3+b^3+c^3-ab^2-a^2b-ac^2-a^2c+bc^2+b^2c$
33) $a^2-ab-ac+b+c-1=a^2-ab-ac+a-a+b+c-1=\ldots$

## RISULTATI

1) $(a+b)(c+3)$
2) $(6y+5)(x-2)$
3) $(c+d)(a+b)(a-b)$
4) $(a+6)(3a^2+4)$
5) $(x+y)(a-1)$
6) $(x+y)(a+1)$
7) $(a+b)(a+c)$
8) $(x-y)(y-z)$
9) $(ab-1)(cd-1)$
10) $(t+2)(t+1)(t-1)$
11) $(a+1)(a^2+1)$
12) $(7a-3b)(2x-y)$
13) $(3a-2d)(2b-3c)$
14) $x(x+1)^2(x-1)$
15) $(a+4)(x-y)$
16) $(y-1)(x-1)$
17) $(b+1)(a+1)$
18) $(a-2)(2a+3)(2a-3)$
19) $(t-6)(t^2+1)$
20) $xy(x^2+y)(y^2+x)$
21) $2(2c-1)(3ac-1)$
22) $(a^y-3)(a^x-2)$
23) $(e^t-1)(e^{2t}+1)$
24) $(x^{a+c}+1)(x^{a+b}+1)$
25) $(x-y+t)(a+b)$
26) $(a+c-ac)(3a-4b)$
27) $(a-b)(x-y-1)$
28) $(a-2b)(x-2y+3z)$
29) $(6x-5y)(3w-2t-4)$
30) $(b^y-1)(b^x-1)^2$
31) $(a+b-1)(x-y-1)$
32) $(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)$
33) $(a-b-c+1)(a-1)$

**Il PRIMO raccoglimento**, negli esercizi, conviene effettuarlo con **coefficiente POSITIVO**



**SUGGERIMENTO DA AMICO**

## 4. SCOMPOSIZIONE DI UN TRINOMIO DI SECONDO GRADO $ax^2+bx+c$

### A) IL TRINOMIO "SPECIALE", ossia: quello con 1° coefficiente unitario $\boxed{x^2+bx+c}$

PREMESSA

Consideriamo l'operazione seguente: $(x+5)(x+6)=x^2+6x+5x+30=x^2+\underbrace{11}_{5+6}x+\underbrace{30}_{5\cdot 6}$

Abbiamo moltiplicato due binomi della forma: $(x+\textit{un numero})(x+\textit{un altro numero})$

e abbiamo ottenuto come risultato un trinomio di 2° grado con 1° coefficiente unitario (parleremo di trinomio "speciale"),
nel quale il coefficiente centrale è dato dalla **somma** dei due numeri in questione,
mentre il termine noto è uguale al loro **prodotto**.
Applicando il procedimento in senso inverso è possibile, in certi casi,
fattorizzare un trinomio "speciale" di 2° grado assegnato.

**a)** $x^2+16x+48$

Se riusciamo a trovare due numeri la cui **somma** sia 16 e il cui **prodotto** sia 48,
il trinomio dato sarà immediatamente scomposto.
I due numeri esistono, e sono il 4 e il 12.
Avremo dunque

$x^2+16x+48=(x+4)(x+12)$ (oppure $(x+12)(x+4)$: evidentemente, l'ordine non conta).

Svolgendo la moltiplicazione possiamo verificare la correttezza di quanto abbiamo scritto:
si ha proprio $(x+4)(x+12)=x^2+\underline{+12x}\ \underline{+4x}+48=x^2+\underbrace{16}_{4+12}x+\underbrace{48}_{4\cdot 12}$, *OK*

**b)** $x^2-10x+21$

$s=-10,\ p=21$. I due numeri sono dunque $-3$ e $-7$. Perciò: $x^2-10x+21=(x-3)(x-7)$

**c)** $a^2-a-12=(a-4)(a+3)$ perché $s=-1,\ p=-12$ quindi i due numeri sono $-4$ e $3$.

Riassumendo:

**per scomporre un trinomio di 2° grado "speciale",**
**ossia con 1° coefficiente unitario,**
**cioè un trinomio della forma $x^2+bx+c$,**
**si cercheranno due numeri che diano**
**i) per somma il coefficiente centrale (b)**
**ii) e per prodotto il termine noto (c).**
**Trovati i due numeri, la scomposizione sarà immediata:**
$(x+$ ***il 1° numero*** $)(x+$ ***il 2° numero*** $)$

♥ *Questa scomposizione interviene in svariatissimi ambiti matematici.*
*Ti accorgerai che compare continuamente negli esercizi!*
*… Ma è facile:*
(la lettera + il primo numero)
moltiplicato
(la lettera + il secondo numero).
*Se poi ti abitui, almeno all'inizio, a ricontrollare ogni volta, rieseguendo la moltiplicazione fra i due binomi ottenuti e riducendo i termini simili, per vedere se in effetti si riottene il trinomio di partenza, non sbaglierai mai!*

Schematicamente:

dato il trinomio "speciale" $x^2+bx+c$
se $n_1, n_2$ sono tali che $n_1+n_2=b$ e $n_1\cdot n_2=c$,
allora
$x^2+bx+c=(x+n_1)(x+n_2)$
perché
$(x+n_1)(x+n_2)=x^2+n_1x+n_2x+n_1n_2=x^2+\underbrace{(n_1+n_2)}_{b}x+\underbrace{n_1n_2}_{c}=x^2+bx+c$

Qualche altro esempio:

**d)** $x^2+5x-24=(x+8)(x-3)$ $\quad s=5,\ p=-24\ \rightarrow\ 8,\ -3$

**e)** $y^2+7y+6=(y+1)(y+6)$ $\quad s=7,\ p=6\ \rightarrow\ 1,\ 6$

**f)** $b^2-b-6=(b-3)(b+2)$ $\quad s=-1,\ p=-6\ \rightarrow\ -3,\ 2$

**g)** $a^3+a^2-2a=a(a^2+a-2)=a(a+2)(a-1)$ $\quad s=1,\ p=-2\ \rightarrow\ 2,\ -1$

## B) TRINOMIO "NON SPECIALE" $\boxed{ax^2+bx+c,\quad a\neq 1}$

Un **trinomio di 2° grado "non speciale"** è un'espressione della forma $\mathbf{ax^2+bx+c}$, con $\mathbf{a\neq 1}$.

**La fattorizzazione è più laboriosa rispetto a quella del trinomio "speciale", perché non basta un solo passaggio!**

**Innanzitutto si cercano due numeri la cui somma algebrica sia uguale al coefficiente centrale ( b ) e il cui prodotto sia uguale al prodotto fra il primo coefficiente e l'ultimo ( a · c ).**
**Tali due numeri serviranno a spezzare il termine centrale nella somma algebrica di due termini; dopodiché, si procederà per raccoglimenti parziali.**

**a)** $3x^2+14x+8$

Si ha

$s=14,\quad p=3\cdot 8=24$

per cui i due numeri sono $12$ e $2$.

Quindi

$$3x^2+14x+8=$$
$$=3x^2+12x+2x+8=$$
$$=3x(x+4)+2(x+4)=$$
$$=(x+4)(3x+2)$$

PERCHÉ MAI i due numeri si scelgono in modo che
la loro somma sia uguale al coefficiente centrale $b$
e il loro prodotto sia uguale ad $a\cdot c$ ?

Beh, che la loro somma algebrica debba dare $b$ è del tutto ovvio,
dato che di questi due numeri ci si vuole servire
per spezzare il termine centrale $bx$ nella somma algebrica di due termini.
Il fatto invece che il loro prodotto debba dare $a\cdot c$ è assai meno banale.

Ma riflettiamo:
noi vogliamo determinare i due numeri in modo tale che,
dopo lo spezzamento del termine centrale,
si riesca ad operare per raccoglimenti parziali;
ora, una scomposizione per raccoglimenti parziali è effettuabile
solo se c'è una certa regolarità nella successione dei coefficienti.
Ad esempio, di fronte alla situazione

$$3x^2+6x+8x+8$$

NON sarebbe assolutamente possibile procedere per raccoglimenti parziali!
Invece di fronte a

$$3x^2+12x+2x+8$$

raccoglimenti parziali "funziona" in quanto
3 è la quarta parte di 12 e contemporaneamente 2 è la quarta parte di 8 …
insomma, "funziona" perché i numeri $3, 12, 2, 8$
formano, nell'ordine, una PROPORZIONE!!! $3:12=2:8$

Quindi, i due numeri $n_1, n_2$ che cerchiamo dovranno essere tali
che il trinomio $ax^2+bx+c$ si possa riscrivere come $ax^2+n_1x+n_2x+c$
E INOLTRE CHE valga la proporzione $a:n_1=n_2:c$.

E **una proporzione è corretta se e solo se**
**il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi**!!!
Perciò, affinché la proporzione sussista, dovrà essere $\underset{\substack{\text{prodotto}\\ \text{dei}\\ \text{medi}}}{n_1\cdot n_2} = \underset{\substack{\text{prodotto}\\ \text{degli}\\ \text{estremi}}}{a\cdot c}$

**b)** $6a^2-7a-5$

$s=-7,\quad p=6\cdot(-5)=-30\ \rightarrow\ \boxed{-10,\ 3}$

$$6a^2-7a-5=6a^2-10a+3a-5=2a(3a-5)+(3a-5)=(3a-5)(2a+1)$$

**c)** $20y^4-26y^3+6y^2=2y^2(10y^2-13y+3)$

$s=-13,\quad p=10\cdot 3=30\ \rightarrow\ \boxed{-10,\ -3}$

$$20y^4-26y^3+6y^2=$$
$$=2y^2(10y^2-13y+3)=$$
$$=2y^2(10y^2-10y-3y+3)=2y^2\left[10y(y-1)-3(y-1)\right]=2y^2(y-1)(10y-3)$$

## C) VARIANTI DEL TRINOMIO "SPECIALE"

**a)** $x^4-7x^2+12$ (**TRINOMIO BIQUADRATICO**)

**Esponenti raddoppiati**; trinomio che è detto **"**BIQUADRATICO**"**, per la presenza di due quadrati: $x^2$ e $x^4=\left(x^2\right)^2$.

Se riscriviamo nella forma

$$\left(x^2\right)^2-7x^2+12$$

osserveremo chiaramente come "**al posto di $x$ abbiamo $x^2$**".
**Basterà** allora **comportarsi come se il ruolo di $x$ venisse preso da $x^2$!**
**E la scomposizione sarà immediata:**

$$\left(x^2+il\ 1°\ numero\right)\left(x^2+il\ 2°\ numero\right)$$

$$\boxed{x^4-7x^2+12=\left(x^2-3\right)\left(x^2-4\right)}=\left(x^2-3\right)(x+2)(x-2)$$

Volendo, possiamo pensare a una sostituzione: poniamo

$\boxed{x^2=t}$ e …

$$x^4-7x^2+12=$$
$$=\left(x^2\right)^2-7x^2+12=$$
$$\underset{x^2=t}{=}t^2-7t+12=$$
$$=(t-3)(t-4)=$$
$$=\left(x^2-3\right)\left(x^2-4\right)$$

**b)** $\boxed{x^6-5x^3-14=\left(x^3-7\right)\left(x^3+2\right)}$ Caso analogo al precedente: basta pensare di avere $x^3$ al posto di $x$

**c)** $a^2+9ab+20b^2$ (**TRINOMIO DI 2° GRADO OMOGENEO**)

Qui interviene **una seconda lettera, armoniosamente disposta**, cosicché il trinomio risulta OMOGENEO
( = tutti i termini hanno lo stesso grado).
**Per scomporre, basta per un istante pensare che la seconda lettera … non ci sia! Noi troveremo i due numeri, quindi scomporremo, e infine inseriremo la seconda lettera alla destra dei due numeri.**

$$\boxed{a^2+9ab+20b^2=(a+4b)(a+5b)}$$

Se non ci fosse $b$, avremmo

$$a^2+9a+20=$$
$$=(a+4)(a+5)$$

Basta scrivere $4b$, $5b$ anziché $4$, $5$ e il gioco è fatto.

Esegui la moltiplicazione per controllare!

**d)** $\boxed{a^2b^2+ab-12=(ab+4)(ab-3)}$ Eccoci ritornati a una situazione in cui al posto di una singola lettera abbiamo un "blocco" (in questo caso, $ab$)

**e)** $\boxed{x^4-2x^2y^2-3y^4=\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-3y^2\right)}$ E' un caso "misto" (trinomio biquadratico omogeneo). Nelle situazioni più complicate di quelle "standard" ci si affida all'intuizione … e alla *verifica*, eseguita *rimoltiplicando*.

## D) VARIANTI DEL TRINOMIO "NON SPECIALE"

**Sono facilissime in quanto si opera esattamente come per il trinomio non speciale standard:**

**i) ricerca dei due numeri (somma = coefficiente centrale, prodotto = prodotto fra gli altri due coeff.);**
**ii) spezzamento del termine centrale;**
**iii) raccoglimenti parziali.**

**f)** $2x^4+x^2-3=2x^4+3x^2-2x^2-3=x^2\left(2x^2+3\right)-\left(2x^2+3\right)=\left(2x^2+3\right)\left(x^2-1\right)=\left(2x^2+3\right)(x+1)(x-1)$

**g)** $48a^2-14ab+b^2=48a^2-6ab-8ab+b^2=6a(8a-b)-b(8a-b)=(8a-b)(6a-b)$

### UN UNICO PROCEDIMENTO PER IL TRINOMIO "SPECIALE" E IL "NON SPECIALE"?

La fattorizzazione di un trinomio di 2° grado parte sempre dalla "ricerca dei due numeri"; il criterio di ricerca è però diverso a seconda che il trinomio sia "speciale" ( = con 1° coeff. unitario) o "non speciale", e la procedura successiva è pure diversa (scomposizione immediata per il trinomio speciale, più passaggi per l'altro).

A dire il vero, **sarebbe possibile unificare i due procedimenti** e dire che, in entrambi i casi, si tratta di:

i) cercare 2 numeri che devono dare per somma il coeff. centrale e per prodotto il prodotto fra il 1° e l'ultimo coeff. (nel caso del trinomio speciale, tale prodotto andrà a coincidere con l'ultimo coefficiente);
ii) utilizzarli per spezzare il termine centrale nella somma algebrica di due termini;
iii) procedere per raccoglimenti parziali.

Ad esempio, il trinomio speciale $x^2+16x+48$, dopo aver trovato i due numeri, ossia 4 e 12, potrebbe essere scomposto facendo $x^2+16x+48=x^2+4x+12x+48=x(x+4)+12(x+4)=(x+4)(x+12)$.

Si capisce però che **tale procedimento, per il trinomio speciale, sarebbe più lungo**:
e data la frequenza con cui capita, in situazioni matematiche svariate, di dover scomporre un trinomio speciale, **vale decisamente la pena, per il trinomio speciale, di abituarsi a scomporlo in un solo passaggio.**

**ESERCIZI** (scomposizione di un trinomio di 2° grado, e varianti)

1) $x^2+11x+24$ 2) $x^2-2x-15$ 3) $x^2-9x+20$ 4) $x^2+x-12$
5) $y^2-9y+18$ 6) $t^2-t-30$ 7) $a^2+18a+72$ 8) $b^2-5b-24$
9) $x^2+3x+2$ 10) $x^2-3x+2$ 11) $x^2+x-2$ 12) $x^2-x-2$
13) $y^2-5y+6$ 14) $y^2-y-6$ 15) $y^2-7y+6$ 16) $y^2-y+6$
17) $e^2+102e+101$ 18) $e^2-100e-101$ 19) $x^2-40x+384$ 20) $a^2+8a-128$
21) $x^2-24x+143$ 22) $w^2-18w+81$ 23) $2a^2-8a+6$ 24) $a^4+10a^3+25a^2$
25) $x^4-x^2-2$ 26) $y^8-y^4-2$ 27) $a^2-ab-2b^2$ 28) $a^2b^2-ab-2$
29) $x^4-11x^2+28$ 30) $x^6-5x^3+6$ 31) $x^2+xy-6y^2$ 32) $x^{2n}-7x^n+12$
33) $z^6+5z^3-14$ 34) $x^4-x^2y^2-12y^4$ 35) $x^2+7ax+12a^2$ 36) $a^{2k}-2a^kb-48b^2$
37) $6x^2-5x+1$ 38) $8a^2-2a-3$ 39) $6b^2+35b-6$ 40) $3x^2+x-2$
41) $6t^2-15t+6$ 42) $3x^4+5x^2-12$ 43) $2a^2-3ab+b^2$ 44) $5x^2y^2-6xy+1$
45) $129x^2+200x+71$ 46) $4x^4-13x^2+3$ 47) $6a^2-19ac+10c^2$ 48) $2a^2x^2-5ax-7$
49) $6y^2-23y-29$ 50) $9y^4+10y^2+1$ 51) $12x^2-13xy+y^2$ 52) $2a^2b^2+ab-1$
53) $43a^2-11a-32$ 54) $3x^{10}-10x^5+3$ 55) $12a^4-8a^2b+b^2$ 56) $9x^2-12x+4$
57) $5t^{2k}+17t^k+6$ 58) $4a^4-5a^2b^2+b^4$ 59) $16m^4-8m^2+1$ 60) $9k^4+12k^3+3k^2$

**RISULTATI**

1) $(x+3)(x+8)$ 2) $(x-5)(x+3)$ 3) $(x-4)(x-5)$ 4) $(x+4)(x-3)$
5) $(y-3)(y-6)$ 6) $(t-6)(t+5)$ 7) $(a+6)(a+12)$ 8) Rimoltiplica!
9) $(x+1)(x+2)$ 10) $(x-1)(x-2)$ 11) $(x+2)(x-1)$ 12) $(x-2)(x+1)$
13) $(y-3)(y-2)$ 14) $(y-3)(y+2)$ 15) $(y-1)(y-6)$ 16) Non scomponibile
17) $(e+1)(e+101)$ 18) $(e+1)(e-101)$ 19) $(x-24)(x-16)$ 20) $(a+16)(a-8)$
21) $(x-11)(x-13)$ 22) $(w-9)^2$ 23) $2(a-1)(a-3)$ 24) $a^2(a+5)^2$
25) $(x^2-2)(x^2+1)$ 26) $(y^4-2)(y^4+1)$ 27) $(a-2b)(a+b)$ 28) $(ab-2)(ab+1)$
29) $(x+2)(x-2)(x^2-7)$ 30) $(x^3-2)(x^3-3)$ 31) $(x+3y)(x-2y)$ 32) $(x^n-3)(x^n-4)$
33) $(z^3+7)(z^3-2)$ 34) $(x+2y)(x-2y)(x^2+3y^2)$ 35) $(x+3a)(x+4a)$ 36) $(a^k-8b)(a^k+6b)$
37) $(2x-1)(3x-1)$ 38) $(4a-3)(2a+1)$ 39) $(b+6)(6b-1)$ 40) $(x+1)(3x-2)$
41) $3(t-2)(2t-1)$ 42) $(x^2+3)(3x^2-4)$ 43) $(a-b)(2a-b)$ 44) $(xy-1)(5xy-1)$
45) $(x+1)(129x+71)$ 46) $(x^2-3)(2x+1)(2x-1)$ 47) $(3a-2c)(2a-5c)$ 48) $(ax+1)(2ax-7)$
49) $(y+1)(6y-29)$ 50) $(9y^2+1)(y^2+1)$ 51) $(12x-y)(x-y)$ 52) $(2ab-1)(ab+1)$
53) $(a-1)(43a+32)$ 54) $(x^5-3)(3x^5-1)$ 55) $(6a^2-b)(2a^2-b)$ 56) $(3x-2)^2$
57) $(t^k+3)(5t^k+2)$ 58) $(a+b)(a-b)(2a+b)(2a-b)$ 59) $(2m+1)^2(2m-1)^2$ 60) $3k^2(k+1)(3k+1)$

**IL PROBLEMA GENERALE DELLA FATTORIZZAZIONE DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO**

Gli esercizi di questa pagina coinvolgono (a parte la singola eccezione del n. 16) trinomi "buoni buoni", che si lasciano tranquillamente fattorizzare nel prodotto di due binomi di 1° grado a coefficienti interi.

*Il problema generale della fattorizzazione di un trinomio di secondo grado*
verrà risolto nel capitolo del Volume 2 riguardante le equazioni di secondo grado.
Si vedrà allora che esiste una **formula**, la quale permette di scomporre un qualsivoglia trinomio di 2° grado assegnato, oppure eventualmente di riconoscere la sua non scomponibilità.

Si constaterà che la fattorizzazione di un trinomio di secondo grado può richiedere l'utilizzo di coefficienti irrazionali, anche se i coefficienti del trinomio erano interi: tanto per fare un esempio, il trinomio $x^2-4x+1$ si scompone in $(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$.

Si dimostrerà infine che certi trinomi, quali ad es. $x^2-x+4$, non sono in alcun modo fattorizzabili, a meno di ricorrere, per i coefficienti dei due fattori di 1° grado, ai cosiddetti "numeri complessi".

## 5. SCOMPOSIZIONE DI UNA DIFFERENZA DI QUADRATI NON BANALE

Sono piuttosto frequenti, e importanti nella pratica del calcolo,
situazioni nelle quali occorre fattorizzare una differenza di quadrati "non banale".
Dicendo "non banale" mi riferisco al fatto che le due espressioni elevate al quadrato
non sono entrambe dei semplici monomi, ma almeno una di esse è un polinomio.
Gli esempi che seguono illustrano come procedere in questi casi.

**a)** $x^2+2x-y^2+1=\left(x^2+2x+1\right)-y^2=\left(x+1\right)^2-y^2 \underset{\text{somma basi}\times\text{diff. basi}}{\overset{\text{differenza quadrati}}{=}} \left(x+1+y\right)\left(x+1-y\right)$

**b)** $a^2-b^2-2bc-c^2=a^2-\left(b^2+2bc+c^2\right)=a^2-\left(b+c\right)^2=\left[a+\left(b+c\right)\right]\cdot\left[a-\left(b+c\right)\right]=\left(a+b+c\right)\left(a-b-c\right)$

**c)** $t^4-16t^2+24t-9=t^4-\left(16t^2-24t+9\right)=$
$=\left(t^2\right)^2-\left(4t-3\right)^2=\left[t^2+\left(4t-3\right)\right]\left[t^2-\left(4t-3\right)\right]=$
$=\underbrace{\left(t^2+4t-3\right)}_{\downarrow}\left(t^2-4t+3\right)=\left(t^2+4t-3\right)(t-1)(t-3)$

non scomponibile per tentativi (NOTA 1)

**NOTA 1**
Il trinomio $t^2+4t-3$ non è scomponibile per tentativi, ma sarebbe scomponibile conoscendo l'apposita formula di scomposizione, che porterebbe a ottenere
$t^2+4t-3=\left(t+2+\sqrt{7}\right)\left(t+2-\sqrt{7}\right)$

**d)** $t^4-4t^3+4t^2-64=$
$=\left(t^2-2t\right)^2-64=$
$=\underbrace{\left(t^2-2t+8\right)}_{\downarrow}\left(t^2-2t-8\right)=$

NON scomponibile (NOTA 2)

$=\left(t^2-2t+8\right)(t-4)(t+2)$

**NOTA 2 - Per vedere se un trinomio di 2° grado assegnato $ax^2+bx+c$ è fattorizzabile, basta calcolare la quantità $b^2-4ac$**
(detta "il **discriminante**" o "il **delta**" del trinomio).

- Se $b^2-4ac$ è un quadrato perfetto, il trinomio è fattorizzabile per tentativi elementari
- Se $b^2-4ac>0$, ma $b^2-4ac$ *non* è un quadrato perfetto, il trinomio è fattorizzabile, ma non per tentativi elementari
- Se $b^2-4ac<0$, il trinomio non è fattorizzabile (a meno di ricorrere ai cosiddetti "numeri complessi")
- Se $b^2-4ac=0$, il trinomio è uguale al quadrato di un binomio, eventualmente moltiplicato per una costante.

Es.: sarà fattorizzabile il trinomio $6x^2-x-2$? Vediamo:
$b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot6\cdot(-2)=1+48=49$, e 49 è un quadrato perfetto.
Allora il trinomio è fattorizzabile per tentativi elementari.

**e)** $a^2+b^2+c^2-d^2-e^2-2ab-2ac+2bc-2de=$
$=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc-d^2-e^2-2de=\left(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc\right)-\left(d^2+e^2+2de\right)=$
$=\left(a-b-c\right)^2-\left(d+e\right)^2=\left(a-b-c+d+e\right)\left(a-b-c-d-e\right)$

### IL "METODO DEL COMPLETAMENTO DEL QUADRATO"

E' un metodo che dobbiamo conoscere perché viene utilizzato, in matematica, in diversi ambiti rilevanti (ad es., vedremo che interviene nella *costruzione della formula risolutiva delle equazioni di 2° grado*)

**I)** $\underbrace{x^2+2x}$ $-143=x^2+2x+1-144=\left(x+1\right)^2-144=\left(x+1+12\right)\left(x+1-12\right)=\left(x+13\right)\left(x-11\right)$

un buon inizio per un quadrato di binomio!!! ... Se avessimo anche un +1 finale ...

**II)** $9a^2-12a-437=9a^2-12a+4-441=\left(3a-2\right)^2-21^2=\left(3a-2+21\right)\left(3a-2-21\right)=\left(3a+19\right)\left(3a-23\right)$

**III)** $x^4+x^2+1=x^4+2x^2-x^2+1=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2+1+x\right)\left(x^2+1-x\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

**IV)** $25a^4\ \boxed{-24a^2}\ +4=25a^4\ \boxed{-20a^2}\ \boxed{-4a^2}\ +4=\left(5a^2-2\right)^2-\left(2a\right)^2=\left(5a^2+2a-2\right)\left(5a^2-2a-2\right)$
$\left(5a^2\right)^2$ $2^2$ doppio prodotto

( $+20a^2-44a^2$ non avrebbe "funzionato"...)

Gli ultimi due esempi mostrano come il metodo del completamento del quadrato possa consentire (non sempre, ma almeno in determinati casi) di fattorizzare un **trinomio biquadratico, "resistente"** alla scomposizione con altri metodi.

**ESERCIZI** (scomposizione di una differenza di quadrati non banale)

1) $a^2+2ab+b^2-49$ 2) $a^2-2ab+b^2-49$ 3) $x^2-a^2-2a-1$ 4) $x^2-a^2+2a-1$

5) $x^2+2xy+y^2-4t^2$ 6) $49x^2-a^2-2ab-b^2$ 7) $25b^2-10b+1-4c^2$

8) $a^2-b^2+6b-9$ 9) $x^2+y^2-z^2-2xy+2z-1$ 10) $a^2-b^2-c^2+2bc-2b+2c-1$

11) $18a^2+8b^2-24ab-2$ 12) $2xy-x^2-y^2+9$ 13) $9t^2-6t+1-a^2$

14) $x^2-y^2-2y-1$ 15) $a^4-a^2+4a-4$ 16) $x^2+y^2+1+2xy+2x+2y-z^2$

17) $b^2c^2-b^2-c^2-1+2bc+2b-2c$ 18) $e^4-4e^2+4e-1$

19) $e^4-4e^2-12e-9$ 20) $36e^4-e^2+2e-1$ 21) $a^{2t}-2a^t+1-b^2$

22) $a^{4k}-9a^{2k}+12a^k-4$ 23) $x^{16}-25x^8+40x^4-16$ 24) $25a^2+10ab+b^2-49c^2$

25) $y^{10}-y^6+4y^4-4y^2$ 26) $a^4+2a^3+a^2-9$ 27) $p^2(2p-1)^2-1$

Scomporre col **metodo del COMPLETAMENTO DEL QUADRATO**:

28) $c^2-6c-91$ in due modi:
   A. completamento del quadrato
   B. "trinomio speciale"

29) $x^2+40x+399$

30) $9y^2-6y-899$

31) $4x^4+4x^2-15$ in due modi:
   A. completamento del quadrato
   B. "trinomio non speciale" (variante)

32) $x^4+5x^2+9=x^4+6x^2-x^2+9=...$

33) $x^4-31x^2+9=x^4-6x^2-25x^2+9=...$

34) $y^4-3y^2+1$

35) $4t^4+11t^2+9$

36) $4a^4-37a^2b^2+9b^4$ addirittura in TRE modi!!! ⇨

37) $a^8+a^6+a^4$

Da http://betterlesson.com

*Homework*

Complete the square
for each expression.
Write the resulting expression
as a binomial squared.

$x^2-18x+\square$

$x^2+10x+\square$

$x^2-\frac{1}{2}x+\square$

**RISULTATI**

1) $(a+b+7)(a+b-7)$ 2) $(a-b+7)(a-b-7)$ 3) $(x+a+1)(x-a-1)$ 4) $(x+a-1)(x-a+1)$

5) $(x+y+2t)(x+y-2t)$ 6) $(7x+a+b)(7x-a-b)$ 7) $(5b-1+2c)(5b-1-2c)$

8) $(a+b-3)(a-b+3)$ 9) $(x-y+z-1)(x-y-z+1)$ 10) $(a+b-c+1)(a-b+c-1)$

11) $2(3a-2b+1)(3a-2b-1)$ 12) $(3+x-y)(3-x+y)$ 13) $(3t-1+a)(3t-1-a)$

14) $(x+y+1)(x-y-1)$ 15) $(a+2)(a-1)(a^2-a+2)$ 16) $(x+y+1+z)(x+y+1-z)$

17) $(c+1)(b-1)(bc-b+c+1)$ 18) $(e^2+2e-1)(e-1)^2$ 19) $(e^2+2e+3)(e-3)(e+1)$

20) $(3e-1)(2e+1)(6e^2-e+1)$ 21) $(a^t-1+b)(a^t-1-b)$ 22) $(a^{2k}+3a^k-2)(a^k-2)(a^k-1)$

23) $(x^2+1)(x+1)(x-1)(x^2+2)(x^2-2)(x^8+5x^4-4)$ 24) $(5a+b+7c)(5a+b-7c)$

25) $y^2(y^2+2)(y+1)(y-1)(y^4-y^2+2)$ 26) $(a^2+a+3)(a^2+a-3)$

27) $[p(2p-1)]^2-1=...=(2p^2-p+1)(p-1)(2p+1)$

28) $(c+7)(c-13)$ 29) $(x+21)(x+19)$ 30) $(3y+29)(3y-31)$ 31) $(2x^2+5)(2x^2-3)$

32) $(x^2+x+3)(x^2-x+3)$ 33) $(x^2+5x-3)(x^2-5x-3)$

34) $(y^2+y-1)(y^2-y-1)$ 35) $(2t^2+t+3)(2t^2-t+3)$ 36) $(2a+b)(2a-b)(a+3b)(a-3b)$

37) $a^8+a^6+a^4=a^4(a^4+a^2+1)=a^4(a^4+2a^2-a^2+1)=...=a^4(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

# 6. SCOMPOSIZIONE DI UNA SOMMA E DI UNA DIFFERENZA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO

## A) DIFFERENZA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO DISPARI

**Per fattorizzare una differenza di due potenze di ugual grado dispari, si applicano le formule seguenti:**

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$
$$a^7-b^7=(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)$$
$$\text{... ecc. ...}$$

La validità di queste formule può essere verificata rieseguendo la moltiplicazione a secondo membro: si constaterà che si riottene esattamente l'espressione a primo membro.
Ad esempio: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3\cancel{+a^2b}\cancel{+ab^2}\cancel{-a^2b}\cancel{-ab^2}-b^3=a^3-b^3$, OK

Va detto che esiste anche *un metodo generale* per "costruire" tutta questa famiglia di formule (così come l'altra famiglia, che vedremo subito dopo, relativa alla *somma* di due potenze di ugual grado). Tale metodo generale presuppone, per poter essere compreso, la conoscenza della tecnica di fattorizzazione "alla Ruffini"; ce ne occuperemo perciò successivamente al paragrafo ad essa dedicato.

**Esempi** di applicazione:

**a)** $27x^3-125=(3x)^3-5^3=(3x-5)(9x^2+15x+25)$

**b)** $a^6-\frac{1}{8}=(a^2)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\left(a^2-\frac{1}{2}\right)\left(a^4+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\right)$

**c)** $32t^5-1=(2t)^5-1=(2t-1)(16t^4+8t^3+4t^2+2t+1)$

## B) SOMMA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO DISPARI

**Per fattorizzare una somma di due potenze di ugual grado dispari, si applicano le formule che seguono:**

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$
$$a^7+b^7=(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$$
$$\text{... ecc. ...}$$

Verifichiamo, ad esempio, la formula per la scomposizione di una somma di cubi:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3\cancel{-a^2b}\cancel{+ab^2}\cancel{+a^2b}\cancel{-ab^2}+b^3=a^3+b^3,\ \text{OK}$$

NOTA

♥ **I trinomi** $a^2\pm ab+b^2$
**che "escono" dalla scomposizione di una somma o di una differenza di cubi**
sono anche chiamati "i **falsi quadrati**",
perché "assomigliano" al quadrato di un binomio,
se non fosse per il fatto che mancano del doppio prodotto $2ab$,
rimpiazzato invece dal "prodotto semplice" $ab$.

♥ **Tali "falsi quadrati" in generale non sono scomponibili**;
**lo sono soltanto eccezionalmente, e comunque a patto che gli esponenti in gioco siano "alti".**
Capiterà di imbattersi in qualche caso di questo tipo più avanti.

**Esempi** di applicazione:

**d)** $125y^3+8=(5y)^3+2^3=(5y+2)(25y^2-10y+4)$

**e)** $t^5+100000=t^5+10^5=(t+10)(t^4-10t^3+100t^2-1000t+10000)$

**f)** $b^7+1=b^7+1^7=(b+1)(b^6-b^5+b^4-b^3+b^2-b+1)$

## C) DIFFERENZA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO PARI

**Una differenza di due potenze di ugual grado pari è spesso interpretabile in più modi diversi;
tuttavia, fra le possibili interpretazioni,
c'è anche quella di "vederla" come una differenza di quadrati.
E' l'interpretazione più semplice, ed è senza dubbio quella che conviene privilegiare,
in un'ottica di scomposizione in fattori, perché porta alle situazioni algebriche più comode.**

Consideriamo il seguente esempio:

$$x^6-64y^6=\begin{cases}\textbf{i)} & \left(x^3\right)^2-\left(8y^3\right)^2 \quad \text{(L'INTERPRETAZIONE PIU' CONVENIENTE PER UNA SCOMPOSIZIONE!!!)}\\ \textbf{ii)} & \left(x^2\right)^3-\left(4y^2\right)^3 \quad \text{interpretazione possibile, ma poi la scomposizione sarebbe laboriosa ...}\\ \textbf{iii)} & x^6-\left(2y\right)^6 \quad \text{interpretazione possibile, ma poi la scomposizione sarebbe laboriosa ...}\end{cases}$$

**i)** $x^6-64y^6=\left(x^3\right)^2-\left(8y^3\right)^2=$

$=$ *differenza di quadrati* $\left(x^3+8y^3\right)\left(x^3-8y^3\right)=$

$=$ *somma e differenza di cubi* $\left(x+2y\right)\left(x^2-2xy+4y^2\right)\left(x-2y\right)\left(x^2+2xy+4y^2\right)$

Se si interpreta come **differenza di quadrati**, tutto fila liscio come l'olio: la scomposizione risulta facilissima

**ii)** $x^6-64y^6=\left(x^2\right)^3-\left(4y^2\right)^3=$

$=$ *differenza di cubi* $\left(x^2-4y^2\right)\left(x^4+4x^2y^2+16y^4\right)=$

$=\left(x+2y\right)\left(x-2y\right)\left(x^4+8x^2y^2-4x^2y^2+16y^4\right)=$

$=\left(x+2y\right)\left(x-2y\right)\left[\left(x^2+4y^2\right)^2-4x^2y^2\right]=$

$=\left(x+2y\right)\left(x-2y\right)\left(x^2+4y^2+2xy\right)\left(x^2+4y^2-2xy\right)$

Se si interpreta come **differenza di cubi**, la scomposizione è molto più difficoltosa: si ottiene un trinomio biquadratico omogeneo, che si riesce a scomporre soltanto col metodo del completamento del quadrato

**iii)** $x^6-64y^6=x^6-\left(2y\right)^6=$

$=\left(x-2y\right)\left(x^5+2x^4y+4x^3y^2+8x^2y^3+16xy^4+32y^5\right)=$

$=\left(x-2y\right)\left[x^4\left(x+2y\right)+4x^2y^2\left(x+2y\right)+16y^4\left(x+2y\right)\right]=$

$=\left(x-2y\right)\left(x+2y\right)\left(x^4+4x^2y^2+16y^4\right)=$

$=$ *come sopra* $\left(x-2y\right)\left(x+2y\right)\left(x^2+4y^2+2xy\right)\left(x^2+4y^2-2xy\right)$

Se si interpreta come differenza di seste potenze, si ricorrerà alla formula (pag. 238)

$$a^6-b^6=\left(a-b\right)\left(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5\right)$$

La scomposizione è lunga e pesante: si effettuano dei raccoglimenti parziali, poi si applica il metodo del completamento del quadrato come nell'interpretazione precedente

## D) SOMMA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO PARI

**Una somma di due potenze di ugual grado pari NON è scomponibile,
A MENO CHE si possa interpretare pure
come somma di due potenze di ugual grado dispari.**

$a^2+b^2$ NON SCOMPONIBILE

$a^4+b^4$ NON SCOMPONIBILE

$a^6+b^6=\left(a^2\right)^3+\left(b^2\right)^3=\left(a^2+b^2\right)\left(a^4-a^2b^2+b^4\right)$

$a^8+b^8$ NON SCOMPONIBILE

$a^{10}+b^{10}=\left(a^2\right)^5+\left(b^2\right)^5=\ldots$

$a^{12}+b^{12}=\left(a^4\right)^3+\left(b^4\right)^3=\ldots$

$a^{14}+b^{14}=\left(a^2\right)^7+\left(b^2\right)^7=\ldots$

$a^{16}+b^{16}$ NON SCOMP.

Alla fin dei conti, la "non scomponibilità" è limitata ai soli casi in cui l'esponente è una potenza di 2 e quindi, se scomposto in fattori primi, non contiene fattori dispari.

Esempio: $x^6+64y^6=\left(x^2\right)^3+\left(4y^2\right)^3$ $=^{\text{somma di cubi}}$ $\left(x^2+4y^2\right)\left(x^4-4x^2y^2+16y^4\right)$

**Ricapitolazione compatta delle formule**

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right)$$
$$a^5 \pm b^5 = (a \pm b)\left(a^4 \mp a^3 b + a^2 b^2 \mp ab^3 + b^4\right)$$
$$a^7 \pm b^7 = (a \pm b)\left(a^6 \mp a^5 b + a^4 b^2 \mp a^3 b^3 + a^2 b^4 \mp ab^5 + b^6\right)$$
...

Quando si usa il *doppio segno*
in ambo i membri di un'uguaglianza
si intende che si devono leggere:
una prima volta, tutti i segni "sopra";
una seconda volta, tutti i segni "sotto"

**Esempi vari** sulla scomposizione di una somma o differenza di due potenze di ugual grado

- $375z^3 - 3 = 3\left(125z^3 - 1\right) = 3(5z-1)\left(25z^2 + 5z + 1\right)$

- $x^{13} - x = x\left(x^{12} - 1\right) = x\left(x^6 + 1\right)\left(x^6 - 1\right) = x\left[\left(x^2\right)^3 + 1\right]\left(x^3 + 1\right)\left(x^3 - 1\right) =$
$= x\left(x^2 + 1\right)\left(x^4 - x^2 + 1\right)(x+1)\left(x^2 - x + 1\right)(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) =$
$=$ *riordinando, solo per eleganza* $x(x+1)(x-1)\left(x^2+1\right)\left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^4 - x^2 + 1\right)$

- $t^{13} - t^9 - t^6 + t^2 = t^2\left(t^{11} - t^7 - t^4 + 1\right) = t^2\left[t^7\left(t^4 - 1\right) - \left(t^4 - 1\right)\right] =$
$= t^2\left(t^4 - 1\right)\left(t^7 - 1\right) = t^2\left(t^2 + 1\right)\left(t^2 - 1\right)(t-1)\left(t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1\right) =$
$= t^2\left(t^2 + 1\right)(t+1)(t-1)^2\left(t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1\right)$

- $a^{10} + 1024 = a^{10} + 2^{10} = \left(a^2\right)^5 + 4^5 = \left(a^2 + 4\right)\left(a^8 - 4a^6 + 16a^4 - 64a^2 + 256\right)$

**ESERCIZI** (scomposizione di una somma o differenza di due potenze di ugual grado)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $x^3 - 8$ | 2) | $x^3 + 8$ |
| 3) | $8x^3 - 27y^3$ | 4) | $8x^3 + 27y^3$ |
| 5) | $\frac{1}{8}t^3 - 1$ | 6) | $\frac{1}{8}t^3 + 1$ |
| 7) | $a^5 - 32$ | 8) | $a^5 + 32$ |
| 9) | $x^4 - 16$ | 10) | $x^5 - y^{10}$ |
| 11) | $1 - a^{14}$ | 12) | $x^{13} + xy^3$ |
| 13) | $x^6 - y^6$ | 14) | $x^6 + y^6$ |
| 15) | $x^8 - y^8$ | 16) | $x^8 + y^8$ |
| 17) | $t^6 - 64$ | 18) | $t^6 + 64$ |
| 19) | $a^3b^3 - 27$ | 20) | $a^3b^3 + 27$ |
| 21) | $\frac{1}{8}a^3 \pm \frac{1}{27}b^3$ | 22) | $32b^5 \pm \frac{1}{32}$ |
| 23) | $a^{12} - 1$ | 24) | $a^{16} - 1$ |
| 25) | $a^{12} + 1$ | 26) | $a^{16} + 1$ |
| 27) | $54x^6 + 250$ | 28) | $8a^{3k} - b^{3n}$ |
| 29) | $81 - h^4$ | 30) | $c - c^4$ |
| 31) | $81 + h^4$ | 32) | $\alpha^9 - 1$ |
| 33) | $8m^5 + m^2$ | 34) | $a^{3k+4} - a$ |
| 35) | $1 + \ell^5$ | 36) | $36b^2 - 49$ |
| 37) | $36b^2 + 49$ | 38) | $a^7 - a^4 - a^3 + 1$ |
| 39) | $a^6 - 9a^3 + 8$ | 40) | $8a^6 + 9a^3 + 1$ |

Dal sito www.purplemath.com:

The other two special factoring formulas
are two sides of the same coin:
the sum and difference of cubes.
These are the formulas:
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
Some people use the mnemonic "SOAP" for the signs;
the letters stand for
"Same" as the sign in the middle
of the original expression,
"Opposite" sign,
and "Always Positive".
$a^3 \pm b^3 =$
$=$ ($a$ [same sign] $b$)($a^2$ [opposite sign] $ab$ [always positive] $b^2$)

**RISULTATI**

1) $(x-2)(x^2+2x+4)$
2) $(x+2)(x^2-2x+4)$
3) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$
4) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$
5) $\left(\frac{1}{2}t-1\right)\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+1\right)$
6) $\left(\frac{1}{2}t+1\right)\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t+1\right)$
7) $(a-2)(a^4+2a^3+4a^2+8a+16)$
8) $(a+2)(a^4-2a^3+4a^2-8a+16)$
9) $(x^2+4)(x+2)(x-2)$
10) $(x-y^2)(x^4+x^3y^2+x^2y^4+xy^6+y^8)$
11) $(1+a)(1-a)(1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6)(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)$
12) $x(x^4+y)(x^8-x^4y+y^2)$
13) $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
14) $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
15) $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
16) Non scomponibile
17) $(t+2)(t^2-2t+4)(t-2)(t^2+2t+4)$
18) $(t^2+4)(t^4-4t^2+16)$
19) $(ab-3)(a^2b^2+3ab+9)$
20) $(ab+3)(a^2b^2-3ab+9)$
21) $\left(\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2\mp\frac{1}{6}ab+\frac{1}{9}b^2\right)$
22) $\left(2b\pm\frac{1}{2}\right)\left(16b^4\mp4b^3+b^2\mp\frac{1}{4}b+\frac{1}{16}\right)$
23) $(a^2+1)(a^4-a^2+1)(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)$
24) $(a^8+1)(a^4+1)(a^2+1)(a+1)(a-1)$
25) $(a^4+1)(a^8-a^4+1)$
26) Non scomponibile
27) $2(3x^2+5)(9x^4-15x^2+25)$
28) $(2a^k-b^n)(4a^{2k}+2a^kb^n+b^{2n})$
29) $(9+h^2)(3+h)(3-h)$
30) $c(1-c)(1+c+c^2)$
31) Non scomponibile
32) $(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^6+\alpha^3+1)$
33) $m^2(2m+1)(4m^2-2m+1)$
34) $a(a^{k+1}-1)(a^{2k+2}+a^{k+1}+1)$
35) $(1+\ell)(1-\ell+\ell^2-\ell^3+\ell^4)$
36) $(6b+7)(6b-7)$
37) Non scomponibile
38) $(a+1)(a-1)^2(a^2+1)(a^2+a+1)$
39) $(a-1)(a^2+a+1)(a-2)(a^2+2a+4)$
40) $(a+1)(a^2-a+1)(2a+1)(4a^2-2a+1)$

Le successive pagine 238-239 mostreranno che sussistono le seguenti formule:

$$a^n-b^n=$$
$$=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+b^{n-1})$$

**QUALUNQUE SIA *n*** = 3, 4, 5, 6,…

Perciò

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

$a^6-b^6=(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$

...

$$a^n+b^n=$$
$$=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-...+b^{n-1})$$

**SOLO CON *n* DISPARI**,
mentre con *n pari*,
non esiste *nessuna* formula del tipo

$$a^n+b^n=(a+b)(.....)$$

Perciò

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

...

## 7. SCOMPOSIZIONE IN FATTORI COL METODO DI RUFFINI

Ricordiamo innanzitutto il **TEOREMA DEL RESTO** (pag. 116), che dice:

**"il resto della divisione $P(x):(x-k)$ è uguale a $P(k)$, cioè al numero che si ottiene sostituendo il numero $k$ al posto di $x$ nel polinomio dividendo, e svolgendo i calcoli"**

Indicato quindi con $Q(x)$ il quoziente della divisione $P(x):(x-k)$, varrà l'identità:

$$\boxed{P(x)=}\ Q(x)\cdot(x-k)+R=\boxed{Q(x)\cdot(x-k)+P(k)}$$

A questo punto un occhio attento può cogliere un fatto apparentemente banale, ma che in realtà porta con sé delle conseguenze molto importanti:
**nel caso risulti $P(k)=0$, l'identità diventa semplicemente $P(x)=Q(x)\cdot(x-k)$.**

**Mumble, mumble … ma allora … con questa osservazione abbiamo scoperto che, nel caso in cui risulti $P(k)=0$, il polinomio $P(x)$ è scomponibile in fattori!**
E precisamente, la sua scomposizione è il prodotto $Q(x)\cdot(x-k)$, essendo $Q(x)$ il quoziente della divisione $P(x):(x-k)$ !!!

**Pertanto, se abbiamo un polinomio $P(x)$ da scomporre in fattori, e non siamo riusciti nel nostro intento con nessuna delle tecniche precedentemente apprese, potremmo fare un ultimo tentativo per la scomposizione:**

♥ **se riusciamo a trovare un numero $k$ tale che $P(k)=0$, ossia un numero $k$ che sostituito al posto della variabile $x$ renda il valore di $P(x)$ uguale a zero, allora il polinomio $P(x)$ sarà scomponibile, e precisamente sarà scomponibile nel prodotto $Q(x)\cdot(x-k)$, essendo $Q(x)$ il quoziente della divisione $P(x):(x-k)$.**

Ad esempio, sia da scomporre il polinomio $P(x)=3x^3+5x^2-16x-12$.
Si può constatare che questo polinomio **resiste a tutti i tentativi di scomposizione** con i "vecchi" metodi.
**L' "ultima spiaggia" per tentare di scomporlo starà dunque nel cercare un numero $k$ tale che $P(k)=0$: in breve, nel cercare uno "zero" del polinomio.**

Negli esercizi proposti sui manuali scolastici il polinomio $P(x)$ ha quasi sempre coefficienti interi, e anche la ricerca di $k$ si limita, per semplicità, al solo campo dei numeri interi, o, al più, dei numeri razionali.

In tal caso (ripetiamo: **polinomio $P(x)$ a coefficienti interi; ricerca del "$k$" nel solo ambito dei razionali**) **si può dimostrare che lo "zero" $k$, ammesso che esista, si deve trovare necessariamente fra quei numeri frazionari (o, in particolare, interi), che hanno**

♪ **a numeratore, un divisore del termine noto del polinomio $P(x)$**
♫ **e a denominatore, un divisore del 1° coefficiente di $P(x)$**

Via dunque con gli **ESEMPI**.

**a)** Vediamo come fare nel caso del polinomio inizialmente considerato $P(x)=3x^3+5x^2-16x-12$

- I **divisori del T. N.** sono i numeri $\pm1\ \pm2\ \pm3\ \pm4\ \pm6\ \pm12$
- i **divisori del 1° COEFF.** sono i numeri $\pm1\ \pm3$
  quindi i "**possibili zeri razionali**"
  (in pratica: i "numeri con cui provare a sostituire, sperando di ottenere 0"), saranno:
  $\pm1\ \pm2\ \pm3\ \pm4\ \pm6\ \pm12\ \pm\frac{1}{3}\ \pm\frac{2}{3}\ \pm\frac{4}{3}$

Si vede, col calcolo, che risulta $P(2)=0$.
Allora $P(x)$ sarà scomponibile nel prodotto $Q(x)\cdot(x-2)$
essendo $Q(x)$ il quoziente della divisione $P(x):(x-2)$.
Andiamo perciò a calcolare tale quoziente mediante la Regola di Ruffini.

$(3x^3+5x^2-16x-12):(x-2)$

| | 3 | 5 | −16 | −12 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 6 | 22 | 12 |
| | 3 | 11 | 6 | 0 |

$\rightarrow\ Q(x)=3x^2+11x+6$

In definitiva $\boxed{3x^3+5x^2-16x-12=(3x^2+11x+6)(x-2)}$ $\underset{\substack{\text{trinomio}\\ \text{non speciale}}}{=}\ \ldots=(3x+2)(x+3)(x-2)$

Il polinomio ha finalmente "ceduto": evviva! Siamo riusciti a scomporlo!!!

**b)** Sotto ora con un nuovo polinomio: $P(a)=6a^4+7a^3+6a^2+3a-2$




*La timida Marinella si sente in imbarazzo di fronte alla difficoltà di questo argomento. Dài, Marinella, coraggio! La teoria è complicata, senza dubbio, ma in compenso l'applicazione pratica, con un po' di esercizio, non è niente di speciale.*

**Divisori del T. N.** : $\pm1\ \ \pm2$

**Divisori del 1° COEFF.** : $\pm1\ \ \pm2\ \ \pm3\ \ \pm6$

**Possibili zeri razionali:** $\pm1\ \ \pm2\ \ \pm\frac{1}{2}\ \ \pm\frac{1}{3}\ \ \pm\frac{2}{3}\ \ \pm\frac{1}{6}$

$P(1)=6+7+6+3-2\neq0;$

$P(-1)=6-7+6-3-2=0,\ \ OK$

$(6a^4+7a^3+6a^2+3a-2):(a+1)$ $\quad a-(-1)$

| | 6 | 7 | 6 | 3 | −2 |
|---|---|---|---|---|---|
| −1 | | −6 | −1 | −5 | 2 |
| | 6 | 1 | 5 | −2 | 0 |

$6a^4+7a^3+6a^2+3a-2=\underbrace{(6a^3+a^2+5a-2)}_{\text{e questo sarà ora il nostro nuovo } P(a)}(a+1)$

A questo punto, per scomporre il nuovo polinomio $6a^3+a^2+5a-2$, che per comodità indicheremo ancora col simbolo $P(a)$, ricorreremo ancora al metodo di Ruffini.
I possibili zeri razionali sono rimasti gli stessi di prima.
Segnaliamo però che, come si potrebbe dimostrare (vuoi pensarci su?), "i numeri con cui si è già tentato in precedenza senza successo non potranno andar bene nemmeno ora";
quindi, essendo inutile il calcolo di $P(1)$, riprendiamo i nostri tentativi da $P(-1)$:

$P(-1)=-6+1-5-2\neq0;$ $\quad P(2)=48+4+10-2\neq0;$ $\quad P(-2)=-48+4-10-2\neq0;$

$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{8_4}+\frac{1}{4}+\frac{5}{2}-2\neq0;$ $\quad P\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{6}{8_4}+\frac{1}{4}-\frac{5}{2}-2\neq0;$ $\quad P\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{6}{27_9}+\frac{1}{9}+\frac{5}{3}-2=0\ \ OK$

$(6a^3+a^2+5a-2):\left(a-\frac{1}{3}\right)$

| | 6 | 1 | 5 | −2 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | | 2 | 1 | 2 |
| | 6 | 3 | 6 | 0 |

$\boxed{6a^4+7a^3+6a^2+3a-2}=(6a^3+a^2+5a-2)(a+1)=$

$=(6a^2+3a+6)\left(a-\frac{1}{3}\right)(a+1)=3\left(2a^2+a+2\right)\left(\frac{3a-1}{3}\right)(a+1)=\boxed{(2a^2+a+2)(3a-1)(a+1)}$

**c)** Vogliamo infine fattorizzare $x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3$.

Qui ci troviamo di fronte a un polinomio IN DUE VARIABILI, OMOGENEO.
Se non ci fosse la seconda lettera, ossia la $y$, avremmo una situazione "standard" nella quale i numeri con cui "tentare" sarebbero $\pm1,\ \pm2,\ \pm4$.
Invece c'è $y$ come seconda lettera, e il polinomio è omogeneo.
Bene! Si tratterà semplicemente di comportarsi come se la variabile del polinomio fosse solo la $x$, e la $y$ facesse invece parte dei coefficienti; e di effettuare i "tentativi" con i monomi $\pm y,\ \pm2y,\ \pm4y$.

$x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3=P(x)$

$P(y)\overset{\text{NOTA}}{=}y^3-3y^2\cdot y+4y\cdot y^2-4y^3=y^3-3y^3+4y^3-4y^3=-2y^3\neq0;$

$P(-y)=(-y)^3-3(-y)^2y+4(-y)y^2-4y^3=-y^3-3y^3-4y^3-4y^3=-12y^3\neq0;$

$P(2y)=(2y)^3-3(2y)^2\cdot y+4\cdot2y\cdot y^2-4y^3=8y^3-12y^3+8y^3-4y^3=0\ \ OK$

$(x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3):(x-2y)$

| | 1 | $-3y$ | $4y^2$ | $-4y^3$ |
|---|---|---|---|---|
| $2y$ | | $2y$ | $-2y^2$ | $4y^3$ |
| | 1 | $-y$ | $2y^2$ | 0 |

$(x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3)=(x^2-xy+2y^2)(x-2y)$

NOTA
*Il polinomio è pensato nella variabile x: il simbolo* $P(x)$ *indica proprio questo fatto. In questo contesto, il simbolo* $P(y)$ *viene invece ad indicare "ciò che si ottiene prendendo il polinomio* $P(x)$ *e andando a sostituire y al posto della variabile x".*

Gli **ESERCIZI** sulle scomposizioni col metodo di Ruffini si trovano alla successiva **pagina 238**.

**ESERCIZI (scomposizione col metodo di RUFFINI)**

1) $x^3-6x^2+11x-6$ 2) $24x^3-26x^2+9x-1$ 3) $y^3+2y^2-5y-6$ 4) $3a^3+2a^2+2a-1$

5) $t^4+10t^3+35t^2+50t+24$ 6) $4x^4-8x^3+9x^2-5x+1$ 7) $x^3+3x-4$ 8) $a^5-4a^4+5a^3-a^2-2a+1$

9) $3w^3-5w^2-w+2$ 10) $x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ 11) $t^5-10t^4+35t^3-50t^2+24t$ 12) $c^5+c^4+4c^2$

13) $18x^3+21x^2+8x+1$ 14) $2a^3-4a^2-14a-8$ 15) $2b^3-5b^2+5b-3$ 16) $12z^3-72z^2+63z-15$

17) $x^3-x^2y-8xy^2+12y^3$ 18) $a^3-7ab^2+6b^3$ 19) $x^6+x^5y-x^4y^2-2x^3y^3-x^2y^4+xy^5+y^6$

**RISULTATI**

1) $(x-1)(x-2)(x-3)$ 2) $(2x-1)(3x-1)(4x-1)$ 3) $(y+1)(y-2)(y+3)$ 4) $(3a-1)(a^2+a+1)$

5) $(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)$ 6) $(2x-1)^2(x^2-x+1)$ 7) $(x-1)(x^2+x+4)$ 8) $(a-1)^3(a^2-a-1)$

9) $(3w-2)(w^2-w-1)$ 10) $(x+1)^2(x-2)^2$ 11) $t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)$ 12) $c^2(c+2)(c^2-c+2)$

13) $(2x+1)(3x+1)^2$ 14) $2(a+1)^2(a-4)$ 15) $(2b-3)(b^2-b+1)$ 16) $3(z-5)(2z-1)^2$

17) $(x-2y)^2(x+3y)$ 18) $(a-b)(a-2b)(a+3b)$ 19) $(x-y)^2(x+y)^2(x^2+xy+y^2)$

## 8. DIVISIBILITA'; FORMULE RELATIVE A UNA SOMMA O DIFFERENZA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO

Il numero 44 ***NON E'* divisibile** per 7. Infatti 44 diviso 7 fa 6 **COL RESTO DI 2**.
Invece 91 ***E'* divisibile** per 7. Infatti 91 diviso 7 fa 13 **CON RESTO 0**.

Analogamente, dati due polinomi nella stessa variabile A($x$) e B($x$),
**si dice che A($x$) è divisibile per B($x$) se e solo se la divisione A($x$):B($x$) ha come resto 0.**
**Insomma, l'aggettivo "divisibile", in matematica, significa sempre "divisibile con resto 0".**

Supponiamo ora che il polinomio divisore sia un binomio della forma $(x-k)$;
in questa situazione il "Teorema del Resto", affermando che
il resto di una divisione della forma $P(x):(x-k)$ è uguale a $P(k)$, ci fornisce un vero e proprio
**"Criterio di divisibilità"**:
**il polinomio $P(x)$ è divisibile per il binomio $(x-k)$ se e solo se $P(k)=0$.**

Osserviamo che la "divisibilità" porta con sé la "possibilità di fattorizzazione":
- poiché 91 è divisibile per 7, si può scrivere $91=7\cdot 13$
- e se un polinomio P($x$) è divisibile per $(x-k)$, allora si potrà fattorizzare in $(x-k)\cdot(\textit{quoziente})$.

Ciò premesso, domandiamoci:

**una differenza o una somma di due potenze di ugual grado**
- **è o non è divisibile per la differenza delle basi?**
- **è o non è divisibile per la somma delle basi?**

Insomma: i) $a^n-b^n$ *è o non è divisibile per* $(a-b)$?
ii) $a^n+b^n$ *è o non è divisibile per* $(a-b)$?
iii) $a^n-b^n$ *è o non è divisibile per* $(a+b)$?
iv) $a^n+b^n$ *è o non è divisibile per* $(a+b)$?

Vediamo.

i) *$a^n-b^n$ è o non è divisibile per $(a-b)$?*

Per rispondere, applicheremo il **"Criterio di divisibilità"**,
quindi penseremo il polinomio $a^n-b^n$ come dipendente dalla variabile $a$,
e andremo a calcolare $P(b)$, per verificare se è o non è uguale a zero.

$a^n-b^n=P(a)$

*Domanda*: $a^n-b^n=P(a)$ *è o non è divisibile per* $(a-b)$?

$P(b) \underset{\text{NOTA}}{=} b^n-b^n=0$, *quindi la risposta è: SI'*

NOTA: il polinomio P, ribadiamolo, è pensato nella variabile $a$: $P=P(a)$. Il simbolo $P(b)$ indica dunque in questo contesto il numero che si ottiene sostituendo al posto della variabile (che è $a$), il numero $b$.

Bene, abbiamo allora stabilito che

$\boxed{a^n-b^n,\ \textit{qualunque sia } n,\ \textit{è sempre divisibile per } (a-b)}$

Ciò assicura che deve esistere una formula del tipo $a^n - b^n = (a-b)(.....)$
Cosa metteremo al posto dei puntini?
Ci metteremo il quoziente della divisione $\left(a^n - b^n\right):\left(a-b\right)$, da determinarsi con la regola di Ruffini.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | ... | 0 | $-b^n$ |
| $b$ | | $b$ | $b^2$ | $b^3$ | ... | $b^{n-1}$ | $b^n$ |
| | 1 | $b$ | $b^2$ | $b^3$ | ... | $b^{n-1}$ | 0 |

Quindi: $\boxed{a^n - b^n = \left(a-b\right)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1}\right)}$

ii) *$a^n + b^n$ è o non è divisibile per $(a-b)$?*

$a^n + b^n = \mathrm{P}(a)$

*Domanda*: *$a^n + b^n = \mathrm{P}(a)$ è o non è divisibile per $(a-b)$?*
$\mathrm{P}(b) = b^n + b^n = 2b^n \neq 0$, *quindi la risposta è: NO*

$\boxed{\begin{array}{l} a^n + b^n \text{ non è mai divisibile per } (a-b); \\ \text{non esiste alcuna fattorizzazione della forma } a^n + b^n = \left(a-b\right)\cdot(...) \end{array}}$

iii) *$a^n - b^n$ è o non è divisibile per $(a+b)$?*

$a^n - b^n = \mathrm{P}(a)$

*Domanda*: *$a^n - b^n = \mathrm{P}(a)$ è o non è divisibile per $(a+b)$?*

$\mathrm{P}(-b) = \left(-b\right)^n - b^n = \begin{cases} b^n - b^n = 0 & \text{se n è PARI} \\ -b^n - b^n = -2b^n \neq 0 & \text{se n è DISPARI} \end{cases}$ *e perciò*

$\boxed{a^n - b^n \text{ è divisibile per } (a+b) \text{ quando n è PARI, mentre NON lo è quando n è DISPARI}}$.

Nel caso di *n* PARI, esisterà dunque una formula del tipo $a^n - b^n = (a+b)(...)$ dove al posto dei $(...)$ andrà messo il quoziente della divisione $(a^n - b^n):(a+b)$, determinabile con la regola di Ruffini.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | ... | 0 | $-b^n$ |
| $-b$ | | $-b$ | $+b^2$ | $-b^3$ | ... | $-b^{n-1}$ | $+b^n$ |
| | 1 | $-b$ *esponente dispari, segno –* | $+b^2$ | $-b^3$ *esponente dispari, segno –* | ... | $-b^{n-1}$ *esp. dispari (n è pari!), segno –* | 0 |

Quindi: $\boxed{\text{con n PARI, } a^n - b^n = \left(a+b\right)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - b^{n-1}\right) \quad [\text{segni alterni}]}$

iv) *$a^n + b^n$ è o non è divisibile per $(a+b)$?*

$a^n + b^n = \mathrm{P}(a)$

*Domanda*: *$a^n + b^n = \mathrm{P}(a)$ è o non è divisibile per $(a+b)$?*

$\mathrm{P}(-b) = \left(-b\right)^n + b^n = \begin{cases} b^n + b^n = 2b^n \neq 0 & \text{se n è PARI} \\ -b^n + b^n = 0 & \text{se n è DISPARI} \end{cases}$ *e perciò*

$\boxed{a^n + b^n \text{ è divisibile per } (a+b) \text{ quando n è DISPARI, mentre NON lo è quando n è PARI}}$

Nel caso di *n* DISPARI, esisterà dunque una formula $a^n + b^n = (a+b)(...)$ dove al posto dei puntini andrà messo il quoziente della divisione $(a^n + b^n):(a+b)$, determinabile con la regola di Ruffini.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | ... | 0 | $+b^n$ |
| $-b$ | | $-b$ | $+b^2$ | $-b^3$ | ... | $+b^{n-1}$ | $-b^n$ |
| | 1 | $-b$ *esponente dispari, segno –* | $+b^2$ | $-b^3$ *esponente dispari, segno –* | ... | $+b^{n-1}$ *+, perchè n–1 è pari in quanto n è dispari* | 0 |

Quindi: $\boxed{\text{con n DISPARI, } a^n + b^n = \left(a+b\right)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + b^{n-1}\right) \quad [\text{segni alterni}]}$

## 9. SCOMPOSIZIONI "A BLOCCHI"

**a)** $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3+c^3=$
$=\left(a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3\right)+c^3=$
$=(a-2b)^3+c^3=$
$=\left[(a-2b)+c\right]\left[(a-2b)^2-(a-2b)\cdot c+c^2\right]=$
$=(a-2b+c)\left(a^2-4ab+4b^2-ac+2bc+c^2\right)$

Il polinomio $a-2b$ è stato qui utilizzato come "blocco".
Avremmo anche potuto, volendo, inserire dei passaggi intermedi, con la sostituzione $a-2b=x$:

$$(a-2b)^3+c^3=x^3+c^3=(x+c)\left(x^2-x\cdot c+c^2\right)$$

Risostituendo a questo punto $a-2b$ al posto di $x$, il gioco è fatto:

$$\left[(a-2b)+c\right]\left[(a-2b)^2-(a-2b)\cdot c+c^2\right]=$$
$$=(a-2b+c)\left(a^2-4ab+4b^2-ac+2bc+c^2\right)$$

**b)** $(x+y)^3-(x-y)^3=$
$=\left[(x+y)-(x-y)\right]\left[(x+y)^2+(x+y)(x-y)+(x-y)^2\right]=$
$=\left(\cancel{x}+y\cancel{-x}+y\right)\left(x^2\cancel{+2xy}+\cancel{y^2}+x^2\cancel{-y^2}+x^2\cancel{-2xy}+y^2\right)=$
$=2y\left(3x^2+y^2\right)$

E' ovvio che avremmo potuto anche svolgere il calcolo "normalmente", ottenendo:

$$(x+y)^3-(x-y)^3=$$
$$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+$$
$$-\left(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3\right)=$$
$$=\cancel{x^3}+3x^2y\cancel{+3xy^2}+y^3\cancel{-x^3}+3x^2y\cancel{-3xy^2}+y^3=$$
$$=6x^2y+2y^3=2y\left(3x^2+y^2\right)$$

**c)** $(5x+3)^4-(x+1)^4=$
$=\left[(5x+3)^2+(x+1)^2\right]\left[(5x+3)^2-(x+1)^2\right]=$
$=\left[25x^2+30x+9+x^2+2x+1\right](5x+3+x+1)(5x+3-x-1)=$
$=\left(26x^2+32x+10\right)(6x+4)(4x+2)=$
$=2\left(13x^2+16x+5\right)\cdot 2(3x+2)\cdot 2(2x+1)=$
$=8\left(13x^2+16x+5\right)(3x+2)(2x+1)$

**d)** $(a+b+c)^2-8(a+b+c)+12=$
$\underset{a+b+c=t}{=} t^2-8t+12=(t-2)(t-6)=$
$=(a+b+c-2)(a+b+c-6)$

Qui abbiamo ritenuto di effettuare *esplicitamente* la "posizione" intermedia $a+b+c=t$.
D'altra parte, i passaggi intermedi di questo tipo si possono tranquillamente saltare, facendoli a mente o comunque "trattando", nella propria mente, il polinomio $a+b+c$ come un "blocco" che viene manipolato come se si trattasse di una singola lettera.

**e)** $(a+b)^3-(a+b)^2+2$

Poniamo $a+b=t$ e avremo:

$$t^3-t^2+2$$

che potremo scomporre con Ruffini.

$$P(t)=t^3-t^2+2$$
$$P(-1)=-1-1+2=0,\quad OK$$

$(t^3-t^2+2):(t+1)$

| | 1 | −1 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| −1 | | −1 | 2 | −2 |
| | 1 | −2 | 2 | 0 |

$$t^3-t^2+2=\left(t^2-2t+2\right)(t+1)$$

Quindi, andando a risostituire $a+b$ al posto di $t$, la nostra scomposizione sarà

$$\left[(a+b)^2-2(a+b)+2\right](a+b+1)=\left(a^2+2ab+b^2-2a-2b+2\right)(a+b+1)$$

## 10. SCOMPOSIZIONI IN CUI OCCORRE RACCOGLIERE UN POLINOMIO

**a)** $x^2+2x+2y-y^2=x^2-y^2+2x+2y=(x+y)(x-y)+2(x+y)=(x+y)(x-y+2)$

**b)** $a^3+b^3+a^2+b^2+2ab=(a^3+b^3)+(a^2+b^2+2ab)=$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+(a+b)^2=(a+b)(a^2-ab+b^2+a+b)$

**c)** $8(x-3)(x-5)^2-10(x-3)^2(x-5)=$
$=2(x-3)(x-5)[4(x-5)-5(x-3)]=$
$=2(x-3)(x-5)[4x-20-5x+15]=$
$=2(x-3)(x-5)(-x-5)=$
$=-2(x-3)(x-5)(x+5)$

**d)** $a^3-b^3-a^2-ab+2b^2=(a^3-b^3)-(a^2+ab-2b^2)=$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)-(a+2b)(a-b)=(a-b)(a^2+ab+b^2-a-2b)$

**ESERCIZI** (scomposizioni nelle quali un polinomio è utilizzato come un "blocco", o nelle quali occorre raccogliere un polinomio)

| | | **RISULTATI** | |
|---|---|---|---|
| 1) | $a^3+(b+c)^3$ | 1) | $(a+b+c)(a^2-ab-ac+b^2+2bc+c^2)$ |
| 2) | $x^3-y^3-3y^2-3y-1$ | 2) | $(x-y-1)(x^2+xy+x+y^2+2y+1)$ |
| 3) | $(a+b+c+1)^4-(a+b+c+1)^2$ | 3) | $(a+b+c+1)^2(a+b+c+2)(a+b+c)$ |
| 4) | $(x+y)^2+5(x+y)+6$ | 4) | $(x+y+2)(x+y+3)$ |
| 5) | $(x+y)^2+2z(x+y)+z^2$ | 5) | $(x+y+z)^2$ |
| 6) | $4(a+b-c)^2+4(a+b-c)+1$ | 6) | $(2a+2b-2c+1)^2$ |
| 7) | $(2a+b)^3-(a+2b)^3$ | 7) | $(a-b)(7a^2+13ab+7b^2)$ |
| 8) | $8(x-1)^3+27=(2x-2)^3+27$ | 8) | $(2x+1)(4x^2-14x+19)$ |
| 9) | $(x-5)^3+(x-5)^2$ | 9) | $(x-5)^2(x-4)$ |
| 10) | $(x+y)^3(x-y)-(x+y)(x-y)^3$ | 10) | $4xy(x+y)(x-y)$ |
| 11) | $(a+1)(a+2)(a+3)+(a+2)(a+3)(a+4)$ | 11) | $(a+2)(a+3)(2a+5)$ |
| 12) | $(a+b+1)^2-2a-2b-2$ | 12) | $(a+b+1)(a+b-1)$ |
| 13) | $x^2(x+1)(x+2)+x(x+1)^2(x+2)+x(x+1)(x+2)^2$ | 13) | $3x(x+1)^2(x+2)$ |
| 14) | $4a^3(a-1)^3+6a^4(a-1)^2$ | 14) | $2a^3(a-1)^2(5a-2)$ |
| 15) | $x^2-y^2+x+y$ | 15) | $(x+y)(x-y+1)$ |
| 16) | $a^2-3ab+2b^2-a+2b$ | 16) | $(a-2b)(a-b-1)$ |
| 17) | $w^4+w^3-w^2-2w-1$ | 17) | $(w+1)(w^3-w-1)$ |
| 18) | $t^4+t^3+t^2-1$ | 18) | $(t+1)(t^3+t-1)$ |
| 19) | $ab^2-4a+3b+6$ | 19) | $(b+2)(ab-2a+3)$ |
| 20) | $x^3-x^2+y^2-y^3$ | 20) | $(x-y)(x^2+xy+y^2-x-y)$ |

## 11. ESERCIZI VARI sulla fattorizzazione (risultati alla pagina seguente)

1) $a^3-361a$
2) $d^2+4d+3$
3) $3d^2+4d+1$
4) $m^3-2m^2-m+2$
5) $a^2-2ab+b^2-1$
6) $a^2+4ab+4b^2$
7) $a^2+4ab+3b^2$
8) $k^4-2k^2+1$
9) $e^4-25e^2+144$
10) $ax+3a+x+3$
11) $w^8+w^6+w^4+w^2$
12) $c+1-d-dc$
13) $x^4-10x^2+25$
14) $x^4-10x^2+9$
15) $x^4-7x^2+9$
16) $6t^2+72t-648$
17) $xy+ab-ay-bx$
18) $a^2-2ab+b^2+2a-2b-x^2+1$
19) $h^3-9h^2+27h-27$
20) $h^3-3h^2-9h+27$
21) $t^4-8t^2+15$
22) $c^4-c^3-72c^2$
23) $a^{k+2}-a^{k+1}-2a^k$
24) $x^2y^2-4x^2-y^2+4$
25) $c^2d+c^2-c-cd$
26) $4x^2-4xy+y^2-12x+6y+9$
27) $16t^3+8t^2+4t+2$
28) $a^4-8a^2+16$
29) $a^4-10a^2+16$
30) $a^4-12a^2+16$
31) $343+z^3$
32) $x^2+x^3-42x$
33) $a^2-b^2+2bc-c^2$
34) $15-8t+t^2$
35) $1+cd+c+d$
36) $x^{10}-1024x^5$
37) $9b^4-b^2-4b-4$
38) $15t^2-8t+1$
39) $y^8-4y^6+4y^4-64$
40) $r^6-r^4-r^2+1$
41) $a^4b^4-1$
42) $a^4b^4-ab$
43) $4-a^2+2ab-b^2$
44) $t^6-8t^3+15$
45) $a^2+2ab+b^2-x^2-2x-1$
46) $a^2-8at+15t^2$
47) $ax^2-ay^2+bx+by$
48) $x^4+8x^2y^2+12y^4$
49) $a^3+13a^2+13a+1$
50) $b^4-b^2+b-1$
51) $x^6-3x^5+3x^4-x^3-x^2+2x-1$
52) $a^{15}-8a^{10}+15a^5$
53) $b^2+9bc+20c^2$
54) $t^4+t^3+t+1$
55) $a^2t^2-8at+15$
56) $a^2+b^2+2ab+a+b$
57) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-a-b$
58) $x^3+5ax^2-2a^2x-24a^3$
59) $x^4+3x^3y+x^2y^2+4y^4$
60) $6x^4-x^3y-25x^2y^2+4xy^3+4y^4$

61) Dimostra che, qualunque sia il numero naturale $n$, il numero $n^3-n$ è sempre divisibile per 6.

62) Sia $n$ un intero $\geq 3$. Allora il numero $n^5-5n^3+4n$ è sempre multiplo di 120: dimostralo.

63) Una fattorizzazione ci porta a stabilire che l'equazione $x^3-x^2-110x=0$ ha 3 soluzioni. Quali?

64) $321420^2-321419^2=?$ 65) $\dfrac{7^{2013}-7^{2012}}{7^{2013}+7^{2012}}=?$

66) Esprimi il numero 2827 come differenza fra i quadrati di due numeri interi (entrambi non nulli).

67) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round, 2000
Un intero di tre cifre tutte uguali fra loro, è sempre divisibile per a) 7 b) 11 c) 13 d) 19 e) 37

**SIMULAZIONI DI VERIFICHE; puoi vedere le correzioni cliccando sulle frecce**

Per ciascuna verifica, il **tempo** è di **60'** ; **Punteggio**: punti **1** per ogni scomposizione esatta e completa; la **sufficienza** si raggiunge con **punti 5**. **0,5** per ogni scomposizione esatta ma incompleta.

**1** ⇨

1) $a^2-a-30$
2) $4a^2-5a+1$
3) $x^3+x^2+x+1$
4) $x^4-13x^2+36$
5) $a^4+b^4-2a^2b^2$
6) $t^4-4t^2+4t-1$
7) $x^2+y^2+2xy-4x-4y+4$
8) $a^3+a^2c-2ac^2-a^2b-abc+2bc^2$
9) $8x^3+12x^2-18x-27$
10) Col "metodo del completamento del quadrato": $x^2-2x-624$

**2** ⇨

1) $x^2-x-110$
2) $2x^2+7x+3$
3) $4a^3-4a^2-a+1$
4) $a^4-5a^2+4$
5) $a^4-81$
6) $x^9+x^8+2x^5+2x^4+x+1$
7) $x^4-x^2-12x-36$
8) $a^2+b^2+c^2-d^2-2ab+2ac-2bc$
9) $8x^3-36x^2+54x-27$
10) Col "metodo del completamento del quadrato": $4x^2+4x-399$

**3** ⇨

1) $4b^3-12b^2-b+3$
2) $125a^6-a^3$
3) $8x^6-63x^3-8$
4) $b^8-b^5-b^4+b$
5) $y^4+5y^2+4$
6) $y^4+4y^2+4$
7) $y^4+3y^2+4$
8) $x^5+xy+y+1$
9) $x^3-7x^2+16x-12$ (metodo di Ruffini)
10) $x^3-x^2y+2y^3$ (Ruffini con 2 lettere oppure …)

**RISULTATI**

1) $a(a+19)(a-19)$ 2) $(d+1)(d+3)$ 3) $(d+1)(3d+1)$

4) $(m+1)(m-1)(m-2)$ 5) $(a-b+1)(a-b-1)$ 6) $(a+2b)^2$

7) $(a+b)(a+3b)$ 8) $(k+1)^2(k-1)^2$ 9) $(e+3)(e-3)(e+4)(e-4)$

10) $(x+3)(a+1)$ 11) $w^2(w^2+1)(w^4+1)$ 12) $(1+c)(1-d)$

13) $(x^2-5)^2$ 14) $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$ 15) $(x^2+x-3)(x^2-x-3)$

16) $6(t-6)(t+18)$ 17) $(x-a)(y-b)$ 18) $(a-b+1+x)(a-b+1-x)$

19) $(h-3)^3$ 20) $(h-3)^2(h+3)$ 21) $(t^2-3)(t^2-5)$

22) $c^2(c-9)(c+8)$ 23) $a^k(a+1)(a-2)$ 24) $(x+1)(x-1)(y+2)(y-2)$

25) $c(d+1)(c-1)$ 26) $(2x-y-3)^2$ 27) $2(2t+1)(4t^2+1)$

28) $(a+2)^2(a-2)^2$ 29) $(a^2-2)(a^2-8)$ 30) $(a^2+2a-4)(a^2-2a-4)$

31) $(7+z)(49-7z+z^2)$ 32) $x(x+7)(x-6)$ 33) $(a+b-c)(a-b+c)$

34) $(t-3)(t-5)$ 35) $(1+c)(1+d)$ 36) $x^5(x-4)(x^4+4x^3+16x^2+64x+256)$

37) $(3b^2+b+2)(b-1)(3b+2)$ 38) $(3t-1)(5t-1)$ 39) $(y+2)(y-2)(y^2+2)(y^4-2y^2+8)$

40) $(r+1)^2(r-1)^2(r^2+1)$ 41) $(a^2b^2+1)(ab+1)(ab-1)$ 42) $ab(ab-1)(a^2b^2+ab+1)$

43) $(2+a-b)(2-a+b)$ 44) $(t^3-3)(t^3-5)$ 45) $(a+b+x+1)(a+b-x-1)$

46) $(a-3t)(a-5t)$ 47) $(x+y)(ax-ay+b)$ 48) $(x^2+2y^2)(x^2+6y^2)$

49) $(a+1)(a^2+12a+1)$ (Ruffini oppure … ⇨) 50) $(b-1)(b^3+b^2+1)$ (Ruffini oppure … ⇨) 51) $(x-1)^2(x^4-x^3-1)$ (Ruffini oppure … ⇨)

52) $a^5(a^5-3)(a^5-5)$ 53) $(b+4c)(b+5c)$ 54) $(t+1)^2(t^2-t+1)$

55) $(at-3)(at-5)$ 56) $(a+b)(a+b+1)$ 57) $(a+b)(a+b+1)(a+b-1)$

58) $(x-2a)(x+3a)(x+4a)$ (Ruffini) 59) $(x+2y)^2(x^2-xy+y^2)$ (Ruffini) 60) $(x-2y)(x+2y)(2x-y)(3x+y)$ (Ruffini)

61) $n^3-n=n(n+1)(n-1)$ ; ma presi tre qualsivoglia interi consecutivi, uno (e uno solo) di essi sarà divisibile per 3, e uno (almeno) di essi sarà pari; dunque il loro prodotto è certamente divisibile per 6

62) $n^5-5n^3+4n=(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ che è il prodotto di 5 interi consecutivi … quindi …

63) $x^3-x^2-110x=0$; $x(x^2-x-110)=0$; $x(x-11)(x+10)=0$. Ma un prodotto è uguale a 0 se e solo se (legge di annullamento del prodotto) si annulla almeno uno dei suoi fattori. Quindi il prodotto a 1° m. $x(x-11)(x+10)$ risulterà $=0$ nei tre casi: I) $x=0$ II) $x-11=0$ $(x=11)$ III) $x+10=0$ $(x=-10)$ Le 3 soluzioni dell'equazione proposta sono perciò: 0; 11; −10

64) $(321420+321419)(321420-321419)=642839\cdot1=642839$ 65) Raccogliendo $7^{2012}$ sia a N che a D: ¾ = 0,75

66) $2827=11\cdot257=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$. Il sistema $x-y=11$; $x+y=257$ porta a $x=134$, $y=123$

67) e): $[abc]=a\cdot10^2+b\cdot10+c$; $[aaa]=a\cdot10^2+a\cdot10+a=a\cdot(100+10+1)=a\cdot111$. Ora, $111=3\cdot37$

♣ Lawrence Spector, da New York City, autore di un lavoro magistrale, il magnifico sito www.themathpage.com, tratta la fattorizzazione nel capitolo di Algebra ⇨

Le soluzioni dei tanti utili esercizi compaiono semplicemente portandosi col mouse sulla casella

Il sito www.regentsprep.org si occupa brevemente di fattorizzazione con semplici esercizi interattivi, nel capitolo "*factoring*".



# FRAZIONI ALGEBRICHE

**Si dice "frazione algebrica" una frazione i cui termini siano monomi o polinomi.**

Esempi: $\frac{15x^3y}{20x^4y^4}$ $\frac{a+b}{cd}$ $\frac{x^2-1}{xy-x-y+1}$ $\frac{3}{k-2}$

## 1. SEMPLIFICAZIONE DI FRAZIONI ALGEBRICHE

A volte (non sempre) una frazione algebrica può essere semplificata.
La semplificazione di una frazione consiste nell'applicare la cosiddetta "**proprietà invariantiva**", che dice:

**"In una divisione è possibile moltiplicare oppure dividere (nel caso della semplificazione: dividere) per uno stesso numero diverso da zero, sia il dividendo che il divisore e il risultato dell'operazione non cambierà"**

Notiamo che in molte semplificazioni si applica anche, *simultaneamente*, la proprietà che afferma:

**"Quando si deve moltiplicare, o dividere (nel nostro caso: dividere), un PRODOTTO per un numero, basta moltiplicare, o dividere, per quel numero UNO SOLO dei fattori del prodotto.
In particolare, quando si deve dividere un prodotto per uno dei suoi fattori, basta sopprimere quel fattore"**

Esempi: $\frac{\cancel{24}^{3}}{\cancel{40}^{5}}=\frac{3}{5}$ $\frac{25\cdot\cancel{14}^{2}}{\cancel{21}^{3}\cdot 11}=\frac{50}{33}$ $\frac{5\cdot 3\cdot\cancel{8}}{\cancel{8}\cdot 29}=\frac{15}{29}$

### A) SEMPLIFICAZIONE MONOMIO-CON-MONOMIO

1) $\frac{15x^3y}{20x^4y^4}=\frac{^{3}\cancel{15}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}}{_{4}\cancel{20}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}\cdot y\cdot y\cdot y}=\frac{3}{4xy^3}$

Ovviamente, nella pratica, il passaggio intermedio si salta, come negli esempi successivi.

2) $\frac{\cancel{a^5}\,\cancel{b^4}\,\cancel{c^3}\,\cancel{d}\,e^{\cancel{7}3}}{\cancel{a^4}\,\cancel{b^4}\,c^{\cancel{4}}\,d^{\cancel{4}3}\,\cancel{e^4}\,f^4}=\frac{ae^3}{cd^3f^4}$ 3) $\frac{\cancel{6}\,x^{\cancel{2}}}{_{3}\cancel{18}x^{\cancel{10}8}}=\frac{1}{3x^8}$ 4) $\frac{\cancel{7}\,x^{\cancel{5}4}}{\cancel{7}\,\cancel{x}}=x^4$

### B) SEMPLIFICAZIONE MONOMIO-CON-POLINOMIO

**In questo caso la semplificazione è possibile soltanto se nel polinomio si può raccogliere un fattore, che sia poi semplificabile col monomio che sta dall'altra parte della linea di frazione.**

5) $\frac{5a^2+15a}{35a^2b}=\frac{\cancel{5}\,\cancel{a}\,(a+3)}{7\cancel{35}\,\cancel{a^2}\,b}=\frac{a+3}{7ab}$

**ATTENZIONE!!!** A questo punto l'esercizio 5) è finito: semplificare le "*a*" sarebbe un ERRORACCIO!



$\frac{\cancel{a}+3}{7\cancel{a}b}$

**WHAAAH !!!**

**NO, PER CARITA'!!!**

**MA COSA FAI,**



**DISGRAZIATO?!?**

**IMPORTANTISSIMO: IN UNA FRAZIONE, E'**
ERRORE MADORNALE
**SEMPLIFICARE ADDENDO CON ADDENDO OPPURE ADDENDO CON FATTORE:**
**SI PUO' SOLO SEMPLIFICARE FATTORE CON FATTORE.**

Per capire bene questo fatto, basterà pensare a qualche caso puramente numerico. Due esempi:

♪ la frazione $\frac{10+4}{15}=\frac{14}{15}$, se noi facessimo l'**ERRORACCIO** di semplificare 10 con 15, diventerebbe $\frac{^{2}\cancel{10}+4}{\cancel{15}_{3}}=\frac{6}{3}=2$ !!!

♫ di fronte alla frazione $\frac{9+5}{7+6}=\frac{14}{13}$, prova a semplificare (WHAAAH!!!) il 9 col 6, **e osserva che DISASTRO!!!**

Ancora un'osservazione. L'esercizio (tanto per fare un esempio) $\frac{5x+10}{15}$ si può svolgere in **2 modi**:

a) raccogliendo e poi semplificando: $\frac{5x+10}{15}=\frac{\cancel{5}\,(x+2)}{\cancel{15}_{3}}$

b) … oppure direttamente, come qui a destra. Abbiamo diviso per 5 sia "sopra" che "sotto": ma PER DIVIDERE UNA **SOMMA** PER UN NUMERO OCCORRE DIVIDERE PER QUEL NUMERO **TUTTI** GLI ADDENDI DELLA SOMMA $\frac{\cancel{5}\,x+\cancel{10}^{2}}{\cancel{15}_{3}}$

## C) SEMPLIFICAZIONE POLINOMIO-CON-POLINOMIO

**In questo caso occorre innanzitutto SCOMPORRE IN FATTORI (se possibile) i due polinomi: dopodiché, si semplificherà FATTORE CON FATTORE (s'intende che i FATTORI siano "TOTALI").**

6) $\dfrac{x^2-1}{xy-x-y+1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x(y-1)-(y-1)}=\dfrac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(y-1)\cancel{(x-1)}}=\dfrac{x+1}{y-1}$

7) $\dfrac{t^4+3t^3+3t^2+t}{t^2+5t+4}=\dfrac{t(t^3+3t^2+3t+1)}{(t+1)(t+4)}=\dfrac{t\cancel{(t+1)}^{3^2}}{\cancel{(t+1)}(t+4)}=\dfrac{t(t+1)^2}{t+4}$

8) $\dfrac{x^5-9x^4+18x^3}{x^5-9x^3}=\dfrac{\cancel{x^3}(x^2-9x+18)}{\cancel{x^3}(x^2-9)}=\dfrac{\cancel{(x-3)}(x-6)}{(x+3)\cancel{(x-3)}}=\dfrac{x-6}{x+3}$ (NOTA)



NOTA
Insisto!
Arrivati a $\dfrac{x-6}{x+3}$,
l'esercizio è TERMINATO!
Sarebbe ERRORACCIO
semplificare
la $x$ con la $x$,
o il 3 col $-6$ !!!

**ATTEN-ZIONE!**

**Professore … guardi …** ♥

$$\frac{x^3+2x^2+4x+8}{3x+6}=\frac{x^2\cancel{(x+2)}+4(x+2)}{3\cancel{(x+2)}}$$

**ho fatto giusto, vero?**
Ho semplificato, come dice lei, "fattore con fattore" …



**Mi spiace, ma HAI SBAGLIATO.**
Quando si dice "fattore con fattore" si deve intendere "**FATTORE TOTALE CON FATTORE TOTALE**", mentre l' $(x+2)$ a numeratore è soltanto un fattore PARZIALE.
**Avresti dovuto PRIMA terminare la scomposizione e POI semplificare!**

$$\frac{x^3+2x^2+4x+8}{3x+6}=\frac{x^2(x+2)+4(x+2)}{3(x+2)}=\frac{\cancel{(x+2)}(x^2+4)}{3\cancel{(x+2)}}$$ ADESSO E' GIUSTO!!!

### ESERCIZI (semplificazione di frazioni algebriche)

1) $\dfrac{12a^4b^4c^4}{18ab^4c^{12}}$ 2) $\dfrac{42x^7}{14x^6}$ 3) $\dfrac{29t^3}{58t^6}$ 4) $\dfrac{y^3}{y^3}$ 5) $\dfrac{\ell^4}{\ell^5}$ 6) $\dfrac{k^7}{k^4}$ 7) $\dfrac{15x^2y^4}{18xy^{10}}$ 8) $\dfrac{a}{-ax}$

9) $\dfrac{6x^6-18x^5}{15x^4}$ 10) $\dfrac{4a+4b+4c}{12}$ 11) $\dfrac{x^3+x^2}{x^5}$ 12) $\dfrac{3x^2}{6x^5+9x^4+12x^3}$ 13) $\dfrac{5a-5b}{5}$ 14) $\dfrac{6}{3x+3}$

15) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$ 16) $\dfrac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^2+xy}$ 17) $\dfrac{3a-12}{a^2-9a+20}$ 18) $\dfrac{3x^3-2x^2+6x-4}{9x^2-4}$

19) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$ 20) $\dfrac{a^3-a^2-4a+4}{a^2-3a+2}$ 21) $\dfrac{a^5+a^4b+a^4c}{a^5+a^4b}$ 22) $\dfrac{6n^2-5n+1}{2n^3-n^2-4n+2}$

23) $\dfrac{a^4+b^4}{a^2+b^2}$ 24) $\dfrac{4a^2+12a+5}{2a^2+11a+5}$ 25) $\dfrac{x^4-10x^2+9}{x^2+4x+3}$ 26) $\dfrac{x+y+1}{x^2+y^2+2xy-1}$

27) $\dfrac{a^2+7ac+12c^2}{a^2+6ac+9c^2}$ 28) $\dfrac{x^2y+axy+ax+a^2}{x^2+3ax+2a^2}$ 29) $\dfrac{a^2-ab-6b^2}{a^4-81b^4}$ 30) $\dfrac{(a+b)^3+(a+b)^2}{a+b+1}$

31) $\dfrac{k^3-8}{k^2-4}$ 32) $\dfrac{x^3-x}{x^3-1}$ 33) $\dfrac{3x^3-x^2-x-1}{2x^2-x-1}$ *Ruffini, per il numeratore!* 34) $\dfrac{a^2-a-2}{a^3+2a^2-1}$ *Ruffini, per il denominatore!*

### RISULTATI

1) $\dfrac{2a^3}{3c^8}$ 2) $3x$ 3) $\dfrac{1}{2t^3}$ 4) $1$ 5) $\dfrac{1}{\ell}$ 6) $k^3$ 7) $\dfrac{5x}{6y^6}$ 8) $-\dfrac{1}{x}$

9) $\dfrac{2x(x-3)}{5}$ 10) $\dfrac{a+b+c}{3}$ 11) $\dfrac{x+1}{x^3}$ 12) $\dfrac{1}{x(2x^2+3x+4)}$ 13) $a-b$ 14) $\dfrac{2}{x+1}$ 15) $\dfrac{a+b}{a-b}$

16) $\dfrac{(x+y)^2}{x}$ 17) $\dfrac{3}{a-5}$ 18) $\dfrac{x^2+2}{3x+2}$ 19) $\dfrac{x-2}{x-4}$ 20) $a+2$ 21) $\dfrac{a+b+c}{a+b}$ 22) $\dfrac{3n-1}{n^2-2}$ 23) *Non sempli-ficabile*

24) $\dfrac{2a+5}{a+5}$ 25) $(x-1)(x-3)$ 26) $\dfrac{1}{x+y-1}$ 27) $\dfrac{a+4c}{a+3c}$ 28) $\dfrac{xy+a}{x+2a}$ 29) $\dfrac{a+2b}{(a^2+9b^2)(a+3b)}$

30) $(a+b)^2$ 31) $\dfrac{k^2+2k+4}{k+2}$ 32) $\dfrac{x(x+1)}{x^2+x+1}$ 33) $\dfrac{3x^2+2x+1}{2x+1}$ 34) $\dfrac{a-2}{a^2+a-1}$

## 2. MOLTIPLICAZIONI, DIVISIONI E POTENZE DI FRAZIONI ALGEBRICHE

**Queste facili operazioni sono illustrate dai seguenti esempi svolti.**

1) $\dfrac{3a}{4x}\cdot\dfrac{5b}{x^5}=\dfrac{15ab}{4x^6}$

2) $\dfrac{14a^8}{11x^2}\cdot\dfrac{33x}{35a^3}$ Qui, prima di moltiplicare, conviene semplificare: $\rightarrow$ $\dfrac{\cancel{14}^{\,2}a^{8\,5}}{\cancel{11}x^{\cancel{2}}}\cdot\dfrac{\cancel{33}^{\,3}x}{5\cancel{35}\,a^{\cancel{3}}}=\dfrac{6a^5}{5x}$

3) $\dfrac{a+2}{a+3}\cdot\dfrac{a+1}{a+4}=\dfrac{(a+2)(a+1)}{(a+3)(a+4)}\rightarrow$

Psst … dimmi, in confidenza …
Nel 3), non avevi mica pensato
di semplificare le $a$ fra loro, o il 2 col 4? ☹
GUAI! E' errore gravissimo semplificare addendo con addendo!

4) $\dfrac{x^2-4}{x^2+10x+25}\cdot\dfrac{4x+20}{x-2}=\dfrac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x+5)^{\cancel{2}}}\cdot\dfrac{4\cancel{(x+5)}}{\cancel{x-2}}=\dfrac{4(x+2)}{x+5}\rightarrow$

**IN PRESENZA DI POLINOMI, PRIMA DI MOLTIPLICARE conviene SCOMPORRE IN FATTORI nella speranza che sia possibile SEMPLIFICARE**

5) $\dfrac{7a^2}{3b}:\dfrac{14a^2}{3b^4}=\dfrac{7\,\cancel{a^2}}{\cancel{3}\,b}\cdot\dfrac{\cancel{3}b^{4\,3}}{2\cancel{14}\,\cancel{a^2}}=\dfrac{b^3}{2}$

6) $\dfrac{a^2+a-2}{a^2-a-6}:\dfrac{a-1}{a-3}=\dfrac{\cancel{(a-1)}\cancel{(a+2)}}{\cancel{(a+2)}\cancel{(a-3)}}\cdot\dfrac{\cancel{a-3}}{\cancel{a-1}}=1$

7) $\dfrac{4t-4}{t-2}:\dfrac{t^3-t^2-4t+4}{t+2}=\dfrac{4(t-1)}{t-2}\cdot\dfrac{t+2}{t^2(t-1)-4(t-1)}=\dfrac{4\cancel{(t-1)}}{t-2}\cdot\dfrac{\cancel{t+2}}{\cancel{(t-1)}\cancel{(t+2)}(t-2)}=\dfrac{4}{(t-2)^2}$

8) $\dfrac{3a+3}{a+2}:(a+1)^3=\dfrac{3\cancel{(a+1)}}{a+2}\cdot\dfrac{1}{(a+1)^{\cancel{3}\,2}}=\dfrac{3}{(a+2)(a+1)^2}$

9) $\left(\dfrac{2xy^2z^3}{5a}\right)^4=\dfrac{16x^4y^8z^{12}}{625a^4}$

10) $\left(\dfrac{a+b}{a}\right)^3=\dfrac{(a+b)^3}{a^3}$

11) $\dfrac{h-1}{h^2+h}:\left(\dfrac{h^2-h}{h^2}\cdot\dfrac{h-1}{2}\right)=\dfrac{h-1}{h(h+1)}:\left[\dfrac{\cancel{h}(h-1)}{h^{\cancel{2}}}\cdot\dfrac{h-1}{2}\right]=$

$=\dfrac{h-1}{h(h+1)}:\dfrac{(h-1)^2}{2h}=\dfrac{\cancel{h-1}}{\cancel{h}(h+1)}\cdot\dfrac{2\cancel{h}}{(h-1)^{\cancel{2}}}=\dfrac{2}{(h+1)(h-1)}$

12) $\left(\dfrac{a-b}{2a+2b}\right)^2:\dfrac{a^2-3ab+2b^2}{a^2-4ab+4b^2}\cdot 4=$

$=\left[\dfrac{a-b}{2(a+b)}\right]^2:\dfrac{(a-b)\cancel{(a-2b)}}{(a-2b)^{\cancel{2}}}\cdot 4=\dfrac{(a-b)^{\cancel{2}}}{\cancel{4}(a+b)^2}\cdot\dfrac{a-2b}{\cancel{a-b}}\cdot\cancel{4}=\dfrac{(a-b)(a-2b)}{(a+b)^2}$

13) $\left(4x^6-40x^4+36x^2\right):\left(x^3-3x^2-x+3\right):\left(-4x^2\right)=4x^2\left(x^4-10x^2+9\right)\cdot\dfrac{1}{x^2(x-3)-(x-3)}\cdot\left(-\dfrac{1}{4x^2}\right)=$

$=\cancel{4x^2}\,\cancel{\left(x^2-1\right)}\left(x^2-9\right)\cdot\dfrac{1}{(x-3)\cancel{\left(x^2-1\right)}}\cdot\left(-\dfrac{1}{\cancel{4x^2}}\right)=-\dfrac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}}=-(x+3)$

14) $(x-2):\dfrac{x^3-x^2-3x+2^{*}}{x^4+2x^3+x^2-1^{**}}=(x-2):\dfrac{(x-2)\cancel{\left(x^2+x-1\right)}}{\left(x^2+x+1\right)\cancel{\left(x^2+x-1\right)}}=\cancel{(x-2)}\cdot\dfrac{x^2+x+1}{\cancel{x-2}}=x^2+x+1$

* $x^3-x^2-3x+2$

*Con Ruffini:* $P(2)=0$

| | 1 | −1 | −3 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | 2 | −2 |
| | 1 | 1 | −1 | 0 |

$x^3-x^2-3x+2=$
$=(x-2)\left(x^2+x-1\right)$

** $x^4+2x^3+x^2-1=$
$=\left(x^2+x\right)^2-1=$
$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x-1\right)$

**ESERCIZI** (moltiplicazioni, divisioni, potenze di frazioni algebriche)

1) $\frac{9a^3}{b^2}\cdot\frac{b^3}{18a^5}$ 2) $\frac{2}{3}\cdot\frac{8x}{y}\cdot\frac{9y^2}{16x}$ 3) $\frac{4}{t}\cdot\frac{t^2}{8}\cdot\frac{1}{ty}$ 4) $\frac{a^4}{b^4}\cdot\left(-\frac{b^3}{a^3}\right)$

5) $\frac{3a}{2b}:\frac{a}{4b^2}$ 6) $-\frac{2x^3}{x^2y}:\left(-\frac{3}{4y^2}\right)$ 7) $\frac{a}{b}:\frac{1}{b^2}$ 8) $\frac{a}{b}:b^2$

9) $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{x-y}{x+y}$ 10) $\frac{a^2+4a+3}{a^2+5a+4}\cdot\frac{2a+8}{2a+6}$

11) $\frac{x^2-4}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}$ 12) $\frac{q}{q^2+1}\cdot\frac{q^3+q^2+q+1}{q^2+q}$

13) $\frac{6a-3}{a^2+2a+1}\cdot\frac{a^3+3a^2+3a+1}{4a^2-1}$ 14) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}\cdot(x+1)$

15) $\frac{a^2-7a+6}{a^2-2a}\cdot\frac{a^3-2a^2+a}{a^2-9a+18}$ 16) $\frac{x^2-9x+14}{x^6-2x^5}\cdot\frac{x^3y}{x^2-14x+49}$

17) $\frac{x^3+x^2+x+1}{3x^2+2x-1}\cdot\frac{9x^2-6x+1}{3x^4+6x^2+3}$ 18) $\frac{a^2+b^2+2ab-4}{a^2-4}\cdot\frac{3a-6}{a+b-2}\cdot\frac{a+2}{3a+3b+6}$

19) $\frac{a^2-b^2}{a-b}:\frac{a^4-b^4}{a^2-ab}$ 20) $\frac{x-2}{x-3}:\frac{x^2-6x+8}{3x^2-21x+36}$

21) $\frac{3x-3t}{xy-tx-ty+t^2}:(6y-6t)$ 22) $\frac{y^3-3y^2-2y+6}{y^2-1}:\frac{y^4-3y^2+2}{y^3+y^2-y-1}$

23) $\left(\frac{3a-2b}{c^2}\right)^3\cdot\frac{c^4}{9a^2-12ab+4b^2}$ 24) $\left(-\frac{3x}{y^3}\right)^2:\left(-\frac{x}{y^2}\right)^3$

25) $\left(\frac{2a-b}{2a+b}\right)^4:(2a-b)^2$ 26) $\left(a^2-b^2\right)^2\cdot\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^2+a+b+ab}\cdot\frac{a^2+a-b-ab}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

27) $\frac{12n^2-7n+1}{6n^2-5n+1}\cdot\frac{4n^2-1}{16n^2-1}$ 28) $\frac{a^2-5ab+6b^2}{a^2-ab-6b^2}\cdot\frac{a^2+ab-2b^2}{a^2-3ab+2b^2}$

29) $\frac{a^3-3a^2+3a-2}{a^2-a}:\frac{a^2-a+1}{a^2-2a+1}$ (*Ruffini*) 30) $\frac{x^3-7x+6}{x^3-5x^2+8x-4}\cdot\frac{x-2}{x+3}$ (*Ruffini*)

31) $\frac{a^3-b^3}{a+b}:\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-b^2}$ 32) $\frac{(x+y)^3+(x+y)^4}{x^2}\cdot\frac{x^2}{(x+y)^3}$

**RISULTATI**

1) $\frac{b}{2a^2}$ 2) $3y$ 3) $\frac{1}{2y}$ 4) $-\frac{a}{b}$ 5) $6b$ 6) $\frac{8xy}{3}$ 7) $ab$ 8) $\frac{a}{b^3}$

9) $1$ 10) $1$ 11) $\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$ 12) $1$ 13) $\frac{3(a+1)}{2a+1}$ 14) $x-1$

15) $\frac{(a-1)^3}{(a-2)(a-3)}$ 16) $\frac{y}{x^2(x-7)}$ 17) $\frac{3x-1}{3(x^2+1)}$ 18) $1$ 19) $\frac{a}{a^2+b^2}$ 20) $3$

21) $\frac{1}{2(y-t)^2}$ 22) $\frac{y-3}{y-1}$ 23) $\frac{3a-2b}{c^2}$ 24) $-\frac{9}{x}$ 25) $\frac{(2a-b)^2}{(2a+b)^4}$ 26) $(a+b)^4$

27) $\frac{2n+1}{4n+1}$ 28) $1$ 29) $\frac{(a-2)(a-1)}{a}$ 30) $1$ 31) $(a-b)^2$ 32) $1+x+y$

## 3. POLINOMI OPPOSTI

Due polinomi sono detti "**opposti**" quando **i termini dell'uno sono gli opposti dei termini dell'altro**.

Esempi:

$\boxed{a-5}$ e $\boxed{-a+5}$ ( *per eleganza, si scrive preferibilmente* $\boxed{5-a}$ *anziché* $-a+5$ )

$\boxed{3x^2-xy+y^2}$ e $\boxed{-3x^2+xy-y^2}$

**Due polinomi opposti esprimono numeri opposti,**
nel senso che, se si prendono due polinomi opposti,
e alla lettera (o alle lettere) si attribuisce, nei due polinomi, lo stesso valore,
si ottengono due risultati opposti.

| | $\boxed{a-5}$ | $\boxed{-a+5}$ |
|---|---|---|
| $a=2$ | $-3$ | $+3$ |
| $a=0$ | $-5$ | $+5$ |
| $a=9$ | $4$ | $-4$ |
| $a=-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}-5=-\frac{11}{2}$ | $+\frac{1}{2}+5=+\frac{11}{2}$ |

D'altronde, mettendo in evidenza il segno $-$, abbiamo:
$-a+5=-(a-5)$
ossia : il numero $-a+5$ è l'opposto del numero $a-5$

E analogamente:
$-3x^2+xy-y^2=-(3x^2-xy+y^2)$

- Il **rapporto ( = quoziente)** fra due polinomi opposti vale sempre $-1$,
perché il rapporto fra due numeri opposti vale sempre $-1$;
d'altronde, mettendo in evidenza il segno $-$, si ottiene:

$$\frac{-a+5}{a-5}=\frac{-(a-5)}{a-5}=-1 \qquad \frac{a-5}{-a+5}=\frac{-(-a+5)}{-a+5}=-1$$

- Invece la **somma algebrica** di due polinomi opposti vale $0$,
perché la somma algebrica fra due numeri opposti vale, appunto, 0, e d'altronde:
$(-a+5)+(a-5)=-a+5+a-5=0$

- Il **prodotto** di due polinomi opposti è uguale all'opposto del quadrato di uno qualsiasi di essi:
$(-a+5)(a-5)=-(a-5)(a-5)=-(a-5)^2=-(-a+5)^2$

- **Se si prendono due numeri opposti e li si eleva allo stesso esponente PARI, i risultati saranno UGUALI**:

$(+5)^2=+25$ $\quad (-5)^2=+25$

$\left(+\frac{1}{2}\right)^4=+\frac{1}{16}$ $\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^4=+\frac{1}{16}$

- … e invece **se si prendono due numeri opposti e li si eleva allo stesso esponente DISPARI, i risultati saranno OPPOSTI**:

$(+5)^3=+125$ $\quad (-5)^3=-125$

$\left(+\frac{1}{2}\right)^5=+\frac{1}{32}$ $\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^5=-\frac{1}{32}$

Coi polinomi, tutto ciò si traduce in **IMPORTANTISSIME IDENTITA'** come le seguenti:

$\boxed{\begin{array}{l}(-a+5)^2=(a-5)^2\\(-a+5)^3=-(a-5)^3\\(-a+5)^4=(a-5)^4\\(-a+5)^5=-(a-5)^5\end{array}}$

*perché, in dettaglio,* $(-a+5)^2=[-(a-5)]^2=+(a-5)^2$

" $(-a+5)^3=[-(a-5)]^3=-(a-5)^3$

" $(-a+5)^4=[-(a-5)]^4=+(a-5)^4$

" $(-a+5)^5=[-(a-5)]^5=-(a-5)^5$

Possiamo anche dire così (IMPORTANTE!):

♥ **quando un polinomio è elevato ad esponente PARI, è possibile cambiare i segni di tutti i termini e il valore del risultato non cambierà;**

♥ **quando un polinomio è elevato ad esponente DISPARI, se cambiamo i segni di tutti i termini il risultato si muterebbe nell'opposto, quindi per ripristinare l'uguaglianza occorre scrivere un segno "$-$" davanti.**



$(7-x)^2=(x-7)^2$
$(7-x)^3=-(x-7)^3$

## COME FARE LE SEMPLIFICAZIONI QUANDO COMPAIONO POLINOMI OPPOSTI

**1)** $\dfrac{9-x^2}{x^2-5x+6}=\dfrac{(3+x)(3-x)}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{(x+3)\left[-(x-3)\right]}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{-(x+3)\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}}=-\dfrac{x+3}{x-2}$

o anche, direttamente: $\dfrac{9-x^2}{x^2-5x+6}=\overset{-1}{\dfrac{\cancel{(3+x)}\cancel{(3-x)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}}}=-\dfrac{x+3}{x-2}$ ♥ dato che il quoziente di due polinomi opposti vale $-1$

Volendo, si poteva pure procedere così: $\dfrac{9-x^2}{x^2-5x+6}=\dfrac{-(x^2-9)}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{-(x+3)\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}}=-\dfrac{x+3}{x-2}$

**2)** $\dfrac{\overset{-1}{\cancel{(2a-b)}}\overset{-1}{\cancel{(-a-b+c)}}\cancel{(a-b)}}{\cancel{(b-a)}\cancel{(a+b-c)}(a-3b)}=\dfrac{2a-b}{a-3b}$

**3)** $\dfrac{y^2-3y+2}{(1-y)^2}=\dfrac{(y-1)(y-2)}{(1-y)^2}=\begin{cases}\text{(NOTA 1)}\quad \dfrac{\cancel{(y-1)}(y-2)}{(y-1)^{\cancel{2}}}=\dfrac{y-2}{y-1}\\ \dfrac{-\cancel{(1-y)}(y-2)}{(1-y)^{\cancel{2}}}=-\dfrac{y-2}{1-y}\quad=\quad\text{(NOTA 2)}\quad \dfrac{y-2}{-(1-y)}=\dfrac{y-2}{y-1}\end{cases}$

NOTA 1 Come osservato, due polinomi opposti elevati al quadrato danno lo stesso risultato:
$(1-y)^2=(y-1)^2$

NOTA 2 ♥ $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{-b}=\dfrac{-a}{b}$ *perché* $\dfrac{a}{-b}=\dfrac{a}{-1\cdot b}=\dfrac{1}{-1}\cdot\dfrac{a}{b}=-1\cdot\dfrac{a}{b}=-\dfrac{a}{b}$ $\quad\dfrac{-a}{b}=\dfrac{-1\cdot a}{b}=\dfrac{-1}{1}\cdot\dfrac{a}{b}=-1\cdot\dfrac{a}{b}=-\dfrac{a}{b}$

**4)** $\dfrac{(x^2+x-1)^5}{(1-x-x^2)^4}=\begin{cases}\dfrac{(x^2+x-1)^{\cancel{5}}}{(x^2+x-1)^{\cancel{4}}}=x^2+x-1\\ \dfrac{-(1-x-x^2)^{\cancel{5}}}{(1-x-x^2)^{\cancel{4}}}=-(1-x-x^2)=x^2+x-1\end{cases}$

♥ Tieni anche presente che **in una frazione è lecito cambiare i segni sia "sopra" che "sotto", perché in tal modo il valore della frazione non muta**:
$\dfrac{4}{5}=\dfrac{-4}{-5}$, $\dfrac{5}{-7}=\dfrac{-5}{7}$, $\dfrac{3-x}{2-x}=\dfrac{x-3}{x-2}$

**ESERCIZI** (semplificazioni con polinomi opposti)

1) $\dfrac{4(3x-2)}{2-3x}$ 2) $\dfrac{(-a-1)(a-5)}{(a+1)(a-4)}$ 3) $\dfrac{(x-y+t)(x+y+t)}{(x-y-t)(y-t-x)}$ 4) $\dfrac{1-x^2}{xy-x-y+1}$ 5) $\dfrac{a+b}{b+a}$

6) $\dfrac{(a-b)^8}{(b-a)^6}$ 7) $\dfrac{(b-a)^{11}}{(a-b)^4}$ 8) $\dfrac{2y-1}{3y-1}\cdot\dfrac{1-3y}{y(1-2y)}$ 9) $\dfrac{(2a-5)^3}{a-3}\cdot\dfrac{3-a}{(5-2a)^2}$ 10) $\dfrac{(n^2-1)^3}{(1-n)^2}$

11) $\dfrac{(1-x)(2-x)(3-x)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 12) $\dfrac{(1-x)(2-x)}{(x-1)(x-2)}$ 13) $(a-b)^5(b-a)^4(b-a)^3$

**RISULTATI**

1) $-4$ 2) $-\dfrac{a-5}{a-4}=\dfrac{5-a}{a-4}=\dfrac{a-5}{4-a}$ 3) $-\dfrac{x+y+t}{x-y-t}=\dfrac{x+y+t}{y+t-x}$ 4) $-\dfrac{x+1}{y-1}=\dfrac{1+x}{1-y}$ 5) $1$ 6) $(a-b)^2$

7) $-(a-b)^7=(b-a)^7$ 8) $\dfrac{1}{y}$ 9) $-(2a-5)=5-2a$ 10) $(n-1)(n+1)^3$ 11) $-1$ 12) $1$ 13) $-(a-b)^{12}$

## 4. SOMMA ALGEBRICA DI FRAZIONI ALGEBRICHE

**Quando i denominatori sono NUMERI**,
**si fa esattamente come con le normali frazioni numeriche:**
A) si scrive, come denominatore comune, il minimo comune multiplo (m.c.m.) dei denominatori
B) si divide il denominatore comune per ciascun denominatore, e si moltiplica per "ciò che sta sopra".

1) $\frac{11x+4}{15}+\frac{x}{10}=\frac{2(11x+4)+3x}{30}=\frac{22x+8+3x}{30}=\frac{25x+8}{30}$

2) $\frac{a+2}{6}-\frac{5a+1}{9}+\frac{2a}{3}=\frac{3(a+2)-2(5a+1)+6\cdot 2a}{18}=\frac{3a+6-10a-2+12a}{18}=\frac{5a+4}{18}$

3) **IMPORTANTE!** $\frac{2x+1}{7}-\frac{x+4}{14}=\frac{2(2x+1)-(x+4)}{14}=\frac{4x+2-x-4}{14}=\frac{3x-2}{14}$

**Qui il segno – si riferisce a "TUTTO" il polinomio $x+4$,**
**che quindi va scritto tra parentesi.**
**Ciò si tradurrà poi in un DOPPIO CAMBIAMENTO DI SEGNO.**

**Quando i denominatori sono MONOMI,**
**il minimo comun denominatore si ottiene prendendo**:
- **il m.c.m. dei coefficienti**
- **TUTTE le lettere, COMUNI E NON COMUNI,**
  **ciascuna UNA SOLA VOLTA e con l'esponente più ALTO.**

4) $\frac{2a+b}{6a^3}-\frac{a+3b}{9a^2b}+\frac{2}{b^2}=\frac{3b^2(2a+b)-2ab(a+3b)+18a^3\cdot 2}{18a^3b^2}=$
$=\frac{\cancel{6ab^2}+3b^3-2a^2b\cancel{-6ab^2}+36a^3}{18a^3b^2}=\frac{36a^3-2a^2b+3b^3}{18a^3b^2}$

5) $\frac{y}{6x^4}-\frac{7}{4x^2y^2}=\frac{2y^2\cdot y-7\cdot 3x^2}{12x^4y^2}=\frac{2y^3-21x^2}{12x^4y^2}$

♥ Si capisce che il m.c.d. costruito tramite questa regola è **la più semplice espressione che possa essere poi comodamente divisa per ciascuno dei denominatori di partenza** … proprio ciò di cui si ha bisogno nel procedimento.

6) **IMPORTANTE!**

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{x-2}{x^3}=\frac{x^2+x-(x-2)}{x^3}=\frac{x^2\cancel{+x}\cancel{-x}+2}{x^3}=\frac{x^2+2}{x^3}$

Analogamente all'esempio 3), anche in questo numero 6) **il segno – si riferisce a "TUTTO" il polinomio $x-2$, che quindi va scritto (o comunque pensato) tra parentesi.** Ciò si traduce in un **DOPPIO CAMBIAMENTO DI SEGNO**

**Quando i denominatori sono POLINOMI,**
**PRIMA DI TUTTO LI SI DEVE SCOMPORRE IN FATTORI!**
**il minimo comun denominatore si otterrà poi con una regola del tutto analoga a quella sopra enunciata per i monomi.**

7) $\frac{a^2}{6a^3+18a^2+18a+6}+\frac{a+2}{4a^2+8a+4}=$
$=\frac{a^2}{6(a^3+3a^2+3a+1)}+\frac{a+2}{4(a^2+2a+1)}=$
$=\frac{a^2}{6(a+1)^3}+\frac{a+2}{4(a+1)^2}=\frac{2a^2+3(a+1)(a+2)}{12(a+1)^3}=$
$=\frac{2a^2+3(a^2+2a+a+2)}{12(a+1)^3}=\frac{2a^2+3a^2+6a+3a+6}{12(a+1)^3}=\frac{5a^2+9a+6}{12(a+1)^3}$

**APPROFONDIMENTO**
*Tutto* il discorso delle frazioni algebriche richiederebbe riflessioni ad un livello più avanzato per tener conto del fatto che, mentre nelle frazioni "ordinarie" numeratore e denominatore sono numeri interi, qui le lettere possono assumere anche valori frazionari o irrazionali.
Un'analisi paziente, ma troppo "specialistica" per poter rientrare in questo corso, mostrerebbe che le regole da noi enunciate sono effettivamente valide anche in questo ambito più generale.

8) $$\frac{x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x^2-2x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x}{(x+1)(x-1)}-\frac{x+1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}=$$

$$=\frac{x(x-1)-(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{\cancel{x^2}-x\cancel{-x^2}-2x\cancel{-1}+x^2-2x\cancel{+1}}{(x+1)(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x^2-5x}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{x(x-5)}{(x+1)(x-1)^2}$$

9) **IMPORTANTE!**
Qui ritroviamo la solita particolarità
del **segno – che si riferisce a TUTTO un polinomio**.

$$\frac{3b+4}{b-1}-\frac{4b+3}{b(b-1)}=\frac{b(3b+4)-\overset{\downarrow}{(}4b+3\overset{\downarrow}{)}}{b(b-1)}=\frac{3b^2\cancel{+4b}\cancel{-4b}-3}{b(b-1)}=$$

$$=\frac{3b^2-3}{b(b-1)}=\frac{3(b^2-1)}{b(b-1)}=\frac{3(b+1)\cancel{(b-1)}}{b\cancel{(b-1)}}=\frac{3(b+1)}{b}$$

10) $$\frac{x+4}{x+3}-\frac{x}{x+6}=\frac{(x+6)(x+4)-x(x+3)}{(x+3)(x+6)}=\frac{\cancel{x^2}+4x+6x+24\cancel{-x^2}-3x}{(x+3)(x+6)}=\frac{7x+24}{(x+3)(x+6)}$$

11) $$\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}+\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}+\frac{4ab}{(a+b)(a-b)}=$$

$$=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2+4ab}{(a+b)(a-b)}=\frac{\cancel{a^2}\cancel{-2ab}\cancel{+b^2}\cancel{-a^2}\cancel{-2ab}\cancel{-b^2}\cancel{+4ab}}{(a+b)(a-b)}=\frac{0}{(a+b)(a-b)}=0$$

12) **IMPORTANTE!**
Anche nell'espressione seguente compare la particolarità
del **segno – riferito ad un polinomio**.

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2}-\frac{x+2}{x^2-4x+3}-\frac{1}{x^2-5x+6}=$$

$$=\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}-\frac{x+2}{(x-1)(x-3)}-\frac{1}{(x-2)(x-3)}=$$

$$=\frac{(x-3)(x+3)-(x-2)(x+2)-\overset{\downarrow}{(}x-1\overset{\downarrow}{)}}{(x-1)(x-2)(x-3)}=$$

$$=\frac{\cancel{x^2}-9\cancel{-x^2}+4-x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{-x-4}{(x-1)(x-2)(x-3)}=-\frac{x+4}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

13) $$\frac{1}{4n^2-2n}+\frac{1}{n^3-2n^2+n}-\frac{1}{4n^3-6n^2+2n}=\frac{1}{2n(2n-1)}+\frac{1}{n(n^2-2n+1)}-\frac{1}{2n(2n^2-3n+1)}=$$

$$=\frac{1}{2n(2n-1)}+\frac{1}{n(n-1)^2}-\frac{1}{2n(2n^2-2n-n+1)}=\frac{1}{2n(2n-1)}+\frac{1}{n(n-1)^2}-\frac{1}{2n\left[2n(n-1)-(n-1)\right]}=$$

$$=\frac{1}{2n(2n-1)}+\frac{1}{n(n-1)^2}-\frac{1}{2n(n-1)(2n-1)}=\frac{(n-1)^2+2(2n-1)-(n-1)}{2n(2n-1)(n-1)^2}=$$

$$=\frac{n^2-2n\cancel{+1}+4n\cancel{-2}-n\cancel{+1}}{2n(2n-1)(n-1)^2}=\frac{n^2+n}{2n(2n-1)(n-1)^2}=\frac{\cancel{n}(n+1)}{2\cancel{n}(2n-1)(n-1)^2}=\frac{n+1}{2(2n-1)(n-1)^2}$$

**ESERCIZI** (somma algebrica di frazioni algebriche) Risultati alla pagina seguente

1) $\frac{a+b}{8}+\frac{a-b}{6}$ 2) $\frac{x+1}{4}-\frac{x}{6}+\frac{x-1}{2}$ 3) $4x-\frac{x+3}{3}+\frac{x+2}{2}$ 4) $\frac{n}{5}-\frac{n+3}{10}$

5) $\frac{x-1}{x^3}-\frac{5x^2+1}{6x^4}+\frac{3}{4x^2}$ 6) $\frac{a}{15c}+\frac{b+1}{10c^2}$ 7) $\frac{a+3}{a^2}-\frac{1}{a}$ 8) $\frac{3}{x}+\frac{2x+1}{x^2}-\frac{4x^2+x-1}{x^3}$

9) $\frac{5}{4ax}-\frac{a-1}{3a^2}$ 10) $\frac{1}{xy}+\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$ 11) $\frac{a+b}{12a^2b^2}-\frac{a-b}{15a^3b}+\frac{2a}{b^4}$ 12) $\frac{x+1}{x}-\frac{x^2+x+1}{x^2}$

13) $\frac{2}{a^2b}-\frac{a-b}{ab^3}-\frac{a+b}{a^2b^2}$ 14) $\frac{1}{2t}-\frac{1-4t^2}{8t^3}$ 15) $\frac{a}{5}-\frac{2}{a}$ 16) $\frac{b}{2}+\frac{2}{b}+\frac{1}{2b}+2b$

17) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1$ 18) $k+\frac{1}{k}$ 19) $\frac{r+1}{r}-r-1$ 20) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$

21) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 22) $\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}$ 23) $1+\frac{a+b}{a}$ 24) $1-\frac{a+b}{a}$

25) $\frac{y}{12x^2}-\frac{x^2+2y^2}{18xy^2}$ 26) $a+2-\frac{4}{b}$ 27) $\frac{(a+b)^2}{4ab}-\frac{(a-b)^2}{4ab}$ 28) $a+\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}$

29) $\frac{1}{2a}+\frac{a+1}{2a^2}-\frac{a+2}{2a^3}$ 30) $\frac{2x+1}{4x}-\frac{3x-1}{6x}$ 31) $\frac{a+1}{a}+\frac{a-1}{a}$ 32) $\frac{a+1}{a}-\frac{a-1}{a}$

33) $a^{-1}+a^{-2}+a^{-3}=$
$=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}=\ldots$

34) $(3x)^{-2}+3x^{-2}=\frac{1}{(3x)^2}+3\cdot\frac{1}{x^2}=\ldots$

35) $a^2+a+1+a^{-1}+a^{-2}$

36) $3c^{-3}-2c^{-2}$ 37) $\frac{x-2}{3x^2-3}+\frac{x}{2x^2-4x+2}$ 38) $\frac{b^2}{b^2-6b+9}-\frac{b+1}{b-3}$ 39) $\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2a-1}$

40) $\frac{1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2}-\frac{x-1}{x^6+2x^5+x^4}$ 41) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}+\frac{4xy}{x^2-y^2}$ 42) $\frac{5}{t+2}-\frac{t+1}{t^2+5t+6}$

43) $\frac{x+y}{6x-6y}-\frac{x^2+y^2}{4x^2+4y^2-8xy}$ 44) $\frac{1}{y+3}-\frac{2y-7}{y^2-9}$ 45) $\frac{a}{3a+2}+\frac{7a+2}{9a^2-4}$

46) $\frac{1}{2a^2-4a+2}-\frac{a+1}{a^3-a^2+2a-2}$ 47) $\frac{3}{q}+\frac{q}{q+1}$ 48) $\frac{6h}{3h+5}+\frac{10}{3h+5}$

49) $\frac{1}{(a+b+c)^3}-\frac{a-b+c}{(a+b+c)^4}$ 50) $\frac{a+b}{a-b}+2$ 51) $\frac{a+b}{a-b}-1$ 52) $\frac{2a+1}{a^2-3a+2}+\frac{a+2}{2a^2-3a+1}$

53) $\frac{a-x}{ax^2+x^3}+\frac{1}{a^2+2ax+x^2}$ 54) $\frac{y+4}{y^2-7y+12}-\frac{y-3}{y^2-16}$ 55) $\frac{x+y}{2x-2y}+\frac{x-y}{2x+2y}$

56) $\frac{x}{x^3+x^2+x+1}-\frac{1}{x^4+2x^2+1}$ 57) $\frac{1}{r+s+1}-\frac{1}{r+s}$ 58) $\frac{2}{w+3}-\frac{1}{w+2}$

59) $\frac{x+y}{x^2y+xy^2-12y^3}-\frac{x-3y}{x^2y+8xy^2+16y^3}$ 60) $\frac{2t^2}{(t+2)^3}-\frac{t}{(t+2)^2}-\frac{1}{t+2}$ 61) $\frac{1}{2t^2-5t+2}-\frac{1}{4t^2-1}$

62) $\frac{3}{x-y}+x+y$ 63) $a+7-\frac{a^2}{a+7}$ 64) $-\frac{a+b-1}{a+b}+1$ 65) $\frac{1-2c}{1-c}-\frac{2-c^2}{1-c^2}-1$

66) $\frac{2a}{a^2-5a+6}-\frac{7a+6}{a^3-2a^2-9a+18}-\frac{a-2}{a^2-9}$ 67) $\frac{2}{n^2-3n+2}-\frac{n}{n^3-n^2-4n+4}-\frac{n}{n^4-5n^2+4}$

68) $\frac{5}{k^2-9k+18}-\frac{k-3}{k^2-6k}-\frac{10k^2-k^3-18}{k^4-9k^3+18k^2}$ 69) $\frac{1}{x^3-6x^2+11x-6}-\frac{1}{x^3+4x^2+x-6}$ *Scomposizioni con Ruffini*

70) $\frac{1}{a^3-a^2-a-2}-\frac{1}{a^3-1}$ Ruffini 71) $\frac{3y}{2y^3+7y^2+7y+2}-\frac{5}{4y^2+6y+2}$ *Ruffini*

**RISULTATI**

1) $\frac{7a-b}{24}$ 2) $\frac{7x-3}{12}$ 3) $\frac{25x}{6}=\frac{25}{6}x$ 4) $\frac{n-3}{10}$

5) $\frac{11x^2-12x-2}{12x^4}$ 6) $\frac{2ac+3b+3}{30c^2}$ 7) $\frac{3}{a^2}$ 8) $\frac{x^2+1}{x^3}$

9) $\frac{15a-4ax+4x}{12a^2x}$ 10) $\frac{1+2y+3x}{xy}$ 11) $\frac{120a^4+5a^2b^2+ab^3+4b^4}{60a^3b^4}$ 12) $-\frac{1}{x^2}$

13) $\frac{b^2-a^2}{a^2b^3}$ 14) $\frac{8t^2-1}{8t^3}$ 15) $\frac{a^2-10}{5a}$ 16) $\frac{5b^2+5}{2b}$

17) $\frac{x^2+y^2+xy}{xy}$ 18) $\frac{k^2+1}{k}$ 19) $\frac{1-r^2}{r}$ 20) $\frac{bcx+acy+abz}{abc}$

21) $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$ 22) $\frac{x+y+z}{xyz}$ 23) $\frac{2a+b}{a}$ 24) $-\frac{b}{a}$

25) $\frac{3y^3-2x^3-4xy^2}{36x^2y^2}$ 26) $\frac{ab+2b-4}{b}$ 27) 1 28) $\frac{a^3+2a+3}{a^2}$

29) $\frac{a^2-1}{a^3}$ 30) $\frac{5}{12x}$ 31) 2 32) $\frac{2}{a}$

33) $\frac{a^2+a+1}{a^3}$ 34) $\frac{28}{9x^2}$ 35) $\frac{a^4+a^3+a^2+a+1}{a^2}$ 36) $\frac{3-2c}{c^3}$

37) $\frac{5x^2-3x+4}{6(x+1)(x-1)^2}$ 38) $\frac{2b+3}{(b-3)^2}$ 39) $\frac{4a}{(2a+1)(2a-1)}$ 40) $\frac{1}{x^4(x+1)^3}$

41) $\frac{2(x+y)}{x-y}$ 42) $\frac{4t+14}{(t+2)(t+3)}$ 43) $\frac{-x^2-5y^2}{12(x-y)^2}=-\frac{x^2+5y^2}{12(x-y)^2}$ 44) $\frac{4-y}{(y+3)(y-3)}$

45) $\frac{a+1}{3a-2}$ 46) $\frac{4-a^2}{2(a-1)^2(a^2+2)}$ 47) $\frac{q^2+3q+3}{q(q+1)}$ 48) 2

49) $\frac{2b}{(a+b+c)^4}$ 50) $\frac{3a-b}{a-b}$ 51) $\frac{2b}{a-b}$ 52) $\frac{5(a+1)}{(a-2)(2a-1)}$ 53) $\frac{a^2}{x^2(a+x)^2}$

54) $\frac{14y+7}{(y-3)(y-4)(y+4)}$ 55) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ 56) $\frac{x^3-1}{(x^2+1)^2(x+1)}$ 57) $-\frac{1}{(r+s+1)(r+s)}$

58) $\frac{w+1}{(w+2)(w+3)}$ 59) $\frac{11x-5y}{(x-3y)(x+4y)^2}$ 60) $-\frac{6t+4}{(t+2)^3}$ 61) $\frac{t+3}{(t-2)(2t-1)(2t+1)}$

62) $\frac{3+x^2-y^2}{x-y}$ 63) $\frac{14a+49}{a+7}$ 64) $\frac{1}{a+b}$ 65) $-\frac{2+c}{(1+c)(1-c)}$

66) $\frac{a+5}{(a+3)(a-3)}$ 67) $\frac{n+2}{(n-2)(n+1)(n-1)}$ 68) $\frac{1}{k^2}$ 69) $\frac{10x}{(x-1)(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)}$

70) $\frac{1}{(a-1)(a-2)(a^2+a+1)}$ 71) $\frac{y-10}{2(y+1)(y+2)(2y+1)}$

## 5. QUANDO IL SEGNO "MENO" SI RIFERISCE A TUTTO UN POLINOMIO

Occhio!
Ci si imbatte abbastanza sovente in situazioni nelle quali il segno $-$ è riferito ad un polinomio nella sua interezza.
In questi casi è facile sbagliare!



**Quando il segno $-$ si riferisce a "tutto" un polinomio,
il polinomio stesso va scritto fra parentesi;
se si preferisce, il passaggio si può saltare,
cambiando di segno però TUTTI i termini del polinomio (TUTTI, *NON* SOLO IL PRIMO!)**

**a)** $\dfrac{2a}{a+b}-\dfrac{a+7b}{3a+3b}=\dfrac{2a}{a+b}-\dfrac{a+7b}{3(a+b)}=\dfrac{6a-\overset{\downarrow}{(}a+7b\overset{\downarrow}{)}}{3(a+b)}=\dfrac{6a-a-7b}{3(a+b)}=\dfrac{5a-7b}{3(a+b)}$

**b)** $\dfrac{4x}{x-2}-1=\dfrac{4x-\overset{\downarrow}{(}x-2\overset{\downarrow}{)}}{x-2}=\dfrac{4x-x+2}{x-2}=\dfrac{3x+2}{x-2}$

**c)** $2-\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{2a+2b-\overset{\downarrow}{(}a-b\overset{\downarrow}{)}}{a+b}=\dfrac{2a+2b-a+b}{a+b}=\dfrac{a+3b}{a+b}$

**d)** $\dfrac{a}{2a+3}-\dfrac{1}{4a+5}=\dfrac{a(4a+5)-\overset{\downarrow}{(}2a+3\overset{\downarrow}{)}}{(2a+3)(4a+5)}=\dfrac{4a^2+5a-2a-3}{(2a+3)(4a+5)}=\dfrac{4a^2+3a-3}{(2a+3)(4a+5)}$

**e)** $\dfrac{x+8}{x^2-5x+6}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{x+8}{(x-2)(x-3)}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{x+8-\overset{\downarrow}{(}x-3\overset{\downarrow}{)}}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{\cancel{x}+8\cancel{-x}+3}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{11}{(x-2)(x-3)}$

**f)** $\dfrac{1}{c^2-6c+8}-\dfrac{1}{c^2-8c+12}=\dfrac{1}{(c-2)(c-4)}-\dfrac{1}{(c-2)(c-6)}=$

$=\dfrac{c-6-\overset{\downarrow}{(}c-4\overset{\downarrow}{)}}{(c-2)(c-4)(c-6)}=\dfrac{\cancel{c}-6\cancel{-c}+4}{(c-2)(c-4)(c-6)}=\dfrac{-2}{(c-2)(c-4)(c-6)}=-\dfrac{2}{(c-2)(c-4)(c-6)}$

### ESERCIZI

1) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
2) $\dfrac{t}{t-5}-\dfrac{t^2+1}{t^2-t-20}$
3) $\dfrac{x+y+z}{x-y+z}-1$
4) $\dfrac{a^2+12}{a^2+4}-1$
5) $\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}$
6) $\dfrac{3x+1}{3x+2}-\dfrac{1}{3x-1}$
7) $\dfrac{2}{a+b-c}-\dfrac{1}{a-b+c}$
8) $\dfrac{4}{m+3}-1$
9) $\dfrac{1}{a^2-b^2}-\dfrac{1}{a^2-2ab+b^2}$
10) $n-\dfrac{n^2+1}{n+1}$
11) $\dfrac{3}{x^2+1-2x}-\dfrac{1}{x-1}$
12) $\dfrac{y+2}{2y-5}-\dfrac{y^2-6y+11}{2y^2-9y+10}$
13) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^2+x+1}{x^2}$
14) $1-\dfrac{a+2b}{a+b+1}$
15) $\dfrac{p}{p^2-1}-\dfrac{1}{p^2+3p+2}$
16) $\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}$

### RISULTATI

1) $\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$
2) $\dfrac{4t-1}{(t-5)(t+4)}$
3) $\dfrac{2y}{x-y+z}$
4) $\dfrac{8}{a^2+4}$
5) $\dfrac{2y}{x^2-y^2}$
6) $\dfrac{9x^2-3x-3}{(3x+2)(3x-1)}$
7) $\dfrac{a-3b+3c}{(a+b-c)(a-b+c)}$
8) $\dfrac{1-m}{m+3}$
9) $-\dfrac{2b}{(a+b)(a-b)^2}$
10) $\dfrac{n-1}{n+1}$
11) $\dfrac{4-x}{(x-1)^2}$
12) $\dfrac{3}{y-2}$
13) $\dfrac{-x^2-1}{x^2}=-\dfrac{x^2+1}{x^2}$
14) $\dfrac{1-b}{a+b+1}$
15) $\dfrac{p^2+p+1}{(p+1)(p-1)(p+2)}$
16) $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$

## 6. QUANDO COMPAIONO POLINOMI OPPOSTI A DENOMINATORE

In questi casi, **prima di fare il denominatore comune**, converrà … **sbarazzarsi dei polinomi opposti!**

Esempio I $\quad \dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{b^2-a^2}+\dfrac{a}{(b-a)^3}=\boxed{\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(b+a)(b-a)}+\dfrac{a}{(b-a)^3}}$

A questo punto, non sarebbe assolutamente "astuto" fare subito il denominatore comune!
In tal modo, infatti, si andrebbe incontro a calcolacci pesantissimi …
Facciamo piuttosto in modo che non compaiano più coppie di polinomi opposti:
potremo scegliere di ricondurci dappertutto al blocco $(a-b)$, oppure, in alternativa, al blocco $(b-a)$.

**1° modo:** privilegiando il blocco $(a-b)$

$$\boxed{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b+a)(b-a)}+\frac{a}{(b-a)^3}}=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b+a)\big[-(a-b)\big]}+\frac{a}{\big[-(a-b)\big]^3}=$$
$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{-(a+b)(a-b)}+\frac{a}{-(a-b)^3}=\boxed{\frac{1}{(a-b)^2}-\frac{1}{(a+b)(a-b)}-\frac{a}{(a-b)^3}}=\textit{ecc. ecc.}$$

**2° modo:** privilegiando il blocco $(b-a)$

$$\boxed{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b+a)(b-a)}+\frac{a}{(b-a)^3}}=\underset{\text{NOTA}}{\boxed{\frac{1}{(b-a)^2}+\frac{1}{(b+a)(b-a)}+\frac{a}{(b-a)^3}}}=\textit{ecc. ecc.}$$

NOTA - Sappiamo (vedi il paragrafo sui polinomi opposti) che $(b-a)^2=(a-b)^2$:

$$(b-a)^2=\big[-(a-b)\big]^2=\big[-1\cdot(a-b)\big]^2=(-1)^2\cdot(a-b)^2=+1\cdot(a-b)^2=(a-b)^2$$

Nella pratica, i passaggi intermedi si possono saltare: tutto sta nel capire, in definitiva,
se il segno davanti alla frazione debba essere cambiato oppure debba restare inalterato.

Esempio II

$$\boxed{\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a-3}-\frac{1}{(1-a)(2-a)}-\frac{1}{(1-a)(2-a)(3-a)}}=$$
$$=\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a-3}-\frac{1}{-(a-1)\big[-(a-2)\big]}-\frac{1}{-(a-1)\big[-(a-2)\big]\big[-(a-3)\big]}=$$
$$=\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a-3}-\frac{1}{+(a-1)(a-2)}-\frac{1}{-(a-1)(a-2)(a-3)}=$$
$$=\boxed{\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a-3}-\frac{1}{(a-1)(a-2)}+\frac{1}{(a-1)(a-2)(a-3)}}=\textit{ecc. ecc.}$$

Quest'ultimo esempio mostra che:

- **SE IN UN PRODOTTO SI CAMBIANO DI SEGNO 2 fattori (più in generale: UN NUMERO PARI DI FATTORI), IL PRODOTTO RESTA INVARIATO;**
- **SE IN UN PRODOTTO SI CAMBIANO DI SEGNO 3 fattori (o, più in generale, UN NUMERO DISPARI DI FATTORI: 1, 3, 5, 7 … ), IL PRODOTTO CAMBIA DI SEGNO, per cui, PER SALVAGUARDARE L'UGUAGLIANZA, OCCORRERÀ SCRIVERE DAVANTI UN SEGNO "–"**

### ESERCIZI

1) $\dfrac{x}{a-1}+\dfrac{y}{1-a}$ $\quad$ 2) $\dfrac{a}{2x-1}-\dfrac{b}{1-2x}$ $\quad$ 3) $\dfrac{1}{(x-3)^2}-\dfrac{1}{6-2x}$ $\quad$ 4) $\dfrac{1}{(x-1)^5}+\dfrac{1}{(1-x)^4}+\dfrac{1}{(1-x)^3}$

5) $\dfrac{3}{x^2-3x+2}-\dfrac{2}{2x-x^2}+\dfrac{1}{x-x^2}$ $\quad$ 6) $\dfrac{x}{(a-1)(a-2)(a-3)}+\dfrac{y}{(a-1)(a-2)(3-a)}+\dfrac{z}{(a-1)(2-a)(3-a)}+\dfrac{w}{(1-a)(2-a)(3-a)}$

### RISULTATI

1) $\dfrac{x-y}{a-1}$ *opp.* $\dfrac{y-x}{1-a}$ $\quad$ 2) $\dfrac{a+b}{2x-1}, -\dfrac{a+b}{1-2x}$ $\quad$ 3) $\dfrac{x-1}{2(x-3)^2}, \dfrac{x-1}{2(3-x)^2}$ $\quad$ 4) $\dfrac{-x^2+3x-1}{(x-1)^5}, \dfrac{x^2-3x+1}{(1-x)^5}$

5) $\dfrac{4}{(x-1)(x-2)}$ $\quad$ 6) $\dfrac{x-y+z-w}{(a-1)(a-2)(a-3)}$

♥ Utile osservare che **una frazione resta invariata se si cambiano i segni sia del numeratore che del denominatore**

## 7. FRAZIONI ALGEBRICHE: LE CONDIZIONI DI ESISTENZA

Per non appesantire troppo l'argomento, abbiamo posticipato fino a questo punto una questione che comunque va trattata.

Ben sappiamo che in una frazione il denominatore "deve essere diverso da 0", in quanto **la divisione per 0 è una operazione "non eseguibile".**

Ricordiamone brevemente il motivo.

La divisione, in matematica, è intesa come l'operazione inversa della moltiplicazione.
Il motivo per cui, ad esempio, si ha $28:4=7$,
è che il 7, se venisse moltiplicato per 4, restituirebbe il 28: $7\cdot 4=28$.

Insomma, $\boxed{a:b=c \;\leftrightarrow\; c\cdot b=a}$.

Consideriamo ora l'operazione $5:0$.
$5:0=?$
Dovremmo trovare un numero che moltiplicato per 0 dia 5 … ma non lo troveremo mai!
Un numero siffatto non esiste, perché qualsiasi numero, moltiplicato per 0, dà sempre e soltanto 0.
Allora l'operazione $5:0$ è IMPOSSIBILE, è priva di risultato; non c'è nessun numero che possa "pretendere di esserne il risultato".
Ovviamente, lo stesso ragionamento varrebbe se al posto del 5 considerassimo il 4, o il 37,238 oppure il $-72$.

L'operazione particolarissima $0:0$ si comporta invece in modo profondamente diverso.
Essa ci chiede di trovare un numero che moltiplicato per 0 (il *secondo* 0) dia 0 (il *primo* 0).
Sennonché, questa volta, *qualsiasi* numero andrebbe bene, *qualsiasi* numero potrebbe "pretendere di essere il risultato" di questa operazione, perché *qualsiasi* numero moltiplicato per 0 in effetti dà 0.
Se viene da me il numero 15, lui può dirmi: "il risultato dell'operazione $0:0$ sono io! Infatti, $15\cdot 0=0$".
Ma anche il numero 9 può avere questa pretesa, di andar bene come risultato dell'operazione $0:0$, perché $9\cdot 0=0$; e pure i numeri $3/5;\ 29{,}71;\ -8{,}3;$ ecc. ecc. ecc. sarebbero adeguati come risultati.
Questa volta ci troviamo di fronte a … problemi di "abbondanza".
L'operazione è INDETERMINATA, vale a dire:
non ha un risultato ben determinato, ma potrebbe averne infiniti,
dato che qualunque numero avrebbe i requisiti per esserne il risultato.

Ricapitolando, le due operazioni

- $(\textit{numero diverso da } 0):0$
- $0:0$

sarebbero, rispettivamente,

- IMPOSSIBILE ( = nessun risultato)
- e INDETERMINATA ( = infiniti risultati);

per cui non si tratta di "vere" operazioni:
la comunità matematica le considera come operazioni "non eseguibili", "*illegal* operations" ("illegal" da tradurre come "illecite").

Osserviamo, infine, che se lo 0, in una divisione, comparisse esclusivamente a *dividendo*, l'operazione sarebbe normalissima e avrebbe 0 come risultato:
$0:4=0$ (infatti $\underset{\substack{\textit{risul-}\\ \textit{tato}}}{0}\ \cdot\ \underset{\substack{\textit{divi-}\\ \textit{ore}}}{4}\ =\ \underset{\substack{\textit{divi-}\\ \textit{dendo}}}{0}$ ).

Tutto ciò, insieme col fatto che una frazione $\frac{p}{q}$ equivale sostanzialmente alla divisione $p:q$,

ci porta all'importantissimo specchietto seguente ♥ :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $(\textit{numero diverso da } 0):0,$ | $\frac{\textit{numero diverso da } 0}{0}$ | *operazione* | **IMPOSSIBILE** | *operazioni* **"non eseguibili"** |
| $0:0,$ | $\frac{0}{0}$ | *operazione* | **INDETERMINATA** | |
| $0:(\textit{numero diverso da } 0),$ | $\frac{0}{\textit{numero diverso da } 0}$ | *operazione* | **NORMALE** (*con risultato* 0) | |

Di fronte a un'espressione contenente frazioni con lettere a denominatore, dobbiamo allora tenere presente che la medesima *non* ha significato per *qualsiasi* valore delle lettere coinvolte,
*ma solo* per quei valori delle lettere che rendono *tutti i suoi denominatori diversi da* 0.

- Facciamo un esempio. Consideriamo l'espressione $\frac{a-1}{a-2}+\frac{a+3}{a+4}+\frac{1}{5a+6}$.

  Per quali valori della lettera *a* esisterà ( = sarà definita, avrà significato)?

  Beh, esisterà per i valori di *a* tali che sia $\begin{cases} a-2\neq 0 \\ a+4\neq 0 \\ 5a+6\neq 0 \end{cases}$, ossia per $\begin{cases} a\neq 2 \\ a\neq -4 \\ a\neq -6/5 \end{cases}$

  Osserviamo che queste CONDIZIONI DI ESISTENZA, contenenti il simbolo "$\neq$" ( = "diverso da"), si "trattano" in modo del tutto simile alle equazioni, semplicemente conservando sempre il simbolo "$\neq$" al posto del simbolo "$=$". Ad esempio:

  $5a+6\neq 0$
  $5a\neq -6$ (*trasporto, cambiando di segno*)
  $a\neq -\frac{6}{5}$ (*divido per* 5)

- Un altro esempio. Quali sono le condizioni di esistenza (C.E.) dell'espressione $\frac{b+1}{2b}+\frac{1}{b+2}+\frac{b-1}{(2b-1)^2}$?

  CONDIZIONI DI ESISTENZA (C.E.):

  $\begin{cases} 2b\neq 0 \\ b+2\neq 0 \\ (2b-1)^2\neq 0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} b\neq 0 \ (\textit{dividendo per } 2) \\ b\neq -2 \ (\textit{trasportando}) \\ 2b-1\neq 0 \ (\textit{un quadrato è} \neq \textit{da } 0 \textit{ se e solo se lo è la sua base}); \ 2b\neq 1; \ b\neq 1/2 \end{cases}$

- Ancora: quali sono le condizioni di esistenza (C.E.) dell'espressione $\frac{1}{c-3d}+\frac{1}{c+d-1}$?

  CONDIZIONI DI ESISTENZA (C.E.):

  $\begin{cases} c-3d\neq 0 \\ c+d-1\neq 0 \end{cases}$ (Di norma, quando in una condizione sono presenti due lettere, se ne isola una a scelta. Noi, in particolare, abbiamo desunto che, affinché l'espressione abbia significato, *c* deve essere diversa sia dal triplo di *d*, sia dall'opposto di *d* aumentato di 1.
  $\begin{cases} c\neq 3d \\ c\neq -d+1 \end{cases}$ Ad esempio, nel nostro caso, la coppia $c=12$, $d=4$, nella quale *c* è il triplo di *d*, renderebbe priva di significato l'espressione in esame).

- Terminiamo questa rassegna di esempi con: $\frac{1}{10x^2-90}+\frac{1}{x^3-x^2-6x}$

  Qui, per capire "da cosa deve essere diversa *x*", *scomponiamo innanzitutto in fattori*!
  Ogni fattore così ottenuto dovrà essere diverso da 0, affinché non si annulli nessun denominatore …

  $$\frac{1}{10x^2-90}+\frac{1}{x^3-x^2-6x}=\frac{1}{10(x^2-9)}+\frac{1}{x(x^2-x-6)}=\frac{1}{10(x+3)(x-3)}+\frac{1}{x(x-3)(x+2)}$$

  Quindi, C.E.: $\begin{cases} x+3\neq 0, \ x\neq -3 \\ x-3\neq 0, \ x\neq 3 \\ x\neq 0 \\ x+2\neq 0, \ x\neq -2 \end{cases}$ (*brevemente*: $x\neq \pm 3, \ x\neq 0, \ x\neq -2$)

  Osserviamo che il fattore costante 10 non viene in alcun modo coinvolto, non contenendo la lettera ed essendo $\neq 0$ "per sua natura".

**ESERCIZI** Scrivi le condizioni di esistenza delle frazioni algebriche che seguono.

1) $\frac{a+1}{a-1}+\frac{a-2}{a+2}$ 2) $\frac{b-3}{4b}+\frac{2}{b+5}$ 3) $\frac{x}{3x-1}+\frac{x-4}{2x+5}$ 4) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{x-1}{2x+6}$ 5) $\frac{q}{p}+\frac{p-1}{3q-2}$ 6) $\frac{y-1}{2}-\frac{y+1}{3y}$

7) $\frac{w+3}{3w^2}+\frac{2}{5(w-1)^3}$ 8) $\frac{1}{a^2-a-12}-2\cdot\frac{a+5}{a^2-a}$ 9) $\frac{a-b}{a-2b}+\frac{a}{a-3b-1}$ 10) $\frac{x-3}{xy}+\frac{y}{4x-y-1}$ 11) $\frac{x-2y}{(4x+y)^2}$

**RISPOSTE** 1) $\begin{cases} a\neq 1 \\ a\neq -2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} b\neq 0 \\ b\neq -5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x\neq 1/3 \\ x\neq -5/2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\neq \pm 2 \\ x\neq -3 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} p\neq 0 \\ q\neq 2/3 \end{cases}$ 6) $y\neq 0$ 7) $\begin{cases} w\neq 0 \\ w\neq 1 \end{cases}$

8) $a\neq 4, \ a\neq -3, \ a\neq 0, \ a\neq 1$ 9) $\begin{cases} a\neq 2b \\ a\neq 3b+1 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \\ y\neq 4x-1 \ \textit{oppure}: \ x\neq \frac{y+1}{4} \end{cases}$ 11) $y\neq -4x$ *oppure* $x\neq -\frac{y}{4}$

## 8. ESPRESSIONI CON TUTTE LE OPERAZIONI: ESEMPI SVOLTI

1) $\left(\frac{x+2}{x^2-2x}+\frac{1}{x^2-4}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)=$

$=\left[\frac{x+2}{x(x-2)}+\frac{1}{(x+2)(x-2)}\right]\cdot\frac{\cancel{x}+4\cancel{-x}-1}{(x+1)(x+4)}=$

$=\frac{(x+2)^2+x}{x(x+2)(x-2)}\cdot\frac{3}{(x+1)(x+4)}=$

$=\frac{x^2+4x+4+x}{x(x+2)(x-2)}\cdot\frac{3}{(x+1)(x+4)}=$

$=\frac{x^2+5x+4}{x(x+2)(x-2)}\cdot\frac{3}{(x+1)(x+4)}=$

$=\frac{\cancel{(x+1)(x+4)}}{x(x+2)(x-2)}\cdot\frac{3}{\cancel{(x+1)(x+4)}}=$

$=\frac{3}{x(x+2)(x-2)}$

**SUGGERIMENTI PREZIOSI:**

- **Ordine! Scrivi bene!**
- **Rileggi dopo ogni passaggio!**
- **Prima di ogni passaggio, domandati:**

**"cosa devo fare,**
**cosa mi conviene fare**
**a questo punto?"**

**RICORDA:**

- **Il simbolo "=" che chiude una riga deve essere poi riscritto anche all'inizio della riga successiva**
- **Quando si fa il denominatore comune, ottenendo così un'unica linea di frazione, è inutile (anche se non sarebbe sbagliato) mettere questa frazione fra parentesi**
(a meno che, naturalmente,
la frazione sia poi da elevare a potenza)

2) $\left(\frac{x+5}{x-2}-1\right):\left(\frac{1}{x^2-7x+10}-\frac{1}{x^2-25}\right)+25=$

$=\frac{\cancel{x}+5\cancel{-x}+2}{x-2}:\left[\frac{1}{(x-2)(x-5)}-\frac{1}{(x+5)(x-5)}\right]+25=$

$=\frac{7}{x-2}:\frac{\cancel{x}+5\cancel{-x}+2}{(x-2)(x-5)(x+5)}+25=\frac{7}{x-2}:\frac{7}{(x-2)(x-5)(x+5)}+25=$

$=\frac{\cancel{7}}{\cancel{x-2}}\cdot\frac{\cancel{(x-2)}(x-5)(x+5)}{\cancel{7}}+25=x^2\cancel{-25}\cancel{+25}=x^2$



Ti ricordo la
**IMPORTANTISSIMA RACCOMANDAZIONE**
fatta a pag. 244:

**IN UNA FRAZIONE**,
sarebbe
*errore madornale*
semplificare
*addendo con addendo*
oppure
*addendo con fattore*:

**SI PUO' SOLO SEMPLIFICARE FATTORE CON FATTORE.**

3) $\left(\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}\right)\cdot\left(\frac{a}{4x}+\frac{x}{4a}+\frac{1}{2}\right)=\frac{(a+x)^2-(a-x)^2}{(a-x)(a+x)}\cdot\frac{a^2+x^2+2ax}{4ax}=$

$=\frac{\cancel{a^2}+2ax\cancel{+x^2}\ \cancel{a^2}+2ax\cancel{-x^2}}{(a-x)(a+x)}\cdot\frac{(a+x)^2}{4ax}=\frac{\cancel{4ax}}{(a-x)\cancel{(a+x)}}\cdot\frac{(a+x)^{\cancel{2}}}{\cancel{4ax}}=\frac{a+x}{a-x}$

4) $\frac{12}{4a^2-9}\cdot\left(\frac{a}{3a+3}-\frac{1}{2a+2}\right)=\frac{12}{(2a+3)(2a-3)}\cdot\left[\frac{a}{3(a+1)}-\frac{1}{2(a+1)}\right]=$

$=\frac{\cancel{12}^{2}}{(2a+3)\cancel{(2a-3)}}\cdot\frac{\cancel{2a-3}}{\cancel{6}(a+1)}=\frac{2}{(2a+3)(a+1)}$

5) $\left(\frac{1}{a^2+5a+6}+\frac{1}{a^2+7a+12}\right)\cdot\frac{a^2+6a+8}{2}=\left[\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+4)}\right]\cdot\frac{(a+2)(a+4)}{2}=$

$=\frac{a+4+a+2}{\cancel{(a+2)}(a+3)\cancel{(a+4)}}\cdot\frac{\cancel{(a+2)}\cancel{(a+4)}}{2}=\frac{2a+6}{2(a+3)}=\frac{\cancel{2}(a+3)}{\cancel{2}(a+3)}=1$

6) $\left(\frac{a+1}{a^2-a}-\frac{a}{a^2-1}\right)\cdot\frac{2a+2}{2a+1}=\left[\frac{a+1}{a(a-1)}-\frac{a}{(a+1)(a-1)}\right]\cdot\frac{2(a+1)}{2a+1}=$

$=\frac{(a+1)^2-a^2}{a(a-1)\cancel{(a+1)}}\cdot\frac{2\cancel{(a+1)}}{2a+1}=\frac{\cancel{a^2}+2a+1\cancel{-a^2}}{a(a-1)}\cdot\frac{2}{2a+1}=\frac{\cancel{2a+1}}{a(a-1)}\cdot\frac{2}{\cancel{2a+1}}=\frac{2}{a(a-1)}$

7) $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\cdot\frac{x^5+x^3}{x^4-1}\cdot(x-1)=\frac{x+1}{\cancel{x^3}}\cdot\frac{\cancel{x^3}\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}\cdot(x-1)=\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}\cdot\cancel{(x-1)}=1$

8) $\left(\frac{1}{b^2+2b}+2\cdot\frac{1}{b^3-2b^2}\right):\frac{b^2+4}{b^2-4}=\left[\frac{1}{b(b+2)}+\frac{2}{b^2(b-2)}\right]:\frac{b^2+4}{(b+2)(b-2)}=$

$=\frac{b(b-2)+2(b+2)}{b^2\cancel{(b+2)(b-2)}}\cdot\frac{\cancel{(b+2)(b-2)}}{b^2+4}=\frac{b^2\cancel{-2b}\cancel{+2b}+4}{b^2\left(b^2+4\right)}=\frac{\cancel{b^2+4}}{b^2\cancel{\left(b^2+4\right)}}=\frac{1}{b^2}$

9) $\left(\frac{a-b}{a-2b}-\frac{a+2b}{a+b}\right)\left(a^2-3ab+2b^2\right)=\frac{\cancel{a^2}-b^2\cancel{-a^2}+4b^2}{\cancel{(a-2b)}(a+b)}\cdot(a-b)\cancel{(a-2b)}=\frac{3b^2(a-b)}{a+b}$

10) $\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+b=\frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{b+a}{ab}}+b=\frac{\cancel{(a+b)}(a-b)}{\cancel{ab}}\cdot\frac{\cancel{ab}}{\cancel{b+a}}+b=a\cancel{-b}\cancel{+b}=a$

11) $\frac{\frac{a+b}{a-b}+1}{\frac{a+b}{a-b}-1}-\frac{a}{b}=\frac{\frac{a\cancel{+b}+a\cancel{-b}}{a-b}}{\frac{\cancel{a}+b\cancel{-a}+b}{a-b}}-\frac{a}{b}=\frac{\frac{2a}{a-b}}{\frac{2b}{a-b}}-\frac{a}{b}=\frac{\cancel{2}a}{\cancel{a-b}}\cdot\frac{\cancel{a-b}}{\cancel{2}b}-\frac{a}{b}=\frac{\cancel{a}}{\cancel{b}}-\frac{\cancel{a}}{\cancel{b}}=0$

12) $(y+2)^2\cdot\frac{\frac{1}{y+1}-\frac{1}{y+2}}{\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+3}}=(y+2)^2\cdot\frac{\frac{\cancel{y}+2\cancel{-y}-1}{(y+1)(y+2)}}{\frac{y+3+y+1}{(y+1)(y+3)}}=(y+2)^2\cdot\frac{\frac{1}{(y+1)(y+2)}}{\frac{2y+4}{(y+1)(y+3)}}=$

$=\cancel{(y+2)^2}\cdot\frac{1}{\cancel{(y+1)}\cancel{(y+2)}}\cdot\frac{\cancel{(y+1)}(y+3)}{2\cancel{(y+2)}}=\frac{y+3}{2}$

13) $\frac{1-\frac{13}{x^2}+\frac{36}{x^4}}{x^2-5x+6}=\frac{x^4-13x^2+36}{(x-2)(x-3)}=\frac{\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)}{x^4}\cdot\frac{1}{(x-2)(x-3)}=$

$=\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}(x+3)\cancel{(x-3)}}{x^4}\cdot\frac{1}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-3)}}=\frac{(x+2)(x+3)}{x^4}$

♥ **Nell'esercizio qui a fianco e nel successivo, occhio alle modalità dei "capovolgimenti"!**

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}$$

14) $\frac{1+\frac{y}{x}}{x-y}-\frac{1-\frac{y}{x}}{x+y}=\frac{\frac{x+y}{x}}{x-y}-\frac{\frac{x-y}{x}}{x+y}=\frac{x+y}{x}\cdot\frac{1}{x-y}-\frac{x-y}{x}\cdot\frac{1}{x+y}=\frac{x+y}{x(x-y)}-\frac{x-y}{x(x+y)}=$

$=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x(x+y)(x-y)}=\frac{\cancel{x^2}+2xy+\cancel{y^2}\cancel{-x^2}+2xy\cancel{-y^2}}{x(x+y)(x-y)}=\frac{4\cancel{x}y}{\cancel{x}(x+y)(x-y)}=\frac{4y}{(x+y)(x-y)}$

- Le seguenti tre espressioni presentano somme algebriche di frazioni algebriche, con **polinomi opposti a denominatore**.
  In casi di questo genere, è sempre conveniente,
  **prima di fare il denominatore comune, sbarazzarsi dei fastidiosi polinomi opposti**,
  facendo in modo che compaia dappertutto sempre lo stesso polinomio.

15) $$\frac{a^2}{(a-2)^3}+\frac{1}{2-a}+\frac{1}{(2-a)^4}=$$
$$=\frac{a^2}{(a-2)^3}+\frac{1}{-(a-2)}+\frac{1}{(a-2)^4}=$$
$$=\frac{a^2}{(a-2)^3}-\frac{1}{a-2}+\frac{1}{(a-2)^4}=$$
$$=\frac{a^2(a-2)-(a-2)^3+1}{(a-2)^4}=$$
$$=\frac{a^3-2a^2-(a^3-6a^2+12a-8)+1}{(a-2)^4}=$$
$$=\frac{\cancel{a^3}-2a^2\cancel{-a^3}+6a^2-12a+8+1}{(a-2)^4}=$$
$$=\frac{4a^2-12a+9}{(a-2)^4}=\frac{(2a-3)^2}{(a-2)^4}$$

NOTA
Sappiamo che
$$(2-a)^4=(a-2)^4$$
per via dell'esponente pari:

due numeri opposti,
se elevati allo stesso esponente PARI,
danno risultati uguali;

d'altronde,
$$(2-a)^4=\left[-(a-2)\right]^4=+(a-2)^4$$

16) $$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=$$
$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{-(a-b)(b-c)}+\frac{1}{-(a-c)\cdot\left[-(b-c)\right]}=$$
$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}=$$
$$=\frac{\cancel{b}-c\cancel{-a}+c\cancel{+a}-\cancel{b}}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0$$

17) $$\left[\frac{3}{x^2-1}+\frac{x}{(1-x)^3}\right]\cdot\frac{1}{2x-1}=\left[\frac{3}{(x+1)(x-1)}+\frac{x}{-(x-1)^3}\right]\cdot\frac{1}{2x-1}=$$
$$=\left[\frac{3}{(x+1)(x-1)}-\frac{x}{(x-1)^3}\right]\cdot\frac{1}{2x-1}=\frac{3(x-1)^2-x(x+1)}{(x+1)(x-1)^3}\cdot\frac{1}{2x-1}=$$
$$=\frac{3x^2-6x+3-x^2-x}{(x+1)(x-1)^3}\cdot\frac{1}{2x-1}=\frac{2x^2-7x+3}{(x+1)(x-1)^3}\cdot\frac{1}{2x-1}=$$
$$=\frac{2x^2-6x-x+3}{(x+1)(x-1)^3}\cdot\frac{1}{2x-1}=\frac{2x(x-3)-(x-3)}{(x+1)(x-1)^3}\cdot\frac{1}{2x-1}=$$
$$=\frac{(x-3)\cancel{(2x-1)}}{(x+1)(x-1)^3}\cdot\frac{1}{\cancel{2x-1}}=\frac{x-3}{(x+1)(x-1)^3}$$

- Nella seguente espressione compare una **semplificazione fra polinomi opposti.**

18) $$\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1-\frac{3}{x}}\left(9-x^2\right)=\frac{\cancel{x}\cdot\frac{x+1}{\cancel{x}}\cdot\frac{x+2}{x}}{\frac{x-3}{x}}(3+x)(3-x)=$$

$$=\frac{(x+1)(x+2)}{\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x}}{\cancel{x-3}}\cdot(3+x)\overset{-1}{\cancel{(3-x)}}=-(x+1)(x+2)(x+3)$$

- Nell'esempio che segue è necessario, per fattorizzare un polinomio, applicare il **metodo di Ruffini**. La scomposizione, in questi casi, va fatta a parte e successivamente reinserita nell'espressione.

19) $$\left(\frac{1}{2x^3+x^2-5x+2}-\frac{1}{x^2+x-2}\right)\left(\frac{1}{2}-2x^2\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{(x-1)(x+2)(2x-1)}-\frac{1}{(x-1)(x+2)}\right]\cdot\frac{1-4x^2}{2}=$$

$$=\frac{1-2x+1}{(x-1)(x+2)(2x-1)}\cdot\frac{(1+2x)(1-2x)}{2}=$$

$$=\frac{2-2x}{(x-1)(x+2)(2x-1)}\cdot\frac{(1+2x)(1-2x)}{2}=$$

$$=\frac{\overset{-1}{\cancel{2}\,(1-x)}}{\cancel{(x-1)}\,(x+2)\,\cancel{(2x-1)}}\cdot\frac{(1+2x)\overset{-1}{\cancel{(1-2x)}}}{\cancel{2}}=\frac{2x+1}{x+2}$$

$2x^3+x^2-5x+2$
*Divisori del termine noto :* $\pm1,\ \pm2$
*Divisori del* 1° *coeff.:* $\pm1,\ \pm2$
*Possibili zeri razionali :* $\pm1,\ \pm2,\ \pm\frac{1}{2}$
$P(1)=2+1-5+2=0,\ \ OK$

| | 2 | 1 | −5 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | 3 | −2 |
| | 2 | 3 | −2 | 0 |

$$2x^3+x^2-5x+2=$$
$$=(x-1)\left(2x^2+3x-2\right)=$$
$$=(x-1)\left(2x^2+4x-x-2\right)=$$
$$=(x-1)\left[2x(x+2)-(x+2)\right]=$$
$$=(x-1)(x+2)(2x-1)$$

- E terminiamo la rassegna di esempi con due espressioni che contengono **potenze**.

20) $$\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^2\left(x^2-4\right)^3=\left(\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-2}{x}}\right)^2(x+2)^3(x-2)^3=$$

$$=\left(\frac{x-1}{\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x}}{x-2}\right)^2(x+2)^3(x-2)^3=$$

$$=\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2(x+2)^3(x-2)^3=$$

$$=\frac{(x-1)^2}{(x-2)^2}(x+2)^3\overset{3}{(x-2)^3}=(x-1)^2(x+2)^3(x-2)$$

21) $$\left(\frac{1}{3a}-\frac{a+1}{2a}+1\right)\cdot\frac{6a^{-1}}{9-a^{-2}}=$$

$$=\frac{2-3(a+1)+6a}{6a}\cdot\frac{6\cdot\frac{1}{a}}{9-\frac{1}{a^2}}=$$

$$=\frac{2-3a-3+6a}{6a}\cdot\frac{\frac{6}{a}}{\frac{9a^2-1}{a^2}}=$$

$$=\frac{\cancel{3a-1}}{\cancel{6}\,\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{6}}{\cancel{a}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{a}}}{(3a+1)\,\cancel{(3a-1)}}=\frac{1}{3a+1}$$

Dal sito
www.themathpage.com
di
Lawrence Spector

Example
$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}$
Solution.
These denominators have no common factors.
Therefore, the LCM of denominators is their product.
$$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{2x-(x-1)}{x(x-1)}=\frac{2x-x+1}{x(x-1)}=\frac{x+1}{x(x-1)}$$
[*LCM = Lowest Common Multiple*]

Note:
The entire $x-1$
is being subtracted.
Therefore,
we write it
in parentheses,
and its signs change.

## 9. ESERCIZI SULLE FRAZIONI ALGEBRICHE

(clicca sulla freccia, se presente, per la correzione; risultati a pagina 265)

1) $\frac{1}{2}+\left(\frac{2x+1}{2x+4}-\frac{x^2+1}{x^2+4x+4}\right)\cdot\left(x+4+\frac{4}{x}\right)$ ⇨

2) $\left(\frac{1}{a^2+3a+2}-\frac{1}{a^2+4a+3}\right)\left(a^2+5a+6\right)$ ⇨

3) $\left(\frac{a}{a^2-1}-\frac{a}{a^2+2a+1}\right)\cdot\frac{a^3+a^2-a-1}{a}$ ⇨

4) $\left(\frac{x}{x+4}+\frac{x+4}{x}-2\right)\left(\frac{x+4}{4}-1\right)$ ⇨

5) $\left(\frac{t+1}{t^2-t}+\frac{t-1}{t^2+t}\right)\cdot\frac{t^2-1}{2}-\frac{1}{t}$

6) $\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+3}\right)\cdot\frac{a^2+4a+3}{a+2}$

7) $\left(\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2-1}\right)\cdot\left(x^3-x\right)+1$

8) $\left(\frac{1}{y^2-4y}-\frac{8}{y^3-4y^2}+\frac{16}{y^4-4y^3}\right):\left(\frac{1}{y^2}-2\cdot\frac{2}{y^3}\right)$ ⇨

9) $\left(\frac{n-2}{3n^2-12n+9}-\frac{1}{6n-18}\right)(6n-6)$ ⇨

10) $\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-x}\right)\cdot\left(x^2+x\right)$

11) $\frac{b-1}{b+1}\cdot\left(\frac{2b}{b^2+b-2}-\frac{1}{b+2}\right)$

12) $\frac{x^2-9}{x+4}\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+5}\right):2$

13) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}\right):\left(\frac{1}{a^2+2a+1}+\frac{1}{2a+2}\right)$

14) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$

15) $2\left(\frac{x}{2x-4}+\frac{1}{x-2}\right)\cdot\frac{x-2}{x+2}-1$

16) $\left(\frac{1}{x^3-x^2-x+1}-\frac{1}{x^3+x^2-x-1}\right)\left(x^2-1\right)^2$ ⇨

17) $\left(\frac{a+4}{a-4}-\frac{a-4}{a+4}\right)\cdot\left(\frac{a}{16}-\frac{1}{a}\right)$

18) $\left(a\cdot\frac{5a+4}{4a^3-4a^2-a+1}-\frac{2a+1}{2a^2-3a+1}\right)\cdot\left(4a^2-1\right)$ ⇨

19) $\left(\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}\right)\cdot\frac{x^2+2x}{x+1}$

20) $\left(\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}\right)\cdot\left(x^2-4x+3\right)$

21) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right):\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)-2\cdot\frac{y}{x-y}$

22) $\left(\frac{1}{4a-8}-\frac{1}{6a-12}\right)\cdot\left(12a^2-12a-24\right)-a$ ⇨

23) $\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x^2+x-6}\right)\cdot\left(x^3-2x^2-9x+18\right)$

24) $\dfrac{\frac{a-1}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}}{\frac{1}{a+1}-1}$ ⇨

25) $\dfrac{4ab}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}+b^2$

26) $\dfrac{\frac{b^3}{b^6+b^4+b^2+1}-\frac{1}{b^3+b^2+b+1}}{b-1}\cdot\left(b^8-1\right)+1$ ⇨

27) $\dfrac{\frac{a+1}{a-1}+1}{\frac{a+1}{a-1}-1}$

28) $\dfrac{\frac{1}{a-1}-\frac{1}{b-1}}{a-b}\left(ab-a-b+1\right)$

29) $\dfrac{(a+2b)^2}{\frac{a}{a+4b}+\frac{b}{a+3b}}$

30) $\dfrac{a+b+\frac{1}{a-b}}{a-b+\frac{1}{a+b}}$

31) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}+2}{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}-2}$

32) $\dfrac{a^2+2ab+b^2+c^2+2ac+2bc}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}}$

33) $\dfrac{\frac{1}{ab}-\frac{1}{ac}}{\frac{1}{ac}-\frac{1}{bc}}\cdot\dfrac{\frac{a}{b}-1}{\frac{c}{b}-1}$

34) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}-\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2}{\frac{a+b}{a-b}-1}$

35) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}}{2}-\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}$

36) $\left[\frac{(a-b)^2}{2}+ab\right]:\left(\frac{a-b}{2a+2b}+\frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}\right)$

37) $\dfrac{2}{x+1}-\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+1}\right)\cdot\left(x^3-x^2+x-1\right)$

38) $\dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{x^2-3xy+2y^2}+\dfrac{1}{2y-x}\right)\left(\dfrac{x}{y}-2\right)}+y$ ⇨

39) $\dfrac{3}{t^4+5t^2+4}-\dfrac{2}{t^4+4t^2+3}-\dfrac{1}{t^4+7t^2+12}$

40) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{t+1}+1\right)^2}{1-\dfrac{1}{t+1}}\cdot\left(t^3+3t^2+2t\right)$

41) $\left(\dfrac{3x-1}{2}+\dfrac{2}{3x-1}-2\right):\left(3x-3\right)^2$

42) $3\left(\dfrac{x}{3x-6}-\dfrac{x}{x^2-x-2}\right)\cdot\left(x^2+x^1+x^0+x^{-1}\right)-x^2$ ⇨

43) $\left[\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x-4}\right)\right]^2\left(\dfrac{x^2+8x+16}{2}\right)^2$ ⇨

44) $\left(\dfrac{1}{a^2-2a+1}-\dfrac{1}{a^2+2a+1}\right)\cdot\dfrac{a^4-2a^2+1}{4}$ ⇨

45) $\dfrac{\dfrac{n+5}{n^2+2n-8}-\dfrac{n+4}{n^2+3n-10}}{6n+27}$

46) $\dfrac{a+\dfrac{1}{a}+1}{a+\dfrac{1}{a}-1}\cdot\dfrac{a^4+a}{a^4-a}+\dfrac{a^4-3a^3}{a^4-a^3}$

47) $\dfrac{1-\dfrac{a^2}{x^2}}{1+\dfrac{a^2}{x^2}+2\dfrac{a}{x}}-1$

48) $\left(\dfrac{1}{4a+8}+\dfrac{1}{6a-12}\right)\cdot\dfrac{12a^2-48}{2-5a}$

49) $\dfrac{1}{4+t}+\dfrac{1}{4-t}-\dfrac{24-t^2}{16-t^2}$

50) $\left[6\left(\dfrac{\frac{1}{2}a}{a-b}+\dfrac{\frac{1}{3}a}{b-a}\right)+\dfrac{ab^3}{a^4-ab^3}\right]\cdot\left(a+b-\dfrac{ab}{a+b}\right)$ ⇨

51) $\dfrac{1}{2x^2-7x+6}+\dfrac{1}{2-x}$

52) $\dfrac{\dfrac{y+1}{y-1}+\dfrac{2}{\left(1-y\right)^2}+1}{1-y+y^2}$ ⇨

53) $\dfrac{\left(\dfrac{a-1}{a-3}-\dfrac{a-8}{a-6}\right)\left(a^2-9a+18\right)}{9-2a}$

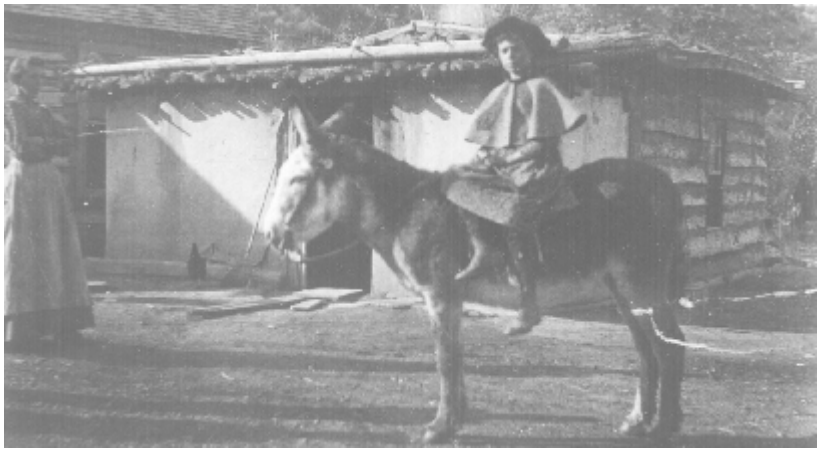
54) $\dfrac{2}{\left(x-1\right)^3}+\dfrac{x+1}{\left(1-x\right)^3}$

55) $1+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{n}{n^2-1}\right)\left(n^4-2n^2+1\right)$ ⇨

56) $1+\left[\dfrac{1}{\left(n-1\right)\left(n^2+n+1\right)}-\dfrac{n}{n^4-1}\right]\left[n^3+\left(n^2+1\right)^2+n\right]$ ⇨

57) $\left(\dfrac{1}{a^2-2ab-3b^2}+\dfrac{1}{2b^2+ab-a^2}\right)\cdot\left(6ab^2-5a^2b+a^3\right)$ ⇨

58) $k\cdot\dfrac{1-\dfrac{k^2+6}{k^2+5k+6}}{\dfrac{k-2}{k+3}-\dfrac{k-3}{k+2}}$



*"A Mesa Creek Valley rancher's daughter en route to school"*

La ragazza in groppa al suo asinello si congeda dalla madre per andare a scuola. Colorado, anno 1898. Foto di George B. Sudworth

(*the National Archives and Records Administration NARA*)

59) $\left(\frac{1}{t^2-4t+3}-\frac{1}{3t^2-2t-1}\right):\left(1+\frac{3}{t-1}\right)\cdot\left(3t^3+t^2-27t-9\right)-6$

60) $\left(\frac{1-\frac{5}{a^2}+\frac{4}{a^4}}{1-\frac{10}{a^2}+\frac{9}{a^4}}-1\right)\cdot\frac{a^2-9}{5}$

61) $(ab-1)\left(\frac{b+1}{a^2b-ab-a+1}-\frac{a+1}{ab^2-ab-b+1}\right)\cdot\frac{1-\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}}{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}$

62) $\frac{1}{2\cdot\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}}-2$

63) $\left(\frac{x+1}{2x^2-3x+1}-\frac{3}{x^2-1}\right)\cdot\frac{2x^3-x^2-2x+1}{(x-2)^2}$

64) $\left[1-\left(1-\frac{5}{t}+\frac{6}{t^2}\right)\cdot\left(\frac{t}{t-2}\right)^2\right](t-2)$

65) $\left(\frac{x+2}{x^3-8}-\frac{1}{x^2+2x+4}\right)\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right)$ ⇨ Una differenza di cubi si scompone con la formula $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

66) $\frac{\frac{a-b}{a+b}-\frac{1}{a^2-b^2}}{a-(b-1)}\cdot\left(a^2-b^2\right)+b+1$

67) $\frac{4-\frac{b^2}{a^2}}{1+4\frac{b^2}{a^2}}\cdot\frac{1+5\frac{b^2}{a^2}+4\frac{b^4}{a^4}}{4+3\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^4}{a^4}}$

68) $\left(\frac{1}{x^2y^2+1}-\frac{1}{x^2y^2+2}\right)\cdot\left(x^4y^4+3x^2y^2+2\right)-1$

69) $\left(1-\frac{3a^2-4a+1}{a^2-3a+2}\right)(2-a)-2a$

70) $\left(\frac{1}{m^2-4m+3}-\frac{1}{m^2-3m+2}\right)(m^3-6m^2+11m-6)$ *Ruffini*

71) Semplifica: $\frac{2x^3+7x^2+4x-4}{x^3+2x^2-4x-8}$

72) $\frac{a^4+2a^3-2a-1}{a^3-3a-2}-1$ ⇨

73) $\frac{a^4+a^3+4a}{a^4+4a^3+4a^2}$ ⇨

74) $\left(\frac{b}{a^2-b^2-2b-1}+\frac{1}{a^2+ab+a}\right)\left(\frac{a^2}{b+1}-a\right)$ ⇨ *differenza di quadrati*

75) $\left(1+\frac{1+\frac{1}{x}}{x}\right)\left(1+\frac{1-\frac{1}{x}}{x}\right):\left(x^4+2x^3+x^2-1\right)$

76) $\left(x\cdot\frac{x^3-5x^2+11x-10}{2x^2-3x-2}-1\right)\cdot\left(-2-\frac{3}{x-1}\right)^2-2x^2$ ⇨

77) $\frac{(x+1)^4-(x-1)^4}{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}-1}$

78) $\left(\frac{1}{x^2+x-y^2+y}+\frac{1}{y^2-x^2-1-2x}\right)\cdot\left(x^2+2xy+y^2+x+y\right)$

79) $\frac{b+1}{\frac{b^{-1}+b^{-2}}{b^{-3}+b^{-4}}-1}+\frac{2-b}{1-b}$

80) $\left[\frac{b^4}{a(a-b)^2}-a\cdot\left(\frac{a}{b-a}\right)^2\right]:\left(a^3-a^{-1}b^4\right)+\frac{1}{(a-b)^2}$ ⇨

81) $\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(1-x)^3}\right]\cdot\frac{(1-x)^2}{x^3+1}$

82) $\frac{\frac{1+k^2}{1-k^2}+2\cdot\frac{k^2}{k^4-1}}{2k\cdot\frac{k^3}{1-k^4}+1}$

83) $\frac{\frac{2}{a^3-a^2}-\frac{2}{a^3-a}}{2}\cdot\left(a^4-a^2\right)$

84) $\left(\frac{2b^2}{4b^2-1}-4\cdot\frac{\frac{b}{2}-0,25}{4b+2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4b-1}-1\right)$

85) $\frac{\left(12-12c^2\right)\cdot\left[(3c-3)^{-1}-(6c+6)^{-1}\right]}{c+3}$

86) $d^2\cdot\left(\frac{2}{d^2-8d+15}+\frac{1}{2d+15-d^2}\right)\cdot\left[1-\left(\frac{3}{d}\right)^2\right]-1$

87) $\frac{\frac{1-m}{9-m^2}}{\frac{2}{(m-2)(m+2)-5}+\frac{1}{m+3}}$

88) $\frac{1}{p}\left(\frac{1+p}{1-p}\right)^2-\frac{4}{p^2-2p+1}+\frac{p+1}{p^3-p}+\frac{1}{1-p}$

**RISULTATI degli esercizi sulle frazioni algebriche**

1) 3 2) $\frac{1}{a+1}$ 3) 2 4) $\frac{4}{x+4}$ 5) $t$ 6) 2 7) $2x$ 8) 1 9) 1 10) $-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-x}$

11) $\frac{1}{b+2}$ 12) $\frac{x-3}{x+5}$ 13) $(a+1)^2$ 14) $a+b$ 15) 0 16) 2 17) 1 18) $a+1$ 19) 1

20) 2 21) 1 22) 1 23) 1 24) $\frac{4}{a-1}$ 25) $a^2$ 26) $b^3$ 27) $a$ 28) $-1$ 29) $(a+4b)(a+3b)$

30) $\frac{a+b}{a-b}$ 31) $\frac{a^2}{b^2}$ 32) $abc(a+b+c)$ 33) $-1$ 34) $\frac{b+a}{b-a}$ 35) 0 36) $(a+b)^2$ 37) 0

38) $x$ 39) 0 40) $(t+2)^3$ 41) $\frac{1}{2(3x-1)}$ 42) 1 43) $\frac{(x+4)^2}{(x-4)^2}$ 44) $a$ 45) $\frac{1}{3(n-2)(n+4)(n+5)}$

46) 2 47) $-\frac{2a}{x+a}$ 48) $-1$ 49) $-1$ 50) $\frac{a^2+b^2}{a-b}$ 51) $-\frac{2}{2x-3}=\frac{2}{3-2x}$ 52) $\frac{2}{(y-1)^2}$ 53) $-2$

54) $-\frac{1}{(x-1)^2}$ 55) $n^2$ 56) $\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}$ 57) $\frac{ab}{a+b}$ 58) $k^2$ 59) $2t$ 60) 1 61) 1 62) $x$

63) 1 64) 1 65) $\frac{1}{x^2+2x+4}$ 66) $a$ 67) 1 68) 0 69) 1 70) 1 71) $\frac{2x-1}{x-2}$ (*Ruffini; racc. parz.*)

72) $\frac{a^2-a+1}{a-2}$ 73) $\frac{a^2-a+2}{a(a+2)}$ 74) $\frac{a-1}{a+b+1}$ 75) $\frac{1}{x^4}$ 76) $-(x+1)$ 77) $-8x(x+1)(x-1)$ 78) $\frac{1}{x-y+1}$

79) 1 80) 0 81) $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$ 82) 1 83) 1 84) $-\frac{1}{2b+1}$ 85) $-2$ 86) $\frac{14}{d-5}$ 87) 1 88) 0

SIMULAZIONE DI VERIFICA 1 con correzione se clicchi sulla freccia ⇨
**TEMPO**: 60' **PUNTEGGIO**: 1 punto per esercizio, sufficienza con 4 punti

1) $\dfrac{\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}}$ 2) $\dfrac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1$ 3) $\dfrac{\frac{k-2}{k+2}+\frac{k+2}{k-2}+2}{\frac{k-2}{k+2}+\frac{k+2}{k-2}-2}-\left(\frac{k}{2}\right)^2$

4) $\left(\frac{2}{x-y}+\frac{x}{xy-y^2}+\frac{y}{x^2-xy}\right)\cdot\frac{x^2y-xy^2}{(x+y)^2}$ 5) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{t^3+t^2-t-1}-\frac{1}{t^3+3t^2+3t+1}\right)(t^2-1)^2$

6) $\left[\frac{x+2y}{x^2-5xy+6y^2}+\frac{x-2y}{(x+2y)(3y-x)}\right]\cdot(4y^2-x^2)$ 7) Semplifica: $\frac{x^3+4x^2+4x+1}{x^3+8x^2+8x+1}$

SIMULAZIONE DI VERIFICA 2 con correzione se clicchi sulla freccia ⇨
**TEMPO**: 60' **PUNTEGGIO**: 1 punto per **esercizio**, sufficienza con 4 punti

1) $\left(\frac{2}{a+b}+\frac{2}{a-b}-\frac{3a}{a^2-b^2}\right)\left(a-\frac{b^2}{a}\right)$ 2) $\dfrac{\frac{b+3}{b-3}-\frac{b-3}{b+3}-2\cdot\frac{b}{b-3}}{1-\frac{b-3}{b+3}}$ 3) $\dfrac{a\left(\frac{a+1}{a^2-a}+\frac{a-1}{a^2+a}\right)}{2}$

4) $\left(\frac{1}{a^2+a-2}-\frac{1}{2a^2-a-1}\right)\cdot(2a^2+5a+2)$ 5) $\left(\frac{1}{x^2+4x-12}-\frac{1}{x^2+12x+36}\right)\cdot\frac{x^2-36}{16}\cdot(2x-4)$

6) $\left[\frac{2x-5}{x^3-2x^2-x+2}-\frac{x-1}{(1+x)(2-x)}\right]\cdot\frac{(1-x)^2}{x+2}$ 7) Semplifica: $\frac{x^3+2x^2-1}{xy^2+x^2+y^2-1}$

## 10. IDENTITA' CON FRAZIONI ALGEBRICHE (risposte a pag. 269)

1) Verifica che, qualunque sia il numero $a$, diverso da 0, $+1$, $-1$, sussiste la relazione

$$\frac{1}{a}=\frac{\frac{1}{a-1}}{1+\frac{1}{a-1}}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a+1}$$

2) Verifica che vale l'identità $\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{b}\right)^{-1}=-\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-1}$

3) La somma dei reciproci di due numeri non nulli qualsiasi è sempre uguale al rapporto fra la loro somma e il loro prodotto. Rappresenta questo enunciato con una formula, e dimostrane la validità.

4) Dimostra che se si prendono tre interi consecutivi e si divide il loro prodotto per la loro somma, il risultato è uguale alla terza parte del prodotto fra il più piccolo e il più grande.

5) Dopo aver controllato che valgono le uguaglianze

$$\frac{4\cdot1}{2\cdot3}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)$$
$$\frac{5\cdot2}{3\cdot4}=\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)$$
$$\frac{6\cdot3}{4\cdot5}=\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)$$
$$\ldots$$

scrivi l'uguaglianza generale che sembra potersi ricavare dalla sequenza, e dimostra che è valida sempre.

6)
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+1}=\frac{1}{1\cdot(1+1)}+\frac{2}{1+1}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2+1}=\frac{1}{2\cdot(2+1)}+\frac{2}{2+1}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3+1}=\frac{1}{3\cdot(3+1)}+\frac{2}{3+1}$$
$$\ldots$$

Scrivi l'uguaglianza generale che si può ipotizzare dalla sequenza, e dimostra che è valida sempre.

7) Verifica l'identità $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{3}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$.

Cosa diventa se facciamo la sostituzione $n\to n-1$?

8) Verifica l'identità $\frac{ab}{(a+1)(b+1)}=\left(1-\frac{1}{a+1}\right)\left(1-\frac{1}{b+1}\right)$ e riscrivila nel caso particolare $b=a$.

9) University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition 1990

I) Determina il valore del prodotto delle frazioni seguenti: $\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\cdot\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}\cdot\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{\frac{1}{98}-\frac{1}{99}}{\frac{1}{99}-\frac{1}{100}}$

a) 1/2 b) 2 c) 0.02 d) 50 e) 1/100

II) In generale, quanto vale l'$n$-esima frazione in gioco, fra quelle moltiplicate?

III) Se le frazioni moltiplicate sono $n$, quanto vale il loro prodotto?

10) University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition 1990

You are told that certain unknown positive integers $p, q, r, s$ satisfy $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$.

Which of the following statements must be true?

a) $\frac{p}{s}=\frac{r}{q}$ b) $\frac{p}{r}=\frac{s}{q}$ c) $\frac{p}{q}=\frac{p+r}{q+s}$ d) $\frac{r}{s}$ *doesn't equal* $\frac{r-p}{s-q}$ e) None of a), b), c), d)

11) Per ultimare un determinato lavoro in 1 giorno ci vogliono
*a* apprendisti, o in alternativa *e* lavoratori esperti.
In quanti giorni porterebbe a termine quel lavoro una coppia formata da 1 apprendista e 1 esperto?

a) $\frac{1}{a+e}$ b) $\frac{1}{ae}$ c) $\frac{a+e}{ae}$ d) $\frac{ae}{a+e}$

12) **Considera le seguenti frazioni algebriche e stabilisci per quali valori di *x* ciascuna di esse risulta**
**(1) non definita, in quanto corrisponderebbe ad una operazione impossibile**
**(2) non definita, in quanto corrisponderebbe ad una operazione indeterminata**
**(3) uguale a 0**

| | (1): impossibile | (2): indeterminata | (3): uguale a 0 |
|---|---|---|---|
| $\frac{x+12}{x-21}$ | $x=21$ | / | $x=-12$ |
| $\frac{4x-2}{2x-1}$ | | | |
| $\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-7x+12}$ | | | |
| $\frac{3x+1}{3x}$ | | | |
| $\frac{3x}{3x+1}$ | | | |
| $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$ | | | |
| $\frac{9x+27}{x^2+6x+9}$ | | | |

RIPASSO ($a \neq 0$):

$\frac{a}{0}$ **IMPOSS.** $\frac{0}{0}$ **INDET.** — ***"illegal operations"***

$\frac{0}{a} = 0$ ***operazione normalissima***

Frazione = divisione, e divisione = operazione inversa della moltiplicazione

$\mathbf{a : b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a}$

$1:0, 1/0$ è IMPOSSIBILE perché *non c'è alcun numero* che moltiplicato per 0 dia 1

$0:0, 0/0$ è INDETERMINATA perché *qualsiasi numero* moltiplicato per 0 dà 0

13) C'è qualche piccola differenza fra le due espressioni algebriche $\frac{1}{1+\frac{2}{x-4}}$ e $\frac{x-4}{x-2}$?

14) **Sarà mai possibile esprimere la frazione algebrica $\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)}$**
**come somma algebrica di due frazioni aventi**
**a denominatore rispettivamente $x+3$ e $x-5$, e a numeratore due numeri?**
Vediamo.

$$\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5}$$
$$\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} = \frac{A(x-5)+B(x+3)}{(x+3)(x-5)}$$
$$\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} = \frac{Ax-5A+Bx+3B}{(x+3)(x-5)}$$
$$\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} = \frac{Ax+Bx-5A+3B}{(x+3)(x-5)}$$
$$\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} = \frac{(A+B)x+(-5A+3B)}{(x+3)(x-5)}$$

Affinché l'ultima uguaglianza sia una identità occorre e basta che sia $\begin{cases} A+B=5 \\ -5A+3B=-41 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} A=7 \\ B=-2 \end{cases}$

quindi in definitiva la risposta alla domanda iniziale è affermativa: si avrà $\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} = \frac{7}{x+3} - \frac{2}{x-5}$

*Ora determina tu i valori delle costanti A, B, C negli esercizi seguenti*:

a) $\frac{9x+4}{(2x-3)(x+1)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{x+1}$ b) $\frac{20t+11}{16t^2-1} = \frac{A}{4t+1} + \frac{B}{4t-1}$ c) $\frac{5-6x}{x(3x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3x+2}$

d) $\frac{2x^2+14x+8}{x(x+2)(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+4}$ e) $\frac{3x^2+5x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$

15) **Dalla formula di Gauss** $\boxed{1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}}$ **se ne possono ricavare altre**, assai interessanti.

Ad esempio, è abbastanza semplice (vuoi provarci?) dedurre da questa formula che

a) la somma $\boxed{2+4+6+...+2n}$ dei primi *n* numeri pari a partire da 2 vale $\boxed{n(n+1)}$

b) mentre la somma $\boxed{1+3+5+...+(2n-1)}$ dei primi *n* numeri dispari vale $\boxed{n^2}$.

Un po' più laborioso è invece determinare il valore della somma $1^2+2^2+...+n^2$
dei quadrati dei primi *n* interi positivi.

Partiamo dall'identità $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$
e portiamola nella forma $(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$
Ora scriviamo le varie uguaglianze che si ottengono dalla precedente dando a *x* i valori: 1, 2, 3, …

$$\begin{array}{ll} x=1: & 2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1 \\ x=2: & 3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1 \\ x=3: & 4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1 \\ x=4: & 5^3-4^3=3\cdot4^2+3\cdot4+1 \\ ... & ... \\ x=n: & (n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1 \end{array}$$

Sommando membro a membro queste uguaglianze si ha:

$$(n+1)^3-1^3=3\cdot\left(1^2+2^2+...+n^2\right)+3\left(1+2+...+n\right)+\underbrace{(1+1+...+1)}_{n\ addendi}$$

quindi, tenuto conto della formula di Gauss,

$$(n+1)^3-1=3\cdot\left(1^2+2^2+...+n^2\right)+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

da cui l'identità

$$1^2+2^2+...+n^2=...$$ (scrivi tu il secondo membro!)

c) *Verifica che in questo modo si ottiene, dopo qualche passaggio, la formula*

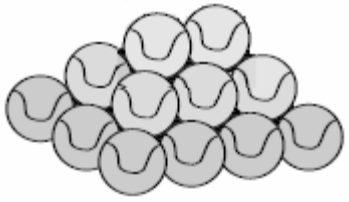
$$\boxed{1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

d) *Operando in modo analogo, dimostra la formula* $\boxed{1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

*dalla quale si trae immediatamente la bella relazione*

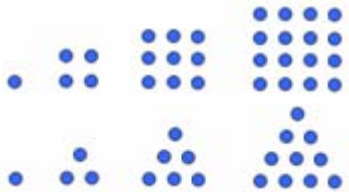
$$\boxed{1^3+2^3+...+n^3=\left(1+2+...+n\right)^2}$$

16) La figura qui a fianco mostra alcune palline da tennis sistemate su più strati sovrapposti: quello più in alto è formato da 2 palline soltanto, quello appena sotto da 6 palline, quello sotto ancora da 12, ecc.
Se si avessero *n* strati, le palline dello strato inferiore sarebbero $n(n+1)$;
… ma quante palline si avrebbero nella pila, in totale?



17) I numeri "**quadrati**" sono
$1^2=1,\ \ 2^2=4,\ \ 3^2=9,\ \ 4^2=16,\ \ 5^2=25,\ \ ...$

I seguenti numeri si dicono invece "**triangolari**":
$1,\ \ 1+2=3,\ \ 1+2+3=6,\ \ 1+2+3+4=10,\ \ 1+2+3+4+5=15,\ \ ...$



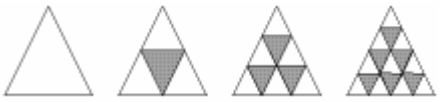
*Serviti della formula di Gauss per dimostrare il seguente enunciato:*
"*ciascun numero quadrato è uguale alla somma del numero triangolare di ugual posto, e del numero triangolare che precede quest'ultimo*" (*es.*: 16 = 10 + 6)

18) University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition 1991

The average (*media*) of the first 100 000 odd (*dispari*) positive integers is

a) 100 000 b) 1 000 000 c) 10 000 000 d) 100 000 000 e) 1 000 000 000

19) Spunto preso da Olimpiadas Colombianas De Matematicas, 1999
Nell' $n$-esima figura di questo tipo, →
che frazione del triangolo grande resta ombreggiata?



20) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Final Round, 1999
The page numbers of a book sum to 1999. One page number was counted twice.
Which page number was that?

**RISPOSTE**

3) In effetti l'uguaglianza $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$ è, come si può controllare, un'identità

4) $\frac{n(n+1)(n+2)}{n+(n+1)+(n+2)}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3n+3}=\frac{n\cancel{(n+1)}(n+2)}{3\cancel{(n+1)}}=\frac{n(n+2)}{3}$ 5) $\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

6) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{2}{n+1}$ 7) Diventa $\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{3}{n}+\frac{2}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}$

8) Con $b=a$: $\frac{a^2}{(a+1)^2}=\left(1-\frac{1}{a+1}\right)^2$ 9) I) d II) $\frac{\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}}=\frac{n+1}{n}$ III) $n+1$ 10) c 11) d

12)

| | imposs. | indet. | $=0$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{x+12}{x-21}$ | $x=21$ | / | $x=-12$ |
| $\frac{4x-2}{2x-1}$ | / | $x=\frac{1}{2}$ | / |
| $\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-7x+12}$ | $x=3,\ x=4$ | / | $x=0,\ x=1,\ x=2$ |
| $\frac{3x+1}{3x}$ | $x=0$ | / | $x=-\frac{1}{3}$ |
| $\frac{3x}{3x+1}$ | $x=-\frac{1}{3}$ | / | $x=0$ |
| $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$ | $x=3$ | $x=2$ | $x=1$ |
| $\frac{9x+27}{x^2+6x+9}$ | / | $x=-3$ | / |

13) La differenza è nel "campo di esistenza". $\frac{x-4}{x-2}$ ha significato per tutti i valori di $x$ tranne $x=2$,

$\frac{1}{1+\frac{2}{x-4}}$ perde significato sia con $x=2$ che con $x=4$.

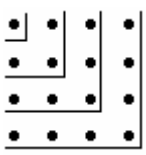
Per tutti i valori di $x$ tranne 2 e 4 le frazioni assumono lo stesso valore.

14) a) $\begin{cases}A=7\\B=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}A=-3\\B=8\end{cases}$ c) $\begin{cases}A=5/2\\B=-27/2\end{cases}$ : $\frac{5/2}{x}+\frac{-27/2}{3x+2}=\frac{5}{2x}-\frac{27}{2(3x+2)}$ d) $\begin{cases}A=1\\B=3\\C=-2\end{cases}$ e) $\begin{cases}A=-1\\B=-2\\C=6\end{cases}$

15a) $2+4+6+\ldots+2n=2(1+2+3+\ldots+n)=\cancel{2}\cdot\frac{n(n+1)}{\cancel{2}}=n(n+1)$

15b) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=(2-1)+(4-1)+(6-1)+\ldots+(2n-1)=$
$=(2+4+6+\ldots+2n)-n=n(n+1)-n=n^2+n-n=n^2$

La figura qui a fianco → visualizza e giustifica efficacemente l'enunciato!



16) $\sum_1^n k(k+1)=1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+\ldots+n\cdot(n+1)=1+1+4+2+9+3+\ldots+n^2+n=$
$=(1+4+9+\ldots+n^2)+(1+2+3+\ldots+n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\ldots=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

18) a
19) $\frac{n-1}{2n}$
20) page 46

# GEOMETRIA Cap. 1: INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA

## 1.1 - CONCETTI PRIMITIVI E CONCETTI DEFINITI

**CONCETTI PRIMITIVI** - Sono quei concetti talmente semplici, fondamentali ed essenziali, che **è impossibile darne una definizione a partire da concetti ancora più semplici**. Tutt'al più, dei concetti primitivi si può tentare di suggerire l'idea, facendo ricorso ad analogie e differenze rispetto ad oggetti e fenomeni del mondo che ci sta attorno. I concetti primitivi alla base della Geometria sono: **punto, retta, piano, movimento rigido**.

**PUNTO** - Intendiamo per "punto" l'ente geometrico di cui possiamo farci un'idea osservando un granellino di sabbia, oppure il piccolo segno lasciato dalla punta di una matita su un foglio.
Scrivendo questo, tuttavia, non possiamo pretendere di aver dato una definizione rigorosa del concetto di punto: ne abbiamo, semmai, tentato un approccio "ingenuo" e grossolano.
Il granellino di sabbia e la macchiolina di grafite hanno un - pur piccolo - volume, mentre quando pensiamo ad un punto geometrico dobbiamo figurarcelo come qualche cosa che NON ha volume: una posizione precisa nello spazio, non una piccola estensione di spazio. Ma … cos'è lo "spazio" ???
… Dire che è "l'insieme di tutti i punti" sarebbe un circolo vizioso!

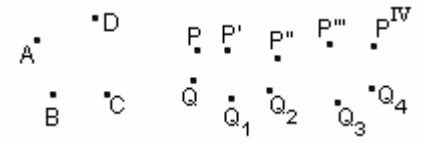



**Fig. 1**: alcuni punti

*I punti si indicano con lettere maiuscole, eventualmente provviste di:*

- *"apici"* (*apostrofi, in alto a destra; si legge* "P *primo*", "P *secondo*" …)
- *o "indici"* (*numerini, in basso a destra; qui si legge* "Q *uno*", "Q *due*" …)

**RETTA** - Un raggio di luce o un filo teso suggeriscono l'idea di "retta". Vale la stessa osservazione fatta per il "punto": il concetto di retta non può essere definito in maniera rigorosa, e gli esempi fatti possono solo servire ad abbozzare un'immagine grossolana e imprecisa della "retta" geometrica, che va pensata priva di spessore, illimitata da entrambe le parti, e costituita da punti.




**Fig. 2**: retta r (o retta AB)

*Per indicare una retta si utilizza una lettera minuscola, oppure si scrivono (di seguito) i nomi di due punti, appartenenti alla retta stessa.*

**PIANO** - Ecco un altro concetto primitivo, per rappresentare il quale si potrebbe ricorrere alla superficie di un lago che sia perfettamente calmo, o di una lavagna perfettamente liscia.
Ma il "vero" piano geometrico è illimitato in tutte le direzioni, e privo di spessore.




**Fig. 3**: piano π (o piano ABC)

*Per indicare un piano:*

*a) si usa una lettera* ( α, β, γ, δ, … , π, … ) *dell'***alfabeto greco** ⇨

*b) oppure, in alternativa, si scrivono uno di seguito all'altro i nomi di tre punti del piano stesso. Deve trattarsi però di tre punti "***non allineati***", cioè non appartenenti a una stessa retta, altrimenti per essi passerebbe non un solo piano, ma infiniti, quindi si avrebbe ambiguità.*

**CONCETTI DEFINITI** - Come dice la parola stessa, sono quei **concetti dei quali è possibile dare una definizione** precisa, in quanto **si riesce a descriverli ricorrendo a concetti più semplici (i concetti primitivi, oppure concetti definiti già precedentemente introdotti).**
Ad esempio, sono concetti definiti: semiretta, segmento, semipiano, angolo, poligono, ecc.

Definizione di **SEMIRETTA**
Dicesi "**semiretta**" **ciascuna delle due parti in cui una retta è divisa da un suo punto** (figure 4a, 4b). Tale punto si dice "**origine**" delle due semirette.

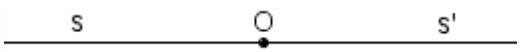



**Fig. 4a**: due semirette (s ed s' ) di origine O




**Fig. 4b:** semiretta OP

*Per indicare una semiretta si utilizzerà una lettera minuscola; oppure si scriveranno, uno dopo l'altro, i nomi di due punti della semiretta, il primo dei quali dovrà essere obbligatoriamente l'origine.*
*Ad es., la semiretta della fig. 4b potrebbe essere chiamata semiretta OP.*

Definizione di **SEGMENTO**
Dicesi "**segmento**" quella **parte di retta compresa fra due punti** della retta stessa, che vengono chiamati gli "**estremi**" del segmento considerato (fig. 5).




**Fig. 5**: segmento $\overline{AB}$

*Il "cappello di segmento" può essere omesso. Volendo, un segmento si può pure indicare con una lettera minuscola: segmento a, segmento u, …*

Definizione di **SEMIPIANO**
Dicesi "**semipiano**" **ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da una sua retta** (fig. 6). La retta in questione viene detta "**origine**", o "**retta origine**", dei due semipiani.

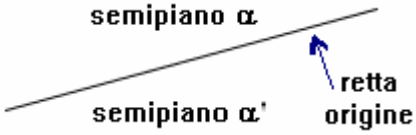



**Fig. 6**: *due semipiani* (*si indicano con lettere greche*)

## 1.2 - ASSIOMI E TEOREMI

**PROPOSIZIONE**:
sinonimo di "**affermazione**",
"**frase che asserisce qualcosa**".

Studia con impegno la Geometria!



Oltre che elegante ed attraente di per sé, nonché ricchissima di applicazioni, essa è una palestra **formidabile** per potenziare le tue capacità logiche generali.

"**ASSIOMA**" (**o** "**postulato**"): diciamo che gli "assiomi" sono
**quelle proposizioni talmente semplici e ovvie che non possono essere dimostrate a partire da affermazioni ancora più semplici, e pertanto vengono accettate per vere senza dimostrazione.**

In realtà, la matematica moderna ha ampiamente rivisto questo modo di concepire gli "assiomi", finendo per assegnare al termine "assioma" il significato più generale di "affermazione col ruolo di premessa in una teoria", e facendo distinzione fra i due termini "assioma" e "postulato".
Anche l'idea di "concetti primitivi" ha subito una radicale revisione critica.
Ma il discorso diventerebbe davvero troppo articolato e profondo; può andar bene, per ora, quanto detto.

Alla base della Geometria si pongono diversi assiomi. Ne elenchiamo alcuni; altri ne aggiungeremo in seguito.

- **Assioma: Lo spazio contiene infiniti piani**
- **Assioma: Un piano contiene infinite rette**
- **Assioma: Una retta contiene infiniti punti**
- **Assioma: Per due punti distinti passa una e una sola retta**
- **Assioma: Per 3 punti non allineati (cioè, non giacenti su di una stessa retta) passa uno e un solo piano**
- **Assioma: Se due punti di una retta appartengono a un dato piano, allora la retta giace su quel piano, nel senso che tutti i punti della retta appartengono a quel piano**

La Geometria trattata in queste lezioni si riferisce sostanzialmente alla mirabile, immortale opera intitolata "**Elementi**", redatta dal matematico **Euclide** di Alessandria intorno all'anno **300 a.C.**
Uno studio dei "fondamenti" della Geometria, che fosse condotto in modo logicamente impeccabile, metterebbe in luce diverse questioni intellettualmente stimolanti, ma anche parecchio complicate.
Questa riflessione più accurata costringerebbe a riconfigurare tutto il discorso sugli "assiomi", per rispondere a esigenze di: 1) completezza; 2) "economia"; 3) "formalizzazione"; 4) apertura a possibili generalizzazioni.
Tuttavia, dal punto di vista didattico, queste esigenze sarebbero - a parere di chi scrive - inutilmente pesanti e paralizzanti, per un primo approccio alla Geometria. Preferiamo dunque semplificare un poco la trattazione, ritenendo che lo studente appassionato possa riprendere e perfezionare il discorso sui "Fondamenti" in una fase successiva, magari interessandosi alle "**geometrie non euclidee**", o alla revisione critica di **Hilbert** (1862-1943).

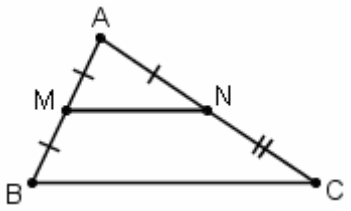
**TEOREMA: proposizione che**, contrariamente agli assiomi, **può essere dimostrata**,
cioè giustificata mediante un'opportuna sequenza di ragionamenti.

**Nel corso della dimostrazione di un teorema è possibile sfruttare:**
- **gli assiomi**
- **i teoremi già dimostrati in precedenza.**

In un teorema distinguiamo
l' "**ipotesi**" (abbreviazione: **HP,** dal greco *hypóthesis*) e la "**tesi**" (**TH,** *thésis*).
- L'ipotesi è l'insieme delle premesse da cui partiamo
  (in altre parole **l'ipotesi è ciò che supponiamo di conoscere in partenza**),
- mentre **la tesi è ciò che vogliamo dimostrare**.

Ecco un esempio.
**Teorema:** In ogni triangolo, il segmento che congiunge i punti di mezzo di due lati è parallelo al terzo lato

- L' **Ipotesi** (HP) è:
  - ho un triangolo ABC;
  - prendo il punto medio M di $\overline{AB}$ e il punto medio N di $\overline{AC}$;
  - traccio il segmento $\overline{MN}$
- La **Tesi** (TH) è: la retta MN è parallela alla retta BC




**COROLLARIO**: teorema che è **immediata conseguenza** di un teorema precedente o di un postulato.

Esempio
- **Teorema**: La somma dei tre angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto
- **Corollario**: I due angoli acuti di un triangolo rettangolo, sommati, danno un angolo retto

**LEMMA:** teorema che, indipendentemente dal fatto di essere o meno interessante di per sé,
è utile perché **consente di abbreviare la dimostrazione di un altro teorema successivo**.

# 1.3 - ANGOLI; CONGRUENZA; SOMMA DI SEGMENTI E DI ANGOLI

## Definizione di **ANGOLO**

Dicesi "**angolo**"
**ciascuna delle due parti di piano delimitate da due semirette**
("**lati**" dell'angolo) **uscenti dallo stesso punto** ("**vertice**" dell'angolo).

Quindi due semirette aventi l'origine in comune
non individuano un angolo solo, ma **DUE** angoli (vedi fig. 7a qui a destra).

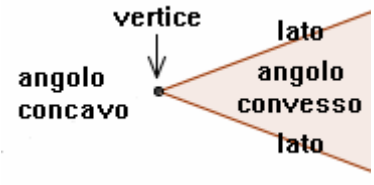



**Fig. 7a**: due angoli.
*Quello concavo è tutta la parte di piano lasciata in bianco.*

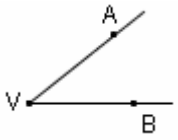



**Fig. 7b**

*La fig. 7b qui a sinistra mostra DUE angoli:*
*si indicano con le scritture* $A\hat{V}B$ *e* $A\hat{V}B_{concavo}$

Un angolo può anche essere indicato con una lettera dell'alfabeto greco minuscolo: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ...
Clicca sulla freccia per l'**alfabeto greco** completo ⇨

## Definizione di **ANGOLO PIATTO**

Un **angolo** si dice "**piatto**"
se **i suoi lati sono uno il prolungamento dell'altro**
(*sono due semirette non sovrapposte,*
*aventi la stessa origine e giacenti sulla stessa retta*).
Due semirette, che siano una il prolungamento dell'altra,
individuano evidentemente DUE angoli piatti (fig. 8).

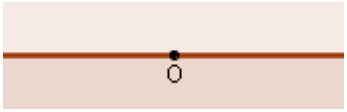
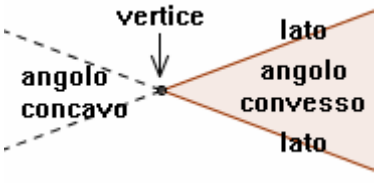



**Fig. 8:** due angoli piatti

## Definizione di **ANGOLO CONVESSO** e **ANGOLO CONCAVO**

**Un angolo (che non sia piatto) si dice "convesso" se**
**non contiene i prolungamenti dei suoi lati, "concavo" se li contiene**.

*Ponendo la definizione in questo modo si riesce ad evitare di parlare di "angolo più piccolo" e "angolo più grande", in quanto, per essere del tutto rigorosi, la nozione di "confronto fra due angoli" non è stata ancora introdotta (lo sarà tra breve).*




*L'angolo concavo*
*è quello che contiene*
*i prolungamenti dei suoi lati!*

Una possibile **definizione alternativa di angolo convesso** è la seguente:
dati tre punti non allineati A, O, B (fig. 9b ),
si dice angolo convesso $A\hat{O}B$ l'intersezione (cioè, la parte comune) fra
i ) il semipiano che ha per origine la retta OA e contiene B,
ii ) e il semipiano che ha per origine la retta OB e contiene A.

❑ *Ombreggia o colora, in figura 9b, tali due semipiani: la parte che risulterà doppiamente ombreggiata sarà l'angolo convesso* $A\hat{O}B$

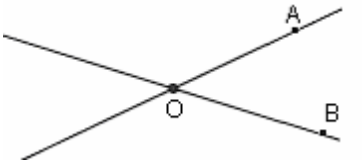



**Fig. 9b**

## Definizione di **ANGOLO GIRO** e **ANGOLO NULLO**:

sono quelli che **hanno per lati due semirette sovrapposte**.

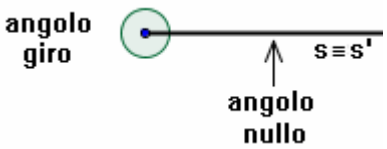



**Fig. 10 qui a sinistra:**
*Un angolo giro*
*(notare che esso riempie tutto il piano!)*
*e un angolo nullo.*
*Entrambi hanno per lati le semirette s, s'.*
*Il simbolo* ≡ *significa "coincidente con".*

## Definizione di "**CONGRUENZA**" (**ma noi diremo semplicemente "uguaglianza"**) **TRA FIGURE**

**Due figure** (per "figura" si intende un qualunque insieme di punti nel piano, o nello spazio) **si dicono "congruenti" (ma noi useremo semplicemente il termine "uguali") se è possibile, tramite un "movimento rigido", sovrapporre una di esse all'altra in modo che vengano a combaciare perfettamente.**

Il concetto di "**movimento rigido**" è un **concetto primitivo**, non definibile:
potremmo tentare di descriverlo scrivendo che un "movimento rigido" è un movimento che "non deforma" la figura che viene mossa, ma in questo modo non potremmo pretendere di dare una vera e propria "definizione" di "movimento rigido", in quanto non faremmo altro che ricondurci al concetto di "forma", che non abbiamo precedentemente definito, e la cui definizione sarebbe estremamente problematica.

Il simbolo di "congruenza" sarebbe "≅"; ma noi useremo semplicemente "=".

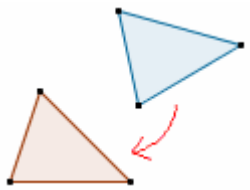


**Fig. 11**

*Questi due triangoli sono "uguali", "congruenti", "sovrapponibili in modo perfetto tramite un opportuno movimento rigido"*

### Definizione di "**segmenti consecutivi**"

Due segmenti si dicono "consecutivi" se **hanno un estremo in comune** (e, a parte questo estremo, **non hanno in comune nessun altro punto**). Ad es., i segmenti $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ della fig. 12 qui a fianco sono consecutivi.

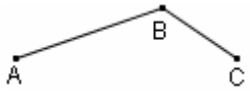



**Fig. 12:** *segmenti "consecutivi"*

### Definizione di "**segmenti adiacenti**"

Due segmenti si dicono "adiacenti" se
**sono consecutivi e inoltre giacciono sulla stessa retta**
(come i segmenti $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ della fig. 13 qui a fianco).

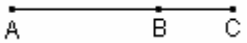
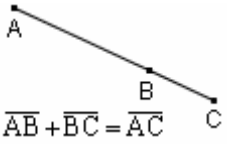



**Fig. 13:** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ *sono "adiacenti"*

### Somma e differenza di due segmenti

- Dati due segmenti **adiacenti**, **il segmento che ha per estremi i due loro estremi non sovrapposti**, viene detto "la **somma**" dei due segmenti dati (vedi fig. 14).




← **Fig. 14:** *somma di segmenti, nel caso siano adiacenti*

- Considerati poi due segmenti **non adiacenti**, come $\overline{PQ}$ ed $\overline{RS}$ della fig. 15, per sommarli si costruirà, adiacente ad uno di essi (ad es. $\overline{PQ}$), un segmento uguale all'altro (NOTA).

- E' ora ovvio definire cosa si intenda per "**differenza**" fra due segmenti. Ad esempio, con riferimento alla fig. 14, è:
  $\overline{AC}-\overline{BC}=\overline{AB}$; $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$.
  Perciò possiamo dire che la differenza $a-b$ è quel segmento $c$ tale che $c+b=a$
  (**la differenza fra due segmenti è quel segmento che, se venisse sommato col secondo, permetterebbe di riottenere il primo**).

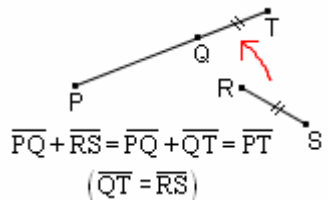



**Fig. 15 ↑:** *somma di due segmenti, nel caso generale*

NOTA
Osserviamo che quanto scritto presuppone l'accettazione di un nuovo assioma, chiamato "**assioma del trasporto del segmento**" (fig. 16):
**dati una semiretta s di origine O ed un segmento a, sulla semiretta esiste uno e un solo segmento avente un estremo in O e uguale (congruente, sovrapponibile) al segmento a.**

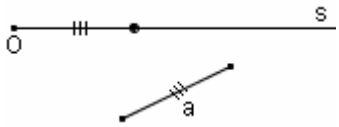



**Fig. 16:** *l'assioma del trasporto del segmento*

### Definizione di "**angoli consecutivi**"

**Due angoli si dicono "consecutivi"**
**se hanno il vertice e un lato in comune**
(e, a parte questo lato, non hanno **nessun altro punto comune**)

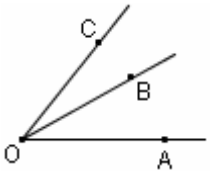



**Fig. 17:** $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ *sono consecutivi*

### Definizione di "**angoli adiacenti**"

Due angoli si dicono "**adiacenti**" se
i ) sono **consecutivi**
ii ) e inoltre **i lati non sovrapposti giacciono sulla stessa retta**

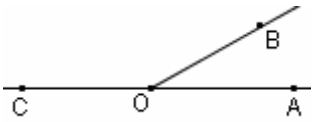



**Fig. 18:** $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ *sono adiacenti*

### Somma e differenza di due angoli

- Dati due angoli **consecutivi**, **l'angolo che ha per lati i loro due lati non sovrapposti,** viene detto "**somma**" dei due angoli dati (fig. 19). Evidentemente, se due angoli sono adiacenti, allora la loro somma è un angolo piatto.

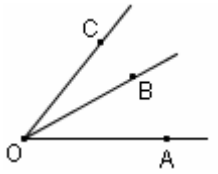



**Fig. 19:** $A\hat{O}B+B\hat{O}C=A\hat{O}C$

- Considerati ora due angoli **non consecutivi** come $\alpha$, $\beta$ di fig. 20, per sommarli si costruirà, consecutivo ad uno di essi (ad es. $\alpha$), un angolo uguale all'altro.
  Analogamente a quanto fatto per i segmenti, si accetta, a questo proposito, l' "**assioma del trasporto dell'angolo**".

- E' poi ovvio definire cosa si intenda per "**differenza**" fra due angoli. Ad esempio, con riferimento alla fig. 19, è $A\hat{O}C-A\hat{O}B=B\hat{O}C$; $A\hat{O}C-B\hat{O}C=A\hat{O}B$.
  Insomma, la differenza fra due angoli è quell'angolo che, sommato col secondo, permette di riottenere il primo.

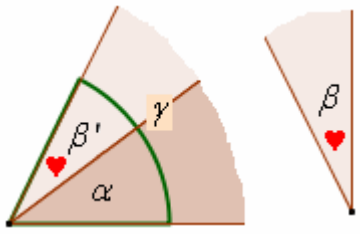



**Fig. 20:** $\alpha+\beta=\alpha+\beta'=\gamma \quad (\beta'=\beta)$

**Confronto fra segmenti** (coppia di figure 21a, 21b)

Per confrontare due segmenti $a$, $b$
(onde stabilire se $a < b$ oppure $a > b$ oppure $a = b$ )
si sottopone uno di essi ad un movimento rigido
che lo sovrapponga parzialmente all'altro, in modo che
un estremo di $a$ venga a coincidere con un estremo di $b$.
A questo punto, quello, fra i due segmenti,
che "scappa fuori" dall'altro, sarà il maggiore.

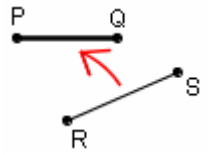
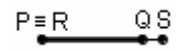



**Fig. 21a**




*In questo caso è*
$\overline{RS} > \overline{PQ}$

**Fig. 21b**

**Confronto fra angoli** (coppia di figure 21c, 21d)

Analogamente, per confrontare due angoli $\alpha$, $\beta$
(onde stabilire se $\alpha < \beta$ oppure $\alpha > \beta$ oppure $\alpha = \beta$ )
si sottopone uno di essi ad un movimento rigido
che lo sovrapponga parzialmente all'altro,
in modo che un lato di $\alpha$ venga a coincidere con un lato di $\beta$.
A questo punto, quello, fra i due angoli,
che "scappa fuori" dall'altro, sarà il maggiore.

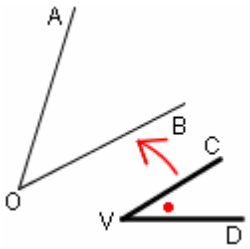



**Fig. 21c**

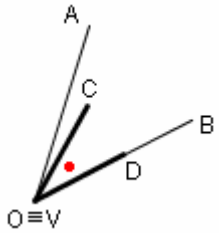



**Fig. 21d**

*In questo caso è*
$A\hat{O}B > C\hat{V}D$

**Assioma: la disuguaglianza fra segmenti gode della "proprietà transitiva":** $(\mathbf{a < b} \wedge \mathbf{b < c}) \rightarrow \mathbf{a < c}$ .
**Analogamente per la disuguaglianza fra angoli**.

**Multipli di un segmento**

**Sommando un segmento s con sé stesso** (o con un segmento uguale a sé stesso), **più volte, si ottengono i cosiddetti "multipli" del segmento dato:**
si tratta dei segmenti $s+s=2s$, $s+s+s=3s$, $s+s+s+s=4s$, ...

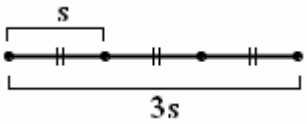



**Fig. 22:** $s+s+s=3s$

**Sottomultipli di un segmento**

**I sottomultipli di un segmento sono la metà, la terza parte, la quarta parte**, …
del segmento dato. L'n-esima parte di un segmento s si indica col simbolo $\frac{1}{n}s$
ed è quel segmento a , tale che $na = \underbrace{a+a+...+a}_{\text{n addendi}} = s$ .

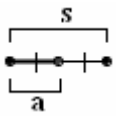



**Fig. 23:**
$2a = s$
*quindi*
$a = \frac{1}{2}s$

**Assioma della divisibilità indefinita dei segmenti:**

**dato un segmento s e un numero naturale non nullo qualsiasi n, esiste sempre il segmento** $\frac{1}{n}s$ .

Analogamente si definiscono i multipli e i sottomultipli di un angolo;
si accetta poi l'assioma della **divisibilità indefinita degli angoli**.

Definizione di **angolo retto**

E' **la metà di un angolo piatto**.
Gli angoli retti si segnano preferibilmente con un **quadratino**.



**Fig. 24:**
*un angolo retto*
(*ed un altro, non segnato, al suo fianco*)

Definizione di **rette perpendicolari**

Due rette si dicono "**perpendicolari**", o anche "**ortogonali**", se **incontrandosi formano 4 angoli retti**.
Il simbolo di perpendicolarità è una " T " rovesciata.

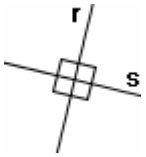



**Fig. 25:** $r \perp s$

**Misura degli angoli**

Si è deciso di assumere come unità di misura per gli angoli
la **trecentosessantesima parte dell'angolo giro**, chiamata "**angolo grado**" o semplicemente "**grado**".
Di conseguenza un angolo giro misurerà 360°, un angolo piatto 180°, un angolo retto 90° e un angolo nullo 0°.

Definizione di
**angoli complementari, supplementari, esplementari**

Due angoli si dicono:

- **complementari** se **danno per somma un angolo retto** ( = 90°)
- **supplementari** se **danno per somma un angolo piatto** ( = 180°)
- **esplementari** se **danno per somma un angolo giro** ( = 360°)




**Fig. 26a:**
$\alpha + \beta = 90°$
*quindi* $\alpha, \beta$ *sono complementari*

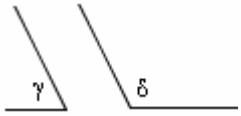



**Fig. 26b:**
$\gamma + \delta = 180°$
*quindi* $\gamma, \delta$ *sono supplementari*

Definizione di **bisettrice di un angolo**

Così viene chiamata **la semiretta che, partendo dal vertice, divide l'angolo stesso in due parti fra loro uguali**.

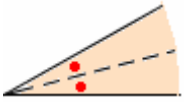


**Fig. 27:**
*un angolo e - tratteggiata - la sua bisettrice*

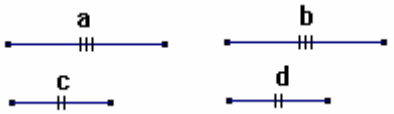
## 1.4 - ASSIOMI SU UGUAGLIANZE, DISUGUAGLIANZE, SOMME E DIFFERENZE

- **L'uguaglianza (congruenza) fra figure geometriche gode delle seguenti tre proprietà (assiomi):**
  - **PROPRIETA' RIFLESSIVA**
    Ogni figura è uguale a sé stessa: $\forall \mathbf{A},\ \mathbf{A = A}$ (*il simbolo* $\forall$ *significa "per ogni, per qualsiasi"*)
  - **PROPRIETA' SIMMETRICA**
    Se una figura **A** è uguale ad una figura **B**, allora anche **B** è uguale ad **A**: $\mathbf{A = B \to B = A}$
  - **PROPRIETA' TRANSITIVA**
    Se una figura **A** è uguale ad una figura **B**, e la figura **B** a sua volta è uguale ad una figura **C**, allora **A** è uguale a **C**: $(\mathbf{A = B \wedge B = C}) \to \mathbf{A = C}$ (in altre parole, **due figure uguali ad una terza sono uguali fra loro**).

  Useremo sovente la freccia $\to$ per schematizzare "SE … ALLORA …" (oppure "… IMPLICA …") o in certi casi "QUINDI, DI CONSEGUENZA"

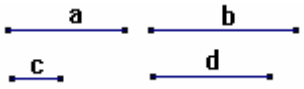
- **La somma di segmenti gode delle proprietà commutativa e associativa. Idem per la somma di angoli.**
- **Somme, e differenze, di segmenti uguali sono uguali**. Vale a dire:
  $(a = b \wedge c = d) \to a + c = b + d;$ $\quad (a = b \wedge c = d) \to a - c = b - d$ (qui si suppone $a > c$)
  Questo assioma può essere anche enunciato dicendo che
  **se due uguaglianze fra segmenti sono entrambe vere, allora addizionando o sottraendo membro a membro tali due uguaglianze si ottiene ancora un'uguaglianza vera**:

$$\frac{\begin{array}{c} a = b \\ c = d \end{array}}{a + c = b + d} \qquad \frac{\begin{array}{c} a = b \\ c = d \end{array}}{a - c = b - d}$$




- **Un assioma analogo al precedente vale per gli angoli**; quindi:
  somme (e differenze) di angoli uguali sono uguali; oppure, in altre parole: addizionando (o sottraendo) membro a membro due uguaglianze vere fra angoli si ottiene ancora un'uguaglianza vera.
- Se quattro segmenti a, b, c, d sono tali che $a < b$ e $c < d$, allora $a+c < b+d$;
  e se quattro segmenti a, b, c, d sono tali che $a > b$ e $c > d$, allora $a+c > b+d$
  **In altre parole, sommando membro a membro due disuguaglianze vere (e aventi lo stesso verso, cioè: o entrambe col $<$, o entrambe col $>$) fra segmenti, si ottiene ancora una disuguaglianza vera (con lo stesso verso).**

  *Osservazione: invece non è lecito SOTTRARRE membro a membro due disuguaglianze dello stesso verso, nel senso che la disuguaglianza che così si otterrebbe non è sempre vera: può essere vera o falsa, a seconda dei casi. Ad es., per la quaterna di segmenti della figura qui a fianco, sarebbe falsa.*

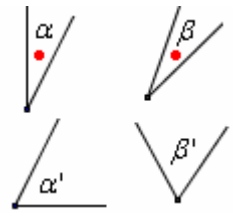



*Per i 4 segmenti a, b, c, d sopra raffigurati, risulta $a<b$, $c<d$. Bene! E' vero ora che $a+c<b+d$, mentre la disuguaglianza che si otterrebbe sottraendo membro a membro, ossia $a-c<b-d$, è FALSA.*

- **Un assioma analogo al precedente vale per gli angoli.**
- **Addizionando, o sottraendo, uno stesso termine da entrambi i membri di una disuguaglianza vera, si ottiene ancora una disuguaglianza vera:** $a < b \to a + c < b + c$; $a < b \to a - c < b - c$. Idem col $>$.
- **Segmenti doppi di segmenti uguali sono uguali**: $a = b \to 2a = 2b$
- **Metà di segmenti uguali sono uguali:** $a = b \to \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b$
- **Più in generale**: $a = b \to ma = mb$; $\frac{1}{n}a = \frac{1}{n}b$; $\frac{m}{n}a = \frac{m}{n}b$ $\left(m,n \in \mathbb{N}^*;\ \text{la scrittura } \frac{m}{n}a \text{ significa } m \cdot \frac{1}{n}a\right)$
- **Assiomi analoghi ai tre precedenti valgono per gli angoli**. Quindi:
  angoli doppi di angoli uguali sono uguali; metà di angoli uguali sono uguali;
  e in generale, moltiplicando per uno stesso numero razionale positivo entrambi i membri di un'uguaglianza vera fra angoli, si ottiene ancora un'uguaglianza vera.
- Per i segmenti, leggendo prima i tre simboli "sopra" ($<$) poi i tre "sotto" ($>$): $a \lesseqgtr b \to 2a \lesseqgtr 2b$ e $\frac{1}{2}a \lesseqgtr \frac{1}{2}b$;
  più in generale, $a \lesseqgtr b \to ma \lesseqgtr mb$, $\frac{1}{n}a \lesseqgtr \frac{1}{n}b$, $\frac{m}{n}a \lesseqgtr \frac{m}{n}b$ $\left(m,n \in \mathbb{N}^*;\ \text{la scrittura } \frac{m}{n}a \text{ significa } m \cdot \frac{1}{n}a\right)$.
  E assiomi analoghi valgono per gli angoli.
- "**Tricotomia**": dati due segmenti a, b, si verifica una e una sola delle tre eventualità $a<b$, oppure $a=b$, o $a>b$.
  Analogamente per gli angoli.
- "**Principio di sostitutività**": in una catena di uguaglianze (o di disuguaglianze), è sempre lecito sostituire al posto di un segmento, un altro segmento che si sa (per ipotesi, o per dimostrazione precedente) essere uguale al primo. Lo stesso vale anche per gli angoli.

## 1.5 - DIMOSTRIAMO I PRIMI TEOREMI

**TEOREMA**
**Se due angoli sono complementari di due angoli uguali (o, in particolare: dello stesso angolo), allora sono uguali**.
Brevemente:
**ANGOLI COMPLEMENTARI DI DUE ANGOLI UGUALI (O DELLO STESSO ANGOLO) SONO UGUALI**




**Ipotesi (HP):**
$\alpha = \beta$
$\alpha'$ complementare di $\alpha$
$\beta'$ complementare di $\beta$

**Tesi (TH):**
$\alpha' = \beta'$

**Dimostrazione**

Poiché $\alpha'$ è complementare di $\alpha$, si ha $\alpha + \alpha' = 90° \rightarrow \boxed{\alpha' = 90° - \alpha}$;

poiché $\beta'$ è complementare di $\beta$, si ha

$$\beta + \beta' = 90° \rightarrow \boxed{\beta' =} \; 90° - \beta \underset{(\text{per HP, } \alpha=\beta)}{=} \boxed{90° - \alpha}.$$

Quindi $\alpha'$ e $\beta'$ sono uguali, perché entrambi uguali a $90° - \alpha$.

**Brevemente:** $\alpha' \underset{(\text{HP: } \alpha+\alpha'=90°)}{=} 90° - \alpha \underset{(\text{HP: } \alpha=\beta)}{=} 90° - \beta \underset{(\text{HP: } \beta+\beta'=90°)}{=} \beta'$, **C.V.D.**

Le lettere puntate **C.V.D.** stanno per **"Come Volevasi Dimostrare".** Spesso la conclusione della dimostrazione di un teorema viene "siglata" così.

Osservazione: a ben guardare, nelle catene sopra scritte, quando si è rimpiazzato $\alpha$ con $\beta$, si è applicato il "Principio di sostitutività" (vedi pag. precedente).

*Un altro "stile" per esporre la dimostrazione avrebbe potuto essere quello che riportiamo qui a destra* →

$$\frac{\begin{array}{c} 90° = 90° \\ \alpha = \beta \quad (\text{HP}) \end{array}}{\underbrace{90° - \alpha}_{=\alpha'} = \underbrace{90° - \beta}_{=\beta'}}$$

$(\text{HP}: \alpha + \alpha' = 90°) \qquad (\text{HP}: \beta + \beta' = 90°)$

*In modo del tutto analogo, semplicemente scrivendo sempre 180° al posto di 90°, si dimostra il seguente*

**TEOREMA**
**Se due angoli sono supplementari di due angoli uguali (o, in particolare: dello stesso angolo), allora sono uguali.**
Brevemente**:**
**ANGOLI SUPPLEMENTARI DI DUE ANGOLI UGUALI (O DELLO STESSO ANGOLO) SONO UGUALI**

Definizione di angoli "**opposti al vertice**"

**Si dicono "opposti al vertice" due angoli convessi tali che i lati dell'uno siano i prolungamenti dei lati dell'altro**.
*In pratica, quando due rette si tagliano, si formano quattro angoli, che sono a due a due opposti al vertice.*

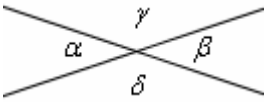
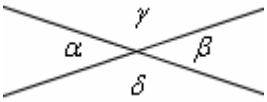



**Fig. 29**:
*α e β sono opposti al vertice; così pure, lo sono γ e δ*

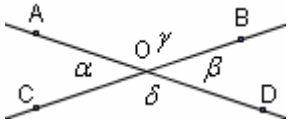
**TEOREMA: SE DUE ANGOLI SONO OPPOSTI AL VERTICE, ALLORA SONO UGUALI**




HP: $\alpha, \beta$ opposti al vertice
TH: $\alpha = \beta$

**Dimostrazione**

Conseguenza di un teorema già acquisito: $\alpha, \beta$ sono uguali perché supplementari dello stesso angolo $\gamma$
*Oppure, senza scomodare teoremi precedenti*:



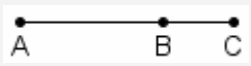

$$\alpha = C\hat{O}A = C\hat{O}B - A\hat{O}B =$$
$$= 180° - A\hat{O}B =$$
$$= A\hat{O}D - A\hat{O}B = D\hat{O}B = \beta$$

Le CATENE sono molto usate nelle dimostrazioni.
**In una catena ben impostata ciascun "anello" deve essere ricavato A PARTIRE DALL' "ANELLO" CHE LO PRECEDE**.

**Nel seguito, noi ci limiteremo a fare della "geometria piana", ossia a studiare figure geometriche, o gruppi di figure, i cui punti giacciano tutti su di uno stesso piano**.

## 1.6 - AIUTO PER IL RIPASSO (le risposte sono in fondo alla pagina … tienile coperte!)

1) Si può dire che i due segmenti $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ in figura sono "consecutivi"? E che sono "adiacenti"?



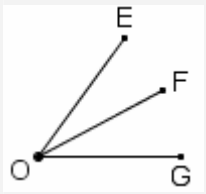

2) Due angoli adiacenti sono sempre supplementari? Due angoli supplementari sono sempre adiacenti?

3) Quanto misurano due angoli complementari, che siano uno il triplo dell'altro?

4) E' maggiore un angolo concavo o uno convesso?

5) Due angoli adiacenti sono sempre anche consecutivi?
Due angoli consecutivi sono sempre anche adiacenti?

6) In figura, $E\hat{O}G - F\hat{O}G = ?$




7) Disegna il multiplo secondo 4 e il sottomultiplo secondo 4 del segmento in figura.




8) Il fatto che un segmento si possa suddividere in un numero a piacere di parti uguali è affermato dall'assioma cosiddetto della …

9) Quanto misura l'esplementare del supplementare di un angolo di 30°?

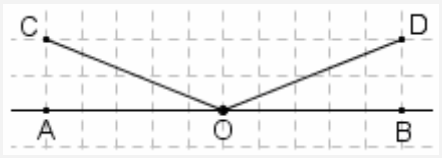
10) Cosa dice la proprietà transitiva della relazione ">" fra segmenti?

11) E' sempre lecito sommare membro a membro due disuguaglianze dello stesso verso fra segmenti? E sottrarle membro a membro?

12) Cosa dice il "Principio di Sostitutività"?

13) Esprimi schematicamente, usando il simbolo $\rightarrow$, l'assioma "metà di segmenti uguali sono uguali"

14) I due angoli $A\hat{O}C$, $B\hat{O}D$ in figura sono opposti al vertice?




15) Dimostra, schematicamente, che due angoli $\alpha'$ e $\beta'$ rispettivamente complementari di due angoli $\alpha$ e $\beta$ uguali fra loro, sono pure uguali fra loro.

16) L'ipotesi, in un teorema, è una supposizione che si fa, e, se la tesi è vera, allora vuol dire che era vera anche l'ipotesi. Giusto?

17) Possono due semirette distinte giacere sulla stessa retta, ma non essere una il prolungamento dell'altra?

18) C'è un assioma, che parla di una retta della quale due punti appartengono ad un piano. Cosa afferma quell'assioma?

19) Non è esatto, perché è incompleto, affermare che "tre punti distinti individuano un piano". Cosa bisogna aggiungere?

20) Può un assioma avere un lemma? E avere un corollario?

**RISPOSTE**

1) No, perché hanno in comune anche altri punti, oltre all'estremo C; no: se non sono consecutivi, non possono essere nemmeno adiacenti 2) Sì; no 3) 22,5° e 67,5° (22° 30', 67° 30') 4) Concavo 5) Sì; no 6) $E\hat{O}F$ (o $F\hat{O}E$) 7) 8 quadretti, ½ quadretto 8) "divisibilità indefinita del segmento" 9) 210° 10) $a > b \wedge b > c \rightarrow a > c$
11) Sommarle, sì (se sono vere entrambe, si è certi di ottenere una disuguaglianza, con lo stesso verso, vera); sottrarle, no 12) "in una catena di uguaglianze, o di disuguagl., fra segmenti (angoli), è sempre lecito sostituire al posto di un segmento (angolo) un altro segmento (angolo) che si sa, per HP o per dim., essere uguale al primo"
13) $a = b \rightarrow \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b$ 14) No 15) $\alpha' + \alpha = 90° \wedge \beta' + \beta = 90° \wedge \alpha = \beta \rightarrow \alpha' = 90° - \alpha = 90° - \beta = \beta'$
16) Assolutamente no. In un teorema si fa vedere che, se vale l'ipotesi, allora sicuramente vale anche la tesi
17) Certamente: basta che non abbiano l'origine in comune! 18) Afferma che anche tutti gli altri punti di quella retta apparterranno a quel piano 19) Bisogna aggiungere: "a patto che i punti in questione non siano allineati, cioè non giacciano sulla stessa retta" 20) Un lemma, no, perché significherebbe che l'assioma viene dimostrato a partire da quel lemma, mentre un assioma NON viene dimostrato (sarebbe, in questo caso, un teorema); un corollario, sì, perché un assioma può benissimo avere delle conseguenze immediate o quasi immediate

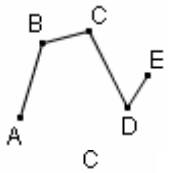
# Cap. 2: I TRIANGOLI

## 2.1 - GENERALITA'

**Una sequenza di segmenti ciascuno consecutivo a quello che lo precede, costituisce una "SPEZZATA".**
Sinonimo di "spezzata" è "**POLIGONALE**".

Una spezzata o poligonale può essere
- ✓ "**non intrecciata**" (come in fig. 29a)
- ✓ o "**intrecciata**" (fig. 29b);
- ✓ può essere "**aperta**" (fig. 29c)
- ✓ o "**chiusa**" (fig. 29d)

**Fig. 29a**



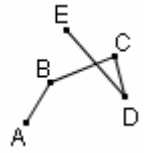
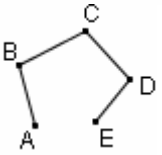




**Fig. 29b**

**Fig. 29c**



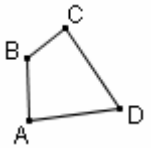




**Fig. 29d**

**Si dice "POLIGONO" quella parte di piano che è delimitata da una poligonale non intrecciata chiusa**.

Noi considereremo quasi esclusivamente poligoni "**convessi**"; un poligono si dice invece "**concavo**" quando esiste almeno un segmento, con gli estremi appartenenti al poligono, che esca fuori dal poligono (figure 30a, 30b).

Un poligono con 3 lati (e quindi anche 3 angoli) si dice **triangolo**; se ha 4 lati, si dice **quadrilatero** (o quadrangolo). Si parla poi di: **pentagono, esagono, eptagono, ottagono, ennagono, decagono, undecagono, dodecagono**; poligono di 13, 14, 15, 16 … ecc. lati.

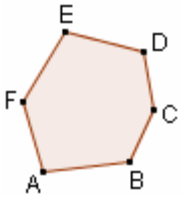



**Fig. 30a:**
ABCDEF
è **convesso**

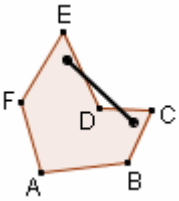



**Fig. 30b:**
ABCDEF
è **concavo**

Un **TRIANGOLO** si dice **ISOSCELE** se ha (**almeno**) **due lati uguali**.
Questi vengono detti "**LATI OBLIQUI**" o semplicemente "**LATI**".
Il lato rimanente viene detto "**BASE**".
Gli angoli aventi per vertici gli estremi della base (*nella figura qui a fianco, sono gli angoli* $\hat{A}$ *e* $\hat{B}$: *quando non può esserci ambiguità, per indicare un angolo è consentito di utilizzare anche la sola lettera del suo vertice*) sono chiamati "**ANGOLI ALLA BASE**", e l'angolo rimanente, quello formato dai lati obliqui, è detto "**ANGOLO AL VERTICE**".

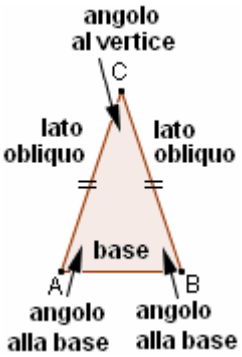



**Fig. 31a**
ABC è isoscele, perché $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Un triangolo si dice **EQUILATERO** se **ha tutti e tre i lati uguali**.
Il triangolo equilatero è un caso particolare di triangolo isoscele: può infatti considerarsi come un triangolo, che è **isoscele in tre modi diversi (si può assumere come base uno qualsiasi dei tre lati).**

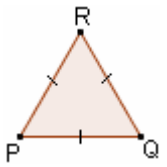



**Fig. 31b**
PQR è un triangolo equilatero, perché $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RP}$

**In un triangolo**:

a) si dice "**MEDIANA**" un segmento che, partendo da un vertice, va a finire nel punto medio ( = punto di mezzo) del lato opposto

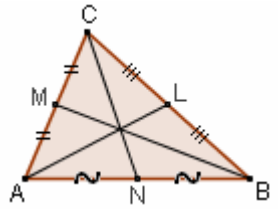



**Fig. 32:**
le tre mediane

b) si dice "**BISETTRICE**" quella parte della bisettrice di un angolo interno, che è compresa fra il vertice dell'angolo e il lato opposto

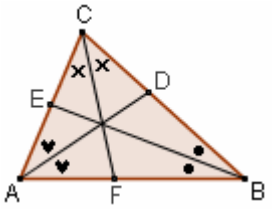
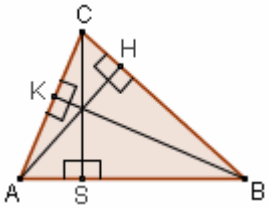
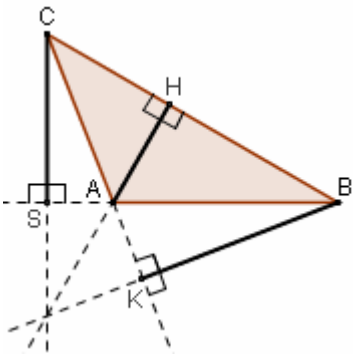



**Fig. 33:**
le tre bisettrici

c) si dice "**ALTEZZA**" un segmento che parte da un vertice e cade perpendicolarmente sul lato opposto, o, eventualmente, sul suo prolungamento




**Figg. 34a, 34b**:
le tre altezze $\overline{AH}$, $\overline{BK}$, $\overline{CS}$

*Un triangolo ha tre mediane, tre bisettrici, tre altezze.*
*Curioso! Se si disegnano con cura le tre mediane, sembra proprio che queste passino per uno stesso punto.*
*Idem per le bisettrici; idem per le altezze (o, nel caso del triangolo ottusangolo, i loro prolungamenti).*
*Sarà vero questo? Le mediane, ad esempio, passano realmente tutte e tre per uno stesso punto,*
*oppure c'è soltanto una zona in cui passano "vicinissime"? Tu cosa ne dici?*
*A questa domanda saremo in grado di dare una risposta definitiva al capitolo 5.*

## 2.2 - IL FREEWARE GEOGEBRA

C'è un delizioso programma per computer scaricabile legalmente *a costo zero* da Internet
(è **freeware**, ossia software di cui l'autore permette l'uso gratuito, pur mantenendone la proprietà);
esso dà la possibilità di **disegnare figure geometriche "dinamiche"**
(ad esempio, trascinando col mouse un vertice di un triangolo del quale si siano tracciate le altezze,
cambia la forma del triangolo con le altezze che *si mantengono perpendicolari* alle rispettive basi),
di **tracciare grafici di funzioni**, di **visualizzare luoghi geometrici**, ecc.

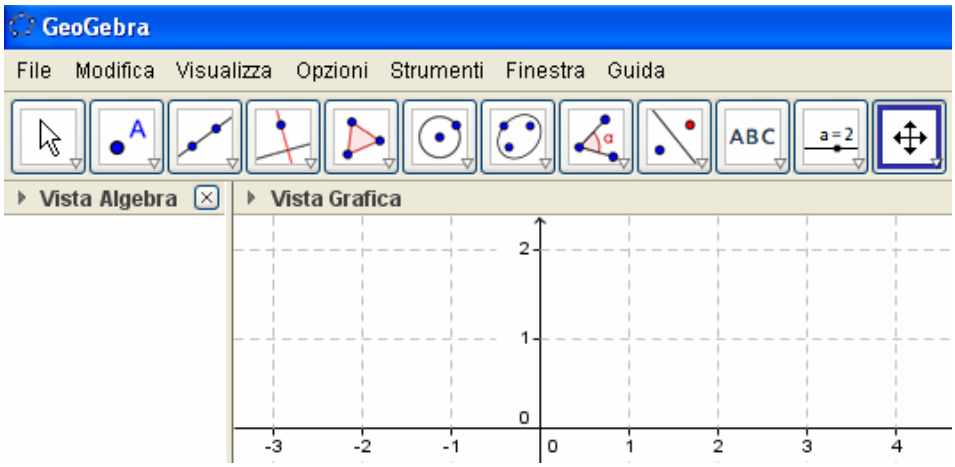
Il software si chiama **GeoGebra** ed è opera di un geniale austriaco di nome **Markus Hohenwarter**:
a lui vada la gratitudine e l'ammirazione della comunità, che può liberamente utilizzare uno strumento efficiente, agile, leggiadro nella grafica e nei colori, senza pagare alcunché (con la possibilità, ma non l'obbligo, di versare un'**offerta** o di acquistare online le magliette e i cappellini col logo "GeoGebra").

Vai su www.geogebra.org
e scarica il programma sul tuo computer,
cliccando su "**Download"**;
al termine di queste semplici operazioni, sul desktop
comparirà la caratteristica **icona di GeoGebra**
raffigurante una curva chiusa per 5 punti.



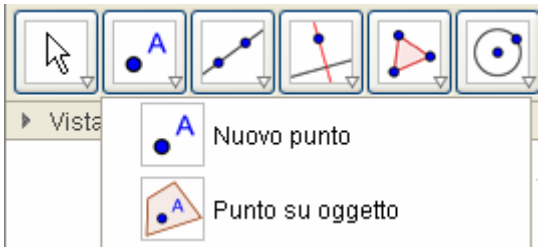

Doppiocliccando l'icona, ecco che il programma si avvia e possiamo cominciare a divertirci.

Vedremo subito
una schermata come quella
raffigurata qui a fianco;
la griglia all'interno
del riferimento cartesiano,
e il riferimento stesso,
possono essere fatti
comparire/scomparire
cliccando
il tasto destro del mouse
in una posizione qualsiasi
dell'area "Vista Grafica",
e scegliendo
l'opzione desiderata.



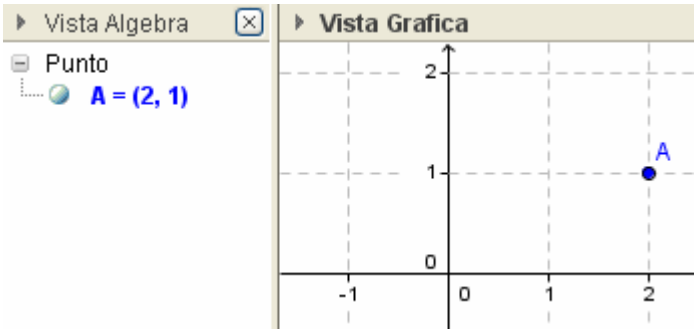

**Le icone in alto**
**(con la freccia, il punto, la retta per due punti, la perpendicolare, eccetera)**
**sono tali che cliccandoci sopra**
(più precisamente: cliccando **sul triangolino in basso a destra** di quel "tasto")
**si apre una tendina con le varie possibilità che il tasto stesso ci offre**.

Clicchiamo ad esempio
sulla seconda icona da sinistra, quella col punto,
e ci verrà proposta una lista con più possibili scelte;
selezioniamo "**Nuovo Punto**" e da quel momento,
quando, spostandoci col mouse sul "foglio da disegno",
faremo un "clic",
verrà creato un punto
a cui sarà automaticamente attribuito il nome "A".
Se facciamo altri clic …
ne nasceranno altri punti, etichettati B, C, D, ecc.




E osserveremo che nella finestra "Vista Algebra"
verrà automaticamente generata
la lista di tutti gli "oggetti"
via via disegnati.

**Accanto a ogni punto,** nella stessa finestra,
**GeoGebra ci darà pure**
**le sue coordinate cartesiane**
(indipendentemente dal fatto
che gli assi del riferimento
siano visibili oppure siano stati nascosti).

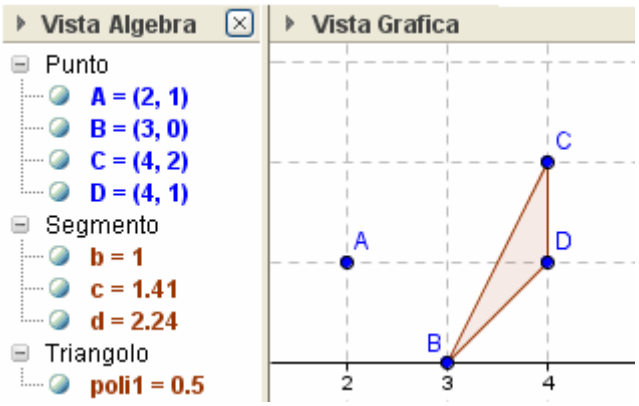


Vogliamo **cambiare il nome di un determinato punto, o modificarne il colore, o le dimensioni**?
Facile: ci posizioneremo sul punto, cliccheremo il tasto destro del mouse,
e vedremo comparire un menu a tendina che avrà una voce denominata "Proprietà".
Basterà un clic su di essa per avere tutta una gamma di scelte a disposizione.




Disegniamo ora un triangolo:
clic sul quinto tasto da sinistra,
poi tre clic sul foglio da disegno,
più un ultimo clic sul primo fra i tre
punti disegnati (per "chiudere" il triangolo),
ed è fatta.

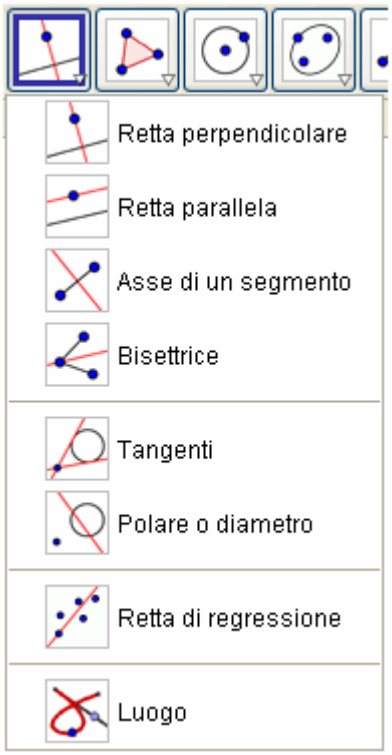




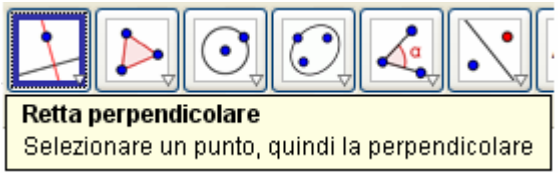

- Osserviamo la finestra "Vista Algebra":
  **i tre lati del triangolo sono stati automaticamente etichettati in modo "intelligente"** … nel senso che, se il triangolo era BCD, i lati opposti ai tre vertici sono stati denominati b, c, d, in conformità con un'abitudine diffusa e molto utile in Geometria, quella di indicare i lati di un triangolo con le lettere minuscole, corrispondenti alle lettere maiuscole che indicano i vertici opposti.

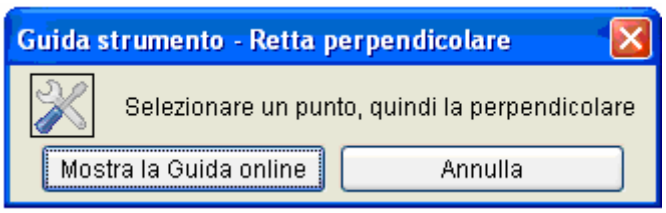
  Possiamo vedere, fra l'altro, che GeoGebra ha già provveduto ad evidenziare, in "Vista Algebra", oltre alle **coordinate dei tre vertici**, anche le **lunghezze dei lati**, e persino l'**area** del nostro triangolo!

**Vogliamo, nel triangolo disegnato, tracciare un'altezza?**
Guardiamo i tasti della barra in alto …
Quale, plausibilmente, farà al caso nostro?
Ovviamente, quello con la figura di una perpendicolare!
Clicchiamo allora su questo tasto (sul triangolino a destra in basso)
e in effetti, nella tendina che si apre, troviamo l'opzione desiderata.



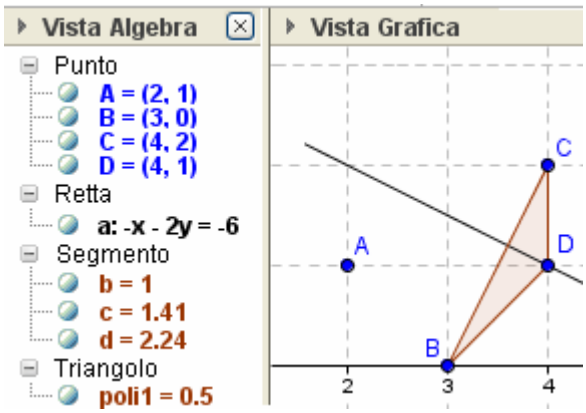

Come procedere, adesso?
La risposta è estremamente intuitiva; tuttavia, se noi
stiamo fermi, col puntatore del mouse, al di sopra dell'icona,
oppure, dopo aver cliccato sull'opzione "Retta Perpendicolare",
premiamo, sulla tastiera del computer, il "tasto funzione" F1,
osserveremo che GeoGebra ci offre un "**Help**" **adeguato al contesto**!



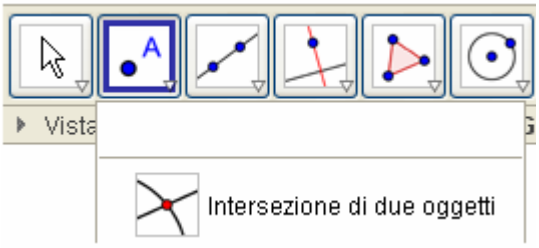

Beh … qui forse il messaggio, per essere più chiaro,
avrebbe dovuto semmai menzionare
non "*la perpendicolare*", ma piuttosto "*la retta alla quale si vuole che giunga la perpendicolare*".

Pazienza … abbiamo comunque capito l'antifona:
dobbiamo cliccare sul punto D e sulla retta
su cui giace il segmento $\overline{BC}$, e con ciò
la nostra perpendicolare verrà disegnata.

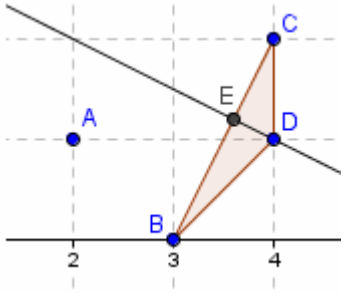



*La brava "Vista Algebra"*
*ci fornisce pure, immediatamente,*
*l'equazione che corrisponde alla retta tracciata*
*nel riferimento cartesiano* (*sia esso visibile o no*)
*all'interno del quale stiamo lavorando.*

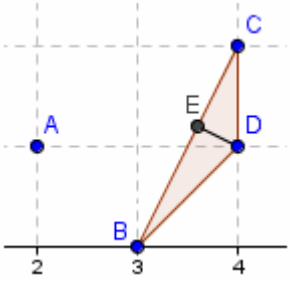
Se a questo punto ci interessa
non tanto la perpendicolare come retta,
quanto quel "pezzo" di essa che va dal vertice al lato opposto,
insomma:
il *segmento* che fa da altezza relativamente al lato $\overline{BC}$,
dovremo procedere nel modo che segue:




1) Clic sul secondo tasto da sinistra,
   poi clic su "**Intersezione di due oggetti**"
2) Un clic sulla perpendicolare disegnata, un altro su $\overline{BC}$,
   ed ecco che compare il loro punto di intersezione
   (indicato con E nelle figure successive)




3) Clic sul terzo tasto da sinistra, poi clic su "Segmento tra due punti"
4) Clic su D, clic su E ed ecco che GeoGebra crea come suo "oggetto"
   il segmento $\overline{DE}$, che in questo momento è coperto dalla retta DE
   ma la cui misura è comparsa regolarmente nella finestra "Algebra"
5) Posizioniamo il mouse sulla retta DE, clicchiamo col destro,
   **togliamo il segno di spunta da "Mostra oggetto"**
   e l'oggetto in questione ( = la retta perpendicolare) verrà nascosto
   (*nascosto*, reso invisibile, NON cancellato,
   altrimenti se ne andrebbero via anche
   il punto E e il segmento $\overline{DE}$ che da esso dipendono!)
   e quello che vedremo in figura sarà ciò che desideravamo,
   ossia il segmento che va da D fino a E, non più ricoperto dalla retta
   perpendicolare, che esiste ancora ma è stata resa invisibile all'occhio.




A te il piacere di scoprire come evidenziare gli angoli retti $D\hat{E}B$ e $D\hat{E}C$.

Sono certo che ce la farai senza ulteriori indicazioni,
scegliendo il tasto opportuno e utilizzando l' "Help"
ottenibile ad esempio con la pressione di F1 sulla tastiera.

Vedrai alla fine che, essendo gli angoli in gioco
conseguenza del tracciamento di una perpendicolare,
GeoGebra li contrassegnerà col tipico "quadratino di angolo retto"
(un angolo generico viene invece evidenziato con un archetto).

**A questo punto, trascina col mouse uno dei vertici del triangolo BCD:**
♪ **il triangolo si deformerà …**
♫ **… ma l'altezza resterà altezza, nel senso che la sua perpendicolarità rispetto a $\overline{BC}$ si conserverà !!!**

Avrai compreso che GeoGebra è un programma dall'utilizzo facile, piacevole e intuitivo …
Sta a te, se vuoi, impararne le tantissime funzionalità provando e riprovando …
Fra l'altro, il **menu** "**Guida"** ti permette di reperire tutte le spiegazioni che vuoi …




- Se hai sbagliato qualcosa o ti penti della scelta fatta e vuoi "tornare indietro",
  la combinazione **Ctrl+Z** da tastiera **annulla l'ultima operazione (e può essere eseguita più volte).**
  Per eliminare un oggetto lo si può anche selezionare col mouse per poi premere "Canc" sulla tastiera.
- Interessante il ruolo del **tasto "Copia Formato"**! Prova a servirtene;
  ti piacerà la sua grande comodità per replicare le caratteristiche di un oggetto su di un altro.



**ESERCIZI**



1) Utilizza GeoGebra per disegnare un triangolo,
   con le sue tre altezze, le sue tre mediane e le tre bisettrici.
   Personalizza poi esteticamente il file con colori, etichette, spessori,
   scritte esplicative, ecc. ecc., che siano di tuo gradimento.

2) Traccia con GeoGebra due circonferenze, di centri O e C,
   e indica con A, B i punti in cui esse si intersecano.
   Disegna il quadrilatero OACB, e traccia ("Circonferenza per tre punti")
   la circonferenza che passa per O, A e B, poi quella che passa per C, A e B.

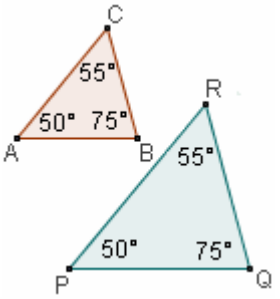
## 2.3 - I "CRITERI DI UGUAGLIANZA"; IL TRIANGOLO ISOSCELE

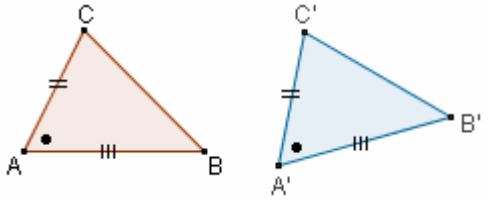
**TEOREMA ("1° Criterio di uguaglianza dei triangoli")**
**Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo fra essi compreso, allora sono uguali.**

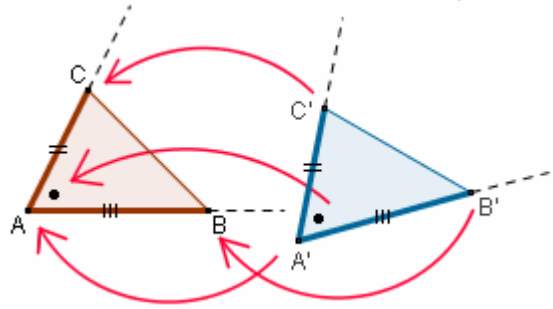
*1° Criterio*

Questo teorema afferma, in pratica, quanto segue.
Se la compagna di banco mi dice: "non sapevo cosa fare e ho ritagliato da un foglio di carta un triangolo con un lato di 10 cm, un altro lato di 12 cm, e l'angolo compreso di 45° ";
e la Segretaria mi dice: "sulla mia scrivania ho un fermacarte triangolare, con un lato di 10 cm, un altro lato di 12 cm, e l'angolo compreso di 45° "
allora io con assoluta sicurezza, senza bisogno di sapere nient'altro, posso affermare che i due triangoli sono uguali in tutto e per tutto, cioè congruenti, cioè perfettamente sovrapponibili: in particolare, posso esser certo che i due triangoli hanno rispettivamente uguali anche il lato rimanente e i due angoli rimanenti, ossia quegli elementi sui quali non mi era stata data nessuna informazione.

Per capire ancor meglio, facciamo un raffronto con la situazione seguente, che è invece **profondamente diversa**.
Di due triangoli, supponiamo di sapere che hanno i tre **angoli** rispettivamente uguali (ad es., sia l'uno che l'altro abbiano gli angoli che misurano: 50°, 75°, 55°).
Possiamo affermare con sicurezza che sono uguali, congruenti, sovrapponibili?
**No di certo!!!**
L'uguaglianza rispettiva dei tre angoli garantisce l'uguaglianza della "forma", ma non la sovrapponibilità: infatti i due triangoli potrebbero essere uno l'ingrandimento dell'altro, come nella figura qui a fianco riportata**.**




**IPOTESI:** $\overline{AB} = \overline{A'B'}$; $\overline{AC} = \overline{A'C'}$; $\hat{A} = \hat{A'}$
**TESI:** $ABC = A'B'C'$

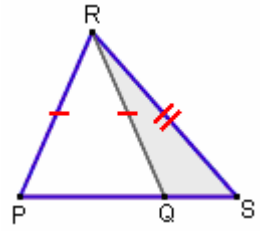
DIMOSTRAZIONE
Immaginiamo di **spostare, con un movimento rigido, tutto l'angolo $\hat{A'}$** (in questo modo ci porteremo dietro, in particolare, il triangolo $A'B'C'$), così da incastrare perfettamente tale angolo nell'angolo $\hat{A}$ (ciò è certamente possibile perché $\hat{A} = \hat{A'}$ per ipotesi). Realizziamo l' "incastro" in modo che la semiretta $A'B'$ vada a posarsi sulla semiretta $AB$, e la semiretta $A'C'$ sulla $AC$.
Nell'istante in cui l'angolo $\hat{A'}$ "atterra" sull'angolo $\hat{A}$, con il punto $A'$ che si posa sul punto A, la semiretta $A'B'$ che atterra sulla semiretta $AB$ e la semiretta $A'C'$ che atterra sulla semiretta AC, avremo che:

- ✓ il punto $B'$ andrà a sovrapporsi al punto B, in virtù dell'ipotesi $\overline{A'B'} = \overline{AB}$;
- ✓ e il punto $C'$ andrà a sovrapporsi al punto C, in virtù dell'ipotesi $\overline{A'C'} = \overline{AC}$.

Insomma, il movimento rigido cui abbiamo sottoposto l'angolo $\hat{A'}$ e perciò il triangolo $A'B'C'$, ha portato: il punto $A'$ sul punto A; il punto $B'$ sul punto B; il punto $C'$ sul punto C; e pertanto ha fatto sovrapporre: il segmento $\overline{A'B'}$ al segmento $\overline{AB}$; il segmento $\overline{A'C'}$ al segmento $\overline{AC}$; il segmento $\overline{B'C'}$ al segmento $\overline{BC}$.
Quindi il contorno del triangolo $A'B'C'$ si è sovrapposto perfettamente al contorno di ABC; e ne consegue, com'è evidente, che si sono sovrapposte in modo da combaciare anche le rispettive parti interne.
Resta così provato che $A'B'C'$ è perfettamente sovrapponibile, congruente, uguale, ad ABC, C.V.D.

**OSSERVAZIONE**
**♥ Nell'enunciato del Primo Criterio è essenziale specificare il fatto che l'angolo di cui si parla sia quello COMPRESO fra i due lati considerati.**

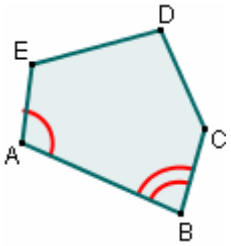
Infatti, se due certi triangoli hanno rispettivamente uguali due lati ed un angolo, ma l'angolo non è quello compreso, allora non è detto che i due triangoli siano per forza uguali: potrebbero anche non esserlo, come mostra la figura qui a fianco.
In essa, i due triangoli PRS, RSQ hanno uguali due lati ed un angolo:
$\overline{RP} = \overline{RQ}$; $\overline{RS}$ in comune $(\overline{RS} = \overline{RS})$; $\hat{S}$ in comune $(\hat{S} = \hat{S})$;
tuttavia, non sono affatto uguali. **L'angolo non è "quello compreso"!**



## UNA QUESTIONE DI TERMINOLOGIA

In un poligono qualsiasi, i due angoli che hanno per vertici gli estremi di un certo lato vengono chiamati **"gli angoli adiacenti a quel lato"**.

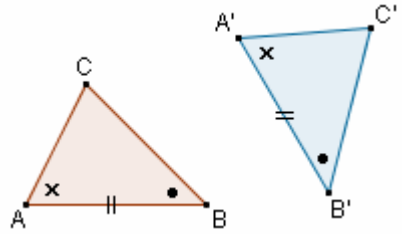
Reciprocamente, si può dire che quel lato è **"il lato adiacente" ai due angoli considerati**.




Nella figura, $\hat{A}$, $\hat{B}$ sono gli angoli "adiacenti" al lato $\overline{AB}$; $\overline{AB}$ è il lato "adiacente" ai due angoli $\hat{A}$, $\hat{B}$ (anche: "compreso fra" tali angoli)

**TEOREMA ("2° Criterio di uguaglianza dei triangoli")**
**Se due triangoli hanno rispettivamente uguali un lato e i due angoli ad esso adiacenti, allora sono uguali**.

*2° Criterio*



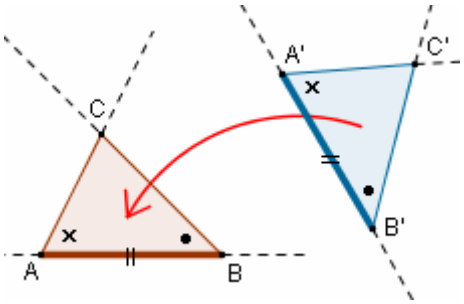

**IPOTESI:**

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$
$\hat{A} = \hat{A}'$
$\hat{B} = \hat{B}'$

**TESI:**

$ABC = A'B'C'$

DIMOSTRAZIONE




Immaginiamo di spostare, con un movimento rigido, il semipiano di origine $A'B'$ e contenente $C'$ sul semipiano di origine $AB$ e contenente C, in modo che il segmento $\overline{A'B'}$ vada a posarsi perfettamente su $\overline{AB}$ (ciò è certamente possibile perché $A'B' = AB$ per ipotesi).
Siccome per ipotesi è $\widehat{A'} = \widehat{A}$, la semiretta $A'C'$ sarà obbligata a sovrapporsi alla semiretta AC; analogamente, in virtù dell'ipotesi $\widehat{B'} = \widehat{B}$, la semiretta $B'C'$ andrà per forza a posarsi sopra la semiretta BC.
Alla fine del movimento rigido, dove si trova $C'$ ?
Beh, poiché $C'$ (che apparteneva sia alla semiretta $A'C'$ che alla semiretta $B'C'$) è andato a finire sia sulla semiretta AC che sulla semiretta BC, necessariamente $C'$ dovrà essere andato a coincidere con il punto C, che è l'unico punto comune a tali due semirette.
Alla fine del movimento rigido, troviamo quindi che i vertici del triangolo $A'B'C'$ sono ordinatamente sovrapposti ai vertici di ABC, e di conseguenza lo sono anche i lati dei due triangoli e le rispettive parti interne. Ciò dimostra la tesi.

### APPROFONDIMENTO TEORICO

**Un'analisi più "pignola" rivelerebbe che le "dimostrazioni" qui date del 1° e del 2° Criterio, non sono del tutto rigorose**, in quanto in esse vengono utilizzate proprietà che appaiono, senza dubbio, condivisibili per intuizione, ma che tuttavia non sono state esplicitamente dichiarate attraverso assiomi in precedenza accettati.

**In questo approccio più "severo"**, dunque, **il Primo e il Secondo Criterio andrebbero considerati come due nuovi ASSIOMI, anziché come due teoremi.**

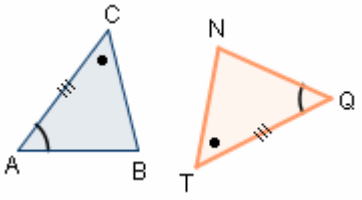
Segnalo poi la ulteriore possibilità di assumere come assioma il solo 1° Criterio, fornendo poi del 2° una dimostrazione "per assurdo" a partire dal 1°, come sceglie di fare qualche libro di testo.

### OSSERVAZIONE "PRATICA", MOLTO UTILE

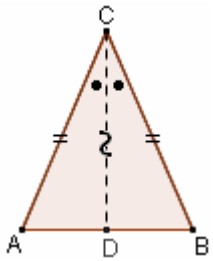
♥ **In due triangoli dimostrati uguali, sono uguali gli elementi opposti ad elementi che sappiamo essere uguali**:
ossia, sono uguali i lati opposti ad angoli che sappiamo uguali,
e sono uguali gli angoli opposti a lati che sappiamo uguali.

Esempio: nella figura possiamo osservare i due triangoli ABC e NQT che avendo uguali un lato e i due angoli ad esso adiacenti, sono uguali per il 2° Criterio. … Bene! Possiamo a questo punto dire che:

$\overline{NQ} = \overline{AB}$ (opposti all'angolo indicato col puntino)
$\overline{TN} = \overline{BC}$ (opposti all'angolo indicato con l'archetto)
$\hat{N} = \hat{B}$ (opposti al lato indicato con i tre trattini)



**TEOREMA - In un triangolo isoscele, gli angoli alla base sono uguali**.




HP: $\overline{CA} = \overline{CB}$

TH: $\hat{A} = \hat{B}$

DIMOSTRAZIONE

Tracciamo la bisettrice dell'angolo al vertice $\hat{C}$ fino ad incontrare la base $\overline{AB}$ in D.

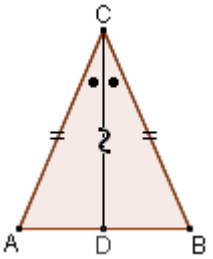
Confrontiamo ora i due triangoli $CAD,\ CBD$. Essi hanno:

- ✓ $\overline{CA} = \overline{CB}$ per HP;
- ✓ $\overline{CD}$ in comune, perciò uguale nei due triangoli $(\overline{CD} = \overline{CD})$;
- ✓ $A\hat{C}D = B\hat{C}D$ per costruzione.

Pertanto i due triangoli sono uguali per il 1° criterio; ne consegue, in particolare, $\hat{A} = \hat{B}$, **C.V.D.**

**TEOREMA - In un triangolo isoscele, la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana e altezza relativa alla base**.

**Quindi in un triangolo isoscele bisettrice, mediana e altezza relative alla base coincidono**.




HP: $\overline{CA} = \overline{CB}$

$A\hat{C}D = B\hat{C}D$

TH: $\overline{AD} = \overline{DB}$; $CD \perp AB$ $(C\hat{D}A = C\hat{D}B = 90°)$

DIMOSTRAZIONE

Come nella dimostrazione del teorema precedente, si confrontano i due triangoli $CAD,\ CBD$ e li si dimostra uguali per il 1° Criterio.

Ne consegue, in particolare, che $\overline{AD} = \overline{DB}$ e con ciò la prima parte della tesi è dimostrata.

Ma dall'uguaglianza di $CAD$ e $CBD$ segue anche $C\hat{D}A = C\hat{D}B$; poiché ora questi ultimi due angoli sono pure supplementari ( = danno per somma un angolo piatto), sarà $C\hat{D}A = C\hat{D}B = 180° : 2 = 90°$, **C.V.D.**

## APPROFONDIMENTO TEORICO

Abbiamo usato articoli determinativi ("la" bisettrice/mediana/altezza) dando per scontato che, in un triangolo, di bisettrice che parte da un dato vertice ce ne sia UNA SOLA, di mediana UNA SOLA, di altezza UNA SOLA.
A voler essere del tutto rigorosi, occorrerebbe invece *classificare*
i tre enunciati di **UNICITA'** della bisettrice, della mediana, e dell'altezza,
o dichiarandoli esplicitamente come assiomi, oppure, se possibile, dimostrandoli come teoremi.
In effetti, tali tre enunciati sono dimostrabili (i primi due, molto facilmente), quindi vanno pensati come teoremi.

- **Unicità della mediana**: è legata al fatto che il punto medio di un segmento dato è unico.
  Se infatti, per assurdo, un segmento assegnato $\overline{AB}$ avesse due distinti punti medi $M, M'$, allora i segmenti $AM$ e $AM'$ dovrebbero essere uguali perché metà dello stesso segmento $\overline{AB}$ mentre non possono essere uguali perché hanno un estremo in comune e uno di essi "scappa fuori" dall'altro.




- **Unicità della bisettrice**: è dimostrabile con un ragionamento analogo a quello fatto per la mediana.
- **Unicità della perpendicolare (da un punto dato, ad una retta data)**:
  questo teorema è esposto nel prossimo capitolo, ma avrebbe potuto benissimo essere anticipato a questo livello, perché dipende esclusivamente dal "Teorema dell'angolo esterno in forma debole", che a sua volta richiede, per la sua dimostrazione, esclusivamente teoremi che al livello presente sono stati già dimostrati.

Osserviamo ancora che il nostro discorso dà pure per scontata l'**ESISTENZA** di mediana, bisettrice e altezza.

- L'**esistenza della mediana e della bisettrice** sono assicurate dagli **assiomi di divisibilità indefinita del segmento e dell'angolo**,
- mentre l'**esistenza dell'altezza può essere dimostrata**
  (il "**Teorema di esistenza della perpendicolare per un punto dato a una retta data**"
  è presentato nel capitolo successivo, ma avrebbe potuto benissimo essere anticipato a questo livello).

**TEOREMA** **Se un triangolo ha due angoli uguali, allora è isoscele**
(precisamente, i due lati uguali sono quelli opposti agli angoli uguali).

**OSSERVAZIONE**

Si tratta del teorema **inverso** di quello che diceva:

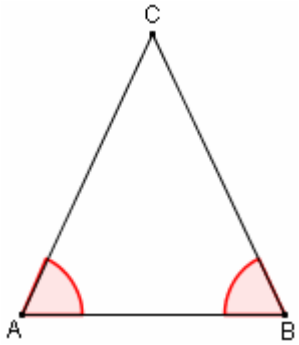
"In un triangolo isoscele, gli angoli alla base sono uguali".

**NON SEMPRE, se vale un teorema, vale anche l'enunciato inverso!!!**



Ad es., è vero (lo dimostreremo a suo tempo) che
"se, in un quadrilatero, i lati sono tutti uguali, allora le diagonali sono perpendicolari"

ma sarebbe FALSO affermare che
"se, in un quadrilatero, le diagonali sono perpendicolari, allora i lati sono tutti uguali"




HP
$C\hat{A}B = C\hat{B}A$

TH
$\overline{CA} = \overline{CB}$

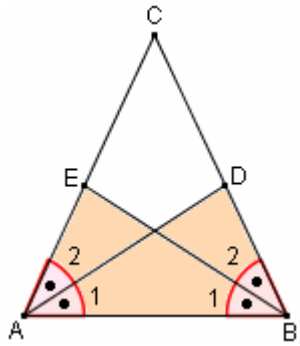
♥ Il teorema che stiamo esaminando viene sovente enunciato dagli studenti in modo maldestro:
"Se un triangolo ha *gli angoli alla base* uguali, allora è isoscele".
Eh no, così non va: se si parla fin dall'inizio di "angoli alla base", sembra che sia già noto *in partenza* che il triangolo è isoscele !!!



♥ NOTA - L'uso delle CATENE è frequentissimo nelle dimostrazioni.
**In una catena ben impostata, ciascun "anello" dev'essere ricavato A PARTIRE DALL' "ANELLO" CHE LO PRECEDE IMMEDIATAMENTE.**



DIMOSTRAZIONE

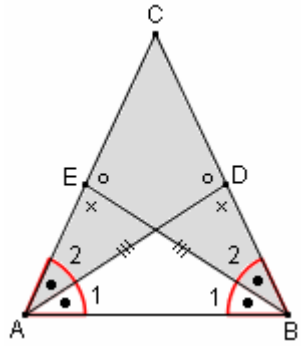



Costruzione:
**tracciamo le bisettrici** $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ degli angoli $C\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$, che sono uguali per HP.
I **quattro angoli** $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{B}_1$, $\hat{B}_2$ che così si formano sono **tutti uguali fra loro**, **perché metà di angoli uguali**, come possiamo illustrare con la catena seguente:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{1}{2}C\hat{A}B = \frac{1}{2}C\hat{B}A = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \quad \text{(NOTA in alto)}$$

**Confrontiamo** ora **i due triangoli** ABE, BAD.
Essi hanno: $\overline{AB}$ in comune; $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$; $C\hat{A}B = C\hat{B}A$
quindi sono uguali per il 2° Criterio,
e in particolare avranno $\overline{BE} = \overline{AD}$ e $A\hat{E}B = B\hat{D}A$.
Dall'ultima uguaglianza segue $C\hat{E}B = C\hat{D}A$ perché **supplementari di angoli uguali**:

$$C\hat{E}B = 180° - A\hat{E}B = 180° - B\hat{D}A = C\hat{D}A \quad \text{(NOTA in alto)}$$




Se a questo punto **confrontiamo i due triangoli ADC e BEC**, potremo affermare che sono uguali per il 2° Criterio:
hanno infatti

- $\overline{AD} = \overline{BE}$;
- $C\hat{D}A = C\hat{E}B$;
- $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$

Ma dall'uguaglianza dei due triangoli ADC e BEC segue, in particolare, $\overline{CA} = \overline{CB}$, cioè la tesi.

**TEOREMI (corollari di teoremi precedenti)**

- **Se un triangolo è equilatero ( = ha tutti e tre i lati uguali fra loro), allora è equiangolo ( = ha tutti e tre gli angoli uguali fra loro)**.
- **Se un triangolo è equiangolo, allora è equilatero**.

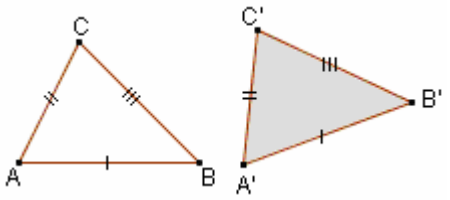
**OSSERVAZIONE**

I due teoremi (corollari) di cui sopra, che sono evidentemente uno l'inverso dell'altro, potrebbero essere compendiati nell'unico enunciato:

*"Condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia equilatero, è che sia equiangolo"*
oppure: *"un triangolo è equilatero se e solo se è equiangolo"*

**TEOREMA (“3° Criterio di uguaglianza dei triangoli”)**
**Se due triangoli hanno rispettivamente uguali i tre lati, allora sono uguali.**

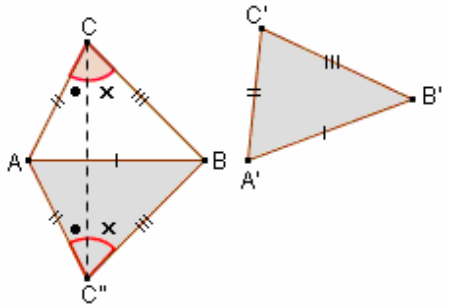
*3° Criterio*




HP $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$

TH $ABC = A'B'C'$

DIMOSTRAZIONE




**Sottoponiamo il triangolo $A'B'C'$**
**ad un movimento rigido con ribaltamento**,
in modo da portare il segmento $A'B'$ sul segmento $\overline{AB}$
(ricordiamo che i due segmenti sono uguali per ipotesi),
con $A'$ su $A$, $B'$ su $B$
e $C'$ all’interno del semipiano di origine $AB$ e *non* contenente $C$.
Indichiamo con $C"$ la posizione che va così ad occupare il vertice $C'$.
In questo modo, insomma, abbiamo costruito lo “stampo” $ABC"$
del triangolo $A'B'C'$, che adesso possiamo anche pensare di riportare,
con un altro movimento rigido, al posto che occupava inizialmente.
Tracciamo quindi la congiungente $\overline{CC"}$.

Consideriamo il triangolo $ACC"$: esso è isoscele (infatti $\overline{AC"} = \overline{A'C'} \underset{HP}{=} \overline{AC}$) e di conseguenza $A\hat{C}C" = A\hat{C"}C$.

Anche il triangolo $BCC"$ è isoscele perché $\overline{BC"} = \overline{B'C'} \underset{HP}{=} \overline{BC}$; ne consegue $B\hat{C}C" = B\hat{C"}C$. Ma allora

gli angoli $A\hat{C}B$, $A\hat{C"}B$ sono uguali perché somme di angoli uguali, come possiamo, volendo, illustrare…

♪ … tramite una catena:

$$A\hat{C}B = A\hat{C}C" + B\hat{C}C" = A\hat{C"}C + B\hat{C"}C = A\hat{C"}B$$

Osserva che,
**come in ogni catena ben impostata,**
**ogni “anello” è ricavato**
**a partire dall’ “anello” che lo precede!**

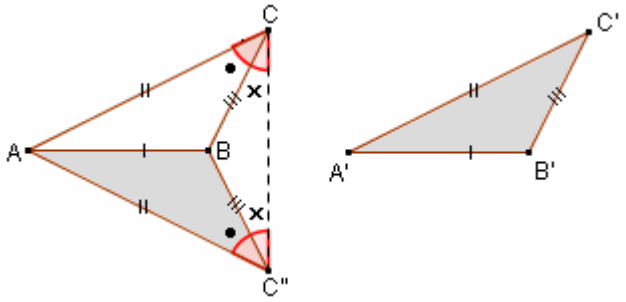
♫ … oppure sommando membro a membro due uguaglianze:

$$\begin{array}{r} A\hat{C}C" = A\hat{C"}C \\ B\hat{C}C" = B\hat{C"}C \\ \hline \underbrace{A\hat{C}C" + B\hat{C}C"}_{A\hat{C}B} = \underbrace{A\hat{C"}C + B\hat{C"}C}_{A\hat{C"}B} \end{array}$$

Se ora confrontiamo i triangoli $ABC$ e $ABC"$, possiamo dire che sono uguali per il 1° Criterio!!! Cosicché è pure $ABC = A'B'C'$, perché $ABC"$ era lo “stampo” di $A'B'C'$: $ABC = ABC" = A'B'C'$, **C.V.D. (forse …)**

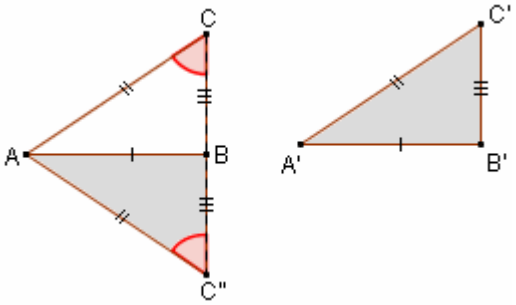
**… E INVECE NON E’ FINITA! …**

In questo modo, infatti, la dimostrazione NON è del tutto completata. E perché mai, dirai tu, caro lettore?
Il fatto è che in certi casi la congiungente $\overline{CC"}$ potrebbe non attraversare il segmento $\overline{AB}$.
Allora il procedimento dimostrativo varierebbe un pochino:




$$\begin{array}{r} A\hat{C}C" = A\hat{C"}C \\ B\hat{C}C" = B\hat{C"}C \\ \hline \underbrace{A\hat{C}C" - B\hat{C}C"}_{A\hat{C}B} = \underbrace{A\hat{C"}C - B\hat{C"}C}_{A\hat{C"}B} \end{array}$$

Se la congiungente $\overline{CC"}$ passa all’esterno di $\overline{AB}$, si procede per **differenza** di angoli uguali anziché per somma…




… mentre nel caso particolarissimo in cui $\overline{CC"}$ passa per un estremo di $\overline{AB}$, non è più necessaria né una somma, né una differenza; osservato che $\overline{AC"} = \overline{AC} \rightarrow A\hat{C}C" = A\hat{C"}C$, basta confrontare direttamente i triangoli $ABC$, $ABC"$, che risultano uguali per il 1° Criterio.

In **lingua Inglese**, i tre Criteri di uguaglianza dei triangoli hanno dei nomi davvero azzeccatissimi:

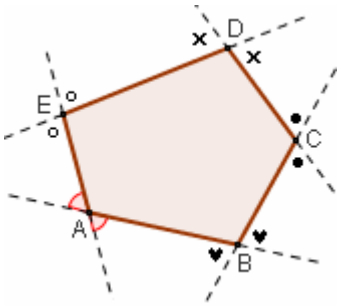
♥ The **Side-Angle-Side** Theorem **(SAS): 1° Criterio**
♥ The **Angle-Side-Angle** Theorem **(ASA): 2° Criterio**
♥ The **Side-Side-Side** Theorem **(SSS): 3° Criterio**

## 2.4 - IL TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO IN FORMA DEBOLE

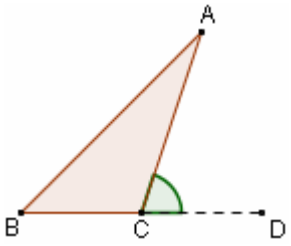
**Gli "ANGOLI ESTERNI" di un poligono**

In un poligono qualsiasi, si dicono "**angoli esterni**"
**gli angoli adiacenti agli angoli interni**.

Quindi, in un poligono, a ciascun angolo interno corrispondono DUE angoli esterni, uguali fra loro perché opposti al vertice (vedi figura).

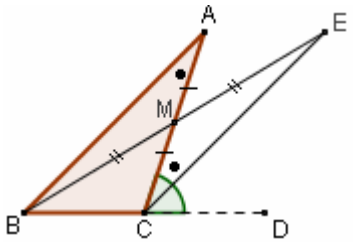



**TEOREMA**
**("TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO in forma DEBOLE")**
**In un triangolo, ciascun angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ad esso non adiacenti**.




HP
ABC triangolo;
$A\hat{C}D$ angolo esterno

TH
$A\hat{C}D > \hat{A}$;
$A\hat{C}D > \hat{B}$




A cosa è dovuto l'aggettivo "*debole*"? Al fatto che questo teorema sarà poi seguito da un altro, il "teorema dell'angolo esterno in forma *forte*", per dimostrare il quale sono però necessari altri teoremi intermedi

DIM.

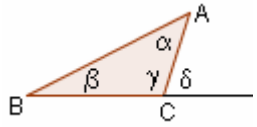
Effettuiamo le seguenti costruzioni (figura a destra): prendiamo il punto medio di $\overline{AC}$, indicandolo con M; tracciamo $\overline{BM}$ e prolunghiamo questo segmento di un segmento $\overline{ME} = \overline{BM}$; tracciamo la semiretta CE.

*Ora, la semiretta* CE *è interna all'angolo* $A\hat{C}D$: *questo fatto è il punto chiave del ragionamento dimostrativo. Che la semiretta* CE *sia interna ad* $A\hat{C}D$ *è osservabile dal disegno, e l'intuizione porta facilmente a convincersi che ciò continuerebbe a esser vero anche se il triangolo avesse una forma diversa.*
*Tuttavia, il fatto che* CE *sia interna all'angolo* $A\hat{C}D$ *andrebbe, a rigore, DIMOSTRATO.*
*La dimostrazione utilizzerebbe due assiomi che noi per evitare appesantimenti eccessivi non abbiamo citato: l' "assioma dei semipiani" e un altro assioma riguardante le semirette aventi l'origine nel vertice di un angolo. Ci limitiamo a segnalare questo fatto, senza scendere nei particolari.*

Bene! Essendo la semiretta CE interna all'angolo $A\hat{C}D$, è $A\hat{C}D > A\hat{C}E$. Ma i due triangoli BMA, EMC sono uguali per il 1° Criterio ($\overline{AM} = \overline{MC}$ e $\overline{BM} = \overline{ME}$ per costruzione, $A\hat{M}B = C\hat{M}E$ perché opposti al vertice) e ne consegue, in particolare, che $A\hat{C}E = \hat{A}$.
Dunque, essendo $A\hat{C}D > A\hat{C}E$, è pure $A\hat{C}D > \hat{A}$ e la prima parte della tesi è dimostrata.

- Per la seconda parte ($A\hat{C}D > \hat{B}$) basterà prolungare $\overline{AC}$ dalla parte di C costruendo così il secondo dei due angoli esterni adiacenti all'angolo interno $B\hat{C}A$ (che però sarà uguale ad $A\hat{C}D$ in quanto suo opposto al vertice), poi prendere il punto medio N del lato $\overline{BC}$, tracciare la mediana $\overline{AN}$, prolungarla ecc. ecc.

**COROLLARIO: In un triangolo, la somma di due angoli interni è sempre minore di un angolo piatto**.




DIM. Per dimostrare che, ad esempio, $\alpha + \gamma < 180°$, basta tener presente che, per il Teorema dell'Angolo Esterno, si ha $\delta > \alpha$ quindi $\alpha < \delta$; ma allora $\alpha + \gamma < \delta + \gamma = 180°$.
Per le altre somme $\alpha + \beta$ e $\beta + \gamma$, ci si servirà ogni volta dell'angolo esterno opportuno.

**COROLL.: In un triangolo, non possono esserci due angoli retti, né due ottusi, né un retto e un ottuso**.

DIM. Infatti, in ciascuno dei tre casi prospettati, la somma dei due angoli interni in questione uguaglierebbe o supererebbe un angolo piatto, il che è assurdo in virtù del corollario precedente.

**COROLLARI:**
- **In un triangolo che abbia un angolo retto, i due angoli rimanenti sono acuti ( = minori di 90°)**.
- **In un triangolo con un angolo ottuso, i due angoli rimanenti sono acuti**.

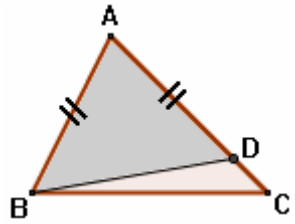
**LA CLASSIFICAZIONE DEI TRIANGOLI IN BASE AGLI ANGOLI**

Da quanto detto, si trae che un triangolo può avere esclusivamente:
I) un angolo ottuso e due acuti (triangolo "ottusangolo")
II) un angolo retto e due acuti (triangolo "rettangolo")
III) tre angoli acuti (triangolo "acutangolo").
Non possono verificarsi altri casi oltre a questi.

## 2.5 - DISUGUAGLIANZE FRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO

**TEOREMA**

**Se un triangolo ha due lati disuguali, allora ha disuguali anche gli angoli ad essi opposti, e precisamente: a lato maggiore sta opposto angolo maggiore**.




HP $\overline{AC} > \overline{AB}$

TH $\hat{B} > \hat{C}$

**GLI ESERCIZI (NON FACILI … ) SULLE DISUGUAGLIANZE SONO ALLE PAGINE 334 E 335**

DIM.

Siccome per ipotesi è $\overline{AC} > \overline{AB}$,
se noi prendiamo, sulla semiretta AC, un segmento $\overline{AD} = \overline{AB}$,
il punto D cadrà ALL'INTERNO del segmento $\overline{AC}$.
Ora:

$$\hat{B} = A\hat{B}C \underset{\downarrow}{>} A\hat{B}D \underset{\downarrow}{=} A\hat{D}B \underset{\downarrow}{>} \hat{C} \quad \text{quindi} \quad \boxed{\hat{B} > \hat{C}},$$

$A\hat{B}D$ è solo una parte di $\hat{B} = A\hat{B}C$

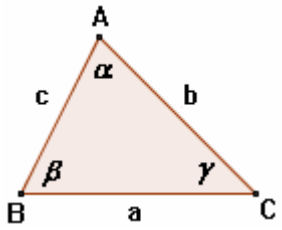
il triangolo ABD è isoscele sulla base $\overline{BD}$

teorema dell'angolo esterno, triangolo BDC

C.V.D.

**TEOREMA**

**Se un triangolo ha due angoli disuguali, allora ha disuguali anche i lati ad essi opposti, e precisamente: ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore**.




HP $\beta > \gamma$

TH $b > c$

OSSERVAZIONE

Nella figura, abbiamo adottato una simbologia che è molto comune, e UTILISSIMA, in Geometria: abbiamo indicato

- i vertici del triangolo con A, B, C ;
- gli angoli aventi questi vertici RISPETTIVAMENTE con $\alpha, \beta, \gamma$ ;
- i lati opposti a questi vertici RISPETTIVAMENTE con a, b, c : a opposto ad A, b opposto a B, c opposto a C.

DIM.

L'ipotesi è $\beta > \gamma$ ; vogliamo dimostrare (tesi) che è $b > c$.
Per assurdo, o, se si preferisce, per esclusione:

- ♪ se fosse $b < c$, allora, per il teorema precedente, si dovrebbe avere $\beta < \gamma$, contro l'ipotesi;
- ♫ se fosse $b = c$, allora il triangolo sarebbe isoscele e risulterebbe $\beta = \gamma$, contro l'ipotesi.

Non potendo essere né $b < c$, né $b = c$, dovrà per forza essere $b > c$,

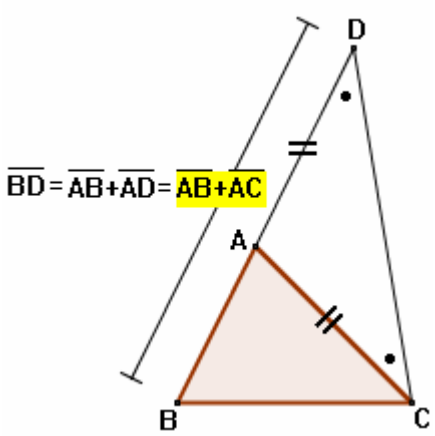
C.V.D.

**COROLLARI:**

- **In un triangolo rettangolo, il lato maggiore fra tutti è l'ipotenusa**.
- **In un triangolo ottusangolo, il lato maggiore è quello opposto all'angolo ottuso**.

**TEOREMA ("DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE")**

**In un triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due**.




HP ABC triangolo

TH
$\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$
$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$
$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$

Nella dimostrazione di questo teorema emerge in modo particolarmente evidente **IL METODO "TOP-DOWN"** ossia, letteralmente, "**DALLA CIMA VERSO IL BASSO**".

Si parte dall'obiettivo da raggiungere, e ci si domanda: di quali obiettivi intermedi avremmo bisogno per raggiungere questo obiettivo finale?

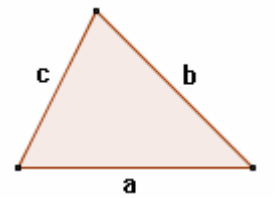
Poi il processo può essere eventualmente iterato ( = ripetuto), applicandolo anche agli obiettivi intermedi.

DIM.

Dimostriamo che $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$;
per provare le altre due disuguaglianze si può procedere in modo analogo.
Vogliamo innanzitutto COSTRUIRE un segmento che sia uguale alla somma $\overline{AB} + \overline{AC}$,
e lo faremo prolungando $\overline{AB}$, dalla parte di A, di un segmento $\overline{AD} = \overline{AC}$.
Avremo appunto $\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$.
A questo punto si tratta di dimostrare che $\overline{BC} < \overline{BD}$.
E a tale scopo, se riuscissimo a far vedere che nel triangolo BCD, fra i due angoli $B\hat{C}D$ e $\hat{D}$,
il primo è maggiore del secondo, saremmo a posto in virtù del teorema precedente.
Ma ben facile provare che $B\hat{C}D > \hat{D}$ !
Infatti $B\hat{C}D > A\hat{C}D$ perché $A\hat{C}D$ è solo una parte di $B\hat{C}D$;
e $A\hat{C}D = \hat{D}$ perché angoli alla base di un triangolo che è isoscele per costruzione.
La tesi è quindi dimostrata.

**TEOREMA**

**In un triangolo, ciascun lato è maggiore della differenza degli altri due**.




HP E' dato un triangolo di lati a, b, c
(supponiamo per comodità di aver indicato con a il lato maggiore, con b l'intermedio, con c il minore; insomma, supponiamo $a \geq b \geq c$)

TH
I) $a > b - c$
II) $b > a - c$
III) $c > a - b$

DIM.

Le tre disuguaglianze della tesi seguono dalle tre disuguaglianze la cui verità è assicurata dal teorema precedente.
Questo, infatti, ci dice che :

$a < b + c$;
$b < a + c$;
$c < a + b$.

Prendiamo, ad esempio, $a < b + c$.

Questo teorema è a volte denominato "della disuguaglianza triangolare inversa".
Riunendo i due enunciati di questa pagina, abbiamo che "*in ogni triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza*".

Se in questa disuguaglianza noi sottraiamo lo stesso segmento c da entrambi i membri, ne ricaveremo:

$a \overset{-c}{<} b \overset{-c}{\cancel{+c}}$ ossia $a - c < b$,

quindi (leggendo come gli Arabi, da destra a sinistra), $b > a - c$, che è la tesi II).

Analogamente,
la tesi I) si può dedurre a partire da $b < a + c$ sottraendo c da entrambi i membri;
e infine la tesi III) segue dalla $a < b + c$ sottraendo b da entrambi i membri.

## 2.6 - LE "COSTRUZIONI CON RIGA E COMPASSO"

In queste lezioni, noi abbiamo utilizzato e utilizzeremo la parola "costruzione" prevalentemente in quei casi in cui, di fronte a un teorema, ai fini del ragionamento dimostrativo non è sufficiente la figura di partenza, ma **occorre disegnare ("costruire") un punto in più, o un segmento in più, o una retta in più, o un angolo in più**, ecc. ecc.

Tuttavia, in Geometria il termine "costruzione" è impiegato anche (*soprattutto*, direi) con un **significato più specifico**, ossia per indicare una **"precisa sequenza di operazioni grafiche mediante le quali è possibile ottenere, almeno in linea di principio, un determinato oggetto geometrico".**
E in questo ambito, hanno particolare rilevanza le cosiddette "costruzioni con riga e compasso".
L'argomento ha risvolti molto interessanti: vediamo meglio di cosa si tratta.

### I TRE "PROBLEMI CLASSICI"

Abbiamo già accennato al fatto che i matematici greci antichi tendevano a "geometrizzare" ciò che noi, ai nostri tempi, siamo invece portati ad "aritmetizzare", cioè ad affrontare in termini di operazioni numeriche ("*arithmós*" = numero).
Il problema delle **costruzioni con riga e compasso** ha interessato profondamente gli studiosi della Grecia classica: la sottigliezza e la profondità del pensiero greco inducevano lo studioso a porsi sempre il problema della "costruibilità", al di là della mera "esistenza", degli oggetti geometrici che erano via via oggetto di considerazione.

Cosa vuol dire esattamente "fare una costruzione con riga e compasso"?

Vuol dire pensare di utilizzare due **strumenti "ideali", perfetti**, la riga per tracciare linee rette e il compasso per tracciare circonferenze di centro e raggio assegnati, compiendo, per la precisione, esclusivamente una o più fra le **5 operazioni** seguenti:

1) **dati due punti, tracciare la retta che passa per essi;**
2) **dati due punti, tracciare una circonferenza che ha come centro il primo e passa per il secondo;**
3) **determinare (se esiste) il punto di intersezione di due rette;**
4) **determinare (se esistono) i punti d'intersezione di una circonferenza e di una retta;**
5) **determinare (se esistono) i punti d'intersezione di due circonferenze.**

Insisto: queste operazioni vanno pensate realizzate "in astratto, senza tener conto di quella inevitabile imprecisione che l'uso di strumenti meccanici concreti porterebbe con sé ".
E puntualizzo pure che pensando ad una "riga" e ad un "compasso" non bisogna concepirli come strumenti "metrici" (da "*métron*" = misura).
La "riga" greca non è come un righello che porta i trattini dei centimetri e dei millimetri, il compasso non è un compasso ad apertura graduata: tant'è vero che, ad esempio, il problema della costruzione di un segmento che sia il doppio di un segmento assegnato va risolto tramite le operazioni precedentemente citate (in questo caso, servono la 1, la 2 e la 4) e NON immaginando di "misurare" il segmento per poi prolungarlo di un segmento di ugual misura. Non sono inoltre consentiti procedimenti cosiddetti di "inserzione", cioè basati sull'uso del compasso, con data apertura, per trasportare un segmento uguale ad un segmento dato, "per tentativi", all'interno di una determinata regione di piano.

♥ Il bello viene ora.
Sì, perché i Greci si accorsero presto che di alcuni problemi la risoluzione con riga e compasso, nel senso sopra precisato, sembrava essere particolarmente, tremendamente, insospettabilmente difficile.
Ci vollero più di due millenni per dimostrare, con principale protagonista il francese Galois (1ª metà del XIX secolo), che di tali problemi non si riusciva a venire a capo per il fatto che erano … **impossibili** !!!

Ecco a quali problemi mi riferisco (sono noti come "**i tre problemi *classici*** della geometria"):

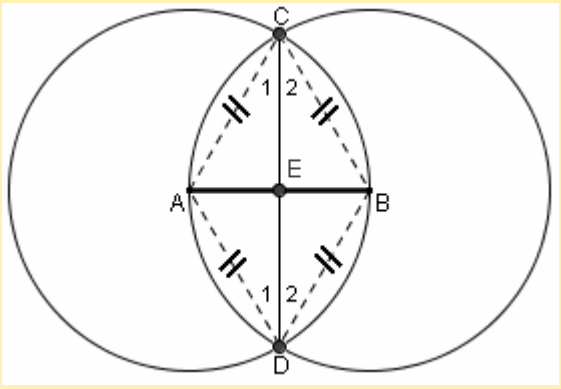
- **DUPLICAZIONE DEL CUBO**
  Richiede di costruire con riga e compasso lo spigolo di un cubo che abbia volume doppio di un cubo dato. Sennonché, si può dimostrare che con riga e compasso non ci si può riuscire.
- **TRISEZIONE DELL'ANGOLO**
  Il problema richiede, dato un qualsiasi angolo, di suddividerlo in tre angoli uguali.
  Si dimostra però che non è, fatta eccezione per certi casi particolari, risolubile con riga e compasso.
- **QUADRATURA DEL CERCHIO**
  Il problema richiede che, assegnato un cerchio, si costruisca il lato di un quadrato avente la stessa estensione. E' il più famoso fra i tre; di esso sono state presentate nei secoli tante "false soluzioni"; e menzionare la "quadratura del cerchio" è diventato un "modo di dire" per indicare una questione di improba difficoltà.
  In realtà, la sua risoluzione con riga e compasso è … *non* "difficile", ma addirittura impossibile.

*Lasciando alla tua iniziativa, se lo desideri, ulteriori approfondimenti, solo a titolo di esempio andiamo a presentare, in questa pagina e nella seguente, qualcuna fra le costruzioni più elementari.*

## ALCUNE SEMPLICI COSTRUZIONI GEOMETRICHE

### Costruzione del punto medio di un segmento

Dato un segmento $\overline{AB}$, per costruirne il punto medio:




- si traccino le circonferenze di centro A e passante per B, e di centro B e passante per A;
- se ne determinino le intersezioni C, D;
- si tracci la retta che passa per esse;
- se ne determini l'intersezione E con la retta AB.

Bene, E è il punto medio cercato!

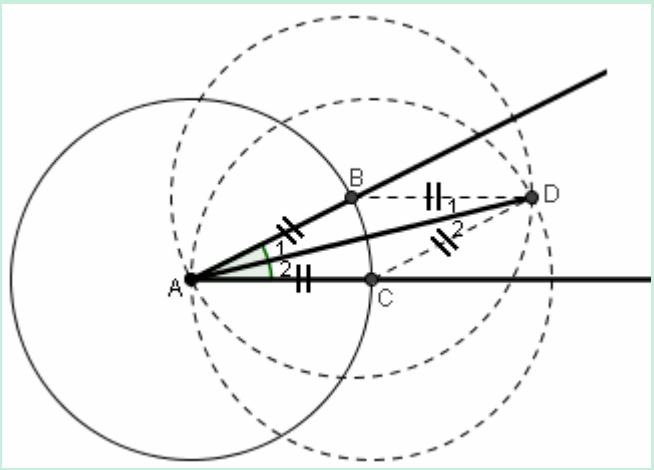
Infatti i quattro raggi $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ sono tutti uguali fra loro (ciascuno di essi è uguale ad $\overline{AB}$); dunque i due triangoli CAD e CBD sono uguali per il 3° Criterio, e isosceli; si ha perciò

$$\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \hat{D}_1 = \hat{D}_2 .$$

Ma anche il triangolo ABC è isoscele, con base $\overline{AB}$ (è addirittura equilatero, a dire il vero …); essendo $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$, $\overline{CE}$ ne è bisettrice dell'angolo al vertice;
e in ogni triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana relativa alla base.
E' perciò $\overline{AE} = \overline{EB}$ : resta dimostrato che E è il punto medio di $\overline{AB}$.

### Costruzione della bisettrice di un angolo (minore di un angolo piatto)

Dato un angolo $\hat{A}$, per costruirne la bisettrice:



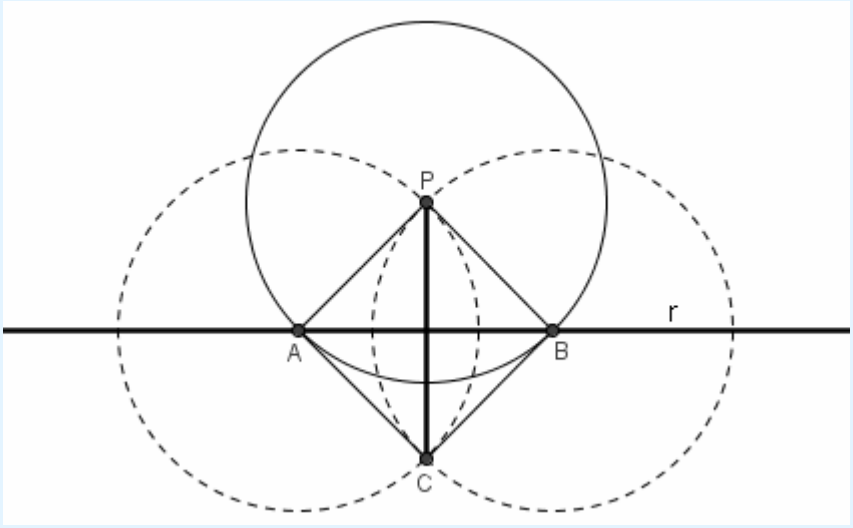

- si tracci una circonferenza di centro A e raggio qualsiasi;
- se ne determinino le intersezioni B, C coi lati dell'angolo;
- si traccino le due circonferenze, sempre aventi lo stesso raggio di prima, ma questa volta con centri in B e in C rispettivamente;
- si determini l'intersezione D (quella non coincidente con A) di tali due circonferenze.

Bene, la congiungente AD è la bisettrice cercata!

Infatti i due triangoli ABD e ACD sono uguali per il 3° Criterio, e isosceli;
si ha perciò $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{D}_1 = \hat{D}_2$, in particolare $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ .

**Costruzione della perpendicolare da un punto dato ad una retta data (che non passa per il punto)**

Dati una retta r e un punto P che non vi appartenga, per costruire la perpendicolare a r passante per P:




- si tracci una circonferenza di centro P e raggio qualsiasi,
  purché sufficientemente grande da far sì che r venga intersecata dalla circonferenza in due punti;
- se ne determinino le intersezioni A, B con r;
- si traccino le due circonferenze, sempre aventi lo stesso raggio di prima,
  ma questa volta con centri in A e in B rispettivamente;
- si determini l'intersezione C (quella non coincidente con P) di tali due circonferenze.

A questo punto la congiungente PC è la perpendicolare desiderata … dimostralo tu!

**Costruzione della perpendicolare per un punto dato ad una retta data (che passa per il punto)**

Provarci tu! Il metodo è simile a quello precedente, relativo al caso di un punto non appartenente alla retta.

**OSSERVAZIONI**

1) All'inizio del successivo capitolo su perpendicolari e parallele verrà indicata una procedura, per giungere alla determinazione di una perpendicolare, *diversa* da quella sopra riportata.
   Questa scelta differente sarà dovuta soprattutto all'esigenza
   di utilizzare esclusivamente gli assiomi precedentemente introdotti,
   non andando quindi a "scomodare" proprietà che sono senz'altro molto intuitive,
   ma attengono alla circonferenza, di cui si tratterà espressamente soltanto nel Volume 2.
2) Costruzioni interessanti, ma non così semplici come quelle da noi sin qui presentate, ad es.:
   - suddivisione di un segmento in un numero a scelta di parti uguali;
   - tangenti a una circonferenza passanti per un punto dato;
   - ecc. ecc.

   richiedono, per la giustificazione, nozioni di geometria più avanzate rispetto al livello presente.

♣ Fra i tanti siti Internet dedicati alle costruzioni geometriche con riga e compasso, si può segnalare quello curato da C. Amerio, S. Dellavecchia e G. M. Dellavecchia, nel quale le varie costruzioni sono ben descritte mediante efficaci "animazioni":

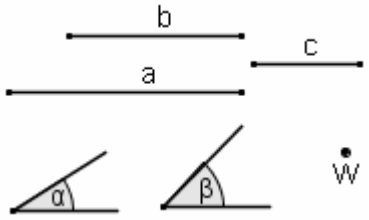
www.libroattivo.com/sei/costruzionigeometriche/



**ESERCIZI**

Per queste attività puoi servirti di una riga e di un compasso materiali, oppure degli strumenti equivalenti che offre GEOGEBRA.
La figura riporta tre segmenti $a, b, c$, due angoli $\alpha$ e $\beta$ e un punto W.
Costruire, con riga e compasso, un triangolo che abbia un vertice in W e

I) due lati uguali ad $a, b$, l'angolo compreso uguale ad $\alpha$
II) un lato uguale ad $a$, gli angoli adiacenti a quel lato uguali ad $\alpha$, $\beta$
III) i tre lati uguali ad $a, b, c$ rispettivamente.



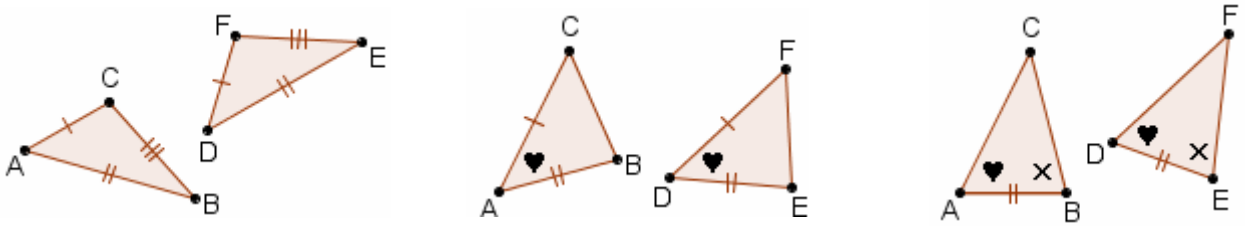

Il problema III) ha sempre soluzione o potrebbe essere impossibile?

## 2.7 - AIUTO PER IL RIPASSO, ESERCIZI (le risposte sono in fondo alla pagina … tienile coperte!)

♫ **ALTRI ESERCIZI SUL CAPITOLO 2 A PARTIRE DA PAG. 328**

1) Pierino dice: "Questo triangolo ha gli angoli alla base uguali, quindi è isoscele". Per qual motivo il professore sta facendo una boccaccia?

2) Sulle 3 figure seguenti, appiccica correttamente le tre etichette SAS, ASA, SSS:




3) Sia il triangolo ABC che il triangolo DEF hanno: un angolo di 30°, un lato di 1 cm, un altro lato di 2 cm. Siamo sicuri che abbiano lo stesso perimetro?

4) Se due segmenti, non necessariamente fra loro uguali, si incrociano in modo che l'unico loro punto comune sia il punto medio di entrambi, il quadrilatero che ha per vertici le estremità di questi segmenti ha i lati a due a due uguali. Quali teoremi permettono di dimostrare questa affermazione?

5) In Geometria abbiamo usato il termine "adiacenti" per 3 volte, una con riferimento ai segmenti e 2 agli angoli. Spiega il contesto e il significato nei tre casi.

6) Nella tecnica delle costruzioni è sovente sfruttata la prerogativa del triangolo di essere "indeformabile". Il triangolo della figura a fianco, nonostante i lati siano connessi fra loro da cerniere ai vertici, non si può "schiacciare" ottenendo un altro triangolo con gli stessi lati ma con gli angoli modificati. Quale dei tre Criteri ha a che fare con questa proprietà?



7) a) Pensa al teorema che afferma "Se un triangolo ha due angoli uguali, allora ha anche due lati uguali". Qui sotto è elencata una serie di sette enunciati (assiomi o teoremi); sai dire quali, fra di essi, vengono utilizzati nel corso della dimostrazione del teorema considerato?

I) Se un triangolo ha due lati uguali allora ha anche due angoli uguali
II) Supplementari di angoli uguali sono uguali
III) Doppi di angoli uguali sono uguali
IV) Metà di angoli uguali sono uguali
V) Somme di angoli uguali sono uguali
VI) 1° Criterio di uguaglianza dei triangoli
VII) 2° Criterio di uguaglianza dei triangoli

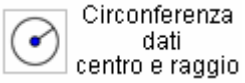
b) Stessa richiesta precedente, per il 3° Criterio di uguaglianza dei triangoli.

8) E' vero che se un angolo interno di un poligono misura 35°, l'angolo esterno corrispondente misurerà 325°?

9) Con GeoGebra, disegna un triangolo e un angolo esterno. Crea come oggetti GeoGebra questo angolo esterno e uno degli angoli interni non adiacenti ad esso. Osserva le loro misure nella finestra Algebra per constatare che, comunque si deformi il triangolo, l'angolo esterno si mantiene sempre maggiore dell'interno ad esso non adiacente.




10) In GeoGebra, utilizzando lo strumento "Circonferenza dati centro e raggio", costruisci un triangolo coi lati lunghi 2, 4 e 5.




11) Può un angolo esterno in un triangolo essere uguale a un angolo interno?

12) Perché si dice che il Teorema dell'Angolo Esterno da noi visto è un teorema "in forma debole"?

13) Quale teorema garantisce che non possa esistere un triangolo coi lati di 4, 7 e 12 centimetri?

**RISPOSTE**

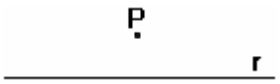
1) Per via dell'esposizione maldestra. Parlando fin dall'inizio di "angoli alla base", locuzione che ha senso solo se riferita ai triangoli isosceli, sembra che si sappia già da subito che il triangolo è isoscele. Pierino avrebbe dovuto dire, piuttosto: "Questo triangolo ha due angoli uguali, quindi è isoscele" 2) SSS (Side-Side-Side Theorem, 3° Criterio), SAS (Side-Angle-Side Theorem, 1° Criterio), ASA (Angle-Side-Angle Th., 2° Criterio) 3) No. I due triangoli non sono necessariamente uguali: potrebbero esserlo, ma anche non esserlo. Non si sa infatti se l'angolo di 30° è, in entrambi i triangoli, quello compreso fra i due lati di 1 cm e 2 cm, o no. In quest'ultimo caso, *non* sarebbe applicabile il 1° Criterio 4) Il teorema che dice che due angoli opposti al vertice sono fra loro uguali; il 1° Criterio 5) a) Due segmenti si dicono adiacenti quando hanno un estremo in comune e stanno uno sul prolungamento dell'altro; b) due angoli si dicono adiacenti quando hanno un lato in comune e i due lati non sovrapposti stanno uno sul prolungamento dell'altro; c) in un poligono, si dicono "angoli adiacenti a un lato" i due angoli interni coi vertici negli estremi di quel lato 6) Il 3° 7) a: II, IV, VII; b: I, V, VI 8) No: in un poligono a ciascun angolo interno corrispondono 2 angoli esterni, che sono adiacenti, quindi supplementari, rispetto all'angolo in questione. La risposta esatta è " 145° " (per ogni angolo esterno). 11) Sì, ma l'angolo interno dev'essere quello adiacente: saranno entrambi di 90° 12) Perché verrà poi rimpiazzato da un teorema più "dettagliato", più "forte", che ingloberà quello "vecchio" 13) Il teorema della "disuguaglianza triangolare"

# Cap. 3: PERPENDICOLARI E PARALLELE

## 3.1 - RETTE PERPENDICOLARI

### IL PROBLEMA DELL' ESISTENZA DELLA PERPENDICOLARE

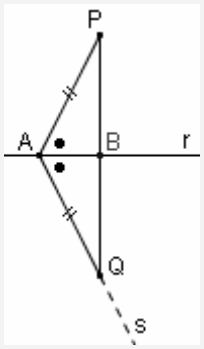
*Dati un punto* P *e una retta* r, *esiste sempre una retta che passi per* P *e sia perpendicolare a* r ?




*L'intuizione ci dice: "Senz'altro, sì".*
*L' "esistenza della perpendicolare per un punto dato a una retta data"*
*potrebbe quindi essere assunta come nuovo assioma.*
*Ma ciò non è necessario: infatti tale esistenza è* ***dimostrabile come teorema****. Vediamo in che modo.*

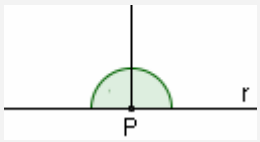
**TEOREMA (Esistenza della Perpendicolare per un punto dato a una retta data)**
**Dati un punto P e una retta r, esiste sempre una retta che passi per P e sia perpendicolare a r.**

❑ Primo caso: $P \notin r$




Prendiamo sulla r un qualsiasi punto A,
e congiungiamo P con A.
*Se fortuitamente accade* che la retta PA
risulti perpendicolare a r, siamo già a posto;
*in caso contrario,* costruiamo
nel semipiano di origine r, e non contenente P,
una semiretta s che formi un angolo $s\hat{A}r = P\hat{A}r$
(semiretta sicuramente esistente
per l'assioma del trasporto dell'angolo)
e su di essa prendiamo un segmento $\overline{AQ} = \overline{AP}$
(assioma del trasporto di un segmento).
Se a questo punto tracciamo la retta PQ,
essa sarà perpendicolare a r !!!
Infatti il triangolo APQ è isoscele per costruzione,
e il segmento $\overline{AB}$ (giacente su r),
che per costruzione fa da bisettrice per l'angolo al vertice $P\hat{A}Q$,
è, per un teorema noto, anche altezza, quindi è perpendicolare a PQ.

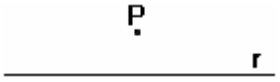
❑ Secondo caso: $P \in r$




Se il punto P appartiene alla retta r,
l'esistenza della perpendicolare a r per P
è assicurata dall'assioma
di divisibilità indefinita degli angoli,
secondo cui un angolo si può suddividere
in un numero a piacere n di parti uguali.
Infatti, in particolare, questo assioma
assicura (n=2) l'esistenza della *bisettrice*
di un angolo dato qualsiasi.
Ora, la bisettrice dell'angolo piatto che
in figura abbiamo segnato con l'archetto,
forma due angoli retti con r,
quindi è perpendicolare ad r.

### IL PROBLEMA DELL' UNICITA' DELLA PERPENDICOLARE

*Dati un punto* P *e una retta* r,
*di rette passanti per* P *e perpendicolari a* r *ce n'è una sola o ce n'è più d'una* ?




*L'intuizione ci dice: "Senz'altro, una sola".*
*L' "unicità della perpendicolare per un punto dato a una retta data"*
*potrebbe quindi essere assunta come nuovo assioma.*
*Ma ciò non è necessario: infatti tale unicità è* ***dimostrabile come teorema****. Vediamo in che modo.*

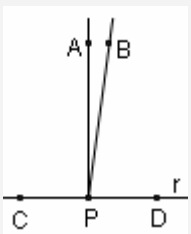
**TEOREMA (Unicità della Perpendicolare per un punto dato a una retta data)**
**Dati un punto P e una retta r, la perpendicolare per P a r è unica.**

❑ Primo caso: $P \notin r$




Se, per assurdo,
di perpendicolari da P a r
ve ne fosse più d'una,
allora il triangolo PHK individuato
da due di queste perpendicolari
e dalla retta r
avrebbe due angoli retti …
ma un teorema già dimostrato (par. 2.4)
afferma che in un triangolo
più di un angolo retto non può esserci.

❑ Secondo caso: $P \in r$




Se, per assurdo,
di perpendicolari per P a r
ve ne fosse più d'una,
allora, dette PA, PB
due di tali perpendicolari,
l'angolo piatto $C\hat{P}D$ avrebbe
due distinte bisettrici,
mentre sappiamo (par. 2.3)
che la bisettrice di un angolo
è unica.

## 3.2 - CENNI DI STORIA: EUDOSSO, EUCLIDE, ARCHIMEDE

**Da "Appunti di storia dell'Analisi Infinitesimale" dello straordinario professor Pascal Dupont estraiamo, apportando brevissime aggiunte e qualche ritocco formale per motivi di impaginazione, queste considerazioni intorno a tre personalità che illuminarono col loro ingegno la scienza antica.**

❑ Nella 1ª metà del V° secolo è attivo **EUDOSSO** di Cnido contemporaneo del sommo filosofo Platone. (…)
Di Eudosso, astronomo, matematico che si occupò di tutti i problemi più discussi, vogliamo ricordare (…)

♪ la *teoria delle proporzioni* ⟨ fra grandezze commensurabili / fra grandezze INcommensurabili

♫ il *metodo di esaustione* (Eudosso-Euclide-Archimede).

L'acutezza intellettuale di Eudosso,
nell'affrontare lo spinoso e affascinante tema
dell'*incommensurabilità*
(di cui noi ci occuperemo nel Volume 2),
è impressionante, e degna di ammirazione.

Due grandezze (ad es.: due segmenti) si dicono "*incommensurabili*" se non ammettono nessun sottomultiplo comune.
Non è strano che possano esistere coppie di grandezze incommensurabili?
Sì! E' *molto* strano … ma vero!!!
Anzi … sorpresa nella sorpresa …
presa una coppia di grandezze,
è "*normale*" che siano *incommensurabili*,
del tutto *eccezionale* che *non* lo siano!

❑ **EUCLIDE**, finissimo critico, profondo pensatore piuttosto che genio creatore, sistemò verso il 300 a.C. gran parte della matematica greca dei tre secoli precedenti (VI, V, IV), nei suoi celeberrimi "Elementi" (…).

L'opera è divisa in 13 libri;

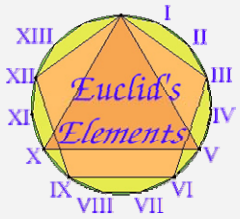
I°, II°, III°, IV°; VI°: *Geometria del piano*

V°: *Teoria generale delle grandezze* (*applicazione nel* VI°)

VII°, VIII°, IX°: *Aritmetica*

X°: *Classificazione delle grandezze incommensurabili*

XI°, XII°, XIII°: *Geometria solida*




Il lettore moderno, nel leggere gli "Elementi" di Euclide, deve tener presente la differenza di "mentalità": i matematici greci antichi tendevano a "geometrizzare" ciò che noi invece istintivamente "aritmetizziamo", cioè interpretiamo in termini numerici.

*Indicazioni per* **approfondimenti su Internet** *riguardo agli "Elementi"*: ⇨

Ripetiamo che gli "Elementi" non devono essere pensati come una "creazione" di Euclide, ma una stupenda sistemazione (per quanto non priva di difetti) di pressoché tutta la matematica greca dal 600 al 300 a.C.

Il Libro I (…) si presenta più complesso, con:

*Definizioni* (Termini): I. Punto è ciò che non ha parti; II. Linea è lunghezza senza larghezza; …
XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non s'incontrano fra loro da nessuna delle due parti

*Postulati*: Risulti postulato: I. che si possa condurre una linea retta da qualsiasi punto ad ogni altro punto; …
III. che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza ( = raggio); …

♥ **V**. che **se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti** ( = tali che la loro somma sia < di due retti), **le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti** ( = la cui somma è < di due retti)

*Nozioni comuni* (principi comuni a tutte le scienze; oggi chiamiamo *assiomi* i postulati e le nozioni comuni):
I. Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro; … VIII. Ed il tutto è maggiore della parte

*Proposizioni* (48 proposizioni; con la 29ª ha inizio **la geometria euclidea vera e propria**, che **si fonda** cioè **sul V postulato**; la 47ª proposizione è l'enunciato - con dimostrazione - del Teorema di Pitagora).

❑ Pensiamo che si possa con tutta tranquillità condividere il parere di Enrico Rufini, per il quale "**ARCHIMEDE** (Siracusa, circa 287 a.C.; Siracusa, 212 a.C.)
fu il maggiore fra gli antichi matematici; a tal punto lo possedeva il furor delle muse". ( … )
Fino agli inizi del XX secolo Archimede veniva associato (in matematica pura) soprattutto al *metodo di esaustione*, che dev'essere valutato come impeccabile *metodo dimostrativo* e non già *metodo costruttivo*.
Quando io applico il metodo di esaustione ti dico: "Ecco qui un problema del quale conosco il risultato:
ti dimostro che questo risultato è esatto, ma non chiedermi come ho fatto a trovare quel risultato".
Ma, nel 1906, venne scoperto che, in parallelo al metodo di esaustione, Archimede usava un altro metodo, il *metodo sui teoremi meccanici* (…).
Dobbiamo perciò pensare che egli procedesse in due tempi: *prima* trovare euristicamente (cioè: con procedimento intuitivo, approssimativo) il risultato; *poi* dimostrarlo rigorosamente.
Di Archimede ci sono pervenute le opere seguenti (ma altre si ritengono perdute):
*Sull'equilibrio dei piani; Sui galleggianti; Sulla misura del cerchio; Sulle spirali; Quadratura della parabola; Sui conoidi e sferoidi; Sulla sfera e sul cilindro; L'Arenario; Il libro dei lemmi; Il Metodo.*

## 3.3 - RETTE PARALLELE

**LE DIMOSTRAZIONI "PER ASSURDO"**

Il secondo COROLLARIO del Teorema dell'Angolo Esterno (pag. 287),
e il TEOREMA di Unicità della Perpendicolare per un punto dato a una retta data (pag. 294),
sono stati dimostrati tramite un ragionamento "PER ASSURDO".

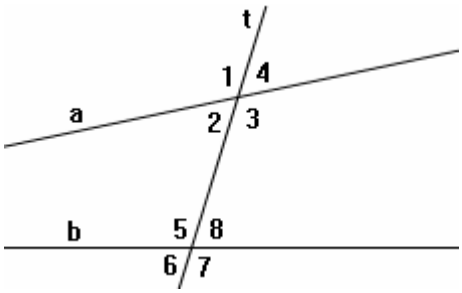
Una dimostrazione "**PER ASSURDO**" consiste nel **provare a negare la tesi,**
**e nel far vedere che così facendo, si giunge a conclusioni che "non stanno in piedi"**
**perché sono in contrasto**

- **o con l'ipotesi,**
- **o con qualche assioma,**
- **o con qualche teorema già dimostrato in precedenza**.

Ma se negando la tesi si perviene a conclusioni assurde, allora resta dimostrato che la tesi è vera!!!

**ANGOLI FORMATI DA DUE RETTE CON UNA TRASVERSALE: TERMINOLOGIA**

Quando due rette vengono tagliate da una "trasversale" (cioè, da una terza retta che le interseca entrambe) si formano 8 angoli, che a due a due prendono nomi particolari.




- **CORRISPONDENTI**: $\hat{1}$ e $\hat{5}$; $\hat{2}$ e $\hat{6}$; $\hat{3}$ e $\hat{7}$; $\hat{4}$ e $\hat{8}$
- **ALTERNI INTERNI**: $\hat{2}$ e $\hat{8}$, $\hat{3}$ e $\hat{5}$
- **ALTERNI ESTERNI**: $\hat{1}$ e $\hat{7}$, $\hat{4}$ e $\hat{6}$
- **CONIUGATI INTERNI**: $\hat{2}$ e $\hat{5}$, $\hat{3}$ e $\hat{8}$
- **CONIUGATI ESTERNI**: $\hat{1}$ e $\hat{6}$, $\hat{4}$ e $\hat{7}$

(**alterni = da parti opposte** rispetto alla trasversale;
**coniugati = dalla stessa parte** rispetto alla trasversale)

**TEOREMA (T. D. P., ossia: "T. Diretto sul Parallelismo")**
**Se due rette formano con una trasversale:**

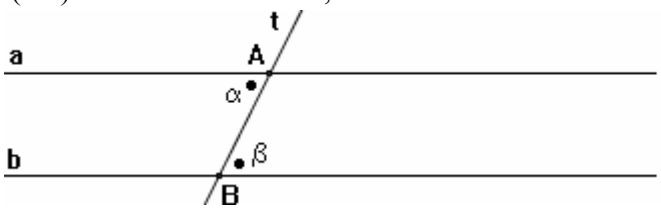
1) **due angoli alterni interni uguali**
2) **oppure due angoli alterni esterni uguali**
3) **oppure due angoli corrispondenti uguali**
4) **oppure due angoli coniugati interni supplementari**
5) **oppure due angoli coniugati esterni supplementari**

**allora sono parallele**.

Per ora, adottiamo la seguente
**DEFINIZIONE**:
**"due RETTE si dicono PARALLELE quando giacciono su uno stesso piano e non si incontrano mai, cioè non hanno nessun punto in comune"**.
*Successivamente* (pag. 299) passeremo ad una *definizione* "*estensiva*" di parallelismo.

- *OSSERVAZIONE*
  *In pratica, abbiamo riassunto in un unico enunciato ben 5 teoremi. Ma una volta dimostrato il primo ("se due rette formano con una trasversale due angoli alterni interni uguali, allora sono parallele"), il più sarà fatto, perché i quattro rimanenti si ricondurranno facilmente a quello.*

DIMOSTRAZIONE di 1):
*"se due rette formano con una trasversale due angoli alterni interni uguali, allora sono parallele".*
Supponiamo (HP) che due certe rette a, b formino con una trasv. t due angoli alterni interni uguali: $\alpha = \beta$.

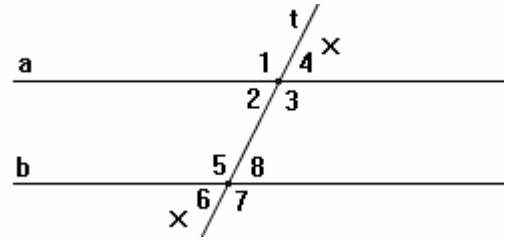






Vogliamo dimostrare (TH) che le due rette a, b sono parallele.
Per assurdo.
Se a, b NON fossero parallele, allora si incontrerebbero in un punto,
che per meglio fissare le idee ho chiamato P. Ma in questo modo si formerebbe un triangolo, ABP,
avente un angolo esterno uguale ad un angolo interno ad esso non adiacente!
E ciò non può verificarsi, perché in un triangolo ciascun angolo esterno è sempre MAGGIORE
di ciascun angolo interno non adiacente (Teorema dell'Angolo Esterno).
Perciò è assurdo supporre che le due rette non siano parallele:
bisognerà necessariamente ammettere che lo sono.
La tesi è dimostrata: $a \parallel b$.

DIMOSTRAZIONE DI 2)




In questo paragrafo la freccia $\rightarrow$ ,
sovente da noi impiegata per schematizzare
"SE … ALLORA …" (oppure "… IMPLICA …")
va piuttosto letta
"QUINDI, DI CONSEGUENZA"

Supponiamo che due certe rette a, b formino con una trasversale t due angoli alterni esterni uguali (quelli indicati con la crocetta).

Allora i due angoli $\hat{2}$, $\hat{8}$ sono uguali perché opposti al vertice di angoli uguali (pr. transitiva dell'uguaglianza).

Se vogliamo illustrare "formalmente" questo fatto, possiamo utilizzare …

- … una freccia di implicazione:

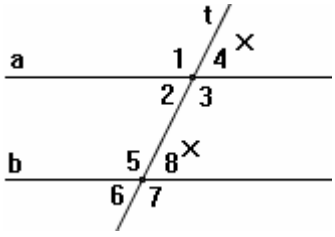
$$\underset{\text{opposti al vertice}}{\hat{2} = \hat{4}};\quad \underset{\text{opposti al vertice}}{\hat{8} = \hat{6}};\quad \underset{\text{HP}}{\hat{4} = \hat{6}} \quad \underset{\text{proprietà transitiva}}{\rightarrow} \quad \hat{2} = \hat{8}$$

- … oppure una catena:

$$\hat{2} \underset{\text{opposti al vertice}}{=} \hat{4} \underset{\text{HP}}{=} \hat{6} \underset{\text{opposti al vertice}}{=} \hat{8}$$

Ma così siamo ricaduti nel caso 1) (due angoli alterni interni uguali), e la tesi è dimostrata: a || b

DIMOSTRAZIONE DI 3)



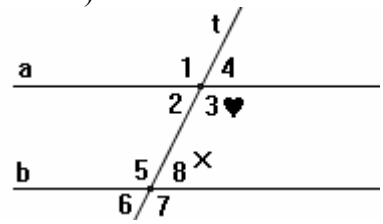

Supponiamo che due certe rette a, b formino con una trasversale t due angoli corrispondenti uguali (quelli indicati con la crocetta).

Allora i due angoli $\hat{2}$, $\hat{8}$ sono uguali perché $\hat{2}$ è opposto al vertice di un angolo che è uguale a $\hat{8}$ (proprietà transitiva dell'uguaglianza):

$$\hat{2} \underset{\text{opposti al vertice}}{=} \hat{4} \underset{\text{HP}}{=} \hat{8}$$

Si ricade nel caso 1) (due angoli alterni interni uguali), e la tesi è dimostrata: a || b

DIMOSTRAZIONE DI 4)




Supponiamo che due certe rette a, b formino con una trasversale t due angoli coniugati interni supplementari (quelli indicati con la crocetta e col cuoricino: $\hat{3} + \hat{8} = 180°$ ).

Allora i due angoli $\hat{2}$, $\hat{8}$ sono uguali perché supplementari dello stesso angolo $\hat{3}$.

Se vogliamo illustrare "formalmente" questo fatto, possiamo utilizzare …

- … una freccia di implicazione:

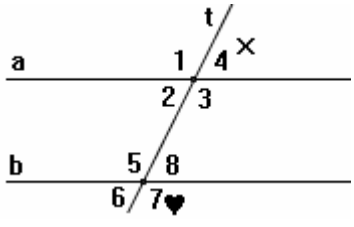
$$\hat{2} = 180° - \hat{3};\quad \underset{\text{HP}}{\hat{8} = 180° - \hat{3}} \quad \underset{\text{proprietà transitiva}}{\rightarrow} \quad \hat{2} = \hat{8}$$

- … oppure una catena:

$$\hat{2} = 180° - \hat{3} \underset{\text{HP}}{=} \hat{8}$$

Ma così siamo ricaduti nel caso 1) (due angoli alterni interni uguali), e la tesi è dimostrata: a || b

DIMOSTRAZIONE DI 5)




Supponiamo che due certe rette a, b formino con una trasversale t due angoli coniugati esterni supplementari (quelli indicati con la crocetta e col cuoricino: $\hat{4} + \hat{7} = 180°$ )

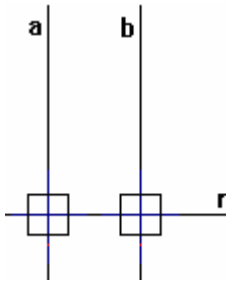
Allora i due angoli $\hat{2}$, $\hat{8}$ sono uguali perché:

$$\hat{2} \underset{\text{opposti al vertice}}{=} \hat{4} \underset{\text{HP}}{=} 180° - \hat{7} = \hat{8}$$

Si ricade nel caso 1) (due angoli alt. int. uguali), e la tesi è dimostrata: a || b

**COROLLARIO**

**Due rette, che siano perpendicolari ad una stessa retta, sono parallele fra loro**.




DIM. Se $a \perp r$ e anche $b \perp r$, allora tanto a quanto b formano 4 angoli retti con r.
Avremo dunque $a \parallel b$ perché, ad esempio,
queste due rette formano con la trasversale r angoli corrispondenti uguali.

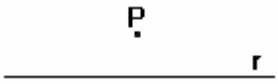
*OSSERVAZIONE*

*Abbiamo solo "problemi di abbondanza" per provare la tesi:*
*a ben guardare, uno qualsiasi dei 5 enunciati di cui consta il precedente*
*Teor. Diretto sul Parallelismo potrebbe essere utilizzato per concludere che è* $a \parallel b$.

*Oppure ancora, potremmo ragionare per assurdo e dire:*
*se a, b si incontrassero, allora si formerebbe un triangolo con due angoli retti;*
*ma tale triangolo, come afferma un teorema precedente, non può esistere.*

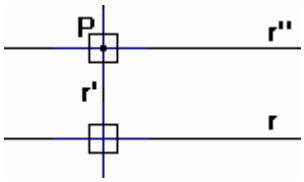
**IL PROBLEMA DELL' ESISTENZA DELLA PARALLELA**

*Dati un punto* P *e una retta* r, *esiste sempre una retta che passi per* P *e sia parallela a* r *?*




*L'intuizione ci dice: "Senz'altro, sì".*
*L' "esistenza della parallela per un punto dato a una retta data"*
*potrebbe quindi essere assunta come nuovo assioma.*
*Ma ciò non è necessario: infatti tale esistenza è* ***dimostrabile come teorema****. Vediamo in che modo.*

**TEOREMA (Esistenza della Parallela per un punto dato a una retta data)**
**Dati un punto P e una retta r, esiste sempre una retta che passi per P e sia parallela a r**.

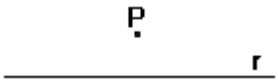



DIM.
Infatti, se per P conduciamo
- la perpendicolare r' alla retta r,
- poi la perpendicolare r'' alla retta r',

avremo che r'' ed r sono parallele, in quanto perpendicolari alla stessa retta r'.

**IL PROBLEMA DELL' UNICITA' DELLA PARALLELA**

*Dati un punto* P *e una retta* r, *di rette passanti per* P *e parallele a* r *ce n'è una sola, o ce n'è più d'una?*




*L'intuizione ci dice: "Senz'altro, una sola".*

Storicamente furono fatti molti tentativi di dimostrare che questo asserto
poteva essere derivato come conseguenza dagli assiomi precedentemente introdotti.
Ma tutti questi tentativi fallirono.

Finalmente, nel XIX secolo, emerse con definitiva evidenza che
**l' "unicità della parallela" NON può essere dimostrata come teorema**
**a partire dalla famiglia degli assiomi antecedenti**.



L' "unicità della parallela per un punto dato a una retta data" è quindi UN NUOVO ASSIOMA.
Esso viene denominato anche "postulato di Euclide", in onore del grande padre della Geometria.

♥ **ASSIOMA (POSTULATO DI EUCLIDE, o Assioma dell'UNICITA' DELLA PARALLELA)**
**Dati un punto P e una retta r,**
**NON ESISTE PIU' DI UNA parallela per P a r**.

OSSERVAZIONE
Il Postulato di Euclide, insieme con il teorema, prima dimostrato, secondo cui
" dati un punto P e una retta r, esiste sempre una retta che passi per P e sia parallela a r ",
consente di affermare in definitiva che
**" dati un punto P e una retta r, esiste UNA E UNA SOLA parallela per P a r "**

**TEOREMA (T. I. P., ossia: "Teorema Inverso sul Parallelismo")**

**Se due rette sono parallele, allora formano con una qualsiasi trasversale:**

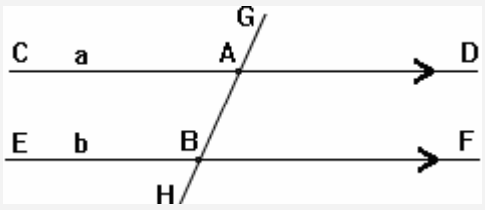
1) **angoli alterni interni uguali**
2) **angoli alterni esterni uguali**
3) **angoli corrispondenti uguali**
4) **angoli coniugati interni supplementari**
5) **angoli coniugati esterni supplementari**.

Anche qui, più precisamente, siamo di fronte a ben 5 teoremi, tutti riuniti in un unico enunciato. Oppure, possiamo dire di avere un unico teorema, con 5 tesi. Vediamola in questo modo: ci sono 5 tesi da dimostrare, a partire da una stessa ipotesi. *Ma niente paura, perché, una volta dimostrata la tesi* 1), *le altre ne saranno conseguenze pressoché immediate.*

IPOTESI: $a \parallel b$

TESI:

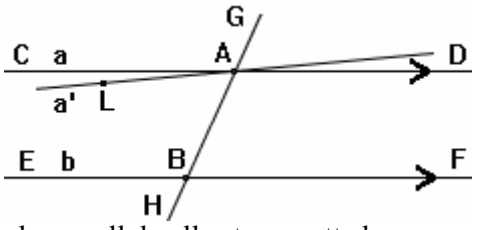
1) gli alterni interni sono uguali: $C\hat{A}B = F\hat{B}A$, $D\hat{A}B = E\hat{B}A$
2) gli alterni esterni sono uguali: $G\hat{A}C = H\hat{B}F$, $G\hat{A}D = H\hat{B}E$
3) i corrispondenti sono uguali: $G\hat{A}C = A\hat{B}E$, ecc. ecc.
4) i coniugati interni sono supplementari: $C\hat{A}B + E\hat{B}A = 180°$, $D\hat{A}B + F\hat{B}A = 180°$
5) i coniugati esterni sono supplementari: $G\hat{A}C + H\hat{B}E = 180°$, $G\hat{A}D + H\hat{B}F = 180°$




♥ Notare la **coppia di frecce** sul disegno: le utilizzeremo, talvolta (non sempre: tendono a "sporcare" la figura), per **indicare il parallelismo *noto*** tra due rette.

**DIMOSTRAZIONE DELLA TESI 1)**

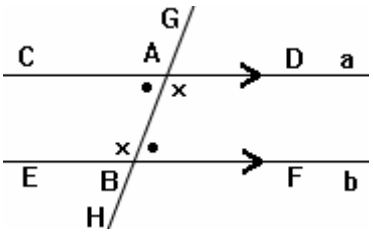
La nostra HP è $a \parallel b$; la tesi è che gli alterni interni sono uguali. Cominciamo col provare che è $C\hat{A}B = F\hat{B}A$.
Per assurdo: se questi due angoli non fossero uguali, allora si potrebbe tracciare, per il punto A, una retta $a'$, distinta dalla $a$, in modo che questa nuova retta formi un nuovo angolo $L\hat{A}B = F\hat{B}A$.
Consideriamo ora le due rette $a'$, $b$.
Esse formano con la trasversale GH due angoli alterni interni uguali e perciò è $a' \parallel b$ in virtù del Teorema Diretto sul Parallelismo.
D'altra parte, per ipotesi, è pure $a \parallel b$.




Ma allora per il punto A passerebbero DUE rette distinte ( $a'$, $a$ ) entrambe parallele alla stessa retta b.
E ciò è in contraddizione col Postulato di Euclide (Unicità della Parallela). Ricapitoliamo: supponendo che i due angoli $C\hat{A}B$, $F\hat{B}A$ non fossero uguali, siamo giunti a una conclusione che è assurda, in quanto contraddice un assioma che abbiamo accettato. Resta perciò dimostrato che è $C\hat{A}B = F\hat{B}A$.
Ma da $C\hat{A}B = F\hat{B}A$ segue subito l'uguaglianza degli altri due alterni interni: infatti essi sono supplementari di due angoli già dimostrati uguali: $D\hat{A}B = 180° - C\hat{A}B = 180° - F\hat{B}A = E\hat{B}A$.

**DIMOSTRAZIONE DELLE TESI 2, 3, 4, 5)**

A questo punto, le tesi 2), 3), 4) e 5) si deducono immediatamente. Considera la figura qui a fianco: in essa è segnato ciò che già abbiamo acquisito, ossia le due uguaglianze $C\hat{A}B = F\hat{B}A$ ; $D\hat{A}B = E\hat{B}A$. Se ora prendi la matita e vai a segnare col puntino ogni angolo che è opposto al vertice di un angolo "puntino", e con la crocetta ogni angolo che è opposto al vertice di un angolo "crocetta", avrai subito le altre tesi.



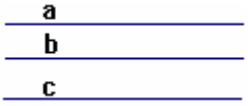

**SIGNIFICATO "ESTENSIVO" DELL'AGGETTIVO "PARALLELE"**

Per tutta una serie di ragioni, è conveniente allargare l'uso dell'aggettivo "parallele", nel senso di convenire che, per due rette, anche la "coincidenza" vada pensata come caso particolare di "parallelismo". Aggiorniamo dunque la definizione di "parallelismo", stabilendo che due rette complanari si possono dire "**parallele**" quando **non hanno alcun punto in comune, OPPURE ne hanno infiniti ( = coincidono)**. Puoi ora controllare che tutti i teoremi precedentemente stabiliti conservano la loro validità anche con questo significato più "largo" dell'aggettivo "parallele".

**TEOREMA (proprietà transitiva del parallelismo)**

**Se due rette sono entrambe parallele ad una terza retta, allora sono parallele fra loro**.

DIM. Sia $a \parallel c$, $b \parallel c$. Dico che è anche $a \parallel b$.
Infatti, se per assurdo le due rette a, b non fossero parallele tra loro, si incontrerebbero in un punto P; ma allora per P passerebbero DUE distinte rette, entrambe $\parallel$ alla c, contro il postulato di Euclide. L'assurdo trovato dimostra la tesi.

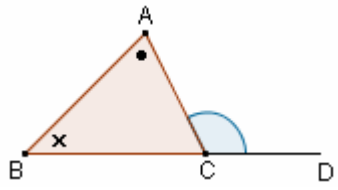



**TEOREMI** (*le dimostrazioni sono lasciate al lettore*)

**Se due rette sono parallele, allora ogni retta del loro piano, che ne interseca una, taglierà anche l'altra**
**Se due rette sono parallele, allora ogni perpendicolare a una di esse sarà anche perpendicolare all'altra**

## 3.4 - QUESTIONI RELATIVE AGLI ANGOLI DEI TRIANGOLI E DEI POLIGONI

**TEOREMA (TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO IN FORMA FORTE)**
**In un triangolo, ogni angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ad esso non adiacenti.**




**HP** $A\hat{C}D$ angolo esterno di ABC

**TH** $A\hat{C}D = \hat{A} + \hat{B}$

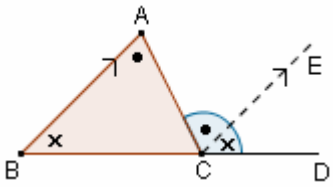
DIMOSTRAZIONE

Per il vertice C dell'angolo esterno $A\hat{C}D$ tracciamo la parallela CE al lato AB. Ora:

$A\hat{C}E = \hat{A}$ perché alterni interni rispetto alle parallele AB, CE con la trasversale AC;

$E\hat{C}D = \hat{B}$ perché corrispondenti rispetto alle parallele AB, CE con la trasversale BD.

Dunque $A\hat{C}D = A\hat{C}E + E\hat{C}D = \hat{A} + \hat{B}$, C.V.D.



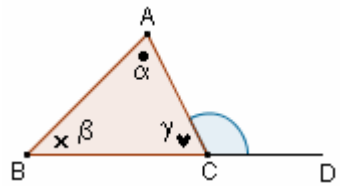

*Abbiamo messo le freccette per indicare il parallelismo. Comunque, queste freccette non sono "obbligatorie"!*

Capito ora perché si dimostra prima un teorema dell'Angolo Esterno "debole" e solo più tardi uno "forte"?
Perché il teorema DEBOLE serve per dimostrare i teoremi sulle RETTE PARALLELE,
ed è tramite questi ultimi che si riesce poi a dimostrare il teorema FORTE.

**TEOREMA In un triangolo, la somma dei tre angoli interni è uguale a un angolo piatto (180°).**

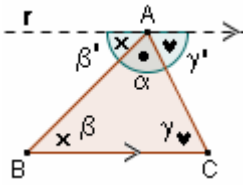
DIMOSTRAZIONE

Si può dimostrare come corollario del teorema precedente:




$\alpha+\beta+\gamma \underset{\text{angolo est. "forte"}}{\overset{\text{teorema}}{=}} A\hat{C}D+\gamma = B\hat{C}D = 180°$

… oppure si può dimostrare come teorema a sé stante.
Per un vertice qualsiasi (noi abbiamo preso il vertice A) si traccia la parallela r al lato opposto, dopodiché si ha:




$\beta = \beta'$ (alt. int., $r \parallel BC$, trasv. AB)

$\gamma = \gamma'$ (alt. int., $r \parallel BC$, trasv. AC)

dunque $\alpha+\beta+\gamma = \alpha+\beta'+\gamma' = 180°$

**COROLLARI**

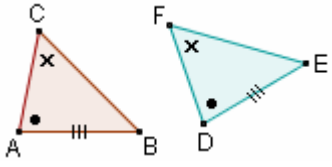
- **I due angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari (cioè, danno per somma 90°)**
- **In un triangolo equilatero, ogni angolo è uguale alla terza parte di un angolo piatto ( = 60°)**
- **Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due angoli, avranno uguale anche l'angolo rimanente**

*Quest'ultimo corollario si giustifica "per differenza rispetto a 180°":*

*se, nei due tr.* ABC *e* A'B'C', *si ha* $\hat{A}' = \hat{A}$ e $\hat{B}' = \hat{B}$, *allora* $\hat{C}' \underset{A'B'C'}{=} 180° - \hat{A}' - \hat{B}' = 180° - \hat{A} - \hat{B} \underset{ABC}{=} \hat{C}$

**TEOREMA (Secondo Criterio Generalizzato di uguaglianza dei triangoli)**
**Se due triangoli hanno rispettivamente uguali un lato e due angoli, e i due angoli sono, nei triangoli, disposti allo stesso modo rispetto al lato uguale, allora quei due triangoli sono uguali.**

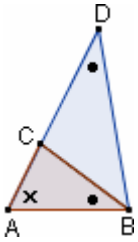
Infatti, in tal caso, si potranno applicare: prima, il corollario precedente, poi, l'ordinario Secondo Criterio.




Prendiamo i due triangoli della figura: essi hanno rispettivamente uguali un lato e due angoli, e questi sono, nei due triangoli, disposti allo stesso modo rispetto al lato uguale (in entrambi i casi, uno dei due angoli è adiacente, l'altro opposto).
In virtù del corollario precedente, possiamo dire subito che $\hat{B} = \hat{E}$
(d'altronde, direttamente: $\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C} = 180° - \hat{D} - \hat{F} = \hat{E}$ )
dopodiché potremo concludere che i due triangoli sono uguali per l'ordinario 2° Criterio, avendo rispettivamente uguali un lato e i due angoli ad esso adiacenti.

**OSSERVAZIONE - E' davvero ESSENZIALE che i due angoli siano "nei due triangoli, disposti allo stesso modo rispetto al lato uguale".**

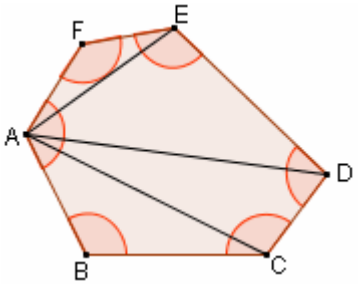
Consideriamo infatti la figura qui a destra:
In essa, i due triangoli ABC, ABD hanno rispettivamente uguali un lato ( $\overline{AB}$, che è in comune) e due angoli ( $\hat{A}$ che è in comune; $A\hat{B}C = \hat{D}$ ), ma NON sono, evidentemente, uguali.
Il fatto è che, nel triangolo ABC, i due angoli in questione sono I DUE ADIACENTI al lato $\overline{AB}$, mentre in ABD gli angoli sono UNO ADIACENTE, L'ALTRO OPPOSTO ad $\overline{AB}$.
**Il teorema non è applicabile.**



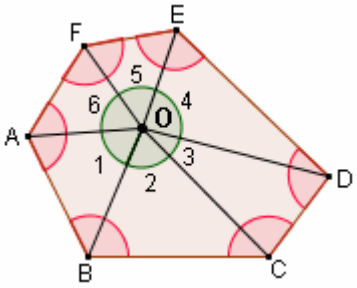
**TEOREMA**

**La SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN POLIGONO convesso è uguale a tanti angoli piatti, quant'è il numero dei lati diminuito di 2.**

Ad esempio, la somma degli angoli interni di un esagono è $(6-2)\cdot 180° = 4\cdot 180° = 720°$.
In generale, **la somma degli angoli interni di un poligono di n lati vale $(n-2)\cdot 180°$.**
Per la dimostrazione, si può procedere in due modi. Quale preferisci?




Ecco un esagono ABCDEF.
Se si prende un vertice qualsiasi (noi abbiamo preso A) e lo si congiunge con i vertici non consecutivi, si ottengono 4 triangoli (tanti quanti sono i lati che NON hanno un estremo in A, ossia 6–2 = 4 triangoli).
Si può osservare che la somma degli angoli interni di ABCDEF è uguale alla somma degli angoli interni di tutti e 4 questi triangoli, dunque vale $(6-2)\cdot 180° = 720°$
In generale, se i lati fossero stati n anziché 6, avremmo ottenuto $(n-2)\cdot 180°$.

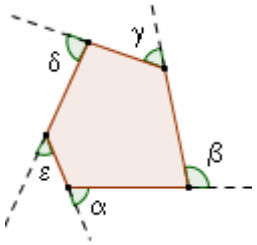



Ecco un esagono ABCDEF.
Se si prende un punto interno qualsiasi O e lo si congiunge con i vertici, si ottengono 6 triangoli (tanti quanti sono i lati).
Si può osservare che la somma degli angoli interni di ABCDEF è uguale alla somma degli angoli interni di tutti e 6 questi triangoli, diminuita però dell'angolo giro di vertice O.
Dunque tale somma vale:
$6\cdot 180° - 360° = 6\cdot 180° - 2\cdot 180° = (6-2)\cdot 180° = 720°$
In generale, se i lati fossero stati n anziché 6, avremmo ottenuto $(n-2)\cdot 180°$.

**COROLLARIO La somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso vale 360°.**

**La SOMMA DEGLI ANGOLI ESTERNI DI UN POLIGONO**

Poiché la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è $(n-2)\cdot 180°$, la somma degli angoli ESTERNI di un poligono di n lati misurerà
$n\cdot 180° - (n-2)\cdot 180° = \cancel{n\cdot 180°} - \cancel{n\cdot 180°} + 360° = 360°$.
S'intende, in questo discorso, di contare, per ciascun vertice del poligono, UN SOLO angolo esterno fra i due opposti al vertice e uguali fra loro.




Resta così dimostrato il seguente

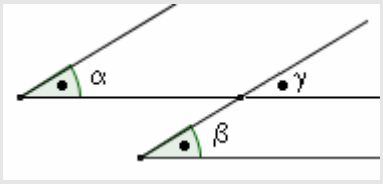
**TEOREMA**

**Indipendentemente dal numero dei lati, la somma degli angoli ESTERNI di un poligono (prendendo un solo angolo esterno per ogni vertice) è sempre uguale ad un angolo giro (360°).**

**COPPIE DI ANGOLI COI LATI PARALLELI**

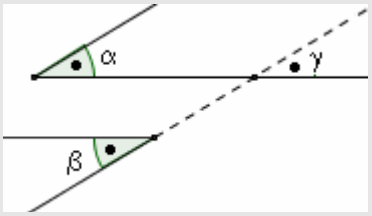
**TEOREMA**

**Due angoli coi lati paralleli e concordi, oppure paralleli e discordi, sono uguali. Invece due angoli che abbiano due lati paralleli e concordi, e gli altri due paralleli e discordi, sono supplementari.**



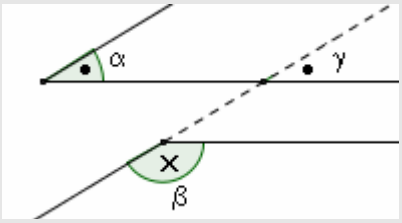

α, β hanno i **lati ∥ e concordi**.
γ fa da "angolo ausiliario", fa da "ponte" fra α e β:

$\alpha$ = corrispondenti, due parallele con trasversale $\gamma$ = corrispondenti, due parallele con trasversale $\beta$




α, β hanno i **lati ∥ e discordi**.
γ fa da "ponte" per la dimostrazione:

$\alpha$ = corrispondenti, due parallele con trasversale $\gamma$ = alterni esterni, due parallele con trasversale $\beta$




α, β hanno **due lati ∥ e concordi, e gli altri due ∥ e discordi**.

$\alpha$ = corrispondenti, due parallele con trasversale $\gamma$ = coniug. esterni, due parallele con trasversale $180° - \beta$

## 3.5 - CENNI ALLE "GEOMETRIE NON EUCLIDEE"

Sembra davvero molto strano che
(pag. 294 e seguenti, "Perpendicolari e parallele")

a) l'**esistenza** della **perpendicolare** (per un punto dato a una retta data),
b) l'**unicità** della **perpendicolare**,
c) e l'**esistenza** della **parallela**,

possano essere **tutte** dimostrate come **teoremi**, e che invece

d) **l'unicità della parallela,**

pur evidentissima all'intuizione, **NON si riesca a dimostrare**.

In effetti, i matematici tentarono *per secoli* di trasformare l'*assioma* dell'unicità della parallela (per un punto dato a una retta data) in *teorema*, ma **nessun tentativo di dimostrazione riuscì ad andare a buon fine**.

Capitò anche che qualche studioso ritenesse di poter cantare vittoria, e che successivamente altri matematici gli rovinassero la festa facendo vedere che era stato utilizzato, nel ragionamento, qualche enunciato … del tutto equivalente alla proposizione da dimostrare!

Notevole fu il lavoro di **Gerolamo Saccheri**, che nel suo trattato *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus* del **1733** si propose di partire dalla negazione dell'unicità della parallela, deducendo da questa negazione parecchie conseguenze, nella speranza di giungere a una conclusione che fosse in contraddizione con gli altri assiomi:
così facendo, egli ricavò svariati enunciati bizzarri e alla fine credette (sbagliando) di aver ottenuto la contraddizione desiderata; ma in realtà, emerse ad uno studio attento che non c'era alcun conflitto logico fra quanto egli aveva dedotto e la famiglia degli assiomi euclidei, privata di quello che lui aveva provato a negare.

Si cominciò allora, da parte di qualche esponente della comunità matematica, a sospettare che **forse dal negare l'unicità della parallela non potesse nascere nessuna contraddizione**, ma anzi si potesse costruire una "geometria" stramba e tuttavia in sé coerente, non contraddittoria dal punto di vista logico.

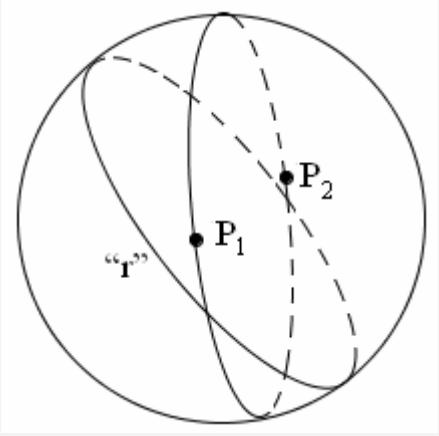
Tale idea fu sviluppata nella **prima metà del secolo XIX** da due studiosi, che lavorarono indipendentemente l'uno dall'altro, il russo Nikolai **Lobacevskij** (1793-1856) e l'ungherese Janos **Bolyai** (1802-1860); lo stesso Gauss, uno dei matematici più grandi di tutti i tempi, sostenne dopo aver letto il lavoro di Bolyai di avere intuito da sempre che quella era la strada giusta, ma di non aver pubblicato niente per evitare "le strida dei beoti".

E finalmente nel **1868** l'italiano Eugenio **Beltrami** riuscì a escogitare un concreto **"modello di geometria non-euclidea IPERBOLICA = DELLA PLURALITA' DELLE PARALLELE"**, ossia, servendosi di una figura chiamata "pseudosfera", riuscì a individuare una situazione nella quale, per determinate entità chiamate convenzionalmente "punti", "rette" e "piani", valevano tutti gli assiomi della geometria euclidea più un ulteriore assioma che rappresentava la NEGAZIONE del Postulato di Euclide, perché, dati un "punto" e una "retta", per il "punto" risultavano passare **INFINITE** DISTINTE **PARALLELE** alla "retta" considerata.

Ma questo è *estremamente* significativo!
**Il fatto che esista nella realtà almeno un modello di geometria non euclidea dimostra in modo incontrovertibile che negando il postulato di Euclide, e conservando gli altri assiomi, NON nasce contraddizione, quindi che il postulato di Euclide NON è dimostrabile come teorema a partire dalla famiglia degli altri assiomi.**

In seguito **Riemann** ideò un esempio di **geometria non-euclidea "ELLITTICA"**, nella quale, dati un "punto" e una "retta", per il "punto" non risultava passare **NESSUNA PARALLELA** alla "retta" considerata.

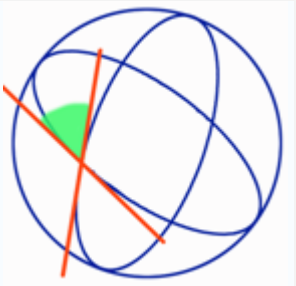
La geometria ellittica di Riemann non è difficile da descrivere.
Immaginiamo una sfera, e chiamiamo "piano" la sua superficie, "retta" ogni sua circonferenza massima, "punto" ogni entità costituita da una coppia di suoi punti diametralmente opposti.
Si vede chiaramente che, data una "retta" e un "punto", per il "punto" non passa NESSUNA "retta" parallela alla "retta" considerata.

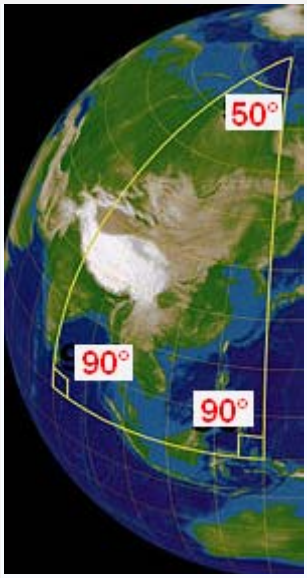



*I punti diametralmente opposti* $P_1$, $P_2$
*formano un'unica "entità-punto", cui possiamo dare il nome* "P".
*La figura mostra che per* "P"
*non esiste nessuna "retta" (=circonferenza massima)*
*che sia parallela alla "retta" indicata con* "r".

**E' normale, in una geometria *non* euclidea, che possano cambiare, rispetto alla geometria euclidea, quei teoremi i quali dipendono dall'assioma che lì viene modificato.**

Nella **geometria sferica** si intende per "angolo" quell'angolo euclideo che è formato dalle due rette euclidee le quali sono tangenti a due circonferenze massime ("rette" della geometria sferica) laddove queste si tagliano.
Vedi le figure qui accanto, tratte (salvo qualche ritocco) da Wikipedia.



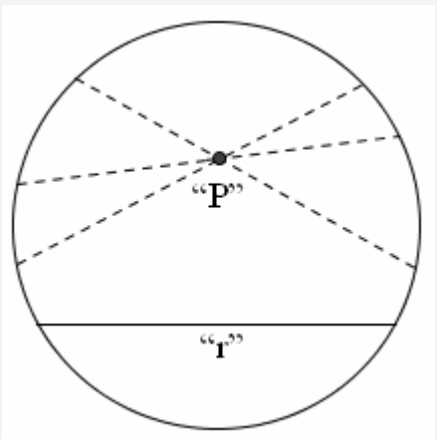



Bene:
**la somma dei tre "angoli" di un "triangolo" NON è, in questa interpretazione, di 180°**.
D'altra parte, un'analisi attenta mostra che, tolto l'assioma di unicità della parallela, gli altri assiomi della geometria euclidea (opportunamente "interpretati") sono veri in questo contesto.

C'è tuttavia, nel caso della geometria *ellittica* di cui la geometria sferica è uno dei possibili modelli, qualche eccezione: la famiglia dei cosiddetti "assiomi dell'ordine", che nella Geometria ellittica non valgono, mentre valevano nella geometria *iperbolica* la quale dunque, ai fini del nostro discorso, è più significativa.

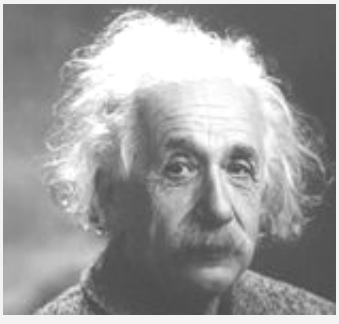
Ritornando alla geometria *iperbolica*, per la quale valgono invece, ribadiamolo, proprio TUTTI gli assiomi della geometria euclidea, TRANNE l'assioma dell'unicità della parallela, un suo modello facile da comprendere è il "**modello di Klein**" che andiamo qui di seguito ad esporre sommariamente, non entrando per brevità in troppi particolari ed approfondimenti.

Chiamiamo "piano" l'insieme dei punti interni ad una circonferenza, "punto" ogni punto interno alla circonferenza, "retta" ogni corda della circonferenza, pensata senza i due estremi.
Per questo "piano", questi "punti" e queste "rette" sono veri, come si può pazientemente controllare, tutti gli assiomi della normale geometria euclidea TRANNE l'assioma dell'unicità della parallela, che è invece sostituito da quest'altro:
*data una "retta" e un "punto" fuori di essa, per quel "punto" passano INFINITE "rette" parallele alla retta in questione, che cioè non la intersecano.*




*Nella figura, ecco un "piano" di Klein,*
*una "retta" e un "punto" fuori di essa.*
*Sono anche disegnate, tratteggiate,*
*tre fra le infinite "rette"*
*che passano per quel "punto"*
*e sono parallele a quella "retta".*

L'importanza delle geometrie non euclidee è enorme,
anche in relazione a teorie interpretative del mondo fisico.
**A questo proposito diciamo solo che la geometria iperbolica ha un ruolo essenziale nella Relatività Generale di Einstein.**

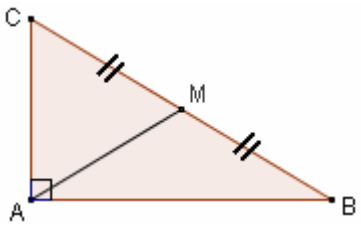


"*There are only two ways to live your life.*
*One is as though nothing is a miracle.*
*The other is as though everything is*" .
(Dubbiamente) attribuita ad Einstein.
Indubbiamente degna di rifletterci sopra … Tu, cosa ne dici?

## 3.6 - ALCUNI TEOREMI SUL TRIANGOLO RETTANGOLO

**TEOREMA**

**In un triangolo rettangolo, la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa.**



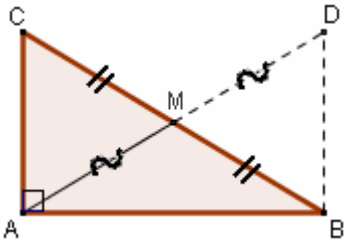

HP:

$C\hat{A}B = 90°$; $\overline{BM} = \overline{MC}$

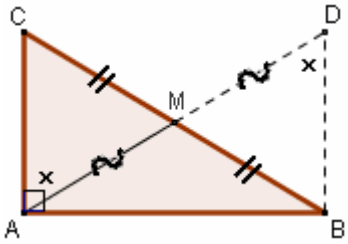
TH:

$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ $\left(= \overline{BM} = \overline{MC}\right)$

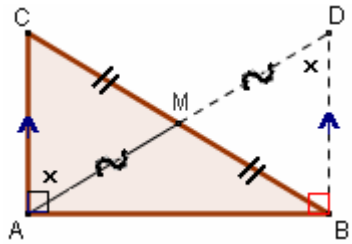
DIM.



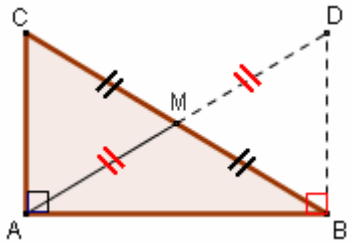

Costruzione:
prolungo la mediana $\overline{AM}$ di un segmento $\overline{MD} = \overline{AM}$.
Congiungo D con B.




I due triangoli AMC e DMB sono uguali per il 1° Criterio:
$\overline{MC} = \overline{BM}$ per ipotesi,
$\overline{AM} = \overline{MD}$ per costruzione,
$A\hat{M}C = D\hat{M}B$ perché opposti al vertice.
Quindi, in particolare, si ha $C\hat{A}M = \hat{D}$.




E poiché $C\hat{A}M$ e $\hat{D}$
sono in posizione di alterni interni
rispetto alle due rette BD e AC con la trasversale AD,
dal fatto che siano uguali si deduce che $BD \parallel AC$.
Ma allora, essendo $C\hat{A}B = 90°$,
sarà retto anche $D\hat{B}A$.

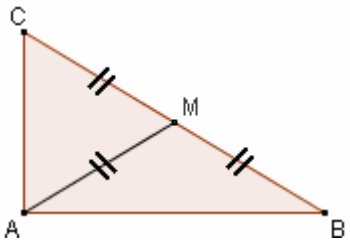



Se adesso confrontiamo i due triangoli ABC e ABD, vediamo che hanno
$C\hat{A}B = D\hat{B}A = 90°$; $\overline{AB}$ in comune;
$\overline{AC} = \overline{BD}$ per l'uguaglianza $AMC = DMB$
dunque sono uguali per il 1° Criterio e in particolare $\overline{BC} = \overline{AD}$.

E perciò $\boxed{\overline{AM}} = \overline{MD} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \boxed{\frac{1}{2}\overline{BC}} = \overline{BM} = \overline{MC}$, C.V.D.

**TEOREMA**

**Se in un triangolo la mediana relativa ad un lato è metà del lato stesso, allora quel triangolo è rettangolo (e il lato in questione ne è l'ipotenusa).**

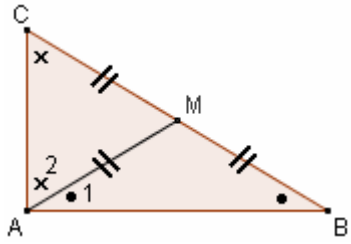



HP: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{MC}$

TH: $C\hat{A}B = 90°$

DIMOSTRAZIONE

I triangoli AMB, AMC sono isosceli per HP;
segue (vedi figura qui a fianco)
$\hat{A}_1 = \hat{B}$, $\hat{A}_2 = \hat{C}$.
Ma la somma di tutti e quattro gli angoli
$\hat{A}_1$, $\hat{B}$, $\hat{A}_2$, $\hat{C}$ dà 180°;
quindi la somma $\hat{A}_1 + \hat{A}_2$
(che costituisce poi l'angolo $\hat{A}$)
darà $180°/2 = 90°$.



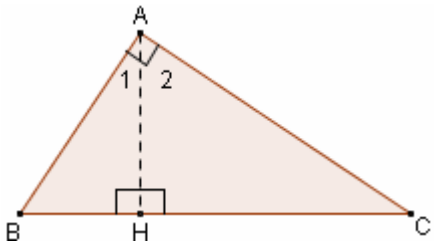

Schematicamente:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$
$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B} + \hat{C} = 180°$
$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180°$
$2\hat{A}_1 + 2\hat{A}_2 = 180°$
$2\left(\hat{A}_1 + \hat{A}_2\right) = 180°$
$\underbrace{\hat{A}_1 + \hat{A}_2}_{\hat{A}} = 90°$ C.V.D.

♥ Gli studenti tendono ad enunciare l'ultimo teorema in modo scorretto, dicendo che "se in un triangolo la mediana relativa *all'ipotenusa* è metà dell'ipotenusa stessa, allora il triangolo è rettangolo". … Eh, no! Se si utilizza fin dall'inizio il termine "ipotenusa", sembra che sia noto *già in partenza* che il triangolo è rettangolo!

**TEOREMA**

**Se in un triangolo rettangolo si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa, questa lo suddivide in due triangoli, simili fra loro e con quello di partenza (due triangoli sono "simili" quando hanno gli angoli rispettivamente uguali).**




HP

ABC rettangolo in $\hat{A}$

$AH \perp BC$

TH

ABC, AHB, AHC hanno gli angoli rispettivamente uguali

DIM.

Il triangolo ABH è rettangolo in $\hat{H}$, dunque i suoi due angoli acuti $\hat{B}$ e $\hat{A}_1$ sono complementari.

Ma anche $\hat{A}_2$ è complementare di $\hat{A}_1$: dunque $\hat{A}_2 = \hat{B}$ perché complementari dello stesso angolo $\hat{A}_1$.

$\boxed{\hat{A}_2} \overset{\downarrow}{=} 90° - \hat{A}_1 \overset{\downarrow}{=} \boxed{\hat{B}}$

$\hat{A}_1+\hat{A}_2=$ $=B\hat{A}C=90°$

angoli acuti del triangolo rettangolo AHB

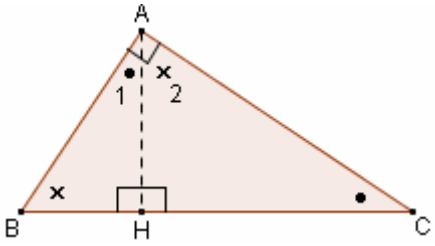
Analogamente, $\hat{A}_1 = \hat{C}$ perché complementari dello stesso angolo $\hat{A}_2$.

$\boxed{\hat{A}_1} \overset{\downarrow}{=} 90° - \hat{A}_2 \overset{\downarrow}{=} \boxed{\hat{C}}$

$\hat{A}_1+\hat{A}_2=$ $=B\hat{A}C=90°$

angoli acuti del triangolo rettangolo AHC

La situazione è pertanto quella illustrata nella figura qui a fianco.




La tesi è dimostrata!

I tre triangoli ABC, AHB, AHC hanno gli angoli rispettivamente uguali (ognuno dei tre ha un angolo retto, un angolo "pallino" e un angolo "crocetta"): sono dunque "simili".

**TEOREMA ("Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli")**

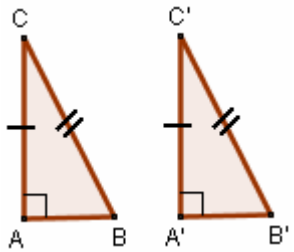
**Se due triangoli rettangoli hanno rispettivamente uguali l'ipotenusa e un cateto, allora sono uguali.**

OSSERVAZIONE

Notare che in questo teorema si suppone l'uguaglianza di due lati e di un angolo, ma quest'ultimo …

… non è l'angolo compreso.

Si tratta perciò di un teorema *nuovo*, non coincidente con nessuno dei tre Criteri di uguaglianza già noti.



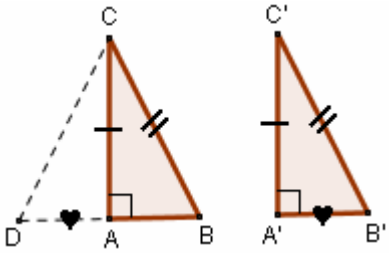

HP

$B\hat{A}C = B'\hat{A}'C' = 90°$

$\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$

TH

$ABC = A'B'C'$




♥ Nei testi in Inglese, questo enunciato è denominato "**the Hypotenuse-Leg Theorem**".

*Side* = lato

*Leg* = cateto

DIM.

Prolunghiamo il segmento $\overline{AB}$, dalla parte di A, di un segmento $\overline{AD} = \overline{A'B'}$.

Confrontando adesso i due triangoli ADC, A'B'C', vediamo che sono uguali per il Primo Criterio (l'angolo $D\hat{A}C$ è evidentemente retto perché supplementare dell'angolo retto $B\hat{A}C$).

Ma allora è, in particolare, $\overline{DC} = \overline{B'C'}$; era poi $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ per ipotesi, per cui si ha $\overline{DC} = \overline{BC}$. Dunque il triangolo BDC è isoscele; perciò $\overline{CA}$, che ne è altezza relativa alla base, farà anche da mediana: $\overline{AD} = \overline{AB}$.

Ma $\overline{AD}$ era stato costruito uguale ad $\overline{A'B'}$; ne consegue $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

E a questo punto, se andiamo a confrontare i due triangoli ABC e A'B'C', li possiamo dire uguali per il Primo Criterio (o per il Terzo, indifferentemente).

La tesi è dimostrata.

## 3.7 - AIUTO PER IL RIPASSO, ESERCIZI (le risposte sono alla fine … tienile coperte!)

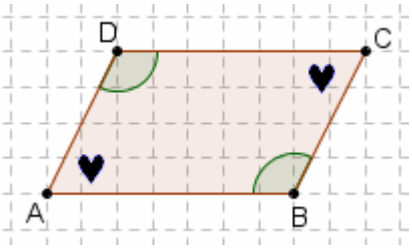
1) Una dimostrazione "per assurdo" si effettua
(metti una crocetta sull'affermazione giusta)
   a) provando a negare l'ipotesi
   b) facendo vedere che la tesi è conseguenza dell'ipotesi
   c) provando a negare la tesi
   d) provando a negare sia l'ipotesi che la tesi

♫ **ALTRI ESERCIZI SUL CAPITOLO 3 A PARTIRE DA PAGINA 336**

2) Metti una crocetta su quei teoremi nel cui ragionamento dimostrativo viene utilizzato il Postulato di Euclide:
   a) Teorema dell'angolo esterno in forma debole
   b) Teorema diretto sul parallelismo (la tesi è che le due rette siano parallele …)
   c) Teorema inverso sul parallelismo (la tesi è che certi angoli sono uguali e certi altri supplementari …)
   d) Teorema che esprime la proprietà transitiva del parallelismo
   e) Teorema dell'angolo esterno in forma forte

3) Metti una crocetta su quegli enunciati che sono dimostrabili come teoremi:
   a) Esistenza della perpendicolare per un punto dato a una retta data
   b) Unicità della perpendicolare per un punto dato a una retta data
   c) Esistenza della parallela per un punto dato a una retta data
   d) Unicità della parallela per un punto dato a una retta data

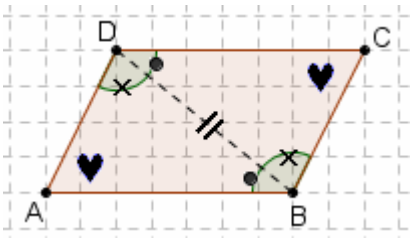
4) A Pierino viene richiesto di dimostrare che
se un quadrilatero ha gli angoli opposti uguali, allora ha anche i lati opposti uguali.
Pierino fa il disegno, scrive ipotesi e tesi, indica l'ipotesi sulla figura …




HP $B\hat{A}D = B\hat{C}D$
$A\hat{B}C = A\hat{D}C$

TH $\overline{AB} = \overline{DC}$
$\overline{AD} = \overline{BC}$

… e dice: provo a fare una costruzione.
Traccio una diagonale ( $\overline{BD}$ ).
Ora, i due triangoli ABD e CDB
sono uguali per il 2° Criterio
perché hanno un lato in comune,
e gli angoli adiacenti a quel lato
uguali perché alterni interni.
Segue, in particolare, la tesi!




… Ma il professore piange
sommessamente in un angolo.
Perché mai?

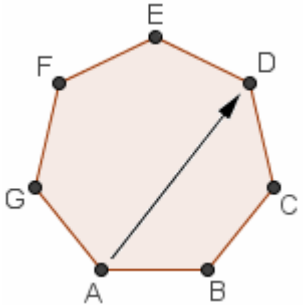





*Errori simili sono fra le occasioni più frequenti per cui i professori possono piangere quando correggono le verifiche di Geometria.*

5) *Impegnativo, ma ottimo per il ripasso della teoria.*
Nello schema qui a fianco, disegna una freccia dal punto X al punto Y qualora l'enunciato X intervenga (direttamente) nella dimostrazione dell'enunciato Y

   A: Teorema dell'Angolo Esterno in forma debole
   B: Teorema dell'Angolo Esterno in forma forte
   C: Teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo
   D: Se due rette formano con una trasversale due angoli alterni interni uguali, allora sono parallele
   E: Se due rette sono parallele, allora formano con ogni trasversale angoli alterni (interni ed esterni) uguali, corrispondenti uguali, eccetera
   F: Proprietà transitiva del parallelismo
   G: Postulato di Euclide



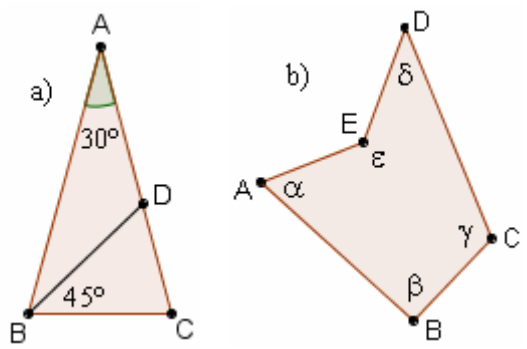

*Ad es., ci vuole una freccia da A verso D perché nella dimostrazione di D si utilizza A*

6) Il Teorema dell'Angolo Esterno in forma *debole* afferma che in ogni triangolo, ciascun angolo esterno è sempre maggiore di ciascun angolo interno ad esso non adiacente.
Viene successivamente dimostrato il Teorema dell'Angolo Esterno in forma *forte*, il quale dice che in ogni triangolo, ciascun angolo esterno è uguale alla somma dei due interni non adiacenti.
Ora, se è *uguale alla somma* … ne consegue che è *maggiore di ciascuno di essi*.
Ma allora, perché non si parte direttamente dimostrando il Teorema dell'Angolo Esterno in forma *forte*, per poi dedurne quello in forma *debole* come conseguenza?

7) Quanto misura la somma degli angoli interni di un ottagono?

8) Se la somma degli angoli interni di un poligono vale 17640°, quanti lati ha quel poligono?

9) Nella figura a) il triangolo ABC è isoscele sulla base $\overline{BC}$, e l'angolo al vertice $\hat{A}$ misura 30°, mentre $C\hat{B}D = 45°$.
Quanto misura $B\hat{D}C$? Il triangolo ABD è anch'esso isoscele?

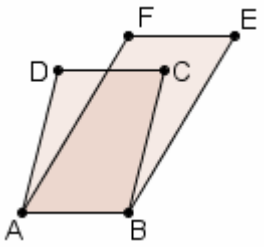



10) La somma degli angoli interni di un pentagono concavo come quello rappresentato in figura b) vale 3 angoli piatti, esattamente come se il poligono fosse convesso.
E' richiesto di dimostrarlo utilizzando il metodo seguente: dopo aver congiunto A con D, si imposta la catena
$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = (\hat{A}-D\hat{A}E)+\beta+\gamma+(\hat{D}-A\hat{D}E)+\ldots = \text{ecc.}$

11) Dimostra il teorema che dice "in due triangoli uguali le altezze relative a due lati rispettivamente uguali sono uguali" utilizzando il 2° Criterio Generalizzato.

12) Dimostra che un triangolo che abbia uguali fra loro due altezze è isoscele.

13) I due quadrilateri ABCD, ABEF nella figura riportata qui a destra → sono parallelogrammi, ossia hanno i lati opposti a due a due paralleli (*anche se sul disegno le frecce di parallelismo, utili ma non obbligatorie quando si sa che due rette sono parallele, non sono state messe*).
Come si può giustificare l'uguaglianza $E\hat{B}C = F\hat{A}D$ ?




14) Dimostra che due rette, che siano rispettivamente perpendicolari ai due lati di un angolo acuto, si incontrano senz'altro (non possono, cioè, essere parallele) e formano, intersecandosi, due angoli uguali a quello iniziale e due angoli ad esso supplementari.

**RISPOSTE**

1) c 2) c, d 3) a, b, c

4) Quel disgraziato di Pierino parla di angoli alterni interni e sostiene che sono uguali; ma ♥ di due angoli alterni interni, si può affermare che sono uguali **quando si sa (per HP, o per dim. precedente) che le due rette sono parallele**! Pierino ha commesso un errore piuttosto frequente, e GRAVE, in Geometria: dedurre che due angoli sono uguali per il semplice fatto che sono in posizione di alterni interni! … Eh no, evidentemente non basta!!!

5) $A \to D$; $B \to C$ (volendo); $D \to E$; $E \to B$ e (in una delle due modalità) C; $G \to E$ ed F

6) Perché il teorema "forte" non si può dimostrare se non si dimostra, prima di esso, il teorema "debole"; infatti il t. debole serve per dimostrare i teoremi sulle parallele, tramite i quali viene poi dimostrato il t. forte.

7) 1080° 8) 100 lati

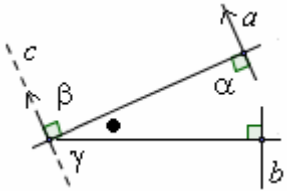
9) $A\hat{C}B = A\hat{B}C = (180° - \hat{A})/2 = (180° - 30°)/2 = 150°/2 = 75°$; $B\hat{D}C = 180° - C\hat{B}D - B\hat{C}D = 180° - 45° - 75° = 60°$
Oppure: per il Teorema dell'Angolo Est. in forma forte, $B\hat{D}C = A\hat{B}D + \hat{A} = (75° - 45°) + 30° = 30° + 30° = 60°$
Il triangolo ABD ha un angolo di 30° e un altro di $75° - 45° = 30°$ per cui, avendo 2 angoli uguali, è isoscele.

10) $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = (\hat{A}-D\hat{A}E)+\beta+\gamma+(\hat{D}-A\hat{D}E)+(360°-A\hat{E}D) = \hat{A}+\beta+\gamma+\hat{D}+360°-D\hat{A}E-A\hat{D}E-A\hat{E}D =$
$= (\hat{A}+\beta+\gamma+\hat{D})+360°-(D\hat{A}E+A\hat{D}E+A\hat{E}D) = 360°+360°-180° = 540°$

12) Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli …

13) Il modo più rapido e brillante è di osservare che hanno i lati paralleli e concordi (pag. 301); altrimenti, si prolunga $\overline{AB}$ dalla parte di B; angoli corrispondenti rispetto a due || sono uguali, poi si ragiona per differenza

14) Che le due rette non possano essere parallele, lo si dimostra con un ragionamento per assurdo, che si può effettuare in diversi modi. Ad esempio, si può tracciare per il vertice dell'angolo la parallela *c* alla retta *a*; l'angolo β sarà retto perché alterno interno (con rette parallele) rispetto all'angolo retto α ; ma allora non potrà essere retto l'angolo γ , quindi la retta *b* non potrà essere parallela alla retta *c*.
Perciò *b* non è parallela ad *a*: se lo fosse, infatti, sarebbe parallela pure a *c*.
Al secondo quesito si risponde facilmente ricordando che la somma degli angoli di un quadrilatero è 360° ...



# Cap. 4: DISTANZE, LUOGHI GEOMETRICI, QUADRILATERI PARTICOLARI

## 4.1 - DISTANZE E PROIEZIONI

**DISTANZA FRA DUE PUNTI**
**Dicesi "distanza" fra due punti, il segmento che li unisce.**



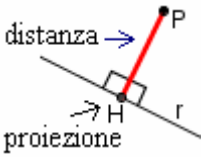

La "**distanza**" fra A e B è il segmento $\overline{AB}$

OSSERVAZIONE
A dire il vero, di fronte alla parola "distanza", noi siamo portati istintivamente a pensare ad un **numero** piuttosto che ad un **segmento**: "la distanza fra Milano e Torino è di 140 km", "la distanza fra i banchi durante la verifica scritta dev'essere di almeno 1 metro", ecc.
Insomma, spontaneamente la parola "distanza" ci suggerisce l'idea di "misura", che è un'idea dal contenuto più "aritmetico" (dal greco "arithmós" = numero) che geometrico ("gê " = terra, "métron" = misura).
In effetti, l'uomo moderno tende ad "aritmetizzare" ( = pensare in termini numerici) piuttosto che a "geometrizzare", come erano invece portati a fare i matematici dell'antichità classica e fra essi Euclide.
Tuttavia, nel nostro contesto, la parola "distanza" andrà interpretata nel senso della definizione data (distanza = segmento), anche se non è affatto "vietato" allo studente di pensare, se lo desidera, alla "misura" di questa distanza, fatta rispetto a una qualsivoglia unità di misura fissata. Il concetto di "misura", per inciso, è oggetto di un apposito capitolo, più avanzato, della geometria (Volume 2); capitolo che riserva interessanti sorprese, dovute alla singolare scoperta delle cosiddette "grandezze incommensurabili".

**DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA**
**PROIEZIONE DI UN PUNTO SU UNA RETTA**

**Dicesi " distanza di un punto P da una retta r ", il segmento di perpendicolare $\overline{PH}$ condotto da P alla retta r .**

**Il punto H (punto di intersezione fra r e la perpendicolare condotta a r da P, ovvero "piede" di tale perpendicolare), viene anche detto "proiezione di P su r".**

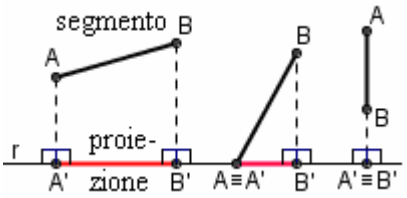



La **"distanza" di P da r** è il **segmento di perpendicolare** $\overline{PH}$ condotto da P a r.
Il punto H è detto **"proiezione di P su r"** o anche "**piede della perpendicolare**" condotta da P a r.

La **distanza** di un punto da una retta è un **segmento**; la **proiezione** di un punto su una retta è un **punto.**
**Nel caso particolare in cui P appartenesse alla retta r, la proiezione di P su r verrebbe a coincidere con P.**

**PROIEZIONE DI UN SEGMENTO SU UNA RETTA**

**Dicesi "proiezione" di un segmento $\overline{AB}$ sopra una retta r, il segmento che ha per estremi le proiezioni, su r, dei due estremi di $\overline{AB}$ .**
Nelle tre figure, la "proiezione" di $\overline{AB}$ su r è il segmento $\overline{A'B'}$, dove $A'$ è la proiezione di A su r, $B'$ è la proiezione di B su r.




**La proiezione di un segmento su una retta è quindi un altro segmento (giacente sulla retta).**
Nel caso particolare in cui il segmento $\overline{AB}$ stia su di una retta perpendicolare a r, come nella terza figura, la proiezione di $\overline{AB}$ su r si riduce ad un punto (visto come segmento dagli estremi coincidenti, "segmento nullo").

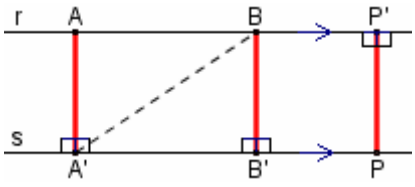
**TEOREMA**
**La distanza di un punto P da una retta r è il minore di tutti i segmenti aventi un estremo in P e l'altro estremo su r.**




Dimostrazione
Infatti, detta H la proiezione di P su r
e detto Q un qualsiasi punto di r distinto da H,
basterà considerare il triangolo PHQ, rettangolo in H, e ricordare che in un triangolo rettangolo ogni cateto è minore dell'ipotenusa, per concludere che $\overline{PH} < \overline{PQ}$, c.v.d.

**DISTANZA FRA DUE RETTE PARALLELE**
**Dicesi distanza fra due rette parallele,**
**la distanza di un punto qualsiasi di una qualsiasi delle due rette, dall'altra retta.**

**Osserviamo che la definizione è corretta, per il fatto che non dipende dal particolare punto o dalla particolare retta considerata.**
Con riferimento alla figura, si ha infatti che $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{PP'} = \text{ecc.}$
Come dimostrarlo? Semplice! Facciamo vedere ad esempio che $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.
A tale scopo, congiungiamo $A'$ con B e confrontiamo $A'AB$ con $A'B'B$.




- $\overline{A'B}$ è in comune;
- $A\hat{B}A' = B'\hat{A}'B$ perché alterni interni rispetto a due parallele con trasversale;
- $A'\hat{A}B = B\hat{B}'A' = 90°$ ( $A'\hat{A}B$ è retto perché, date due parallele, ogni perpendicolare all'una è $\perp$ anche all'altra).

Quindi i due triangoli in questione sono uguali per il 2° Criterio Generalizzato: segue appunto $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.

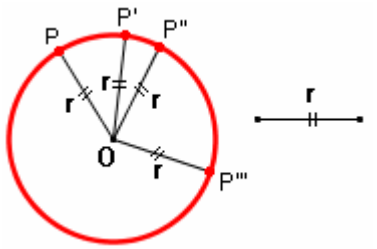
## 4.2 - LUOGHI GEOMETRICI

**Definizione di "LUOGO GEOMETRICO"**

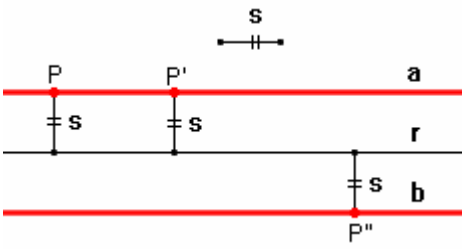
Si dice "**luogo geometrico**"
**l'insieme di tutti e soli i punti che godono di una determinata proprietà geometrica**.

Esempi

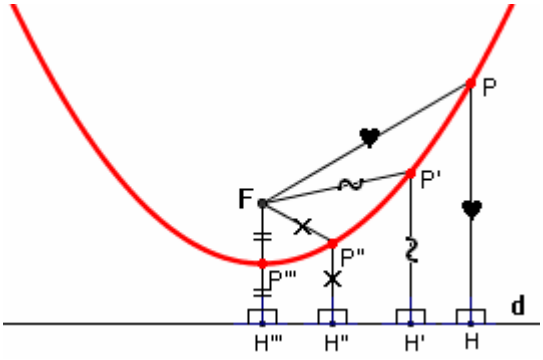
**1)**
**Il luogo geometrico dei punti del piano,**
**la cui distanza da un punto fissato O**
**è uguale ad un segmento assegnato r**,
è chiamato
"**circonferenza**".



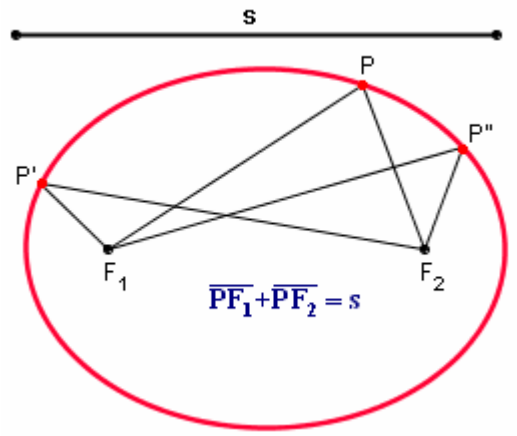

**2)**
**Il luogo geometrico dei punti del piano,**
**la cui distanza da una retta fissata r**
**è uguale ad un segmento fissato s**,
è costituito da
**due rette parallele**.




**3)**
**Il luogo dei punti P del piano,**
**equidistanti ( = aventi ugual distanza)**
**da un punto fisso F (detto "fuoco")**
**e da una retta fissa d (detta "direttrice")**,
è una curva chiamata
"**parabola**".




**4)**
**Il luogo dei punti P del piano,**
**per i quali è costante la somma** $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$
**delle distanze da due punti fissi** $F_1, F_2$ **(detti "fuochi")**
è una curva chiamata
"**ellisse**".




**APPROFONDIMENTO LOGICO/LINGUISTICO**

Siamo partiti scrivendo che
**si dice "luogo geometrico" l'insieme di**
**TUTTI E SOLI i punti che godono di una determinata proprietà geometrica**.
**In questa definizione, cosa vuol dire, precisamente, "TUTTI E SOLI"?**

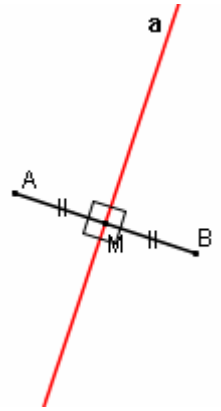
Dunque: noi abbiamo un certo insieme I di punti, e abbiamo una certa proprietà geometrica G.
Affermare che I è il **luogo** dei punti che godono della proprietà G significa sostenere DUE cose:

♪ **SOLO** i punti che godono della proprietà G appartengono a I, ossia:
- se un punto NON gode della proprietà G, allora NON può appartenere a I
  oppure, volendo (è equivalente, in termini logici):
- **se un punto appartiene a I allora gode della proprietà G**

♫ **TUTTI** i punti che godono della proprietà G appartengono a I, che è poi come dire:
**se un punto gode della proprietà G, allora appartiene a I**

## L'ASSE DI UN SEGMENTO

**DEFINIZIONE**
**Si dice "asse" di un segmento**
**la perpendicolare a quel segmento**
**condotta per il suo punto medio**.




*L'asse di un segmento,*
*ossia la perpendicolare*
*a quel segmento*
*nel suo punto medio:*

$a \perp AB$,
$\overline{AM} = \overline{MB}$

## L'ASSE DI UN SEGMENTO, VISTO COME LUOGO GEOMETRICO

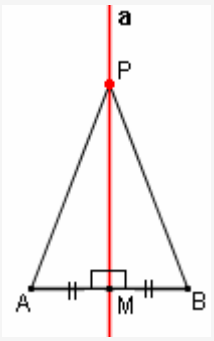
L'asse di un segmento può anche essere visto come *luogo geometrico*.
Vale infatti il seguente

**TEOREMA**
**L'asse di un segmento è il luogo dei punti del piano,**
**aventi la proprietà di essere equidistanti dagli estremi del segmento stesso**.

I) PRIMA PARTE della dimostrazione:
vogliamo dimostrare che

**se un punto appartiene all'asse di un segmento,**
**allora è equidistante dagli estremi di quel segmento**.

*Sia dunque* $\overline{AB}$ *un segmento,* a *il suo asse, e sia* $P \in a$.
*Tracciate le distanze* $\overline{PA}, \overline{PB}$ *del punto* P *dagli estremi di* $\overline{AB}$, *vogliamo far vedere che* $\overline{PA} = \overline{PB}$




HP: a asse di $\overline{AB}$ $(a \perp \overline{AB}, \overline{AM} = \overline{MB})$
$P \in a$

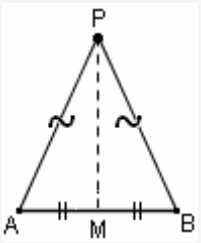
TH: $\overline{PA} = \overline{PB}$

Semplicissimo. I due triangoli PMA, PMB sono uguali per il 1° Criterio; segue la tesi.

II) SECONDA PARTE della dimostrazione:
vogliamo dimostrare che

**se un punto è equidistante dagli estremi di un segmento,**
**allora appartiene al suo asse**.

*Sia dunque* $\overline{AB}$ *un segmento,* P *un punto equidistante dai suoi estremi*: $\overline{PA} = \overline{PB}$.
*Vogliamo far vedere che* P *appartiene all'asse di* $\overline{AB}$.




HP: $\overline{PA} = \overline{PB}$

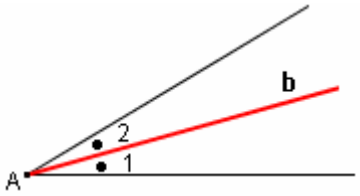
TH: P appartiene all'asse di $\overline{AB}$

Congiungiamo P col punto medio M di $\overline{AB}$.
Ci basterà far vedere che risulta $\overline{PM} \perp \overline{AB}$.
Ma è facilissimo!
Il triangolo ABP è isoscele per ipotesi,
quindi $\overline{PM}$, che per costruzione è mediana relativa alla base, fa anche da altezza.
La tesi è dimostrata.

## LA BISETTRICE DI UN ANGOLO

Abbiamo a suo tempo introdotto la nozione di "bisettrice di un angolo" tramite la seguente

**DEFINIZIONE**
**Si dice bisettrice di un angolo la semiretta che, partendo dal vertice, divide l'angolo in due parti uguali**.




*La bisettrice di un angolo, ossia la semiretta che lo "biseca", che lo taglia in metà:*
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

## LA BISETTRICE DI UN ANGOLO, VISTA COME LUOGO GEOMETRICO

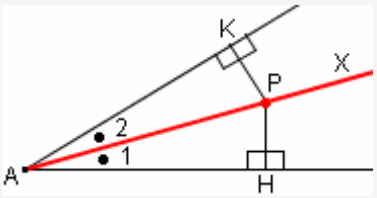
Ora, la bisettrice può anche essere vista come *luogo geometrico*.
Vale infatti il seguente

**TEOREMA**
**La bisettrice di un angolo è il luogo dei punti dell'angolo, aventi la proprietà di essere equidistanti dai lati dell'angolo**.

I) PRIMA PARTE della dimostrazione:

**se un punto appartiene alla bisettrice di un angolo, allora è equidistante dai lati di quell'angolo**.

*Sia dunque* $\hat{A}$ *un angolo, e sia* P *un punto appartenente alla sua bisettrice. Tracciate le due distanze* $\overline{PH}, \overline{PK}$ *del punto* P *dai lati di* $\hat{A}$, *vogliamo far vedere che* $\overline{PH} = \overline{PK}$.




HP: AX bisettrice di $\hat{A}$ $(\hat{A}_1 = \hat{A}_2)$
$P \in AX$
$PH \perp AH$; $PK \perp AK$

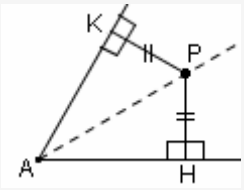
TH: $\overline{PH} = \overline{PK}$

Basta confrontare i due triangoli PHA, PKA.
Essi hanno $\overline{AP}$ in comune, $\hat{H} = \hat{K} = 90°$ e $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ per ipotesi;
quindi sono uguali per il 2° Criterio Generalizzato. Segue la tesi.

II) SECONDA PARTE della dimostrazione:

**se un punto di un angolo è equidistante dai lati dell'angolo stesso, allora appartiene alla sua bisettrice**.

*Prendiamo all'interno di un angolo* $\hat{A}$ *un punto* P, *che sia equidistante dai lati dell'angolo stesso, poi tracciamo la semiretta* AP *proponendoci di dimostrare che fa da bisettrice per l'angolo* $\hat{A}$.



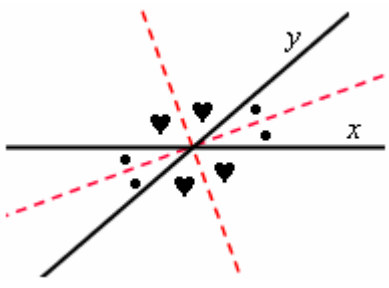

HP: $\overline{PH} = \overline{PK}$ $(PH \perp AH;\ PK \perp AK)$

TH: P appartiene alla bisettrice dell'angolo $\hat{A}$,
cioè, tracciata la semiretta AP, si ha $P\hat{A}H = P\hat{A}K$

I triangoli PAH, PAK sono uguali per il Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli (ipotenusa $\overline{AP}$ in comune, $\overline{PH} = \overline{PK}$ per ipotesi).
Segue la tesi.

OSSERVAZIONE

**Il luogo dei punti del piano, equidistanti da due rette incidenti** *x*, *y*, è costituito da **una coppia di rette**, che bisecano i quattro angoli, a due a due opposti al vertice, formati da *x* e *y*.

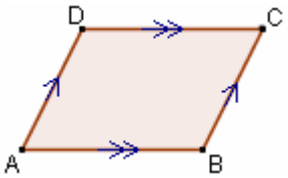



Quando si parla di "bisettrice" di un angolo, a volte si specifica, o si deve capire dal contesto, che ci si intende riferire a tutta la "**retta bisettrice**", cioè a quella retta che contiene le due semirette bisettrici dell'angolo in questione e del suo opposto al vertice.

## 4.3 - PARALLELOGRAMMI IN GENERALE

**DEFINIZIONE**

Si dice "**parallelogrammo**" un **quadrilatero coi lati opposti paralleli**.

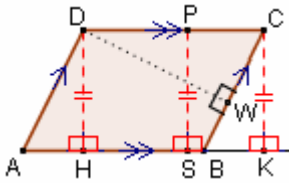



$DC \parallel AB$

$BC \parallel AD$

Le **coppie di freccette, o di doppie freccette,** servono per ribadire:
"noi sappiamo che queste due rette sono parallele fra loro".
♥ **Non sono "obbligatorie"**, tali freccette; **sono però utili, per fissare le idee, QUANDO GIÀ SI SA, per ipotesi o per dimostrazione precedente, che le rette in questione sono parallele**.

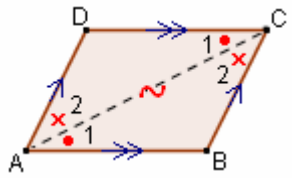
In un parallelogrammo, si dice "**altezza**" la distanza fra due lati opposti, assunti come "**basi**". La figura qui a fianco mostra un parallelogrammo ABCD e tre segmenti ( $\overline{DH}$, $\overline{PS}$, $\overline{CK}$ ), ognuno dei quali ha il diritto di essere chiamato "altezza" per il parallelogrammo relativamente alla coppia di basi $\overline{AB}$, $\overline{DC}$. Le altezze di un parallelogrammo, relative ad una data coppia di basi, sono tutte uguali fra loro (distanze di due parallele). Di norma, è comunque più frequente che un'altezza venga tracciata a partire da uno dei quattro vertici.




*Tre fra le infinite altezze, tutte uguali fra loro, relative alla coppia di basi* $\overline{AB}$, $\overline{DC}$

*La figura mostra anche un'altezza* $(\overline{DW})$ *relativa alla coppia di basi* $\overline{BC}$, $\overline{AD}$

**TEOREMA**
**In ogni parallelogrammo, i lati opposti sono uguali.**




HP
ABCD parallelogrammo

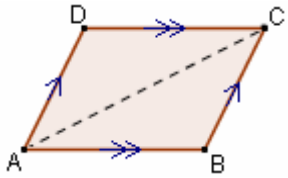
TH
$\overline{AB} = \overline{DC}$; $\overline{AD} = \overline{BC}$

DIM.

Tracciamo la diagonale $\overline{AC}$
e confrontiamo ABC, ADC.
Essi sono uguali per il 2° Criterio avendo:
$\overline{AC}$ in comune
$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (alt. int., $DC \parallel AB$ per HP, trasv. AC)
$\hat{A}_2 = \hat{C}_2$ (alt. int., $BC \parallel AD$ per HP, trasv. AC).

Segue la tesi.

**TEOREMA**
**In ogni parallelogrammo, gli angoli opposti sono uguali.**




HP
ABCD parallelogrammo

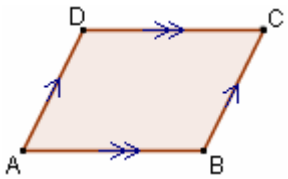
TH
$\hat{A} = \hat{C}$; $\hat{B} = \hat{D}$

DIM.

Come per il Teorema precedente, si traccia la diag. $\overline{AC}$
e si confrontano ABC, ADC dimostrandoli uguali.
Segue $\hat{B} = \hat{D}$ ;
è poi $\hat{A} = \hat{C}$ perché somme di angoli che abbiamo già dimostrati uguali

(oppure, la tesi $\hat{A} = \hat{C}$ potrebbe essere provata tracciando l'altra diagonale $\overline{BD}$ e confrontando i due triangoli in cui il quadrilatero ne viene spezzato).

**TEOREMA**
**In ogni parallelogrammo, gli angoli adiacenti a ciascun lato sono supplementari.**



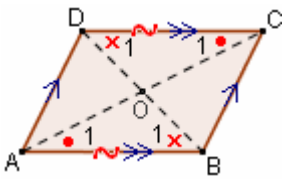

HP
ABCD parallelogrammo

TH
$\hat{A} + \hat{D} = 180°$; $\hat{B} + \hat{C} = 180°$;
$\hat{A} + \hat{B} = 180°$; $\hat{C} + \hat{D} = 180°$

DIM.

Semplicissimo!
Basta ricordare che
date due rette parallele ed una trasversale che le taglia, gli angoli coniugati interni sono supplementari.

**TEOREMA**
**In ogni parallelogrammo, le diagonali si tagliano scambievolmente per metà.**




HP
ABCD parallelogrammo

TH
$\overline{AO} = \overline{OC}$; $\overline{BO} = \overline{OD}$

DIM.

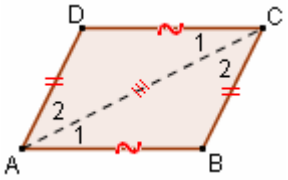
Confrontiamo AOB, COD.
Essi sono uguali per il 2° Criterio avendo:
$\overline{AB} = \overline{DC}$ perché già abbiamo dimostrato che in un parallelogrammo i lati opposti sono uguali;
$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (alterni interni, $DC \parallel AB$ per HP, trasv. AC)
$\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (alterni interni, $DC \parallel AB$ per HP, trasv. BD)

Segue la tesi.

*I quattro teoremi precedenti esprimevano altrettante PROPRIETA' DEI PARALLELOGRAMMI;*
*i quattro teoremi che seguono esprimono invece*

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER POTER CONCLUDERE
CHE UN QUADRILATERO E' UN PARALLELOGRAMMO

**TEOREMA**
**Se un quadrilatero ha i lati opposti uguali, allora è un parallelogrammo.**




HP
$\overline{AB} = \overline{DC};\ \overline{AD} = \overline{BC}$

TH
ABCD parallelogrammo

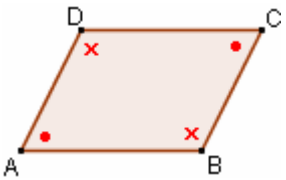
DIM.

Tracciamo la diagonale AC
e confrontiamo i due triangoli ABC, ADC:
essi sono uguali per il 3° Criterio.
In particolare, si ha $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$;
ma essendo questi due angoli alterni interni
rispetto alle due rette DC e AB con la trasv. AC,
segue $DC \parallel AB$.

Sempre dall'uguaglianza dei due triangoli
ABC, ADC, si trae $\hat{A}_2 = \hat{C}_2$;
ma essendo questi due angoli alterni interni
rispetto alle due rette BC e AD con la
trasversale AC, segue $BC \parallel AD$.

Perciò il quadrilatero ABCD
ha i lati opposti paralleli:
la tesi è dimostrata.

**TEOREMA**
**Se un quadrilatero ha gli angoli opposti uguali, allora è un parallelogrammo.**




HP
$\hat{A} = \hat{C};\quad \hat{B} = \hat{D}$

TH
ABCD parallelogrammo

DIM.

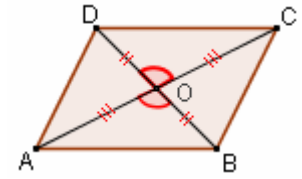
E' noto che la somma degli angoli interni
di ogni quadrilatero vale 360°.
Ma per HP gli angoli del nostro quadrilatero
sono uguali a 2 a 2
(due angoli "puntino" e due angoli "crocetta"); quindi
la somma "puntino"+"crocetta" darà 360°/2 = 180° :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$$
$$\hat{A} + \hat{D} + \hat{A} + \hat{D} = 360°$$
$$2\hat{A} + 2\hat{D} = 360°$$
$$2\left(\hat{A} + \hat{D}\right) = 360°$$
$$\hat{A} + \hat{D} = 180°$$

Ma $\hat{A}$ e $\hat{D}$ sono in posizione di coniugati interni
rispetto alle due rette AB e DC con la trasversale AD;
essendo supplementari, ne consegue $DC \parallel AB$.

Si ha poi $\hat{A} + \hat{B} = \hat{A} + \hat{D} = 180°$, da cui $BC \parallel AD$.

**TEOREMA**
**Se un quadrilatero ha le diagonali che si tagliano scambievolmente per metà, allora è un parallelogrammo.**




HP
$\overline{AO} = \overline{OC};\ \overline{BO} = \overline{OD}$

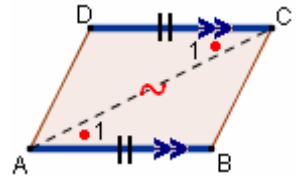
TH
ABCD parallelogrammo

DIM.

I due triangoli AOB, COD sono uguali
per il 1° Criterio: infatti hanno
$A\hat{O}B = C\hat{O}D$ perché opposti al vertice;
$\overline{AO} = \overline{OC}$ per ipotesi;
$\overline{BO} = \overline{OD}$ per ipotesi.
Dall'uguaglianza dei due triangoli considerati
discende in particolare che $\overline{DC} = \overline{AB}$.
Confrontando analogamente i triangoli AOD, BOC,
li si dimostra uguali per il 1° Criterio
e se ne trae in particolare che $\overline{BC} = \overline{AD}$.

ABCD ha i lati opposti a 2 a 2 uguali:
è dunque un parallelogrammo,
in virtù di un teorema dimostrato in precedenza.

**TEOREMA**
**Se un quadrilatero ha due lati opposti uguali e paralleli, allora è un parallelogrammo.**




HP
$\overline{AB} = \overline{DC}$
$AB \parallel DC$

TH
ABCD parallelogrammo

DIM.

Tracciamo la diagonale $\overline{AC}$
e confrontiamo i due triangoli ABC, ADC: essi hanno
$\overline{AC}$ in comune;
$\overline{AB} = \overline{DC}$ per ipotesi;
$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ perché angoli alt. int. formati dalle due rette
AB e DC, parallele per HP, con la trasv. AC.
Dunque è $ABC = ADC$ per il 1° Criterio;
se ne deduce, in particolare, che $\overline{BC} = \overline{AD}$.

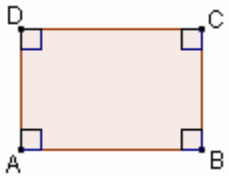
Ma allora il quadrilatero ABCD
ha i lati opposti a due a due uguali:
è dunque un parallelogrammo,
in virtù di un teorema precedentemente acquisito.

# 4.4 - PARALLELOGRAMMI PARTICOLARI

## IL RETTANGOLO

**DEFINIZIONE**

Si dice "**rettangolo**"
**un quadrilatero**
**coi quattro angoli tutti retti**.

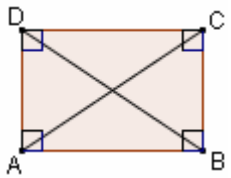



$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$

OSSERVAZIONI SULLA DEFINIZIONE

- *Il rettangolo, dunque, avendo gli angoli opposti uguali, è un parallelogrammo (è un caso particolare di parallelogrammo).*
- *Avremmo anche potuto dire che il rettangolo è "un parallelogrammo coi quattro angoli retti": in questo modo avremmo dato una definizione, diciamo così, "sovrabbondante", ma comunque sempre equivalente a quella da noi scelta.*
- *Se di un quadrilatero noi sappiamo che ha TRE angoli retti, potremo immediatamente concludere che si tratta di un rettangolo: infatti la somma degli angoli di un quadrilatero dà, com'è noto, 360°, e se tre angoli sono di 90° (90°+90°+90°=270°), il rimanente sarà obbligato a misurare 360°–270°=90°.*
- *Se di un PARALLELOGRAMMO si sa che ha un angolo retto, allora si può subito concludere che si tratta di un rettangolo. Infatti l'angolo opposto sarà pure retto (in un parallelogrammo gli angoli opposti sono uguali), e i due angoli rimanenti saranno retti anch'essi perché supplementari di un angolo retto (in un parallelogrammo gli angoli adiacenti a uno stesso lato sono supplementari).*

**TEOREMA**
**In un rettangolo, le diagonali sono uguali**.



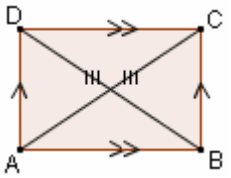

HP
ABCD rettangolo

TH
$\overline{AC} = \overline{BD}$

DIM.
Basta confrontare i due triangoli ABD e ABC i quali hanno:
$\overline{AB}$ in comune;
$\overline{AD} = \overline{BC}$ perché lati opposti di un parallelogrammo;
$\hat{A} = \hat{B} = 90°$.
Dunque tali due triangoli sono uguali per il 1° Criterio; segue la tesi.

OSSERVAZIONE - Poiché in ogni parallelogrammo, quindi anche in un rettangolo, le diagonali si tagliano scambievolmente per metà, da questo teorema segue subito che in un rettangolo i 4 segmenti che le diagonali determinano tagliandosi, sono tutti uguali fra loro (metà di segmenti uguali).

**TEOREMA**
**Se un parallelogrammo ha le diagonali uguali, allora è un rettangolo**.




HP
ABCD parallelogrammo
$\overline{AC} = \overline{BD}$

TH
ABCD rettangolo

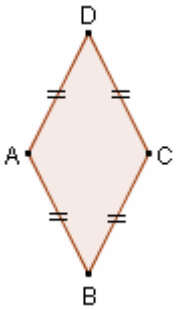
*Dimostrazione alternativa.*
*In ogni parallelogrammo le diagonali si tagliano scambievolmente per metà.*
*Ma allora, in un parallelogrammo che abbia le diagonali uguali, queste intersecandosi determinano quattro segmenti tutti uguali fra loro (metà di segmenti uguali).*
*Ricordi il teorema secondo cui ogni triangolo nel quale la mediana relativa a un lato sia metà del lato stesso, è rettangolo?*
*Applicandolo ad* ABD, *si ha subito* $\hat{A} = 90°$...

DIM.
Confrontiamo i due triangoli ABD e ABC.
Essi hanno:
$\overline{AB}$ in comune;
$\overline{BD} = \overline{AC}$ per ipotesi;
$\overline{AD} = \overline{BC}$ perché lati opposti di un parallelogrammo.
Dunque sono uguali per il 3° Criterio e in particolare è $\hat{A} = \hat{B}$.
Ma $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono pure supplementari
(angoli di un parallelogrammo, adiacenti a uno stesso lato,
o, se si vuole: angoli coniug. int. di due parallele con trasv.):
quindi si ha $\hat{A} + \hat{B} = 180°$ e simultaneamente $\hat{A} = \hat{B}$,
da cui $\hat{A} = \hat{B} = \frac{180°}{2} = 90°$.
Il parallelogrammo ABCD ha perciò due angoli retti;
anche gli altri due ( = i rispettivi opposti) saranno quindi retti.
ABCD è di conseguenza un rettangolo, C.V.D.

# IL ROMBO

**DEFINIZIONE**

Si dice "**rombo**"
**un quadrilatero**
**coi quattro lati tutti uguali fra loro**.



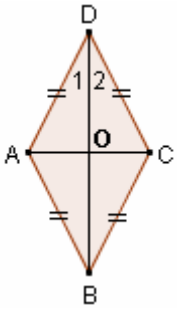

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$

OSSERVAZIONI SULLA DEFINIZIONE

- *Il rombo, dunque, avendo i lati opposti uguali, è un parallelogrammo (è un caso particolare di parallelogrammo).*
- *Avremmo anche potuto dire che il rombo è "un parallelogrammo coi quattro lati uguali fra loro": in questo modo avremmo dato una definizione, diciamo così, "sovrabbondante", ma comunque sempre equivalente a quella da noi scelta.*
- *Se di un parallelogrammo noi sappiamo che ha due lati consecutivi uguali, potremo immediatamente concludere che si tratta di un rombo: infatti, poiché in ogni parallelogrammo i lati opposti sono uguali, per un parallelogrammo l'avere due lati consecutivi uguali comporta di avere tutti e quattro i lati uguali.*

**TEOREMA**

**In un rombo, le diagonali sono perpendicolari, e bisettrici degli angoli interni**.




HP

ABCD rombo $(\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD})$

TH

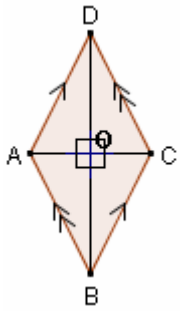
a) $AC \perp BD$

b) $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ ecc.

DIMOSTRAZIONE
Il triangolo ADC è isoscele ( $\overline{AD} = \overline{CD}$ ) per HP;
ma $\overline{DO}$ è mediana relativa alla base AC,
perché in un parallelogrammo le diagonali
si tagliano scambievolmente per metà
e quindi è $\overline{AO} = \overline{OC}$ .
Ora, è noto che in un triangolo isoscele
la mediana relativa alla base
è anche altezza e bisettrice.
La tesi è dimostrata.

**TEOREMA**

**Se un parallelogrammo ha le diagonali perpendicolari, allora è un rombo**.




HP

ABCD parallelogrammo

$AC \perp BD$

TH

ABCD rombo $(\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD})$

DIM.

I due triangoli AOD, COD sono uguali
per il 1° Criterio in quanto hanno:

$\overline{OD}$ in comune,

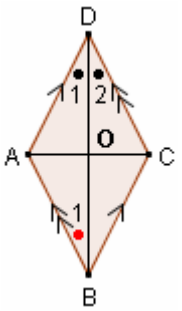
$\overline{AO} = \overline{OC}$ perché in ogni parallelogrammo le diag. si tagliano scambievolmente per metà,

$D\hat{O}A = D\hat{O}C = 90°$ per ipotesi

Si ha perciò $\overline{AD} = \overline{DC}$ e il parallelogrammo ABCD,
avendo due lati consecutivi uguali,
li avrà tutti e quattro uguali: è dunque un rombo,
C.V.D.

**TEOREMA**

**Se un parallelogrammo ha una diagonale che fa da bisettrice per uno degli angoli interni, allora è un rombo**.




HP

ABCD parallelogrammo

$\hat{D}_1 = \hat{D}_2$

TH

ABCD rombo

( $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$ )

DIM.

$\hat{B}_1 \underset{\text{alterni interni, DC || AB per ipotesi, trasv. BD}}{=} \hat{D}_2 \underset{\text{ipotesi}}{=} \hat{D}_1$

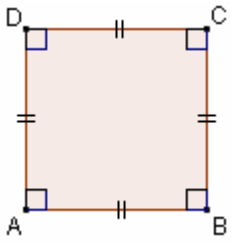
Poiché $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$, il triangolo ABD è isoscele: $\overline{AB} = \overline{AD}$
e perciò il parallelogrammo ABCD, avendo
due lati consecutivi uguali, li avrà tutti e 4 uguali.

Si tratta perciò di un rombo, C.V.D.

# IL QUADRATO

**DEFINIZIONE**

Si dice "**quadrato**"
**un quadrilatero**
**coi quattro angoli retti**
**e i quattro lati uguali**.




$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$

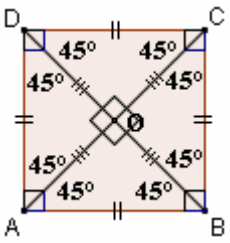
Quindi un quadrato è sia un caso particolare di rettangolo, che un caso particolare di rombo:

**è un parallelogrammo avente la proprietà di essere contemporaneamente rettangolo e rombo …**

… e pertanto "eredita" tutte le proprietà del rettangolo, più tutte le proprietà del rombo!

Dunque **in un quadrato le diagonali sono**

- **uguali**
- **perpendicolari**
- **e bisettrici degli angoli**




Questa figura riassume TUTTE LE BELLE PROPRIETA' DEL QUADRATO: nota gli angoli di 45°, i quattro segmenti uguali $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$, i quattro triangoli rettangoli isosceli uguali $OAB = OBC = OCD = ODA$.

**VERO O FALSO?** (*E' richiesta, ovviamente, la giustificazione della risposta!*)
C'è appositamente uno spazio quadrettato nella pagina, per i tuoi disegnini. Osserva che

**di fronte a un'affermazione di carattere generale,**

♪ **per giustificarne la VERITA' occorre fare un RAGIONAMENTO GENERALE (è esattamente come dimostrare un teorema);**

♫ **per giustificarne la FALSITA', basta riuscire a fornire anche un solo CONTROESEMPIO, ossia un caso particolare nel quale l'affermazione non vale**.



1) Se si sa che un quadrilatero
ha due angoli retti,
allora si può concludere che è un rettangolo.

2) Un quadrilatero in cui
le diagonali, tagliandosi reciprocamente,
formano quattro segmenti uguali,
è un rettangolo.

3) Un quadrilatero con le diagonali
perpendicolari
e che si tagliano scambievolmente per metà
è un rombo.

4) Un quadrilatero
coi quattro lati uguali e le diagonali uguali
è un quadrato.

5) Un quadrilatero con
le diagonali perpendicolari
e due lati consecutivi uguali
è un rombo.

6) Un quadrilatero con
due lati paralleli e due angoli retti
è un rettangolo.

7) Un rettangolo in cui
le diagonali sono bisettrici degli angoli,
è un quadrato.

Vai alle **GIUSTIFICAZIONI DELLE RISPOSTE**: ⇨

RISPOSTE: 1F2V3V4V5F6F7V

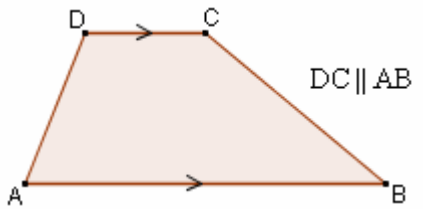
## 4.5 - TRAPEZI

**DEFINIZIONE**

Si dice **"trapezio"** **un quadrilatero avente due lati opposti paralleli** (NOTA).

I due lati paralleli si dicono "**basi**" del trapezio, gli altri due lati sono detti "**lati obliqui**".

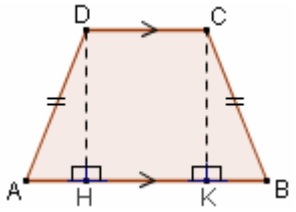
NOTA - Alcuni testi specificano, nella definizione di trapezio, che "gli altri due lati opposti non devono essere paralleli". Noi non abbiamo richiesto questa condizione, quindi secondo la nostra impostazione i parallelogrammi … sono casi particolari di trapezi.



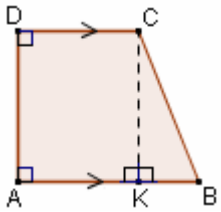

In un trapezio si dice "**altezza**" la distanza fra le rette delle basi (ad esempio, nelle figure sottostanti, $\overline{CK}$)

**Un trapezio (che non si riduca a un parallelogrammo) si dice …**

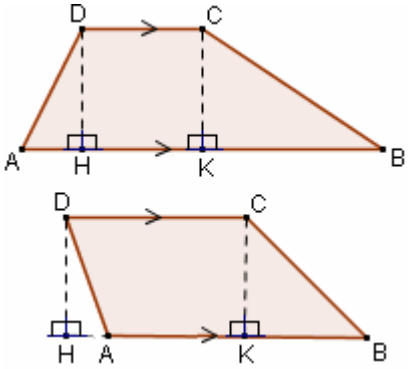
**… isoscele** se ha i due lati obliqui uguali fra loro




**… rettangolo** se uno dei due lati obliqui è perpendicolare alle basi



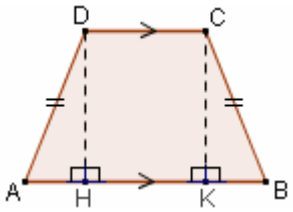

**… scaleno** se i due lati obliqui sono disuguali.




*Un'altezza in un trapezio può essere tracciata a partire da qualsiasi punto di una delle rette su cui giacciono le basi. E però abituale (e utile in relazione a svariati problemi) tracciare in particolare quelle che partono degli estremi della base minore.*

**TEOREMA**

**In un trapezio isoscele, le proiezioni dei due lati obliqui sulla base maggiore sono uguali. Inoltre gli angoli adiacenti a ciascuna base sono uguali.**




HP
ABCD trapezio isoscele
$(DC \parallel AB,\ \overline{AD} = \overline{BC})$
$DH \perp AB,\ CK \perp AB$

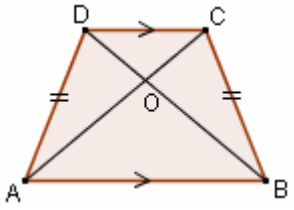
TH
$\overline{AH} = \overline{KB}$; $\hat{A} = \hat{B}$, $A\hat{D}C = B\hat{C}D$

DIM.

Se confrontiamo i due triangoli AHD e BKC,
vediamo che sono uguali per il Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli.
Segue $\overline{AH} = \overline{KB}$ e $\hat{A} = \hat{B}$. E' poi anche $A\hat{D}C = B\hat{C}D$ perché supplementari di due angoli uguali.

**TEOREMA**

**In un trapezio isoscele, le diagonali sono uguali e si tagliano in parti rispettivamente uguali.**




HP
ABCD trapezio isoscele
$(DC \parallel AB,\ \overline{AD} = \overline{BC})$

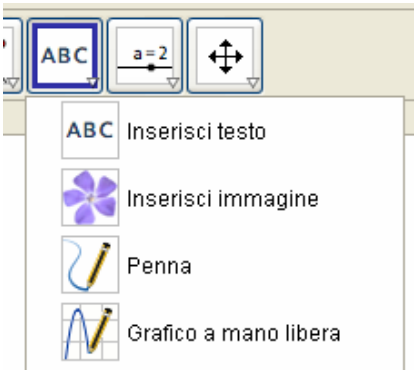
TH
$\overline{AC} = \overline{BD}$; $\overline{AO} = \overline{BO}$, $\overline{CO} = \overline{DO}$

DIM.

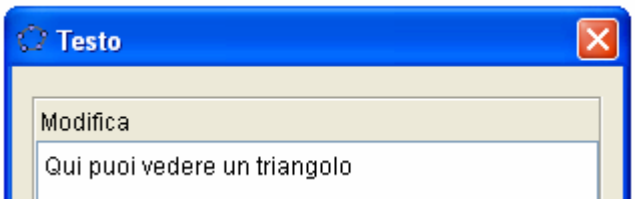
Se confrontiamo i due triangoli ADB e ACB, vediamo che sono uguali per il 1° Criterio.
Infatti è $\overline{AD} = \overline{BC}$ per ipotesi, $\overline{AB}$ in comune, ed è anche $\hat{A} = \hat{B}$ perché è noto,
da un teorema precedente, che in un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascuna base sono uguali.
Segue subito $\overline{AC} = \overline{BD}$. Ma segue anche $A\hat{B}D = B\hat{A}C$: dunque il triangolo AOB ha $\overline{AO} = \overline{BO}$.
E' infine $\overline{CO} = \overline{DO}$ perché differenze di segmenti uguali: $\overline{CO} = \overline{AC} - \overline{AO} = \overline{BD} - \overline{BO} = \overline{DO}$.

## 4.6 - TESTI DINAMICI IN GEOGEBRA

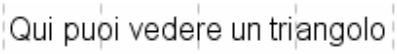
Se sul foglio GeoGebra sul quale stai lavorando vuoi inserire un testo, magari per descrivere la figura tracciata, ti basterà semplicemente cliccare sul terzultimo pulsante in alto, poi sull'opzione "Inserisci testo" della tendina che si apre (→)




… dopodiché, quando cliccherai su di una posizione qualunque del foglio da disegno, ti si aprirà una finestrella nella quale potrai inserire il tuo testo:



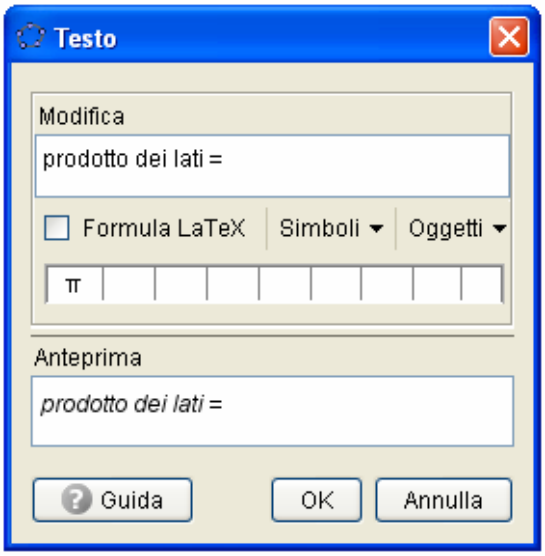

Cliccando infine su "OK", il testo digitato comparirà sul foglio. →




E' molto interessante la possibilità, che GeoGebra offre, di creare testi "dinamici".

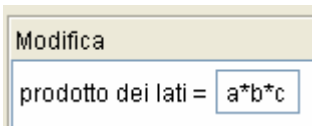
Cosa vuol dire? Facciamo un esempio.

Supponi di aver disegnato un triangolo ABC; allora nella finestra "Vista Algebra" saranno automaticamente comparse le misure dei tre lati del triangolo, lati che GeoGebra avrà provveduto a denominare a, b, c (ogni lato viene indicato con la lettera minuscola corrispondente alla lettera maiuscola del vertice opposto). Nella stessa finestra "Algebra" potrai altresì vedere le coordinate cartesiane dei punti A, B, C, e persino l'area del triangolo.




Bene; se ora tu volessi ad esempio far comparire sul foglio il prodotto delle misure dei tre lati del tuo triangolo, potresti ad esempio fare così:

- Attivi, come spiegato sopra, l'opzione "Inserisci testo"
- Nella finestrella che si apre, scrivi *prodotto dei lati* =
- Poi clicchi su "Oggetti" e nel menu a tendina che appare scegli "casella vuota"
- Compare un rettangolino all'interno del quale scriverai a*b*c (NOTA)

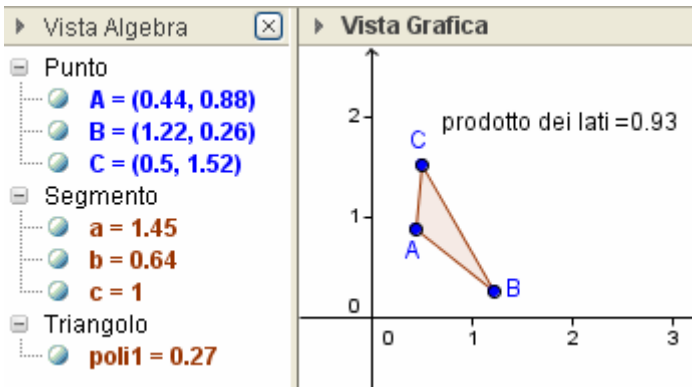



NOTA:

- l'*asterisco* è l'indicatore di moltiplicazione;
- il simbolo per la *divisione* è /,
- quello di *potenza* è ^
- e la *radice quadrata* si indica con *sqrt* (da *square root*) oppure con ^(1/2)

- Cliccando infine su OK il gioco sarà fatto.

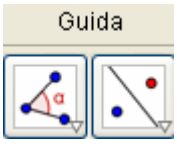
L'effetto sarà di far comparire sul foglio da disegno la scritta *prodotto dei lati* = seguita dal VALORE del prodotto delle misure dei tre segmenti a, b, c !!!




OSSERVAZIONE
Quello illustrato non è l'unico modo di procedere, per ottenere un "testo dinamico". La Guida di Geogebra potrà suggerirti delle varianti.

Naturalmente, se la figura viene deformata trascinandone un vertice,
il prodotto dei lati muta e questa variazione si potrà vedere in tempo reale sul foglio.
L'effetto è assai carino, e tutto ciò consente esperimenti molto vari e istruttivi.

Comunque,
la Guida in linea di GeoGebra
chiarisce, al bisogno, qualsiasi dubbio.



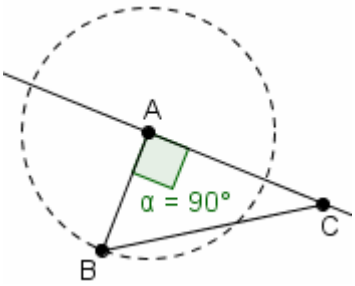

**ESERCIZI**

1) Disegna un pentagono, poi definisci i suoi angoli interni come oggetti GeoGebra.
Fa comparire sul foglio da disegno la somma di questi 5 angoli;
constaterai che si mantiene costantemente uguale a tre angoli piatti (540°),
comunque venga deformato il pentagono, e anche nel caso questo diventi concavo.

2) Disegna un triangolo rettangolo, poi i quadrati costruiti sui cateti e il quadrato costruito sull'ipotenusa.
Fai comparire sul foglio da disegno
- la misura dell'area di quest'ultimo quadrato,
- e la somma delle misure delle aree dei due quadrati più piccoli.

Questo esercizio è una bella verifica "sperimentale" del teorema di Pitagora:
"*Guarda che cosa astrusa … la somma dei quadrati dei cateti mi dà il quadrato dell'ipotenusa*".

Vuoi un suggerimento per disegnare correttamente i quadrati?
Usa delle circonferenze!
Mi spiego. Ad esempio, con riferimento alla figura qui a fianco,
un modo per riportare sul prolungamento di $\overline{CA}$ un segmento uguale ad $\overline{AB}$,
così da poter poi procedere nella costruzione del quadrato di lato $\overline{AB}$,
consiste nel tracciare la circonferenza di centro A e passante per B,
per poi intersecarla con la retta CA.




E' pur vero che te la potresti cavare MOLTO più rapidamente con il tasto
"Poligono regolare" … Cercalo, e provaci! ☺

3) Disegna un parallelogrammo e fa calcolare da GeoGebra la sua area in due modi,
prendendo come base prima un lato, poi il suo consecutivo.

4) Il quadrilatero che ha per vertici i punti medi dei lati di un altro quadrilatero, ha area uguale alla metà dell'area di quest'ultimo. Imposta il foglio GeoGebra in modo da evidenziare questo fatto.

5) La bella "formula di Erone" $\mathbf{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ **a, b, c misure dei lati; p SEMIperimetro**
permette di calcolare l'area di un triangolo conoscendone le misure a, b, c dei tre lati.
In essa, p indica il SEMIperimetro (metà del perimetro).
Disegna sul tuo foglio di lavoro GeoGebra un triangolo,
poi inserisci una scritta dinamica che ne faccia comparire l'area calcolata con Erone.
Ovviamente, se avrai fatto le cose per bene, il valore dovrà coincidere
con quello che già automaticamente compare nella finestra "Vista Algebra".
Occhio alle parentesi: ne dovrai inserire parecchie, tutte tonde, "annidate" una nell'altra in modo opportuno.

## 4.7 - LUOGHI IN GEOGEBRA

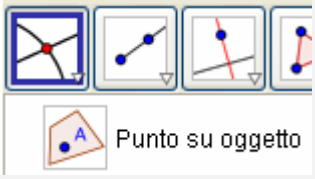
GeoGebra ci permette di disegnare *luoghi geometrici*,
tramite uno dei pulsanti che compaiono cliccando sull'icona
recante la figura di una perpendicolare [figura qui a destra in alto].




Per disegnare un luogo occorre aver determinato
**un punto A "su un oggetto"** [figura qui a destra in basso], ossia
vincolato a variare su di una linea (retta, o segmento, o circonferenza …)
e successivamente **un punto B la cui posizione dipenda da A**.

Al variare di A sulla linea, varierà dunque pure la posizione di B …

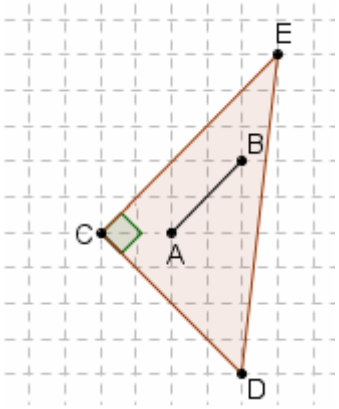
… Bene, **il luogo ( = l'insieme) delle posizioni assunte da B,
allorché A varia sulla linea alla quale è vincolato,
si ottiene, con GeoGebra,
cliccando sullo strumento "Luogo",
poi facendo clic, successivamente, prima su B e poi su A**.




Qualche bell'attività di questo tipo è proposta
nel successivo paragrafo di "Aiuto per il ripasso", nonché fra gli esercizi di ricapitolazione (a pagina 349).

## 4.8 - AIUTO PER IL RIPASSO, ESERCIZI (alcune risposte sono alla fine … tienile coperte!)

♫ ALTRI ESERCIZI SUL CAPITOLO 4 A PARTIRE DA PAGINA 342




1) Proietta il segmento $\overline{AB}$ nella figura qui a destra sui lati del triangolo CDE (AB e CE sono parallele, l'angolo di vertice C è retto)

2) Disegna inoltre una retta, per C, tale che la proiezione del segmento $\overline{CE}$ su questa retta sia uguale alla metà del segmento stesso.

3) L'asse della base di un triangolo isoscele passa per il punto di incontro delle altezze relative ai due lati obliqui. Perché?

4) Qual è il luogo dei punti P del piano per i quali risulta $A\hat{P}B = 90°$, essendo $\overline{AB}$ un segmento fissato? (Indicazione: congiungi P col punto medio M di $\overline{AB}$ …)

5) Il punto di intersezione degli assi dei due cateti di un triangolo ABC rettangolo in A coincide col punto medio M dell'ipotenusa $\overline{BC}$. Perché?

6) Come è possibile determinare in modo preciso un punto, che sia equidistante da 3 punti A, B, C non allineati?

7) Dato un triangolo ABC, come è possibile determinare esattamente un punto, al suo interno, che sia equidistante dalle tre rette su cui giacciono i lati del triangolo?

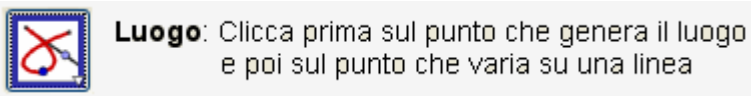
8) Con GeoGebra,
tracciata una retta d e fissato fuori di essa un punto F,
disegna il luogo dei punti equidistanti da d e da F.

I passi sono i seguenti:

a) parti da H, punto su d
("Nuovo punto", ti avvicini col mouse a d,
a un certo momento GeoGebra evidenzierà con tratto più marcato
la retta d, e allora tu farai "clic" creando, così, un punto
che sarà vincolato ad appartenere a quella retta);

b) traccia la perpendicolare per H alla retta d;
su questa perpendicolare, determina il punto P equidistante
da d e da F, intersecando tale perpendicolare con … ;

c) ordina infine a GeoGebra di tracciare il luogo delle posizioni di P,
al variare di H.



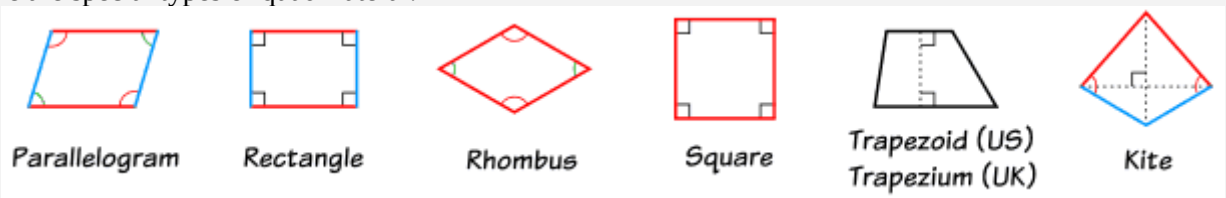




9) Con GeoGebra, disegna due punti $F'$ e $F''$.
Traccia un segmento $AB > F'F''$, poi la circonferenza di centro $F'$ e raggio $\overline{AB}$.
Su questa circonferenza prendi un punto Q. Congiungi Q con $F'$ e $F''$,
traccia l'asse di $F''Q$ e chiama P il punto in cui tale asse interseca il segmento $\overline{QF'}$.
Spiega perché vale l'uguaglianza $PF'' = PQ$
e perché la somma $PF' + PF''$ si mantiene costante al variare di Q sulla circonferenza.
Fa sì che GeoGebra tracci il luogo delle posizioni di P, al variare di Q, non prima di aver cercato di prevedere che curva uscirà (va a rivisitare la pagina 309, dove vengono presentati alcuni esempi di luoghi geometrici).

Da www.mathsisfun.com

There are special types of quadrilateral:




Some types are also included in the definition of other types!
For example a square, rhombus and rectangle are also parallelograms.

10) Accertati di conoscere bene le proprietà del parallelogrammo,
le condizioni che permettono di concludere con certezza che un dato quadrilatero sia un parallelogrammo,
e le relative dimostrazioni.
Di quali proprietà gode il rettangolo, "in più" rispetto ai "normali" parallelogrammi?
E il rombo? E il quadrato?

11) Se due segmenti hanno in comune il loro punto medio, e non giacciono sulla stessa retta,
si può essere certi che i loro estremi siano vertici di un parallelogrammo?

12) Disegna un parallelogrammo ABCD, e per il punto O in cui si tagliano le sue due diagonali
traccia una retta che vada a intersecare una coppia di lati opposti in E ed F rispettivamente.
Dimostra che O è il punto medio di $\overline{EF}$.

13) Disegna un parallelogrammo ABCD e prolunga il lato $\overline{DC}$ di un segmento $\overline{CE} = \overline{DC}$.
Dimostra ora che pure ABEC è un parallelogrammo.

14) Si traccia una circonferenza con centro nel punto di intersezione di due rette.
Spiega perché i 4 punti in cui la circonferenza taglia le due rette sono vertici di un rettangolo.
Quel rettangolo, poi, è addirittura un quadrato nel caso in cui le due rette siano …

15) I punti medi dei lati di un quadrato sono vertici di un altro quadrato: dimostralo.

16) Dimostra che in un trapezio isoscele con la base minore uguale al lato obliquo,
le diagonali sono bisettrici degli angoli alla base;
e che se in un trapezio le diagonali sono bisettrici degli angoli alla base,
allora la base minore è uguale a ciascuno dei lati obliqui.

17) In un rettangolo, se si tracciano gli assi dei quattro lati, essi passeranno per lo stesso punto.
Come si può giustificare questa affermazione?

18) Qual è il luogo dei centri ( = punti di intersezione delle diagonali) di tutti i parallelogrammi
che hanno per base comune un segmento fissato $\overline{AB}$, e un'altezza fissata?

19) Dimostra che in un trapezio isoscele l'asse di una delle basi fa da asse anche per l'altra,
e tale asse comune passa per il punto di intersezione delle diagonali del trapezio.

20) Dimostra che la proiezione di un segmento su di una retta non può essere maggiore del segmento stesso.

21) Da www.algebra.com:

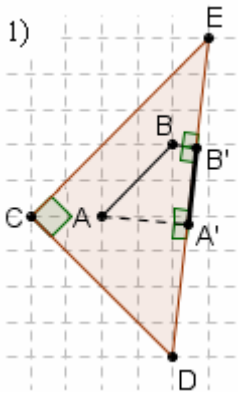
a) In parallelogram ABCD, angle $\hat{A}$ is $7x+4$ (degrees) and angle $\hat{B}$ is 162°. Find the value of $x$.

b) In an isosceles trapezoid, one diagonal is labeled $3x-8$ and the other diagonal is labeled 22.
What is the value of $x$?

c) The opposite sides of a parallelogram are represented by $2x+10$ and $3x-20$.
Find the length of the third side represented by $4x-1$.

d) In parallelogram SONG, $SO = 2x+4$, $ON = 3x-6$, $NG = 4x-16$. Explain why SONG is a rhombus.

**ALCUNE RISPOSTE**




La proiezione di $\overline{AB}$ su $\overline{CD}$ si riduce a un punto, quella su $\overline{CE}$ è uguale ad $\overline{AB}$.

2) La retta deve formare un angolo di 60° con $\overline{CE}$ (2 possibilità) 3) Perché si dimostra che il punto di incontro di suddette altezze è equidistante dagli estremi della base, quindi appartiene all'asse di questa 4) La mediana relativa all'ipotenusa in un triangolo rettangolo è sempre uguale a metà dell'ipotenusa stessa; quindi la lunghezza di $PM$ è fissa e il luogo richiesto è una circonferenza (privata, se si vuole, degli estremi di un diametro) 5) Tale punto medio M è equidistante dagli estremi di $AB$, perché … quindi appartiene al suo asse. Analogamente per $AC$. 6) Si tracciano gli assi di $AB$ e di $BC$ (o di $AB$ e $AC$, o di $AC$ e $BC$): la loro intersezione è il punto cercato 7) Si tracciano le bisettrici di due degli angoli interni: la loro intersezione è il punto cercato 8) … con l'asse del segmento $HF$ 9) $PF" = PQ$ perché ogni punto dell'asse di un segmento è equidistante dagli estremi; $PF' + PF" = PF' + PQ = F'Q = \text{costante}$ 11) Sì: nel quadrilatero, le diagonali si tagliano scambievolmente per metà, quindi … 14) Il quadrilatero ha le diagonali che si bisecano scambievolmente, quindi è un parallelogrammo; avendole poi uguali è addirittura un rettangolo. … perpendicolari 17) Il punto d'intersezione delle diagonali, in un rettangolo, è equidistante da tutti i vertici, quindi appartiene all'asse di ciascun lato 18) E' formato da due rette parallele … 21) a) $7x+4=180-162;\ x=2$
b) $3x-8=22;\ x=10$ c) $2x+10=3x-20 \rightarrow x=30 \rightarrow 4x-1=4\cdot 30-1=119$
d) $SO=NG;\ 2x+4=4x-16;\ x=10;\ SO=NG=24;\ ON=3x-6=30-6=24$
per cui tutti i lati di questo parallelogrammo sono uguali: in effetti, è un rombo

# Cap. 5: FASCIO DI PARALLELE, PUNTI NOTEVOLI

## 5.1 - FASCIO DI RETTE PARALLELE

**DEFINIZIONE**

Si dice "**fascio di rette parallele**" **l'insieme delle rette parallele ad una retta data**.



*La figura mostra alcune fra le parallele di un fascio (che sono, evidentemente, **infinite**: non possiamo disegnarle tutte!)*

*Nota che non abbiamo messo le **freccette di parallelismo**: ribadiamolo, **non sono obbligatorie!***

**TEOREMA sul fascio di parallele (PICCOLO TEOREMA DI TALETE)**

**Se un fascio di parallele**
**viene tagliato da due trasversali,**
**a segmenti uguali su una trasversale**
**corrispondono segmenti uguali sull'altra**.

IPOTESI

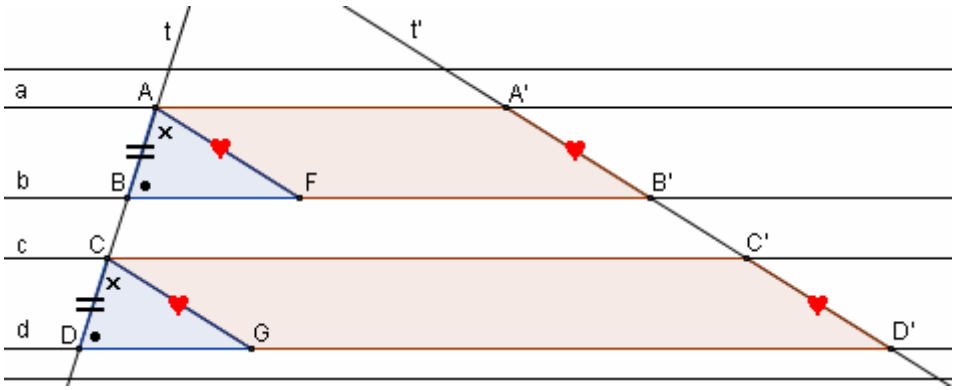
$a \parallel b \parallel c \parallel d$

$AB = CD$

TESI

$A'B' = C'D'$

♥ *Da questo capitolo in avanti, di norma* **OMETTEREMO IL "CAPPELLO DI SEGMENTO"**




DIMOSTRAZIONE

Conduciamo dai punti A e C le parallele alla retta $t'$,
che taglino rispettivamente la retta b in F e la retta d in G.
Le due rette tracciate, AF e CG, essendo entrambe parallele alla retta $t'$, sono parallele tra loro.
Confrontando ora i due triangoli AFB, CGD, si può dire che:

$AB = CD$ per ipotesi;

$A\hat{B}F = C\hat{D}G$ perché corrispondenti rispetto alle due parallele b, d, tagliate dalla trasversale t;

$B\hat{A}F = D\hat{C}G$ perché corrispondenti rispetto alle due parallele AF e CG tagliate da t.

I due triangoli considerati sono perciò uguali per il Secondo Criterio; di conseguenza, è $AF = CG$.
Ma poiché i due quadrilateri $AA'B'F$, $CC'D'G$ sono parallelogrammi,
e in ogni parallelogrammo i lati opposti sono uguali, si avrà $A'B' = AF$ e $C'D' = CG$.
Dalle tre uguaglianze $AF = CG$, $A'B' = AF$, $C'D' = CG$ segue in definitiva $A'B' = AF = CG = C'D'$,
c.v.d.

NOTA

*Questo enunciato sarà successivamente "inglobato"*
*nel "GRANDE teorema di Talete", che dirà:*

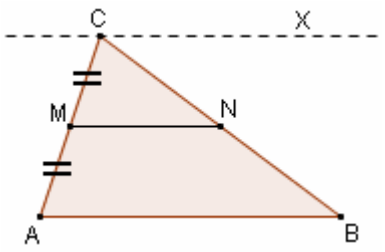
*"quando un fascio di parallele viene tagliato da due trasversali,*
*i segmenti staccati dalle parallele sulle trasversali sono proporzionali".*

## 5.2 - PUNTI MEDI E PARALLELE

**TEOREMA**
**Se per il punto medio di un lato di un triangolo si conduce la parallela ad un altro lato, questa andrà a tagliare in metà il lato rimanente**.

IPOTESI
AM = MC
MN || AB

TESI
BN = NC



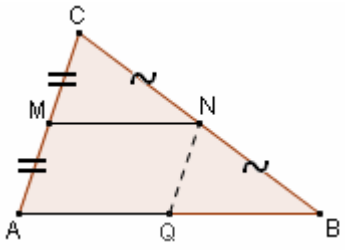

DIMOSTRAZIONE

Questo enunciato è facilmente deducibile a partire dal teorema precedente.
Infatti, se per il vertice C si traccia la parallela CX ad AB,
si vede che CX, MN ed AB possono essere pensate come tre parallele di un fascio,
rispetto al quale AC e BC sono trasversali.
Ed essendo per ipotesi, sulla prima trasversale, $AM = MC$, sarà dunque, sull'altra trasversale, $BN = NC$,
c.v.d.

**TEOREMA**
**In un triangolo, la congiungente i punti medi di due lati è parallela al terzo lato e uguale alla sua metà**.

IPOTESI
AM = MC
BN = NC

TESI
I) MN || AB
II) $MN = \frac{1}{2}AB$




DIMOSTRAZIONE

I)

M ed N sono i punti medi dei due lati AC e BC, rispettivamente.
Per far vedere che la congiungente MN è parallela ad AB, ragioniamo nel modo seguente.

Supponiamo di tracciare, a partire dal punto M, la parallela ad AB.
***Occhio, noi non sappiamo ancora*** che questa parallela coincide con MN!!! …
… ma ci proponiamo di dimostrarlo.

Il fatto è che la parallela ad AB condotta da M deve, per il teorema precedente,
andare a tagliare in metà il lato BC, quindi deve passare per N, poiché N è per ipotesi il punto medio di BC.

Ma ciò significa che la parallela in questione si trova sovrapposta alla retta MN, coincide con MN!
E ciò dimostra dunque che MN è parallela ad AB.

II)

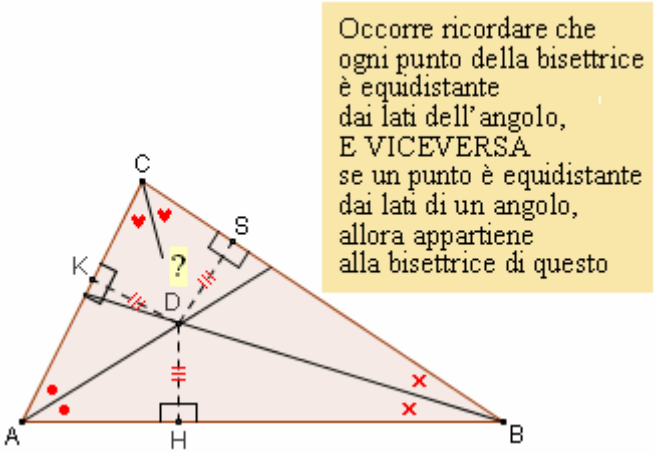
Per dimostrare, ora, che il segmento MN è la metà di AB, tracciamo, per N, la parallela al lato AC,
fino ad incontrare AB in Q.
NQ è, quindi, la parallela ad un lato del triangolo ABC, condotta dal punto medio di un altro lato
( $BN = NC$ per ipotesi);
in virtù del teorema precedente, tale parallela taglierà in metà il lato rimanente AB.
Si ha pertanto $AQ = QB$.

Ma AQNM è un parallelogrammo, per cui $MN = AQ$; in definitiva, è $MN = AQ = QB = \frac{1}{2}AB$, c.v.d.

## 5.3 - PUNTI NOTEVOLI DI UN TRIANGOLO

**TEOREMA**
**In un triangolo, le bisettrici dei tre angoli interni passano tutte per uno stesso punto (tale punto viene chiamato INCENTRO).**

*La figura mostra:*
*un triangolo* ABC,
*la bisettrice dell'angolo* $\hat{A}$,
*la bisettrice dell'angolo* $\hat{B}$ *e …*
*… UN PEZZO della bisettrice dell'angolo* $\hat{C}$,
*con accanto un bel "punto interrogativo".*
*Certo, perché la questione che ci poniamo è:*
*ma questa terza bisettrice, passerà anch'essa*
*per il punto nel quale si incontrano le prime due?*
*Mumble, mumble …*




Occorre ricordare che
ogni punto della bisettrice
è equidistante
dai lati dell'angolo,
E VICEVERSA
se un punto è equidistante
dai lati di un angolo,
allora appartiene
alla bisettrice di questo

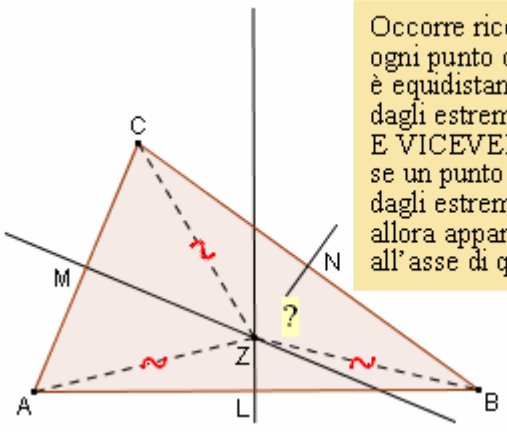
*Dimostrazione*

Tracciamo DUE SOLTANTO delle tre bisettrici,
ad esempio quelle dei due angoli $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}C$.
Esse si taglieranno certamente (NOTA); chiamiamo, per fissare le idee, D il loro punto di intersezione.
Vogliamo far vedere che anche la rimanente bisettrice (quella dell'angolo $A\hat{C}B$) passa per D.
Tracciamo a tal fine le distanze del punto D dai tre lati del triangolo: siano DH, DK, DS tali distanze.
**Poiché D è un punto della bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$, D è equidistante dai lati di tale angolo**:
vale a dire, si ha $DK = DH$.
Poiché però **D appartiene anche alla bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$,**
D è equidistante anche dai lati di quest'ultimo angolo: $DH = DS$.
**Ne consegue** che $DK = DS$; ma **ciò significa che D è equidistante dai lati dell'angolo $A\hat{C}B$,**
e **pertanto** che **D appartiene alla bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$.**
**Perciò anche tale terza bisettrice, qualora venisse tracciata completamente, passerebbe per D**, c.v.d.

*NOTA*
*Infatti, poiché la somma* $B\hat{A}C + A\hat{B}C$ *è* $<180°$*, a maggior ragione sarà* $<180°$ *la somma*
*delle metà di questi due angoli; perciò le due bisettrici tracciate non possono essere parallele,*
*perché non formano con la trasversale* AB *angoli coniugati interni supplementari.*

**TEOREMA**
**In un triangolo, gli assi dei tre lati passano per uno stesso punto (chiamato CIRCOCENTRO).**

*La figura mostra: un triangolo* ABC,
*l'asse del lato* AB, *l'asse del lato* AC *e …*
*UN PEZZO dell'asse del lato* BC,
*affiancato da un bel "punto interrogativo".*
*Infatti ci stiamo domandando:*
*ma questo terzo asse, passerà anch'esso*
*per il punto nel quale si incontrano i primi due?*
*Chissà???*



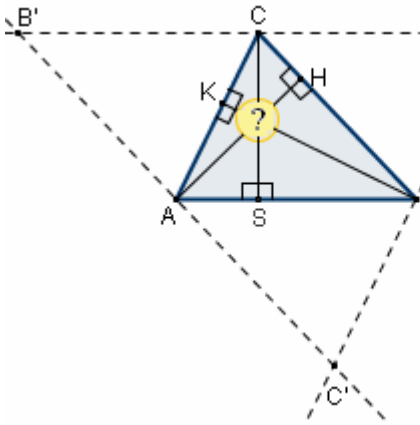

Occorre ricordare che
ogni punto dell'asse
è equidistante
dagli estremi del segmento,
E VICEVERSA
se un punto è equidistante
dagli estremi di un segmento,
allora appartiene
all'asse di questo

*Dimostrazione*

Analoga a quella relativa alle bisettrici.
Tracciamo gli assi dei due lati AB e AC.
Tali due assi, essendo perpendicolari a due
rette che si tagliano, si taglieranno anch'essi
(lo si può facilmente dimostrare *per assurdo*):
sia dunque Z il loro punto d'intersezione.
**Z appartiene all'asse di AB, quindi è equidistante dagli estremi di AB ( ZA = ZB );**
ma **Z appartiene pure all'asse di AC**, per cui $ZA = ZC$ **.**
**Ne consegue che** $ZB = ZC$ **, quindi** che **Z è equidistante dagli estremi del segmento BC**,
e pertanto che **Z appartiene all'asse di BC**.
**Di conseguenza anche tale TERZO ASSE dovrà passare per il punto Z in cui si tagliavano i primi due**,
c.v.d.

**TEOREMA**
**In un triangolo, le tre altezze passano tutte per uno stesso punto (detto ORTOCENTRO).**

*Dimostrazione*

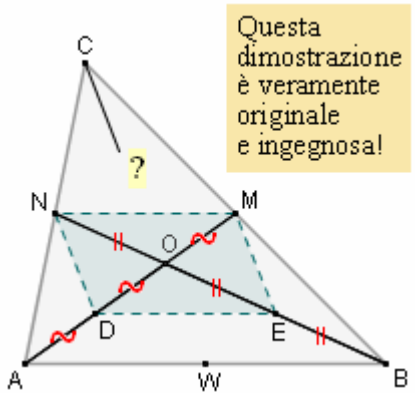



C'è una luce accecante nella zona in cui le tre altezze AH, BK, CS del triangolo ABC si avvicinano. Ci domandiamo: passeranno davvero per uno stesso punto?

Sia ABC un triangolo,
e siano AH, BK, CS le sue tre altezze.
Mi propongo di dimostrare che AH, BK, CS passano tutte per uno stesso punto.
A tale scopo, effettuo la seguente costruzione:
traccio per i tre vertici A, B, C
le parallele ai lati opposti BC, AC, AB,
indicando con $A'$, $B'$ e $C'$ i punti
in cui tali rette a due a due si intersecano.
Considero poi i quadrilateri $ABCB'$ e $ABA'C$:
sono due parallelogrammi, per cui si ha
$B'C = AB$ e $AB = CA'$.
Ne consegue che $B'C = CA'$ (cioè, che C è il punto medio del segmento $B'A'$).
Inoltre CS, essendo perpendicolare ad AB, è pure perpendicolare alla sua parallela $B'A'$.
In definitiva, CS è perpendicolare a $B'A'$ nel suo punto medio, quindi è l'asse di $B'A'$!!!
E in modo analogo, si dimostra che AH e BK sono gli assi di $B'C'$ e di $C'A'$ rispettivamente.
Ma allora **le tre rette AH, BK e CS, che fanno da altezze per il triangolo di partenza ABC**,
**fanno contemporaneamente da assi per l'altro triangolo $A'B'C'$.**
**E un teorema già dimostrato ci assicura che in ogni triangolo**
**gli assi dei tre lati passano tutti per un medesimo punto !!!**

**TEOREMA**
**In un triangolo, le mediane dei tre lati passano tutte per un medesimo punto.**
**Tale punto (detto BARICENTRO) ha inoltre la proprietà di dividere**
**ciascuna mediana in due parti tali che quella contenente il vertice è doppia dell'altra.**

*Dimostrazione*




Questa dimostrazione è veramente originale e ingegnosa!

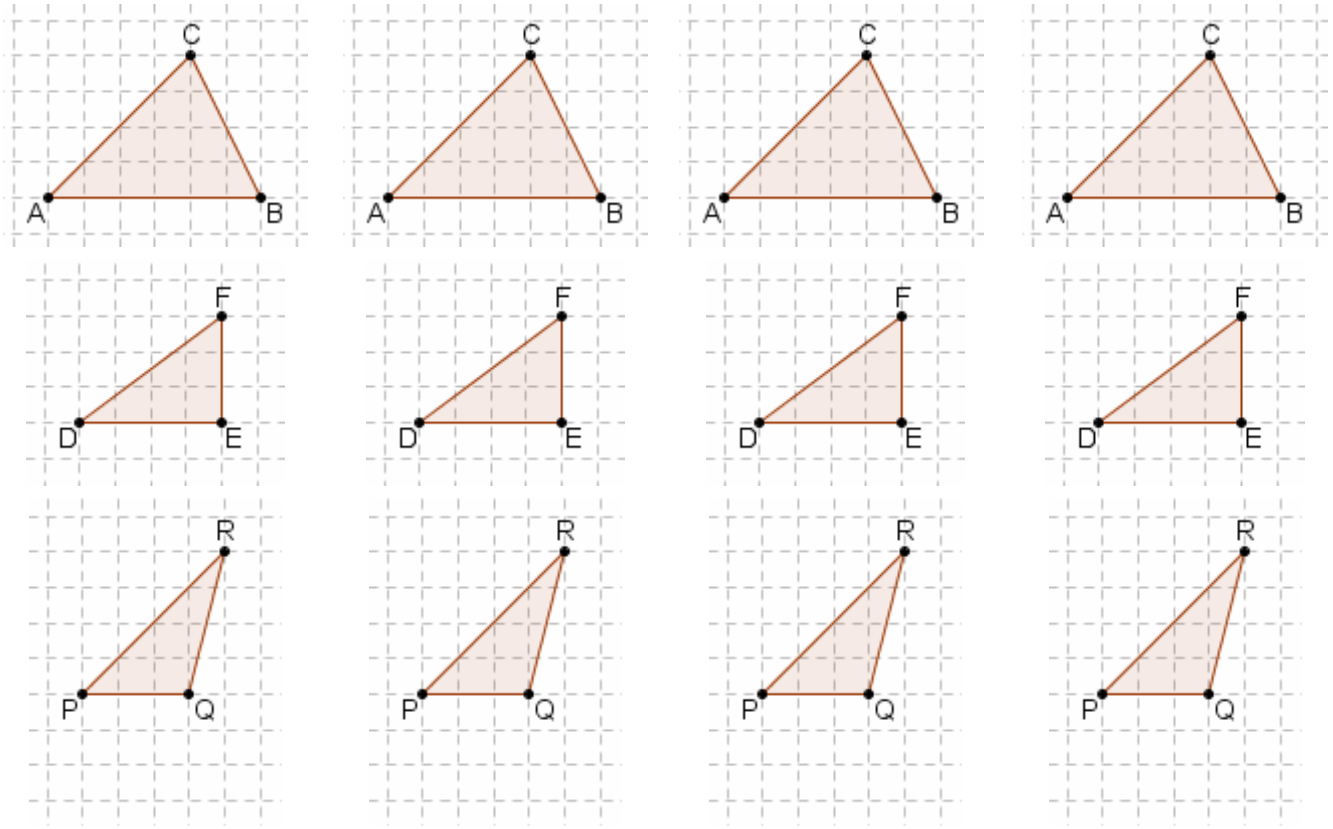
Sia ABC un triangolo, siano AM e BN due delle sue tre mediane,
e sia O il punto di intersezione di queste
(NOTA: che due mediane di un triangolo non possano essere parallele,
ma debbano invece necessariamente intersecarsi, è un fatto intuitivo
che potrebbe, volendo, essere visto come conseguenza di un assioma,
l' "assioma dell'angolo convesso", da noi non esplicitato per brevità).
Vogliamo dimostrare che per O passa anche la mediana rimanente.
*La struttura logica della dimostrazione è piuttosto inconsueta.*
**Prendiamo i punti medi D, E dei segmenti AO e BO.**
Nel triangolo ABO, DE è la congiungente i punti medi di due lati, quindi
è parallela al terzo lato e uguale alla sua metà: $\mathbf{DE} \parallel \mathbf{AB}$, $\mathbf{DE} = \frac{1}{2}\mathbf{AB}$.
Similmente, per lo stesso motivo, nel triangolo ABC avremo $\mathbf{NM} \parallel \mathbf{AB}$, $\mathbf{NM} = \frac{1}{2}\mathbf{AB}$.
Quindi DE ed NM, lati opposti del quadrilatero DEMN, sono segmenti PARALLELI (in quanto $\parallel$ alla stessa retta AB) e UGUALI (entrambi uguali a metà del segmento AB), per cui **DEMN è un parallelogrammo**.
E siccome **in un parallelogrammo le diagonali si tagliano scambievolmente per metà**, avremo
$DO = OM$ e $NO = OE$.
In definitiva, risulta $AD = DO = OM$ e $NO = OE = EB$.
Ma in questo modo abbiamo scoperto qualcosa di molto interessante:
**le due mediane tracciate, nell'attraversarsi, si sono tagliate vicendevolmente in due parti,**
**delle quali quella contenente il vertice è doppia dell'altra**.
Ora, se al posto delle due mediane AM e BN avessimo considerato UN'ALTRA COPPIA DI MEDIANE, evidentemente avremmo potuto trarre la stessa conclusione! E quindi,
**se andassimo ora a disegnare la terza mediana, quest'ultima, nell'attraversare la mediana AM,**
**la dividerebbe in due parti, tali che quella contenente il vertice sia doppia dell'altra.**
**Ma allora la mediana che parte dal vertice C dovrà necessariamente passare anch'essa per O**,
perché è evidente (e sarebbe dimostrabile con facilità) che non esiste alcun altro punto, oltre al punto O, dotato della proprietà di dividere AM in due parti delle quali quella contenente A sia doppia dell'altra.

## 5.4 - AIUTO PER IL RIPASSO, ESERCIZI (alcune risposte sono alla fine … tienile coperte!)

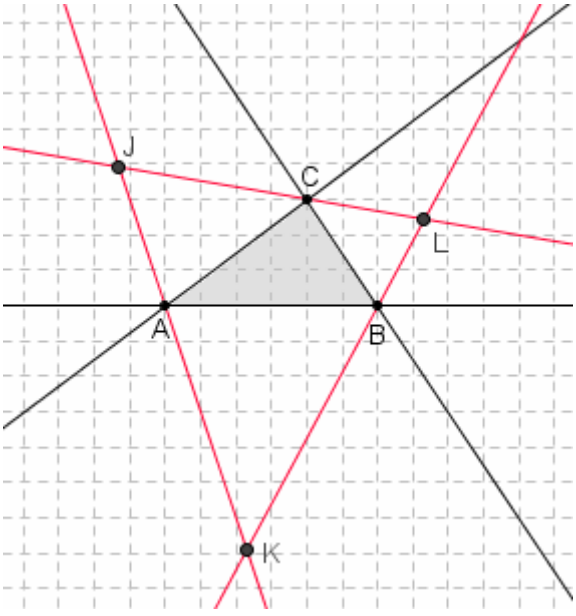
1) Quali fra i punti notevoli seguenti sono SEMPRE interni al triangolo?
   a) incentro  b) circocentro  c) ortocentro  d) baricentro

♫ ALTRI ESERCIZI
SUL CAPITOLO 5
A PARTIRE DA PAGINA 346

2) Serviti delle figure seguenti per trovare, in matita,
   l'incentro, poi il circocentro, poi l'ortocentro,
   poi il baricentro dei rispettivi triangoli:




3) Un triangolo ha 3 angoli interni e 6 esterni
   (si dice "angolo esterno", in un poligono,
   un angolo adiacente ad un angolo interno).
   Gli angoli esterni sono a due a due uguali
   in quanto opposti al vertice, e quando due angoli
   sono opposti al vertice, per questa coppia di angoli
   si può parlare di "retta bisettrice",
   perché la semiretta che fa da bisettrice per uno di essi,
   se prolungata dalla parte del vertice,
   va a tagliare in due parti uguali anche l'altro
   (dimostralo: è facilissimo!)
   Ciò premesso, la figura qui a fianco riportata
   mostra un triangolo e i suoi 3 *ex-centri*.
   Un ex-centro è il punto di intersezione
   delle due rette che sono bisettrici di due coppie
   di angoli esterni opposti al vertice.
   Serviti della figura per dimostrare che passa per ogni
   ex-centro anche la bisettrice di uno degli angoli interni,
   quindi che per ogni ex-centro passano TRE bisettrici.




4) Dimostra che
   a) i punti medi dei lati di un rettangolo sono vertici di un rombo
   b) i punti medi dei lati di un rombo sono vertici di un rettangolo
   c) le parallele alle diagonali di un rettangolo passanti per i vertici formano, incrociandosi, un rombo
   d) le parallele alle diagonali di un rombo passanti per i vertici formano, incrociandosi, un rettangolo.

5) Dimostra che in un triangolo equilatero, incentro, circocentro, ortocentro e baricentro coincidono.

6) Il baricentro divide ciascuna mediana in due parti tali che la più piccola è … dell'intera mediana.
   L'incentro è equidistante da … mentre il circocentro è equidistante da …

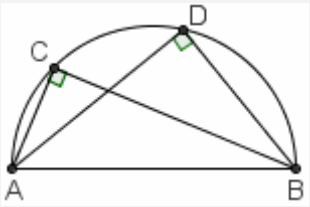
Dal sito www-groups.dcs.st-and.ac.uk riportiamo qualche stralcio della biografia di

## Talete di Mileto

… Thales seems to be the first known Greek philosopher, scientist and mathematician although his occupation was that of an engineer. … However, none of his writings survives so it is difficult to determine his views or to be certain about his mathematical discoveries.
Indeed it is unclear whether he wrote any works at all …
Proclus, the last major Greek philosopher, who lived around 450 AD, wrote:
[*Thales*] *first went to Egypt and thence introduced this study* [*geometry*] *into Greece.*
*He discovered many propositions himself, and instructed his successors in the principles underlying many others; his method of attacking problems had greater generality in some cases and was more in the nature of simple inspection and observation in other cases.*
There is a difficulty in writing about Thales and others from a similar period. Although there are numerous references to Thales which would enable us to reconstruct quite a number of details, the sources must be treated with care since it was the habit of the time to credit famous men with discoveries they did not make.
… Certainly Thales was a figure of enormous prestige, being the only philosopher before Socrates to be among the Seven Sages. …
It is reported that Thales predicted an eclipse of the Sun in 585 BC. The cycle of about 19 years for eclipses of the Moon was well known at this time but the cycle for eclipses of the Sun was harder to spot since eclipses were visible at different places on Earth. Thales's prediction of the 585 BC eclipse was probably a guess based on the knowledge that an eclipse around that time was possible. …
There are several accounts of how Thales measured the height of pyramids.
Diogenes Laertius … : ***[Thales] even succeeded in measuring the pyramids by observation of the length of their shadow at the moment when our shadows are equal to our own height.***
This appears to contain no subtle geometrical knowledge, merely an empirical observation that at the instant when the length of the shadow of one object coincides with its height, then the same will be true for all other objects. … Plutarch however recounts the story in a form which, if accurate, would mean that Thales was getting close to the idea of similar triangles …

Thales is credited with five theorems of elementary geometry:

- **A circle is bisected by any diameter**.
- **The base angles of an isosceles triangle are equal**.
- **The angles between two intersecting straight lines are equal**.
- **Two triangles are congruent if they have two angles and one side equal**.
- **An angle in a semicircle** (figura qui a fianco) **is a right angle**.




… Our knowledge of the philosophy of Thales is due to Aristotle who wrote in his Metaphysics:
*Thales of Miletus taught that 'all things are water'.*
Thales believed that the Earth floats on water and all things come to be from water. For him the Earth was a flat disc floating on an infinite ocean. … Again the importance of Thales' idea is that he is the first recorded person who tried to explain such phenomena by rational rather than by supernatural means. …

---

Sembra proprio che Talete fosse dotato di un fine senso dell'umorismo.

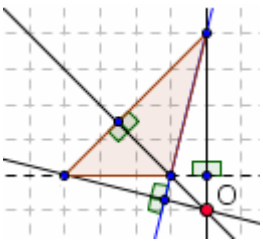
Tre citazioni a questo proposito dalle "Vite dei filosofi" di Diogene Laerzio:

- "... Altri dicono che non era sposato e che aveva adottato il figlio di una sorella.
  Avendogli qualcuno domandato perché non volesse aver figli, rispose: 'Per l'amore che porto ai piccoli'.
  Narrano poi che alla madre che voleva spingerlo a sposarsi rispondesse: 'Non è ancora tempo';
  e più avanti in età, alle sue insistenze, replicasse: 'Non è più tempo' "
- "... Diceva che tra la morte e la vita non v'è alcuna differenza.
  Qualcuno gli obiettò: 'E perché non muori, allora?'. E Talete: 'Proprio perché non c'è nessuna differenza' "
- "A chi chiedeva che cosa fosse nato prima, la notte o il giorno, rispondeva: 'La notte, … un giorno prima.' "

**ALCUNE RISPOSTE**

1) a, d

2) In un triangolo rettangolo, l'ortocentro coincide col vertice del'angolo retto e il circocentro col punto medio dell'ipotenusa.
   L'ortocentro O di PQR: →

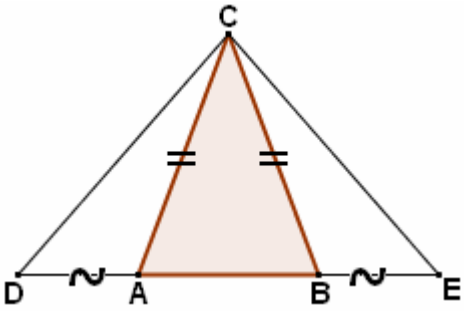



3) Ogni punto della bisettrice di un angolo è equidistante dai lati dell'angolo stesso …
   … e viceversa, se un punto di un angolo è equidistante dai lati di quell'angolo, allora appartiene alla sua bisettrice …

6) … 1/3 dell'intera mediana;
   … dalle tre rette dei lati del triangolo;
   … dai tre vertici del triangolo

# GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 2

1) **(Esercizio svolto)**
**Sui due prolungamenti della base $\overline{AB}$ di un triangolo isoscele ABC si prendano due segmenti uguali $\overline{AD} = \overline{BE}$.**
**Dimostrare che il triangolo CDE è anch'esso isoscele.**




Si segna SUBITO sul disegno
ciò che è noto per IPOTESI !!!

**HP**
**(=IPOTESI)**
$\overline{CA} = \overline{CB}$
$\overline{AD} = \overline{BE}$
(NOTA)

**TH**
**(=TESI)**
$\overline{CD} = \overline{CE}$

Ti consiglio di
**scrivere sempre l'ipotesi e la tesi**.



**SUL DISEGNO, TI CONVERRA' SEGNARE *IMMEDIATAMENTE* CIO' CHE E' NOTO PER IPOTESI**

*(marcherai con simboli uguali i segmenti e gli angoli che sai per ipotesi essere uguali, indicherai con quadratini gli angoli che sai per ipotesi essere retti, ecc. ecc.)*

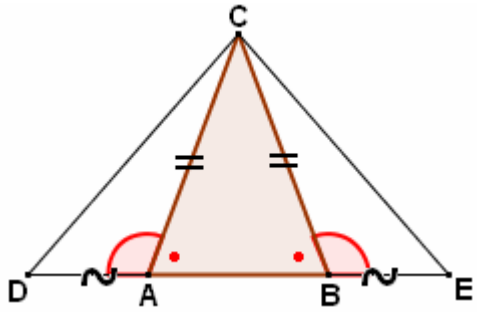
**La tesi, invece, è meglio non segnarla: essa è il tuo obiettivo ultimo, esprime qualcosa che non "possiedi" ancora, qualcosa che ti è richiesto di "conquistare" con ragionamenti vari.**

*Soltanto al termine potrai finalmente dire: Evviva! Ci sono riuscito! La tesi è dimostrata! E a questo punto, se lo desideri, la rimarcherai vittoriosamente in figura.*

NOTA
A rigore, occorrerebbe anche specificare, nell'ipotesi, che $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ si trovano sui PROLUNGAMENTI di $\overline{AB}$.
Per indicare questo, si potrebbe scrivere, ad esempio, $D\hat{A}B = A\hat{B}E = 180°$.
Tuttavia, per brevità, si possono lasciare sottintese precisazioni di questo genere.

**DIMOSTRAZIONE**

Innanzitutto, poiché per HP il triangolo ABC è isoscele sulla base $\overline{AB}$,
si ha $C\hat{A}B = C\hat{B}A$ (**in un triangolo isoscele, gli angoli alla base sono uguali**).
Allora i due angoli $C\hat{A}D$, $C\hat{B}E$ **sono uguali perché supplementari di angoli uguali**:
$C\hat{A}D = 180° - C\hat{A}B = 180° - C\hat{B}A = C\hat{B}E$.




Conviene segnare sul disegno,
se si ritiene possa essere utile,
ciò che progressivamente
viene dedotto!!!



**APPENA DEDUCI QUALCOSA CHE TI SEMBRA RILEVANTE, EVIDENZIALO *SUBITO* IN MATITA!**

Nel nostro esempio, è molto importante marcare (lo abbiamo fatto con la coppia di pallini) che sono uguali gli angoli alla base del triangolo isoscele ABC, perché vederne **raffigurata visivamente** l'uguaglianza è una "spinta" a dedurre l'uguaglianza dei due angoli al loro fianco (uguali perché supplementari di angoli uguali: e noi lo andiamo immediatamente a indicare coi due archetti). Adesso, il fatto che i triangoli CAD e CBE siano uguali ci è suggerito dal disegno! (2 lati e l'angolo compreso, 1° Criterio)

**Confrontiamo ora i due triangoli CAD, CBE.**
Essi hanno:
$\overline{CA} = \overline{CB}$ per HP;
$\overline{AD} = \overline{BE}$ per HP;
$C\hat{A}D = C\hat{B}E$
quindi **sono uguali per il 1° Criterio.**
**In particolare, avranno $\overline{CD} = \overline{CE}$,**
C.V.D.
(*ossia: Come Volevasi Dimostrare*)



Un'ultima raccomandazione:
**evita accuratamente di tracciare una figura che esprima un caso particolare.**

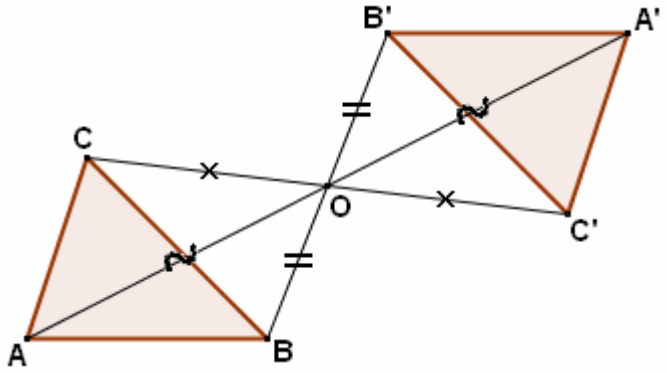
Nel nostro esempio, sarebbe un caso particolare se il triangolo ABC venisse disegnato equilatero, oppure se i due prolungamenti della base fossero presi uguali ai lati obliqui, ecc.)

*Beninteso: il teorema, essendo valido sempre, mantiene la sua validità anche nei vari casi particolari, ma utilizzando una figura che esprima un caso particolare c'è il pericolo di essere indotti a fare dei ragionamenti che "funzionano", appunto, solo in* quel *caso specifico, ma non in generale.*

2) **(Esercizio svolto)**

**Dato un triangolo ABC e un punto qualunque O fuori di esso,**
**si traccino i tre segmenti $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ e $\overline{CO}$**
**e li si prolunghi, rispettivamente, di tre segmenti $\overline{OA'} = \overline{AO}$, $\overline{OB'} = \overline{BO}$, $\overline{OC'} = \overline{CO}$.**

**a) Dimostrare che il triangolo A'B'C' è uguale al triangolo ABC**
**b) Questo teorema resterebbe valido anche se il punto O fosse interno al triangolo ABC?**




**HP**

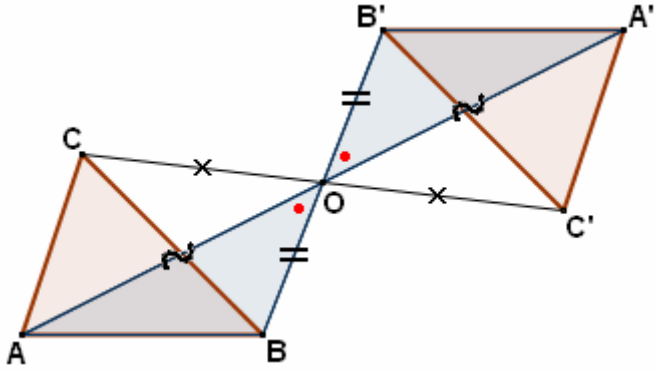
$\overline{OA'} = \overline{AO}$
$\overline{OB'} = \overline{BO}$
$\overline{OC'} = \overline{CO}$

**TH**

$A'B'C' = ABC$

a) **DIMOSTRAZIONE**

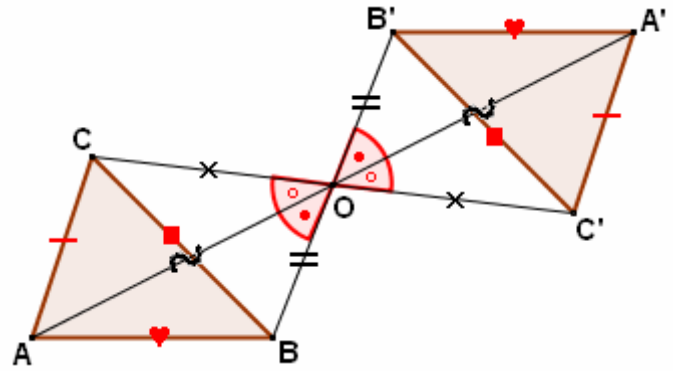
**Confrontiamo** i due triangoli **OAB, OA'B'**.




Essi hanno: $\overline{AO} = \overline{OA'}$ per HP; $\overline{BO} = \overline{OB'}$ per HP; $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$ perché opposti al vertice
quindi **sono uguali per il 1° Criterio**. **In particolare**, avranno $\boxed{\overline{AB} = \overline{A'B'}}$.
Allo stesso modo,

**confrontando i due triangoli OAC e OA'C', si dimostra che** $\boxed{\overline{AC} = \overline{A'C'}}$

e **confrontando i due triangoli OBC e OB'C', si dimostra che** $\boxed{\overline{BC} = \overline{B'C'}}$




A questo punto, **andando a confrontare i due triangoli ABC e A'B'C',**
**possiamo dire che sono uguali per il 3° Criterio** (hanno infatti i tre lati rispettivamente uguali).
**La tesi è dimostrata.**

b) **Sì, il teorema resta valido anche se O è interno** ad ABC, **e la dimostrazione è identica.**



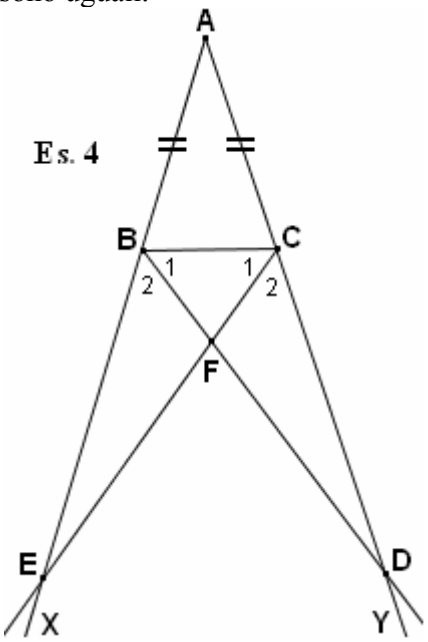
**SE VUOI LAVORARE BENE … RICAPITOLIAMO:**

- **Segna sempre sulla figura ciò che dice l'ipotesi**
  (marcando con simboli uguali i segmenti o gli angoli che si sa essere uguali, indicando con un quadratino gli angoli che si sa essere retti, ecc. ecc.)
- **… E quando riesci a dedurre qualche affermazione intermedia interessante, ti conviene sempre segnare anche quella sul disegno prima di proseguire!**
- **Evita accuratamente di tracciare una figura che esprima un caso particolare**
  (ad es., se l'ipotesi parla di un triangolo isoscele, meglio non disegnarlo equilatero; se parla di un angolo generico, meglio non farlo retto, ecc.)

3) Dimostra che in un triangolo isoscele le mediane relative ai lati uguali sono uguali.

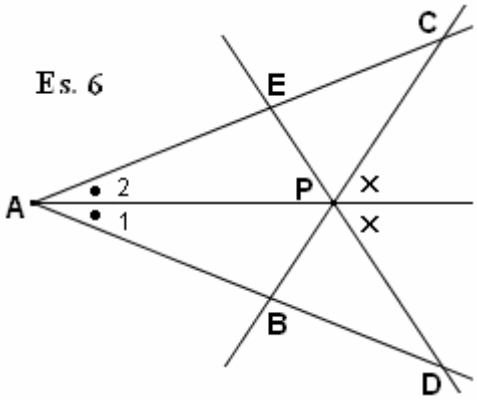
4) **(Vedi figura)**
In un triangolo isoscele $ABC$, di base $\overline{BC}$,
si traccino i prolungamenti $BX$ e $CY$ (NOTA)
dei due lati obliqui $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e poi si tracci:
la bisettrice dell'angolo $X\hat{B}C$, che tagli la semiretta CY in D,
e la bisettrice dell'angolo $Y\hat{C}B$, che tagli BX in E.
Dimostrare che $\overline{BD} = \overline{CE}$ e che, detto F
il punto di intersezione di BD e CE, è pure $\overline{BF} = \overline{CF}$.

NOTA: *I punti X e Y servono semplicemente per dare un nome alle due semirette che rappresentano i prolungamenti dei due lati obliqui: pertanto, tali punti X e Y non vanno presi in posizioni particolari, ma possono stare, su quelle semirette, dove si desidera.*




5) Se due triangoli hanno rispettivamente uguali
due lati e la mediana relativa a uno di essi,
allora sono uguali *(all'inizio della frase è sottinteso, evidentemente: "Dimostrare che …").*

6) **(Vedi figura)**
Per un punto P della bisettrice di un angolo $\hat{A}$ si tracciano due rette formanti angoli uguali con la bisettrice stessa (sono quelli indicati con le crocette in figura).
Una di queste rette taglia i lati dell'angolo rispettivamente in B e in C, l'altra taglia i medesimi lati rispettivamente in D e in E. Dimostrare che si ha:
I) $\overline{PB} = \overline{PE}$ II) $\overline{PD} = \overline{PC}$ III) $\overline{BC} = \overline{DE}$




7) Il quadrilatero ABCD è un "**deltoide**", ossia ha
la proprietà di avere due lati consecutivi uguali fra loro,
e gli altri due pure uguali fra loro: $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{CD} = \overline{DA}$.
Dimostra che le sue diagonali sono perpendicolari.

8) Dimostra che se in un triangolo una mediana è anche altezza, allora il triangolo è isoscele.

9) Dimostra che se in un triangolo una bisettrice è anche altezza, allora il triangolo è isoscele.

10) Dimostra che se in un triangolo una bisettrice è anche mediana, allora il triangolo è isoscele
[Questo teorema, rispetto ai due precedenti, è più difficile da dimostrare,
perché non si può applicare nessuno dei tre Criteri di uguaglianza.
Ti do un'indicazione. Sia ABC il triangolo, e sia $\overline{CM}$ la mediana-bisettrice.
Prolunga $\overline{CM}$ dalla parte di M di un segmento $\overline{MD} = \overline{CM}$, poi congiungi D con A e con B;
fai quindi delle considerazioni sui vari triangoli che compaiono ora in figura … ]

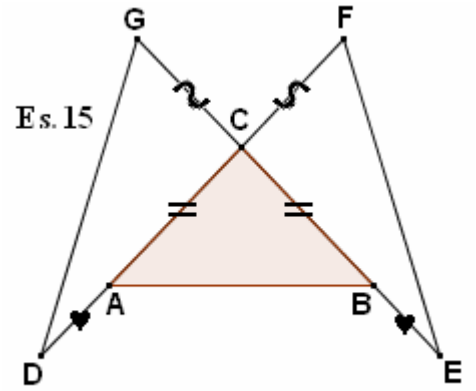
11) Dimostra che in due triangoli uguali le mediane relative a due lati rispettivamente uguali sono uguali.

12) Dimostra che in due triangoli uguali le bisettrici relative a due lati rispettivamente uguali sono uguali.

13) Spiega perché, a questo livello dello studio della Geometria, se tentiamo di dimostrare che
"in due triangoli uguali le altezze relative a due lati rispettivamente uguali sono uguali"
non ci può venire in aiuto nessuno dei tre Criteri di Uguaglianza dei Triangoli sin qui studiati.
… Ci si può però riuscire prolungando ogni altezza di un segmento ad essa uguale e congiungendo …

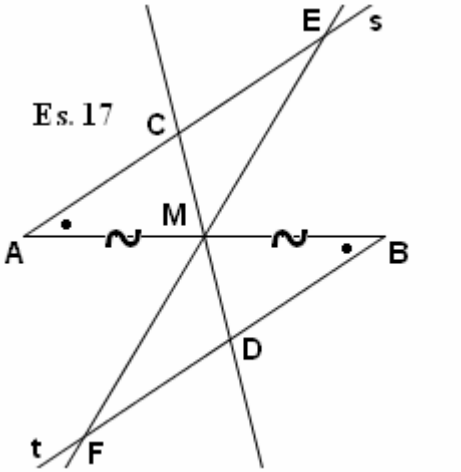
14) In un triangolo isoscele le mediane relative ai lati uguali si tagliano in parti rispettivamente uguali.

15) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 332)**
E' dato il triangolo ABC, isoscele sulla base $\overline{AB}$.
Si prolunghino i due lati obliqui $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$:
dalla parte della base, di due segmenti uguali $\overline{AD} = \overline{BE}$,
e dalla parte del vertice di due altri segmenti uguali fra loro
(ma non necessariamente coi precedenti) $\overline{CF} = \overline{CG}$.
Dimostrare che le due congiungenti $\overline{DG}$, $\overline{EF}$ sono uguali.

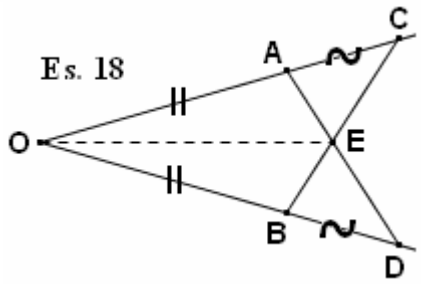



16) ☼ **(Dimostrazione guidata a pag. 332)**
Dimostrare che congiungendo i punti medi
dei tre lati di un triangolo isoscele,
si ottiene un nuovo triangolo isoscele.

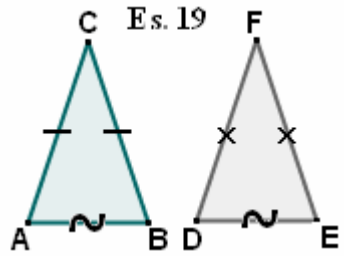
17) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 332)**
Sia $\overline{AB}$ un segmento e M il suo punto medio.
Da A e da B, da parte opposta rispetto ad AB,
si traccino due semirette, s e t,
che formino angoli uguali con AB.
Per M si traccino due rette qualsiasi,
la prima delle quali tagli s in C e t in D,
la seconda tagli s in E e t in F.
Dimostrare che:
$\overline{AC} = \overline{BD}$ ; $\overline{CE} = \overline{DF}$




18) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 333)**
Sui lati di un angolo qualunque di vertice O
si prendano rispettivamente i segmenti
$\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{OC} = \overline{OD}$;
si indichi con E il punto in cui si intersecano
le congiungenti $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.
Dimostrare che:
I) $\overline{AD} = \overline{BC}$ II) $\overline{EA} = \overline{EB}$
III) il punto E sta sulla bisettrice dell'angolo dato $\hat{O}$.




19) ☼ **(Vedi figura;**
**dim. guidata a pag. 333)**
Due triangoli isosceli
sono uguali
se hanno uguali
le basi
e i perimetri




HP $\overline{CA} = \overline{CB}$, $\overline{FD} = \overline{FE}$;
$\overline{AB} = \overline{DE}$; $2p(ABC) = 2p(DEF)$
TH $ABC = DEF$

♥ **Il simbolo più usato**
**per indicare il perimetro è 2p**;
**p** si riserva invece di norma al
**SEMIperimetro** ( = ½ del perimetro).
Il perché è spiegato a pag. 335.

20) ☼ **(Dimostrazione guidata a pag. 333)**
Sui lati $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ del triangolo equilatero ABC si prendano tre segmenti uguali $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$.
Dimostrare che il triangolo DEF è pure equilatero.

21) Se in un triangolo isoscele ABC si tracciano le bisettrici dei due angoli alla base $\hat{B}$ e $\hat{C}$,
allora, detto D il loro punto di incontro, la congiungente DA biseca l'angolo al vertice
(per "bisecare" si intende "tagliare in due parti uguali")

22) Se un quadrilatero ABCD ha i lati opposti a due a due uguali ( $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ ) allora ha pure
gli angoli opposti a due a due uguali ( $\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$ ): dimostralo (*Psst*: *occorre tracciare una …*)

23) *Il teorema seguente appare a prima vista simile al 5), ma è decisamente più complicato.*
Dimostra che se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e la mediana relativa al terzo lato,
allora sono uguali. [Indicazione: prolunga ciascuna delle due mediane di un segmento ad essa uguale;
congiungi l'estremo libero di ciascun prolungamento con le estremità del lato cui la
mediana si riferisce; e utilizza, in successione: il 1° Criterio, il 3°, nuovamente il 1°]

☼ **DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)**

15) DIM.

⇨ I due triangoli DCG ed ECF hanno:

$\overline{CG} = \overline{CF}$ per …..…. ;

$\hat{DCG} = \hat{ECF}$ perché ..…..… ;

$\overline{CD} = \overline{CE}$ perché ……. (NOTA).

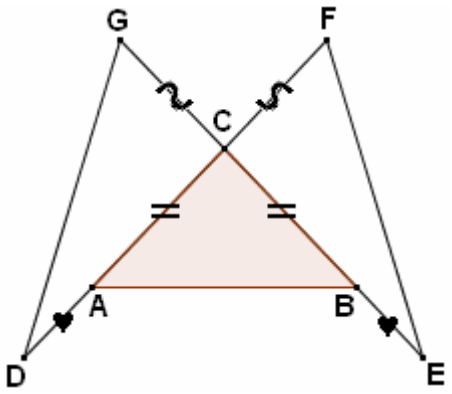
Quindi essi sono uguali per il …….. ;
in particolare, $\overline{DG} = \overline{EF}$, c.v.d.

NOTA
Se si vuole **illustrare più in dettaglio** quest'ultima affermazione, si potrà utilizzare:

a) una **catena**: $\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD} = ..... + ..... = \overline{CE}$

b) oppure una **somma membro a membro di due uguaglianze:**

$$\begin{array}{l} \overline{CA} = ..... \\ \overline{AD} = ..... \\ \hline \underbrace{\overline{CA} + \overline{AD}}_{\overline{CD}} = \underbrace{..... + .....}_{\overline{CE}} \end{array}$$

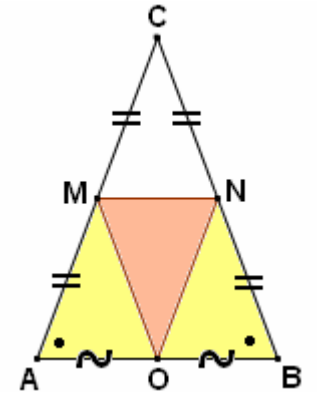



**HP**
$\overline{CA} = \overline{CB}$
$\overline{AD} = \overline{BE}$
$\overline{CF} = \overline{CG}$

**TH**
$\overline{DG} = \overline{EF}$

16)

⇨




**HP**
$\overline{AC} = \overline{BC}$

$\left.\begin{array}{l} \overline{AM} = \overline{MC} \\ \overline{BN} = \overline{NC} \end{array}\right]$ (NOTA)

$\overline{AO} = \overline{OB}$

**TH**
$\overline{OM} = \overline{ON}$

NOTA :
sulla figura, abbiamo segnato direttamente $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{BN} = \overline{NC}$, "anticipando" il semplice ragionamento secondo cui metà di segmenti uguali sono uguali

DIM. Osserviamo innanzitutto che i 4 segmenti $\overline{AM}$, $\overline{MC}$, $\overline{BN}$, $\overline{NC}$ sono **TUTTI uguali fra loro (e non soltanto uguali a due a due)**, perché ……..

In dettaglio, infatti, possiamo scrivere $\overline{AM} = \overline{MC} = \frac{1}{2}..... = \frac{1}{2}..... = \overline{BN} = \overline{NC}$.

Confrontiamo ora i due triangoli AOM e BON.
Essi hanno: $\overline{AM} = \overline{BN}$ ; $\overline{AO} = \overline{OB}$ per …….. ; $\hat{A} = \hat{B}$ perché ……..
Quindi AOM e BON sono uguali per il …… , e in particolare $\overline{OM} = \overline{ON}$ , c.v.d.

17) DIM.

⇨ I) Confrontiamo i due triangoli AMC e BMD:

$\hat{A} = \hat{B}$ per …….. ;

$A\hat{M}C = B\hat{M}D$ perché ……..
(*segna la loro uguaglianza con due simboli identici in figura!*);

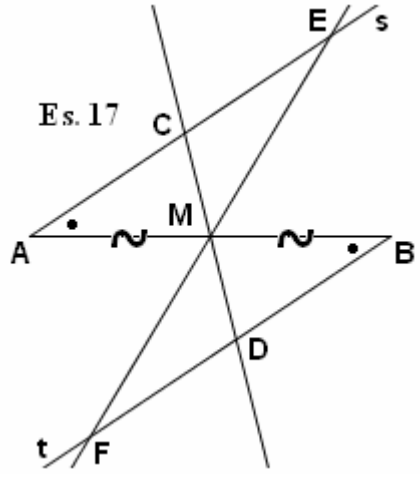
$\overline{AM} = \overline{MB}$ per ……..

Quindi è AMC = BMD per il …….. ;
in particolare, $\overline{AC} = \overline{BD}$.

II) Dall'uguaglianza di AMC e BMD prima dimostrata segue, fra l'altro, che
$\overline{CM} = \overline{MD}$ e $A\hat{C}M = B\hat{D}M$
(*segna queste uguaglianze sulla figura!*)
Quindi, confrontando ora ECM e FDM, avremo

- $\overline{CM} = \overline{MD}$
- $E\hat{C}M = F\hat{D}M$ perché …….. : la catena illustrativa è $E\hat{C}M = 180° - ..... = 180° - ..... = F\hat{D}M$
- $E\hat{M}C = F\hat{M}D$ perché …….. .

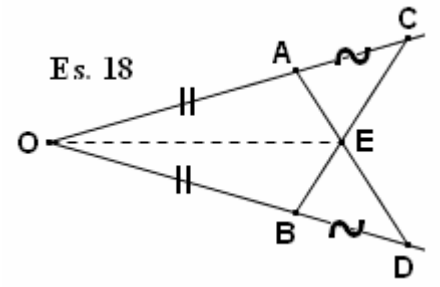
Pertanto ECM = FDM per il …….. e, in particolare, $\overline{CE} = \overline{DF}$ . La dimostrazione è completata.




**HP**
……..
……..

**TH**
I) $\overline{AC} = \overline{BD}$
II) $\overline{CE} = \overline{DF}$

18) ⇨




**HP**

$\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{OC} = \overline{OD}$

(in figura, per comodità, abbiamo già segnato $\overline{AC} = \overline{BD}$ :
"differenze di segmenti uguali sono uguali";
questa annotazione grafica permette anche,
insieme all'altra relativa a $\overline{OA} = \overline{OB}$,
di "ricostruire" immediatamente, per somma,
l'uguaglianza nota $\overline{OC} = \overline{OD}$ )

**TH**

I ) $\overline{AD} = \overline{BC}$

II ) $\overline{EA} = \overline{EB}$

III ) il punto E sta sulla bisettrice di $\hat{O}$,
vale a dire, congiunto O con E, si ha $E\hat{O}A = E\hat{O}B$

DIM.

I) Confrontiamo OAD, OBC:
$\overline{OA} = \overline{OB}$ ( per ……..);
$\overline{OD} = \overline{OC}$ ( per ……..);
$\hat{O}$ in comune.
Quindi OAD = OBC (per il ……..) e, in particolare, $\overline{AD} = \overline{BC}$.

II) Innanzitutto dall'uguaglianza di OAD e OBC segue anche (*segna subito sulla figura!!!*)
$B\hat{D}E = A\hat{C}E$ e $O\hat{A}E = O\hat{B}E$.
Ma se $O\hat{A}E = O\hat{B}E$, allora anche $C\hat{A}E = D\hat{B}E$ perché …….. :
la catena illustrativa è $C\hat{A}E = 180° - ..... = ..... = D\hat{B}E$ (*segna sulla figura!!!*).
Quindi, confrontando i due triangoli AEC e BED, si ha che:
$A\hat{C}E = B\hat{D}E$ ; $C\hat{A}E = D\hat{B}E$ ; $\overline{AC} = \overline{BD}$ perché …….. : $\overline{AC} = ..... = ..... = \overline{BD}$.
Di conseguenza, AEC = BED per il …….. e, in particolare, $\overline{EA} = \overline{EB}$.

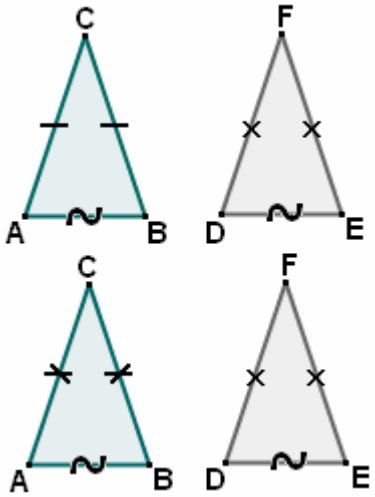
III) OAE ed OBE sono uguali per il …….. : infatti
$\overline{OE}$ è …….. ; $\overline{OA} = \overline{OB}$ per …….. ; $\overline{EA} = \overline{EB}$ come già dimostrato (*l'avevi segnato in figura?*).
Dall'uguaglianza dei due triangoli considerati segue, in particolare, $E\hat{O}A = E\hat{O}B$, c.v.d.

19) ⇨

DIM.
Se sono uguali i perimetri e le basi,
saranno uguali anche i lati obliqui!
Infatti

$$\overline{CA} = \overline{CB} = \frac{2p(ABC) - .....}{2} = \frac{2p(DEF) - .....}{2} = \overline{FD} = \overline{FE}$$

Annotate dunque
tali uguaglianze sulla figura, →
potremo concludere che
i due triangoli considerati
sono uguali per il …….. , c.v.d.




**HP**

$\overline{CA} = \overline{CB}$

$\overline{FD} = \overline{FE}$

$\overline{AB} = \overline{DE}$

2p(ABC) = 2p(DEF)

**TH**

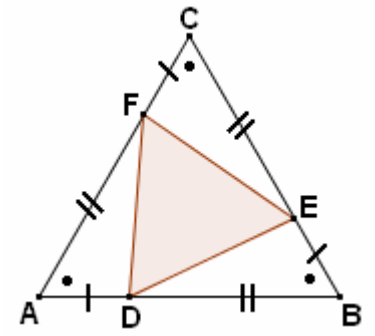
ABC = DEF

20) ⇨

DIM.
Prima di tutto, si osserva che $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$
perché ……...
Inoltre, i tre segmenti $\overline{DB}$, $\overline{EC}$, $\overline{FA}$
sono uguali perché ……. ;
infatti, schematicamente:

$$\begin{array}{ccccc} \overline{AB} & = & \overline{BC} & = & \overline{CA} \\ \overline{AD} & = & \overline{BE} & = & \overline{CF} \end{array}$$

$$\frac{\overline{AB} - \overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{.....}{.....} = \frac{\overline{CA} - \overline{CF}}{\overline{FA}}$$




**HP**

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$

$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$

**TH**

$\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

Confrontiamo allora *simultaneamente* i tre triangoli ADF, BED e CFE.
Essi hanno $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$, $\overline{FA} = \overline{DB} = \overline{EC}$, …….. , quindi sono uguali per il ……..
e in particolare si ha $\overline{FD} = \overline{DE} = \overline{EF}$, C.V.D.

# GEOMETRIA: ESERCIZI SULLE DISUGUAGLIANZE

Ti proporrò ora, come esercizi, **alcuni teoremi in cui la tesi è rappresentata da una disuguaglianza**.

Ovviamente, per la dimostrazione dovrai
**ricordare quei teoremi noti che riguardano disuguaglianze fra segmenti o fra angoli**;
ad esempio:

- *"in un triangolo, a lato maggiore sta opposto angolo maggiore, e viceversa";*
- *"in un triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza";*
- *"in un triangolo, ciascun angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni ad esso non adiacenti" (Teorema dell' Angolo Esterno in forma debole);*
- …

Molto sovente, in esercizi di questo tipo, occorrerà
applicare le **proprietà delle disuguaglianze fra segmenti o angoli**,
che abbiamo fissato come assiomi all'inizio del nostro studio della Geometria.

Le richiamiamo qui di seguito.

- Sommando membro a membro due disuguaglianze vere
  (e aventi lo stesso verso, cioè: o entrambe col < o entrambe col > )
  si ottiene ancora una disuguaglianza vera:
  $a < b \wedge c < d \rightarrow a + c < b + d$ (*ovviamente, lo stesso vale se al posto di "<" scriviamo ">"…*)
  - Invece *non* è lecito *sottrarre* membro a membro due disuguaglianze equiverse:
    voglio dire, la disuguaglianza cui si perverrebbe
    potrebbe essere, a seconda dei casi, o vera o falsa!

- Moltiplicando, o dividendo, per uno stesso numero positivo ambo i membri
  di una disuguaglianza vera, si perviene ancora ad una disuguaglianza vera:
  $a < b \rightarrow 2a < 2b;$ (*lo stesso vale se al posto di "<" scriviamo ">";*
  $a < b \rightarrow \frac{a}{2} < \frac{b}{2};$ *non staremo più a ripeterlo!*)
  ...
  $a < b \rightarrow ma < mb;$
  $a < b \rightarrow \frac{1}{n}a < \frac{1}{n}b;$
  $a < b \rightarrow \frac{m}{n}a < \frac{m}{n}b$

- Addizionando, o sottraendo, uno stesso termine da entrambi i membri di una disuguaglianza vera,
  si ottiene ancora una disuguaglianza vera:
  $a < b \rightarrow a + c < b + c$
  $a < b \rightarrow a - c < b - c$

Dall'ultimo assioma citato si possono dedurre facilmente

♪ la cosiddetta "**regola del trasporto**":
"nell'ambito di una disuguaglianza, è lecito trasportare un termine di somma algebrica
da un membro all'altro, cambiandolo però di segno"

$d + e < f \rightarrow d < f - e \quad \left( d \cancel{+ e} \boxed{\cancel{-e}} < f \boxed{-e} \right)$

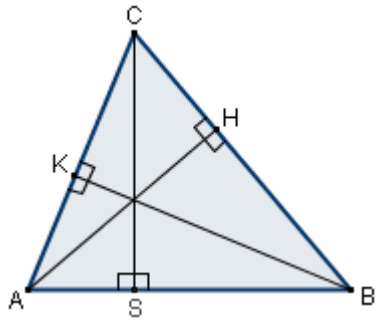
♫ il "**principio di cancellazione**":
"nell'ambito di una disuguaglianza, se uno stesso termine (addendo di somma algebrica)
compare tanto a primo quanto a secondo membro, è lecito cancellarlo"

$g + h < i + h \rightarrow g < i \quad \left( g \cancel{+ h} \boxed{\cancel{-h}} < i \cancel{+ h} \boxed{\cancel{-h}} \right)$

*Ecco ora una rassegna di **esercizi**.*
*Sono **difficili**, è vero!!! Non scoraggiarti!*
*Proprio perché impegnativi, possono essere particolarmente appassionanti.*

1) (**Esercizio svolto**)

**In un triangolo la somma delle tre altezze è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro**




IPOTESI

$AH \perp BC,\ BK \perp AC,\ CS \perp AB$

TESI

**I)** $\mathbf{AH + BK + CS < 2p}$

**II)** $\mathbf{AH + BK + CS > p}$

♥ Per motivi di praticità, omettiamo, in questa pagina, il "cappello di segmento", che sappiamo non "obbligatorio"

In Geometria, generalmente si preferisce indicare il **perimetro** con **2p**; **il simbolo p è invece, di norma, impiegato per indicare il SEMIperimetro** ( = la metà del perimetro). Questa scelta si deve al fatto che se si indicasse il *perimetro* con p, il *semiperimetro* dovrebbe essere indicato con p/2, e le tante formule geometriche che contengono non il perimetro ma il semiperimetro, si troverebbero così a presentare fastidiosi denominatori.

DIMOSTRAZIONE

I) $AH < AB$ (triangolo rettangolo AHB: in un tr. rett. ciascun cateto è minore dell'ipotenusa)

$BK < BC$ (tr. rett. BKC)

$CS < AC$ (tr. rett. CSA)

$AH + BK + CS < AB + BC + AC$ c.v.d.

II) $AH > AB - BH$ (tr. ABH : in un triangolo un lato è maggiore della diff. deg li altri due)

$AH > AC - CH$ (tr. ACH)

$BK > BC - CK$ (tr. BCK)

$BK > AB - AK$ (tr. ABK)

$CS > AC - AS$ (tr. ACS)

$CS > BC - BS$ (tr. BCS)

$$2AH + 2BK + 2CS > AB - BH + AC - CH + BC - CK + AB - AK + AC - AS + BC - BS =$$
$$= AB + AC + BC + AB + AC + BC - (BH + CH + CK + AK + AS + BS) =$$
$$= 2AB + 2AC + 2BC - (BC + AC + AB) =$$
$$= 2AB + 2AC + 2BC - BC - AC - AB =$$
$$= AB + AC + BC$$

Quindi

$$2(AH + BK + CS) > AB + AC + BC \quad \rightarrow \quad AH + BK + CS > \frac{AB + AC + BC}{2} \quad \text{c.v.d.}$$

**ALTRI ESERCIZI**

2) In ogni triangolo, ciascuna mediana è minore della semisomma ( = metà della somma) dei due lati che hanno con essa un estremo in comune
*(prolungare la mediana di un segmento uguale alla mediana stessa, poi congiungere ...)*

3) In ogni triangolo la somma delle tre mediane è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro
*(utilizzare il teorema precedente)*

4) ⇨ (*difficile!*) In un triangolo ABC, se O è un punto interno, si ha $\overline{OB} + \overline{OC} < \overline{AB} + \overline{AC}$

5) Se in un triangolo ABC si congiungono i vertici con un punto interno O, la somma $OA + OB + OC$ è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro

6) In un triangolo ABC sia $AD$ la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$ (il punto D sta sul lato $BC$); dimostrare che $AB > BD,\ AC > CD$

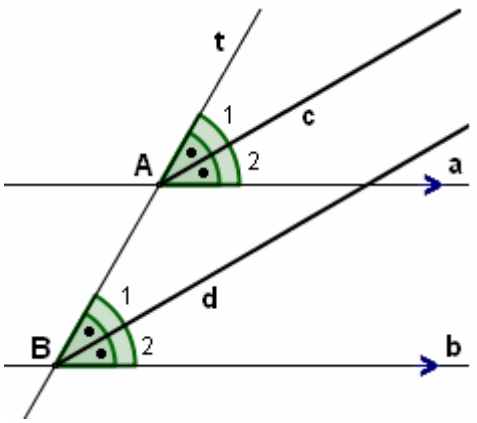
7) In un triangolo ABC, se O è un punto interno, si ha $B\hat{O}C > B\hat{A}C$

8) In ogni quadrilatero, la somma delle diagonali è maggiore del semiperimetro e minore del perimetro

# GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 3

1) **(Esercizio svolto)**

**Dimostra che le bisettrici di due angoli corrispondenti,**
**formati da due rette parallele con una trasversale, sono anch'esse parallele.**




**HP**

$a \parallel b$ (sulla figura abbiamo messo le "freccette di parallelismo" proprio per evidenziare questo fatto)

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (c bisettrice di $t\hat{A}a$)

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (d bisettrice di $t\hat{B}b$)

**TH**

$c \parallel d$

NOTA
Notazioni come $t\hat{A}a$, $t\hat{B}b$ per indicare gli angoli sono "disinvolte", ma comode
(si "approfitta" di lettere già presenti in figura, per evitare di introdurre altre lettere)
e per questo comunemente accettate.

**DIM.**

In figura, abbiamo evidenziato con il "doppio archetto" i due angoli corrispondenti $t\hat{A}a$, $t\hat{B}b$ da noi considerati per evidenziarne l'uguaglianza:

$t\hat{A}a$ e $t\hat{B}b$ **sono uguali** proprio **perché corrispondenti rispetto a due *parallele* con trasversale**.

Ma allora i quattro angoli $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_2$ **sono TUTTI E QUATTRO uguali fra loro, e non soltanto uguali a due a due**, in quanto sono **metà di angoli uguali**:

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{1}{2} t\hat{A}a = \frac{1}{2} t\hat{B}b = \hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (li abbiamo indicati tutti e quattro con il "pallino").

Essendo, **in particolare**, $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, **dato che questi due angoli sono in posizione di corrispondenti rispetto alle due rette c, d con la trasversale t**, **ne discende che** $c \parallel d$,

C.V.D.

**OSSERVAZIONE**

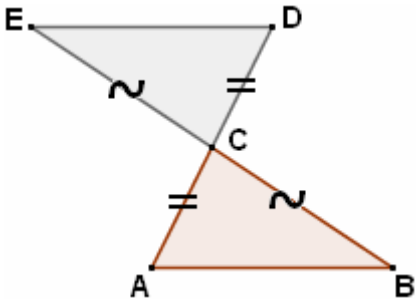
**MOLTO istruttivo**!!!
Vediamo dunque che

**nella dimostrazione di questo teorema ci siamo serviti**

- **prima, del Teorema Inverso sul Parallelismo**
  ("se due rette sono parallele, allora formano con ogni trasversale angoli corrispondenti uguali"),
- **poi, del Teorema Diretto**
  ("se due rette formano con una trasversale due angoli corrispondenti uguali, allora sono parallele")

2) **(Esercizio svolto)**

**Preso un triangolo ABC, si prolunga il lato $\overline{AC}$ di un segmento $\overline{CD} = \overline{AC}$ e il lato $\overline{BC}$ di un segmento $\overline{CE} = \overline{BC}$.**
**Si chiede di dimostrare che la congiungente DE è parallela ad AB.**



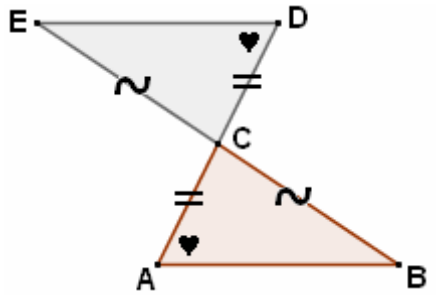

**HP**
$\overline{CD} = \overline{AC}$
$\overline{CE} = \overline{BC}$

**TH**
$DE \parallel AB$

♥ NOTA
Abbiamo scritto $DE \parallel AB$, senza il "cappello", perché l'idea di parallelismo si riferisce in modo più "naturale" alle rette (anche ai segmenti, ma solo in quanto parti di rette).
Nessun problema, comunque: anche scrivere $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ sarebbe stato corretto.

**DIM.**

I due triangoli **DEC e ABC sono uguali per il 1° Criterio**
($\overline{CD} = \overline{AC}$ e $\overline{CE} = \overline{BC}$ per ipotesi, $E\hat{C}D = B\hat{C}A$ perché opposti al vertice).
**Ne consegue, in particolare, $\hat{D} = \hat{A}$ (vedi figura qui sotto):**

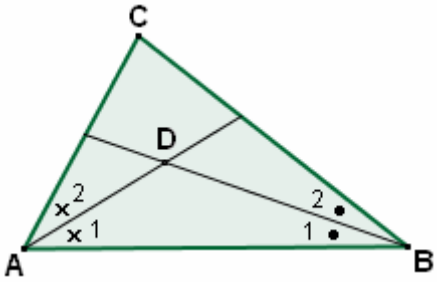



**… e poiché questi angoli sono in posizione di alterni interni rispetto alle due rette DE, AB con la trasversale AD, dal fatto che siano uguali si trae**
**$DE \parallel AB$**

C.V.D.

3) **(Esercizio svolto)**

**L'angolo ottuso formato da due bisettrici di un triangolo, è uguale alla metà del terzo angolo del triangolo, più un angolo retto.**




**HP**
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \quad \hat{B}_1 = \hat{B}_2$

**TH**
$A\hat{D}B = \frac{1}{2}\hat{C} + 90°$

**DIM.**

Si può provare la tesi semplicemente impostando una catena (vedi l'importante osservazione nel riquadro qui a destra →):

$$A\hat{D}B \underset{ADB}{=} 180° - \left(\hat{A}_1 + \hat{B}_1\right) =$$
$$= 180° - \left(\frac{1}{2}\hat{A} + \frac{1}{2}\hat{B}\right) = 180° - \frac{1}{2}\left(\hat{A} + \hat{B}\right) \underset{ABC}{=}$$
$$= 180° - \frac{1}{2}\left(180° - \hat{C}\right) = 180° - 90° + \frac{1}{2}\hat{C} = 90° + \frac{1}{2}\hat{C}$$ C.V.D.

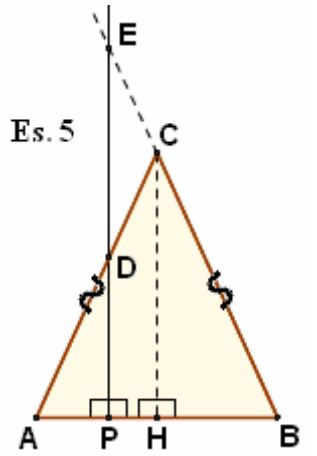
**CATENE**



L'uso delle CATENE è frequentissimo ed efficacissimo nelle dimostrazioni.

♥ **In una catena ben impostata ciascun "anello" deve essere ricavato A PARTIRE DALL' "ANELLO" CHE LO PRECEDE IMMEDIATAMENTE (non, quindi, fare riferimento ad altri anelli lontani … )**

4) In un triangolo ABC, si tracciano le bisettrici dei due angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$, indicando con D il loro punto di intersezione.
Per D si traccia poi la parallela ad AB, indicando con E, F i suoi punti di intersezione con AC e con BC rispettivamente.
Si chiede di dimostrare che $EF = AE + BF$.




5) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 340)**
Considerato un triangolo ABC, isoscele sulla base $\overline{AB}$, si prende su $\overline{AB}$ un punto arbitrario P e per P si traccia la perpendicolare ad AB, che interseca le rette dei due lati obliqui in D e in E rispettivamente.
Dimostrare che il triangolo CDE è isoscele
[Indicazione: tracciare l'altezza $\overline{CH}$ ]

6) Dimostra che le bisettrici di due angoli coniugati interni, formati da due rette parallele con una trasversale, sono fra loro perpendicolari.

7) ☼ **(Dimostrazione guidata a pag. 340)**
Se sui due lati obliqui $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ di un triangolo isoscele ABC si prendono due punti P e Q tali che $\overline{CP} = \overline{CQ}$, allora la congiungente PQ è parallela alla base $\overline{AB}$ del triangolo.

8) Preso un triangolo ABC, si prolunga il lato $\overline{AC}$ di un segmento $\overline{CD} = \overline{BC}$ e il lato $\overline{BC}$ di un segmento $\overline{CE} = \overline{AC}$.
Si chiede di dimostrare che le congiungenti AE e BD sono parallele.

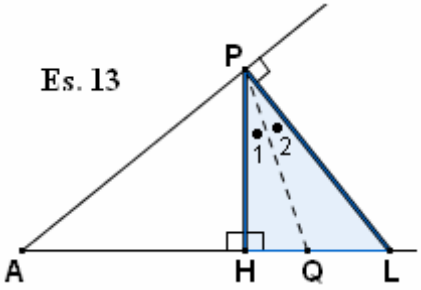
9) In un triangolo isoscele, la parallela alla base condotta per il vertice fa da bisettrice per ciascuno dei due angoli esterni, adiacenti all'angolo al vertice.

10) Se in un triangolo isoscele si traccia la bisettrice di uno qualsiasi dei due angoli esterni, adiacenti all'angolo al vertice, tale bisettrice risulta parallela alla base del triangolo.

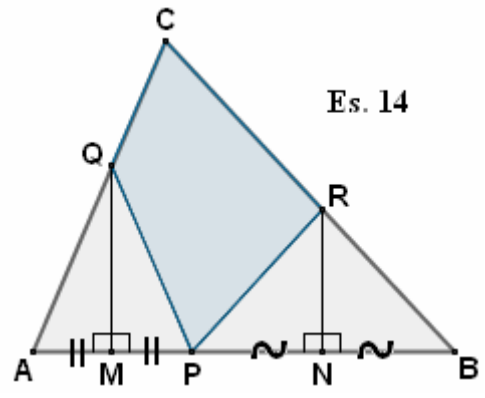
11) In un triangolo isoscele ABC, di base $\overline{AB}$, traccia l'altezza $\overline{AK}$ relativa al lato $\overline{BC}$ e dimostra che $A\hat{C}B = 2\,B\hat{A}K$.

12) Sia ABC un triangolo, rettangolo in C.
Traccia l'altezza $\overline{CH}$ relativa all'ipotenusa, poi le bisettrici dei due angoli $A\hat{C}H$ e $A\hat{B}C$.
Dimostra che tali due bisettrici si tagliano perpendicolarmente.

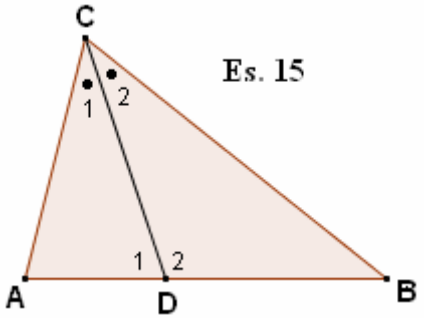
13) Sia $\hat{A}$ un angolo acuto, e sia P un punto di uno dei suoi lati.
Per P si conducono:
la perpendicolare all'altro lato dell'angolo, che lo incontra in H;
e la perpendicolare ad AP, che taglia l'altro lato dell'angolo in L.
Dimostra che, se si traccia la bisettrice dell'angolo $H\hat{P}L$ e si indica con Q il punto in cui tale bisettrice interseca il segmento $\overline{HL}$, il triangolo APQ è isoscele.




14) In un triangolo acutangolo ABC,
si prende un punto qualunque P sul lato $\overline{AB}$,
e si indicano con M, N i punti medi dei due segmenti $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$.
La perpendicolare ad $\overline{AB}$ condotta per M interseca $\overline{AC}$ in Q;
la perpendicolare ad $\overline{AB}$ condotta per N interseca $\overline{BC}$ in R.
Dimostra che l'angolo $Q\hat{P}R$ è uguale all'angolo $A\hat{C}B$.



15) Sia ABC un triangolo, con $\hat{A} > \hat{B}$. Tracciata la bisettrice dell'angolo $\hat{C}$, dimostra che questa va a formare col lato $\overline{AB}$ due angoli, la cui differenza è uguale alla differenza $\hat{A} - \hat{B}$.

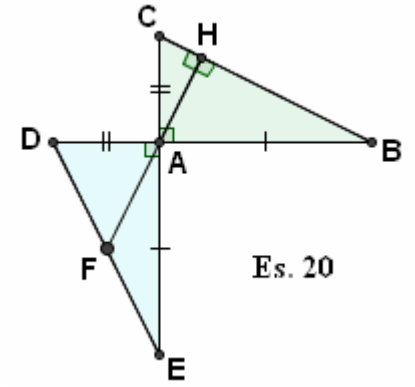



16) In un triangolo ABC, rettangolo in A, si congiunge il piede H dell'altezza $\overline{AH}$ relativa all'ipotenusa coi punti medi M ed N dei due cateti $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Dimostra che il perimetro del quadrilatero AMHN è uguale alla somma dei due cateti di ABC.

17) Se in un triangolo ABC, rettangolo in A, si tracciano la mediana $\overline{AM}$ relativa all'ipotenusa e poi la bisettrice dell'angolo $A\hat{M}C$, tale bisettrice risulterà parallela al cateto $\overline{AB}$.

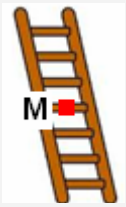
18) In un triangolo ABC, tracciate le altezze $\overline{AH}$ e $\overline{BK}$, risulta $\overline{AK} = \overline{BH}$. Dimostra che ABC è un triangolo isoscele.

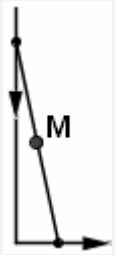
19) Nel quadrilatero ABCD, i due lati $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ sono fra loro uguali, e i due angoli $\hat{B}$, $\hat{D}$ sono entrambi retti. Dimostra che le diagonali di questo quadrilatero sono fra loro perpendicolari.




20) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 340)**
E' dato un triangolo ABC, rettangolo in A. Si prolungano: il cateto $\overline{AB}$, dalla parte di A, di un segmento $\overline{AD} = \overline{AC}$ e il cateto $\overline{AC}$, dalla parte di A, di un segmento $\overline{AE} = \overline{AB}$; dopodiché si traccia, nel triangolo ABC, l'altezza $\overline{AH}$ relativa all'ipotenusa e infine si prolunga il segmento $\overline{AH}$, dalla parte di A, fino ad incontrare $\overline{DE}$ in F. Dimostrare che F è il punto medio di $\overline{DE}$.

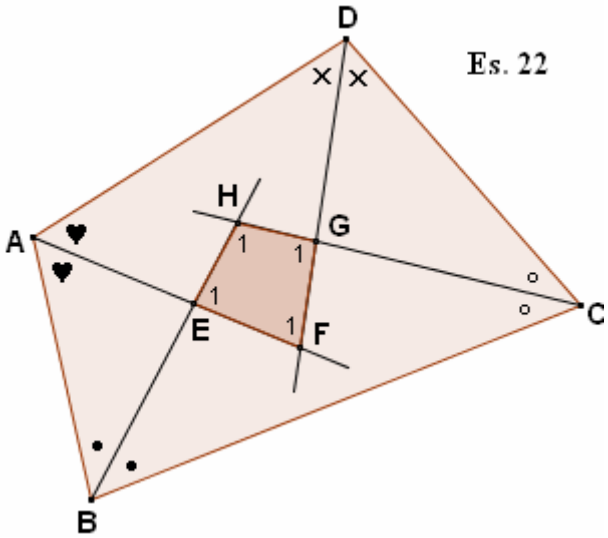
21) ⇨ **LA SCALA CHE SCIVOLA**



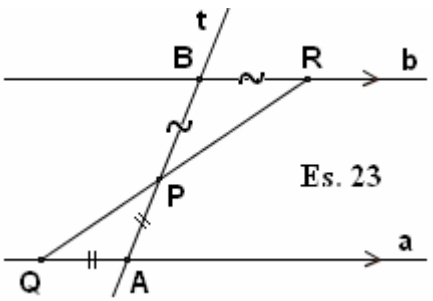




Una scala, appoggiata ad un muro, scivola in maniera tale che l'estremità superiore, abbassandosi, sta sempre a contatto con la parete, mentre la parte inferiore si allontana dal muro strisciando sul pavimento. La scala passa così da verticale ad orizzontale. In figura è evidenziato un punto M ad esattamente metà della lunghezza della scala. La domanda è: che traiettoria descrive questo punto, mentre la scala compie il movimento dalla verticalità all'orizzontalità? Le tue conoscenze sui triangoli rettangoli dovrebbero permetterti di rispondere correttamente.

22) Dimostra che le bisettrici degli angoli di un quadrilatero qualsiasi formano un quadrilatero che ha gli angoli opposti supplementari (la tesi è: $\hat{E}_1 + \hat{G}_1 = \hat{F}_1 + \hat{H}_1 = 180°$)




23) ⇨ (*Occhio! Qui è molto facile incorrere in errori logici …*)
Due parallele a, b sono tagliate da una trasversale t, che le interseca in A e in B rispettivamente. Fissato un punto qualsiasi P sul segmento $\overline{AB}$, sulla retta a si prenda un segmento $\overline{AQ} = \overline{AP}$ e sulla retta b si prenda un segmento $\overline{BR} = \overline{BP}$, in modo che Q ed R si trovino da parti opposte rispetto alla retta t. Dimostrare che i due segmenti $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ stanno uno sul prolungamento dell'altro.

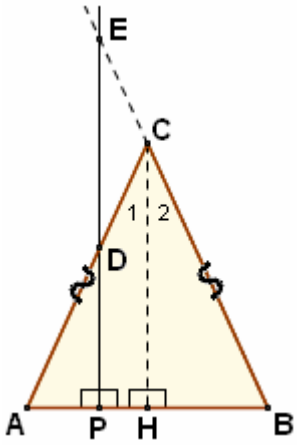



24) Se i punti Q ed R di cui si parla nel n. 23 stessero invece dalla stessa parte rispetto alla trasversale t, quanto misurerebbe l'angolo formato dai due segmenti $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ ? Dimostra la tua affermazione.

## ☼ DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)

5) DIM.

⇨ Costruzione: tracciamo l'altezza $\overline{CH}$ del triangolo isoscele ABC, relativa alla base $\overline{AB}$.
Essa, per un teorema noto, risulterà anche ……..
dell'angolo al vertice $A\hat{C}B$ : sarà dunque $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$
(*segnalo immediatamente in figura con due simboli identici*!)
Ora, le due rette EP, CH sono …….. fra loro,
perché …….. alla stessa retta AB
(*segna subito in figura con le freccette questo parallelismo*!)
e perciò:
$D\hat{E}C = \hat{C}_2$ (perché ……. rispetto alle due parallele ……. e ……. con la trasversale ……. )
$E\hat{D}C = \hat{C}_1$ (perché ……. rispetto alle due parallele ……. e ……. con la trasversale ……. )
(*Psst … Hai segnato in figura le nuove uguaglianze ottenute*?)
Dunque $D\hat{E}C =$ ..... $=$ ..... $= E\hat{D}C$.




**HP**
$\overline{CA} = \overline{CB}$
$EP \perp AB$

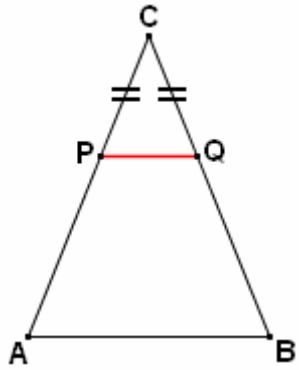
**TH**
$\overline{CE} = \overline{CD}$

Il triangolo DCE ha quindi due angoli uguali: ma se un triangolo ha due angoli uguali, allora è ……
(i lati uguali sono, precisamente, quelli opposti agli angoli uguali); si ha perciò $\overline{CE} = \overline{CD}$ c.v.d.

7) DIM.

⇨ $\hat{A} = \hat{B}$ perché …….. ; $C\hat{P}Q = C\hat{Q}P$ perché …….. ;
ma in ogni triangolo, la somma dei tre angoli interni dà ……. ,
quindi $C\hat{P}Q = C\hat{Q}P \underset{PQC}{=} \frac{180° - .....}{.....} \underset{ABC}{=} \hat{A} = \hat{B}$

Vale a dire, i quattro angoli $C\hat{P}Q$, $C\hat{Q}P$, $\hat{A}$, $\hat{B}$
sono **tutti e quattro** uguali fra loro,
non solo uguali a due a due
(*segniamolo subito sulla figura! quattro simboli identici!*);
in particolare, è $C\hat{P}Q = \hat{A}$ , e allora le due rette PQ e AB,
formando con la trasversale AC due angoli …….. ,
sono parallele, c.v.d.

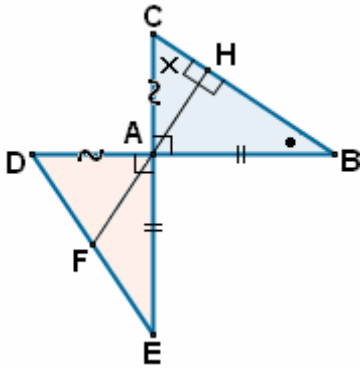



**HP**
$\overline{CA} = \overline{CB}$
$\overline{CP} = \overline{CQ}$

**TH**
$PQ \parallel AB$

20) DIM.

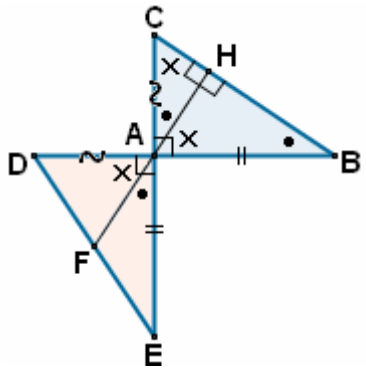
⇨ Innanzitutto un triangolo rettangolo,
quando si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa,
viene da questa spezzato in due triangoli
che sono …… fra loro (e col triangolo di partenza).
Con riferimento ad ABC,
si hanno le uguaglianze angolari
che andiamo a illustrare in figura
(due angoli "pallino": $\hat{B}$ e ……..
e due angoli "crocetta": $\hat{C}$ e ……. ) →



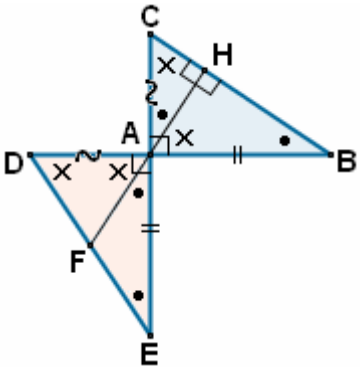

**HP**
$C\hat{A}B = 90°$
$\overline{AD} = \overline{AC}$
$\overline{AE} = \overline{AB}$
$AH \perp BC$

**TH**
$\overline{DF} = \overline{FE}$

Dopodiché,
per via della
presenza
di angoli
…….. ,
avremo
un'altra
coppia
"pallino",
"crocetta".
→

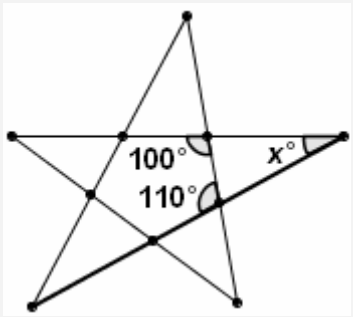



Ma i due triangoli
ABC e AED sono
uguali per il ……..,
per cui
$\hat{E} =$ ....., $\hat{D} =$ .....
e di conseguenza
possiamo collocare
sulla figura
un altro "pallino"
e un'altra "crocetta".
→



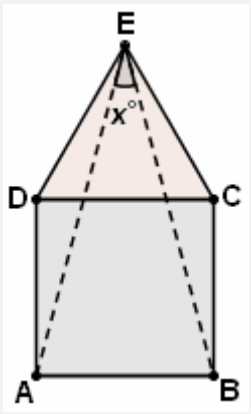

Ciò mostra in definitiva che i due triangoli FAD, FAE, avendo ciascuno due angoli uguali, sono ……..
per cui si ha $\overline{DF} \underset{FAD}{=} ..... \underset{FAE}{=} \overline{FE}$ c.v.d.

# Angles' Corner

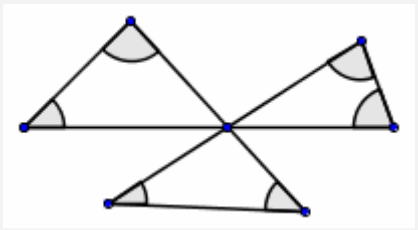



1) Quanto vale $x$?

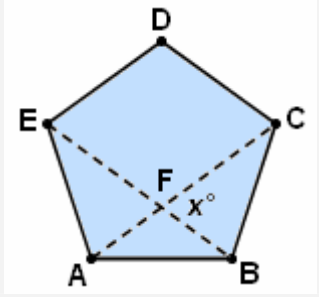


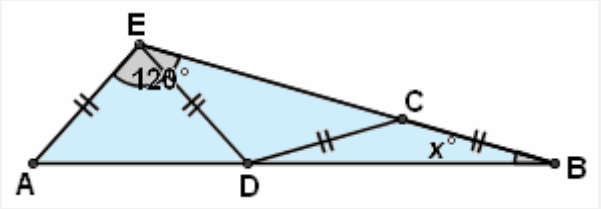

2)
La figura mostra un quadrato (4 lati uguali, 4 angoli retti) sormontato da un triangolo equilatero.
Quanto vale l'angolo $A\hat{E}B$?



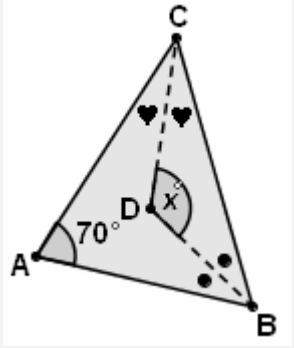
5) (*Kangourou* 2005)
Qual è la somma dei sei angoli nella figura qui sopra?
a) 300° b) 450° c) 360° d) 600° e) 380°



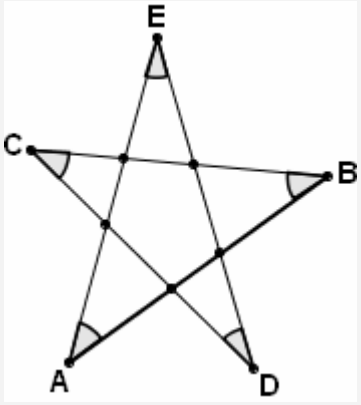

3)
ABCD è un pentagono "regolare", cioè con tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali.
Quanto misura $B\hat{F}C$?




6) Nella figura sovrastante si ha $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$.
Sapendo che $A\hat{E}B = 120°$, determina la misura di $A\hat{B}E$




4)
Un triangolo ABC e le bisettrici BD, CD di due degli angoli interni.
Se il terzo angolo misura 70°, quanto vale $x$?




7)
Stabilisci quanto vale la somma degli angoli $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{E}$ di una "stella a 5 punte" come quella qui a fianco raffigurata.

**RISPOSTE** Per evitare che si possa "sbirciare", le sette risposte sono date mediante altrettante equazioni. La soluzione di un quesito è il valore di $x$ che si trova risolvendo l'equazione.

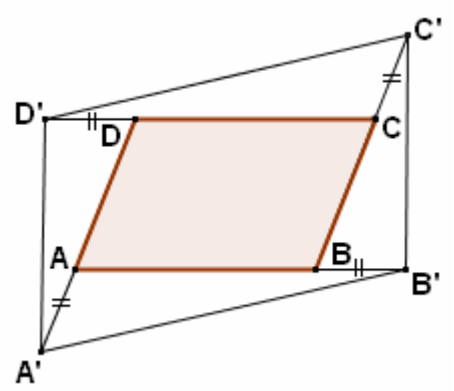
1) $\frac{x}{2} - 4 = \frac{x}{6} + 6$ 2) $x^2 = (x-40)^2 + 40(x-10)$ 3) $113 + 4(x-100) = 1$ 4) $\frac{x}{5} - (x-101) = 1$

5) $x - 20^2 = 3 \cdot 10^2 + 2^2 \cdot 5 - x$ 6) $(x+5)(x-5) = (x-20)^2 + 175$ 7) $2(3x-90) = x + 720$

# GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 4

1) **(Esercizio svolto)**

**In un parallelogrammo si prolungano tutti e quattro i lati di uno stesso segmento (e nel medesimo senso: vedi figura).**
**Dimostra che il quadrilatero avente per vertici gli estremi liberi dei quattro prolungamenti, è anch'esso un parallelogrammo.**




**HP**

ABCD parallelogrammo

$\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}=\overline{DD'}$

**TH**

$A'B'C'D'$ parallelogrammo

**DIM.**

Innanzitutto, in ogni parallelogrammo i lati opposti sono uguali:
quindi

$\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$ (*segna queste uguaglianze sulla figura!!!*)

Se dunque andiamo a confrontare i due triangoli **AA'B' e CC'D'**,
possiamo dirli uguali per il 1° Criterio:

$\overline{AA'}=\overline{CC'}$ per ipotesi,

$\overline{AB'}=\overline{CD'}$ perché somme di segmenti uguali ( $\overline{AB'}=\overline{AB}+\overline{BB'}=\overline{DC}+\overline{DD'}=\overline{CD'}$ ),

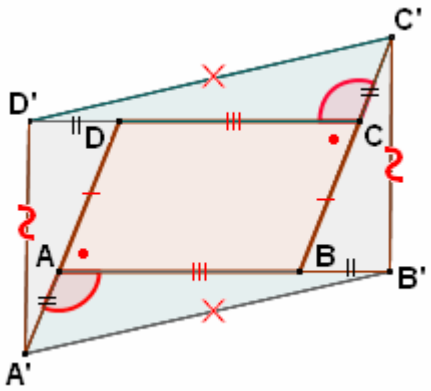
$A'\hat{A}B'=C'\hat{C}D'$ perché supplementari di angoli uguali

( $D\hat{A}B=B\hat{C}D$ perché angoli opposti di un parallelogrammo),

*oppure* perché angoli coi lati paralleli e discordi.

Da $AA'B'=CC'D'$ segue, in particolare, $\boxed{\overline{A'B'}=\overline{D'C'}}$.

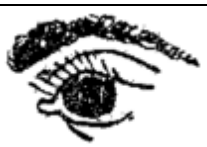
Analogamente, confrontando i due triangoli **DD'A' e BB'C'**, si trae $\boxed{\overline{A'D'}=\overline{B'C'}}$




Ma allora possiamo dire che
**il quadrilatero A'B'C'D'**
**è un parallelogrammo**
**perché ha i lati opposti**
**a due a due uguali**,

C.V.D.

## IL METODO "TOP-DOWN"



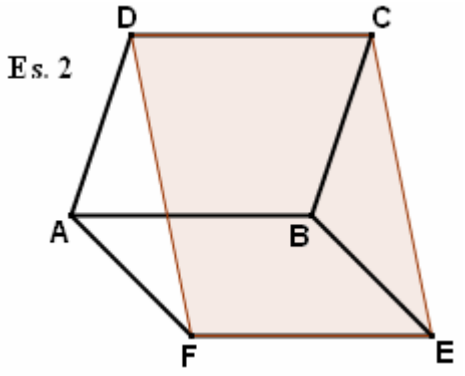
Nell'elaborare la dimostrazione di un teorema sovente viene spontaneo applicare quella strategia di ragionamento che è nota come **metodo "TOP-DOWN"**, ossia, letteralmente, "**DALLA CIMA VERSO IL BASSO**".

**Si parte dall'obiettivo da raggiungere, e ci si domanda: di quali obiettivi intermedi avremmo bisogno per raggiungere questo obiettivo finale?**

**Poi il processo può essere eventualmente iterato ( = ripetuto), applicandolo anche agli obiettivi intermedi.**

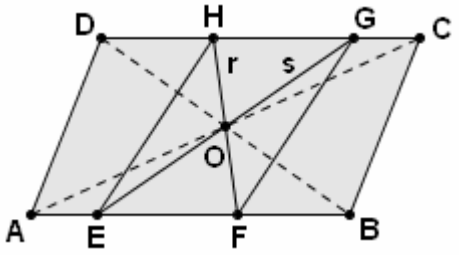
In questo caso, abbiamo pensato:
se riuscissimo a dimostrare che in $A'B'C'D'$
i lati opposti sono a due uguali, allora saremmo a posto;
ma quali considerazioni ci occorrono per provare
che i lati opposti di $A'B'C'D'$ sono a due a due uguali? …

2) ⇨ Due parallelogrammi ABCD, ABEF
hanno il lato $\overline{AB}$ in comune
(e si trovano da parte opposta rispetto al lato comune).
Dimostra che il quadrilatero DCEF
è anch'esso un parallelogrammo.
*Il teorema varrebbe anche qualora* ABCD, ABEF
*si trovassero dalla stessa parte rispetto ad* $\overline{AB}$ ?




3) Disegna un parallelogrammo ABCD;
per il vertice B traccia la parallela alla diagonale $\overline{AC}$ ;
chiama P, Q i punti di intersezione di questa parallela
con le rette dei lati $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ .
Dimostra ora che sono fra loro uguali i due triangoli APB e CBQ.

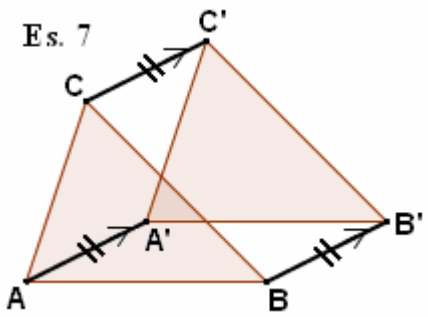
4) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 345)**
Per il punto di intersezione delle diagonali
di un parallelogrammo si tracciano due rette,
che vanno a intersecare una coppia di lati opposti.
Dimostra che i quattro punti in cui tali rette
incontrano i lati del parallelogrammo iniziale,
sono vertici di un altro parallelogrammo.




5) ☼ **(Dimostrazione guidata a pag. 345)**
Sia ABCD un parallelogrammo. Prendi sulla diagonale $\overline{AC}$ due punti E, F tali che sia $\overline{AE} = \overline{CF}$ .
Si chiede di dimostrare che pure il quadrilatero EBFD è un parallelogrammo.

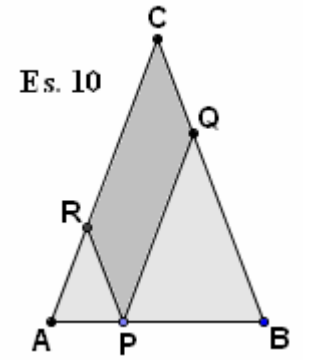
6) Se dai due vertici opposti B, D di un parallelogrammo ABCD si tracciano le perpendicolari $\overline{BH}$ , $\overline{DK}$
alla diagonale $\overline{AC}$ (H e K stanno su $\overline{AC}$ ), il quadrilatero BHDK è anch'esso un parallelogrammo.

7) Preso un triangolo qualsiasi ABC, a partire dai tre vertici A, B, C
si tracciano tre segmenti $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$
uguali fra loro, paralleli ed equiversi ( = aventi il medesimo verso).
Dimostra che il triangolo A'B'C' è uguale ad ABC.



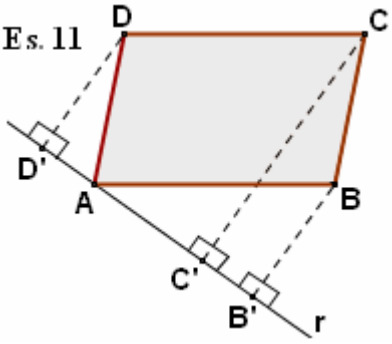

8) Se, dato un parallelogrammo ABCD, si tracciano le bisettrici
dei due angoli opposti $\hat{A}$ e $\hat{C}$ indicando con E, F i punti
in cui tali bisettrici vanno a intersecare le rette DC e AB,
allora anche il quadrilatero AFCE è un parallelogrammo.

9) Dimostra che un quadrilatero è certamente un parallelogrammo
qualora le bisettrici di due angoli opposti siano parallele fra loro,
e lo stesso simultaneamente accada per le bisettrici
degli altri due angoli opposti.
*Serviti di GeoGebra per evidenziare come non basti la condizione su due soli angoli opposti, ma ci vogliano pure gli altri due, per la tesi*




10) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 345)**
E' dato un triangolo ABC, isoscele sulla base $\overline{AB}$ .
Da un punto P preso arbitrariamente su $\overline{AB}$ si tracciano:
la parallela ad $\overline{AC}$ , che incontri $\overline{BC}$ in Q;
e la parallela a $\overline{BC}$ , che incontri $\overline{AC}$ in R.
Dimostrare che il perimetro del parallelogrammo PQCR
è uguale alla somma $\overline{AC} + \overline{BC}$ .

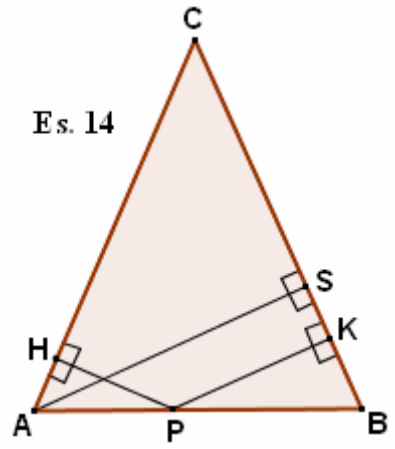
11) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 345)**
Per il vertice A di un parallelogrammo ABCD si traccia
una retta r, che abbia in comune con ABCD il solo punto A.
Siano B', C', D' le proiezioni dei tre punti B, C, D su r.
Dimostrare che $\overline{CC'} = \overline{BB'} + \overline{DD'}$
[Indicazione: tracciare dal punto B la perpendicolare a … ]
*Come si modificherebbe la tesi se la retta r passante per A attraversasse il parallelogrammo, anziché essergli esterna?*



12) ⇨ Tracciando le bisettrici degli angoli di un parallelogrammo qualsiasi, si ottiene un rettangolo.

13) Tracciando le bisettrici degli angoli di un rettangolo, si ottiene un quadrato.

14) E' dato un triangolo ABC, isoscele sulla base $\overline{AB}$.
Sia P un punto preso arbitrariamente su $\overline{AB}$.
Dette $\overline{PH}$ e $\overline{PK}$ le distanze di P dai lati $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ rispettivamente,
e tracciata l'altezza $\overline{AS}$ relativa al lato $\overline{BC}$,
dimostrare che $\overline{AS}=\overline{PH}+\overline{PK}$ **(vedi figura)**
[Indicazione: tracciare dal punto P… ]




15) Si disegna un rombo ABCD, si prende un compasso e si tracciano
due circonferenze di ugual raggio (minore del lato del rombo),
puntando il compasso su due vertici opposti e chiamando E, F, G, H
i punti in cui le circonferenze in gioco tagliano i lati di ABCD.
Il quadrilatero di vertici E, F, G, H sarà allora un rettangolo: dimostralo.

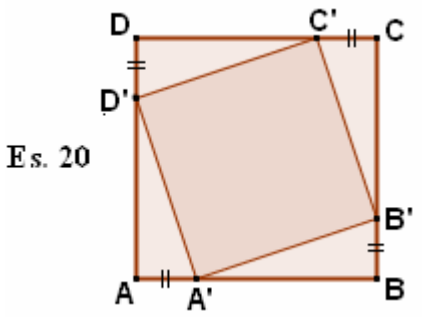
16) ⇨ Sia ABC un triangolo isoscele sulla base $\overline{BC}$.
Per un punto P della base traccia la perpendicolare alla base stessa,
e indica con D, E i punti in cui tale perpendicolare incontra un lato obliquo,
e, rispettivamente, il prolungamento dell'altro lato obliquo.
Dimostra che la somma $\overline{PD}+\overline{PE}$ è uguale al doppio dell'altezza $\overline{AH}$ del triangolo.

17) In un rombo prendi, su di una diagonale, due punti che abbiano ugual distanza dagli estremi di questa.
Dimostra che congiungendo tali due punti con le estremità dell'altra diagonale, si ottiene ancora un rombo.

18) Dimostra che se il punto di incontro delle diagonali di un rombo viene proiettato sui quattro lati,
i quattro punti così ottenuti sono vertici di un rettangolo.

19) ⇨ Sia ABCD un rettangolo; si traccino le sue diagonali $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$; sia O il punto in cui queste si tagliano.
Preso poi su $\overline{AB}$ un punto P, si traccino da P:
la parallela a $\overline{BD}$, fino ad incontrare $\overline{AC}$ in Q, e la parallela ad $\overline{AC}$, fino ad incontrare $\overline{BD}$ in R.
Dimostra che il perimetro di PQOR è uguale ad una diagonale del rettangolo.

20) In un quadrato ABCD si prendono **(vedi figura)**
rispettivamente sui quattro lati $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$,
quattro segmenti uguali fra loro $\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}=\overline{DD'}$.
Dimostra che anche $A'B'C'D'$ è un quadrato.



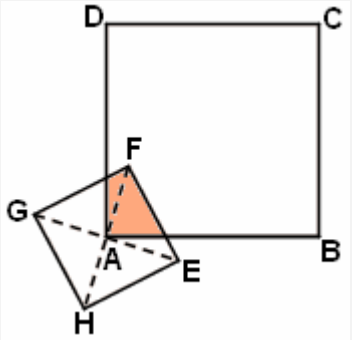

21) ⇨ Per il punto di intersezione delle diagonali di un quadrato
si tracciano due rette perpendicolari fra loro.
Dimostra che i quattro punti in cui tali rette intersecano
i lati del quadrato iniziale, sono vertici di un altro quadrato.

22) Se un trapezio ha le diagonali uguali, allora è isoscele.

23) ⇨ Si tracciano le bisettrici degli angoli alla base di un triangolo isoscele ABC di base $\overline{AB}$,
e si indicano con D, E le intersezioni di tali bisettrici rispettivamente con $\overline{BC}$ e con $\overline{AC}$.
Dimostra che ABDE è un trapezio isoscele, col lato obliquo uguale alla base minore.

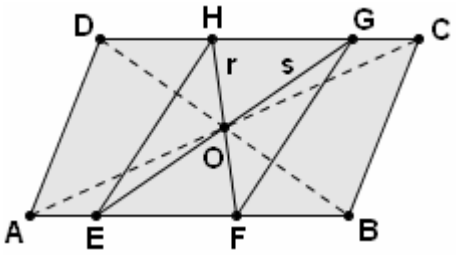
24) ⇨ A partire dai due vertici opposti A, C di un quadrato ABCD
prendi, sui lati, quattro segmenti uguali fra loro $\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{CG}=\overline{CH}$.
Dimostra che:
I) il quadrilatero di vertici E, G, H, F è un rettangolo
II) il perimetro di questo rettangolo rimarrebbe sempre costante,
anche se variasse la lunghezza dei quattro segmenti uguali $\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{CG}=\overline{CH}$.

25) Un quadrato ABCD ha il lato di 4 cm.
Un secondo quadrato, di lato 2 cm,
ha le sue due diagonali che si tagliano in A (vedi figura).
Dimostra che la parte di piano comune
fra il quadrato più grande e quello più piccolo
ha un'area che è costante,
indipendentemente da come venga modificata,
per rotazione del quadrato più piccolo,
l'ampiezza dell'angolo fra le due rette AE e AB.
Quanto misura quest'area costante?



☼ **DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)**

4) ⇨



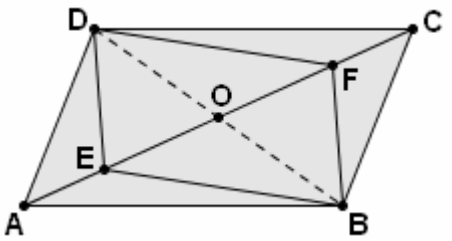

**HP**
ABCD parallelogrammo
r, s rette condotte per il punto O di intersezione delle diagonali

**TH**
EFGH parallelogrammo

**A TE IL COMPITO**
**DI SEGNARE IN FIGURA, IN QUESTA PAGINA, L'IPOTESI, E CIO' CHE VIA VIA SI DEDUCE NEL CORSO DELLA DIMOSTRAZIONE!**

DIM. Si può procedere in diversi modi, ma il più efficace è quello che sfrutta i teoremi (diretti e inversi) sulle diagonali di un parallelogrammo. Innanzitutto, abbiamo $\overline{AO} = \overline{OC}$ e $\overline{BO} = \overline{OD}$ perché è noto che in ogni parallelogrammo (e tale è per ipotesi ABCD) le diagonali ……..
Allora i due triangoli BOF e DOH hanno:
$\overline{BO} = \overline{OD}$; $B\hat{O}F = .....$ perché …….. ; $F\hat{B}O = H\hat{D}O$ perché …….. quindi sono uguali per il ……
Segue $\overline{OF} = .....$. Allo stesso modo, confrontando i due triangoli AOE e COG, si deduce $\overline{OE} = .....$.
Possiamo perciò concludere che EFGH è un parallelogrammo perché ha le diagonali che ……. , c.v.d.

5) ⇨

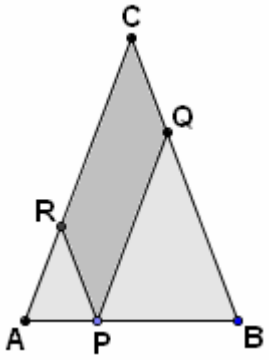



**HP**: ABCD parallelogrammo; $\overline{AE} = \overline{CF}$ (su $\overline{AC}$)

**TH**: EBFD parallelogrammo

DIM. Si può procedere in diversi modi, ma c'è una via davvero semplice. Tracciamo l'altra diagonale $\overline{DB}$; poiché nel parallelogrammo ABCD le diagonali ……. è $\overline{AO} = \overline{OC}$, $\overline{BO} = \overline{OD}$. Ma allora potremo scrivere la catena $\overline{EO} = \overline{AO} - \overline{AE} = ..... - ..... = \overline{OF}$. Ed essendo $\overline{EO} = \overline{OF}$ e $\overline{BO} = \overline{OD}$, concluderemo che EBFD è un parallelogrammo in quanto ha le diagonali che …….. , c.v.d.

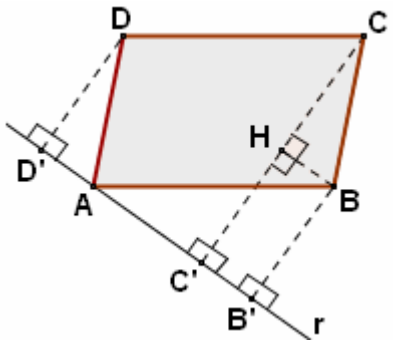
10) ⇨ DIM. Osserviamo che $A\hat{P}R = \hat{B}$, $B\hat{P}Q = \hat{A}$ perché ……
perciò, essendo pure $\hat{A} = \hat{B}$ perché …….. ,
sarà $A\hat{P}R = \hat{B} = \hat{A} = B\hat{P}Q$.
Da tali uguaglianze angolari si trae che i triangoli APR, PBQ sono …….. : $\overline{PR} = \overline{AR}$, $\overline{PQ} = \overline{BQ}$
per cui potremo scrivere
$2p(PQCR) = \overline{PR} + \overline{RC} + \overline{QC} + \overline{PQ} =$
$= \overline{AR} + \overline{RC} + \overline{QC} + \overline{BQ} = \left(\overline{AR} + \overline{RC}\right) + \left(\overline{QC} + \overline{BQ}\right) =$
$= \overline{AC} + \overline{BC}$, c.v.d.




**HP**
$\overline{CA} = \overline{CB}$
PQ || AC
PR || BC

**TH**
$2p(PQCR) =$
$= \overline{AC} + \overline{BC}$

11) ⇨ DIM.
Innanzitutto, le rette BB', CC', DD' sono parallele fra loro perché tutte
……
Tracciamo ora per B la perpendicolare BH a CC'.
Il quadrilatero B'BHC', avendo tre angoli retti, deve avere retto anche l'angolo rimanente (perché …….. ) quindi è un rettangolo.
Si ha perciò $\overline{BB'} = \overline{HC'}$.




**HP**
ABCD parallelogrammo
r retta per A,
$r \cap ABCD = \{A\}$
$BB' \perp r$, $CC' \perp r$, $DD' \perp r$

**TH**
$\overline{CC'} = \overline{BB'} + \overline{DD'}$

♥ **Nella dimostrazione viene qui applicato il METODO TOP-DOWN (pagina 342)**

A questo punto per avere la tesi basterebbe poter dimostrare l'uguaglianza $\overline{DD'} = \overline{CH}$.
E a tale scopo basterebbe riuscire a provare che sono uguali i due triangoli AD'D e ….. .
Essi hanno ciascuno un angolo retto ( $A\hat{D}'D = 90°$ per …. , $B\hat{H}C = 90°$ per …. ) e $\overline{AD} = \overline{BC}$ perché …..
Se avessimo ora un'altra uguaglianza angolare potremmo concludere che sono uguali per il ……
Bene, quest'uguaglianza può essere la $A\hat{D}D' = B\hat{C}H$ : tali due angoli sono infatti uguali per avere i lati ……. e precisamente CH || DD' perché, come già osservato, …… ; DA || CB perché ……
Dunque, ricapitolando, è AD'D = BHC quindi $\overline{DD'} = \overline{CH}$ perciò $\overline{CC'} = \overline{HC'} + \overline{CH} = \overline{BB'} + \overline{DD'}$ c.v.d.

# GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 5

1) ⇨
   a) Dimostra che i punti medi dei lati di un quadrilatero qualsiasi sono vertici di un parallelogrammo.
   b) Che proprietà deve possedere il quadrilatero di partenza
   - affinché tale parallelogrammo sia un rettangolo?
   - E affinché sia un rombo?
   - E affinché sia un quadrato?

2) In ogni triangolo, i punti medi dei tre lati e il piede di un'altezza sono vertici di un trapezio isoscele.

3) ☼ **(Dimostrazione guidata a pag. 347)**
   ABCD è un parallelogrammo; M è il punto medio di AB, N il punto medio di DC.
   Dimostra che se si tracciano i segmenti DM e BN, la diagonale AC ne risulta suddivisa in 3 parti uguali.

4) ☼ **(Dimostrazione guidata a pag. 347)**
   In un trapezio, la congiungente i punti medi dei due lati obliqui
   è parallela alle basi e uguale alla loro semisomma.

5) In un trapezio, la congiungente i punti medi delle due diagonali
   è parallela alle basi e uguale alla loro semidifferenza.

6) Spiega perché in un triangolo isoscele incentro, ortocentro, baricentro e circocentro sono allineati.

7) Dimostra che un triangolo nel quale due qualsiasi dei 4 "punti notevoli"
   (incentro, ortocentro, baricentro e circocentro) sono allineati con un vertice, è isoscele.

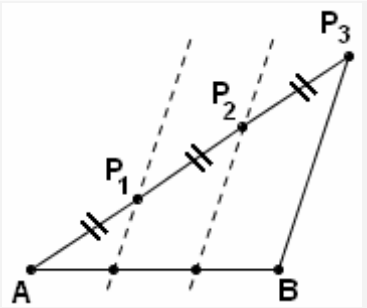
8) Dimostra che la parallela a un lato di un triangolo, condotta per il baricentro di questo,
   divide ciascuno dei due lati rimanenti in due parti, delle quali una è doppia dell'altra
   [ ti conviene tracciare … ]

9) In un triangolo rettangolo, il baricentro sta sempre sulla stessa retta dell'ortocentro e del circocentro:
   perché?

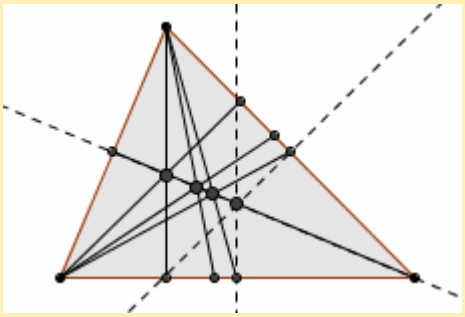
10) Sia ABC un triangolo, e sia O il suo ortocentro.
    Dove si trova l'ortocentro di ABO? E quello di ACO? E quello di BCO?

11) Considera un triangolo ABC e prolunga il lato AB dalla parte di B: otterrai un angolo esterno.
    Analogamente, prolunga il lato AC dalla parte di C: otterrai un altro angolo esterno.
    Ora traccia le bisettrici dei due angoli esterni considerati, e indica con E il punto in cui si incontrano.
    Dimostra che anche la bisettrice dell'angolo interno di vertice A passa per E.
    [E, punto di intersezione fra le tre bisettrici di due angoli esterni e dell'angolo interno
    che ha il suo vertice nel rimanente vertice del triangolo, prende il nome di "*ex-centro*".
    *Ogni triangolo ha dunque 1 incentro e 3 ex-centri*]

12) Per dividere un segmento AB in 3 parti uguali, possiamo fare così:
    dall'estremo A del segmento facciamo partire un segmento qualsiasi $AP_1$, poi sul prolungamento di $AP_1$ prendiamo successivamente due altri segmenti $P_1P_2$ e $P_2P_3$ entrambi uguali ad $AP_1$.
    Congiungiamo ora $P_3$ con B, e per $P_1$, $P_2$ tracciamo le parallele a $P_3B$; queste parallele, tagliando AB, realizzeranno la suddivisione desiderata.
    Per esercizio, puoi servirti del software GEOGEBRA
    per dividere un segmento fissato in 7 parti fra loro uguali.




13) Perché non ti diverti a tracciare,
    col software GEOGEBRA,
    una figura che mostri
    un triangolo ABC
    coi suoi 4 punti notevoli?
    Nella figura qui a fianco
    il triangolo è isoscele,
    e infatti (esercizi 6 - 7)
    i punti notevoli sono tutti allineati.





♥ Un BARICENTRO si indica preferibilmente con la lettera G (da "Gravity center", centro di gravità).

Infatti
*il punto di incontro delle mediane di un triangolo viene chiamato "baricentro"*
(dal greco *baros = peso*) *perché coincide con il "baricentro fisico" del triangolo,*
ossia col punto di applicazione della risultante delle forze peso agenti sulle varie parti del triangolo, se questo fosse realizzato in materiale rigido.

Ritagliando un triangolo nel cartoncino, se ne disegni le mediane, e poi appoggi il triangolo (collocandolo orizzontalmente: vedi figura a destra) sopra un piccolo sostegno piazzato in corrispondenza del punto di incontro delle mediane stesse, vedrai che il triangolo starà in equilibrio. … Provaci!



☼ **DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)**

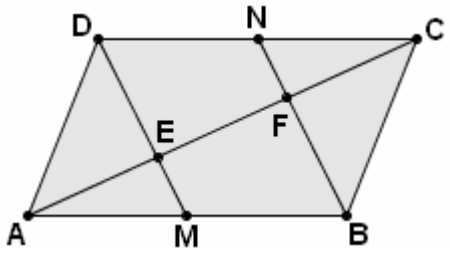
3)

⇨ **HP**

ABCD parallelogrammo;
AM = MB; DN = NC

**TH**

AE = EF = FC




**A TE IL COMPITO**
**DI SEGNARE IN FIGURA, IN QUESTA PAGINA, L'IPOTESI, E CIO' CHE VIA VIA SI DEDUCE NEL CORSO DELLA DIMOSTRAZIONE!**

DIM. Cominciamo con l'osservare che AM = MB = DN = NC
perché metà dei due segmenti ….. e ….. , che sono uguali perché …….. .

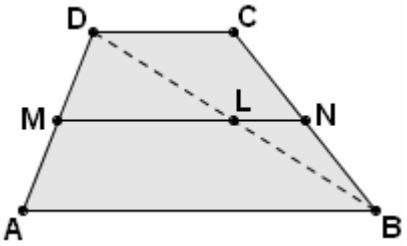
Ora, MBND è un parallelogrammo perché ha due lati opposti (MB, DN) che sono …….. e ……. ;
ne consegue MD || BN .

Allora, considerando il triangolo ABF, ME è la parallela ad un lato (BF)
condotta dal punto medio di un altro lato (AB), per cui …….. e abbiamo perciò AE = EF .
Analogamente, considerando DEC: NF || DE, DN = NC → EF = FC .

In definitiva, è AE = EF = FC , c.v.d.

4)

⇨




**HP**

DC || AB
AM = MD, BN = NC

**TH**

MN || AB || DC

$MN = \frac{AB+DC}{2}$

DIM. Per dimostrare che MN è parallela ad AB e DC,
immaginiamo di condurre, a partire da M, la parallela ad AB e DC:
faremo vedere che tale parallela è sovrapposta a MN, coincide con MN.

Infatti, se noi consideriamo AB, DC e la parallela a tali due rette condotta per M,
avremo tre parallele di un fascio, e ai due segmenti uguali AM = MD sulla trasversale AD,
dovranno corrispondere …….. sull'altra trasversale BC:
quindi la parallela che parte da M sarà obbligata a tagliare il segmento BC in due parti uguali,
cioè a passare per N, punto medio di BC.

Ora che abbiamo dimostrato essere MN || AB || DC , tracciamo la diagonale BD indicando con L
il punto di intersezione fra BD e MN, poi consideriamo il triangolo ABD.

In tale triangolo, la retta MN, parallela ad un lato (AB) condotta da un punto medio di un altro (AD),
va a tagliare …….. : è dunque …….. , cioè L è il punto medio di BD.

Ma allora il segmento ML, in quanto congiungente i punti medi di due lati del triangolo ABD,

è metà del terzo lato: $ML = \frac{1}{2}AB$ .

Per lo stesso motivo, con riferimento al triangolo BCD, si ha $LN = \frac{1}{2}\cdot\ldots\ldots$ .

Dunque possiamo scrivere $MN = ML + LN = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{AB + DC}{2}$ , c.v.d.

# GEOMETRIA: ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

1) Dimostra che in un rombo le altezze relative a due lati consecutivi sono fra loro uguali e che, viceversa, un parallelogrammo nel quale siano uguali fra loro le altezze relative a due lati consecutivi è un rombo.

2) Dimostra che un triangolo con due mediane uguali fra loro, è isoscele.
(*Ricordi la proprietà di cui gode il baricentro*? *Esso divide ciascuna mediana in due parti tali che* …)

3) In un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e di 60°,
l'ipotenusa è uguale al doppio del cateto minore.
(*Indicazione: traccia la mediana relativa all'ipotenusa … Ti ricordi la sua proprietà caratteristica*?)

4) Se in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è uguale al doppio del cateto minore,
allora gli angoli acuti misurano 30° e 60° (*Indicazione: traccia la mediana relativa all'ipotenusa* …)

5) Dimostra che, detto O il punto di intersezione fra le diagonali di un trapezio ABCD
di base maggiore AB, se è $AO = BO$ allora il trapezio è isoscele.

6) Se, in un trapezio isoscele, per l'estremo comune a un lato obliquo e alla base minore
si conduce la parallela all'altro lato obliquo, questa stacca dal trapezio un triangolo isoscele.

7) Nel parallelogrammo ABCD è $BC = 2AB$.
Sia $B'$ il punto simmetrico del punto B rispetto al punto A
(ossia: situato sul prolungamento di AB dalla parte di A, e tale che $AB' = AB$).
Dimostra che la congiungente $CB'$ fa da bisettrice per l'angolo $D\hat{C}B$.

8) ABCD è un parallelogrammo; E, F sono i punti medi dei due lati opposti AD e BC rispettivamente.
Dimostra che: I) $EF \parallel AB$ II) $EC \parallel AF$ III) BD taglia EF in due parti uguali.

9) Se sui due cateti AB e AC di un triangolo ABC, rettangolo in A, si costruiscono,
all'esterno del triangolo, due quadrati, allora due fra le diagonali di questi quadrati
stanno una sul prolungamento dell'altra, e le due rimanenti sono parallele tra loro.

10) Preso un punto P sulla bisettrice di un angolo convesso, traccia per P le parallele ai lati dell'angolo
e dimostra che esse individuano, coi lati stessi, un rombo.

11) Traccia le due diagonali di un parallelogrammo ABCD e prolunga:
la diagonale AC, dalle due parti, di due segmenti fra loro uguali $AE = CF$;
e l'altra diagonale BD, dalle due parti, di due segmenti fra loro uguali $BG = DH$.
Dimostra ora che pure il quadrilatero EGFH è un parallelogrammo.

12) In un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, si tracciano:
la mediana AM, la bisettrice CD, e infine, detto E il punto di intersezione fra AM e CD,
la perpendicolare EH da E fino al lato AC. Dimostra che il quadrilatero MCHE è un deltoide
(ossia, un quadrilatero con due lati consecutivi uguali fra loro e gli altri due pure uguali fra loro).

13) Dimostra che un trapezio in cui l'asse della base maggiore risulti asse anche per la base minore,
è certamente isoscele.

14) In un triangolo rettangolo, l'altezza e la mediana relative all'ipotenusa formano un angolo,
che è uguale alla differenza fra gli angoli acuti del triangolo.

15) In un triangolo ABC, rettangolo in A, sia AD la bisettrice dell'angolo retto,
e siano E, F le proiezioni del punto D sui cateti AB e AC. Dimostra che $EF = AD$.

16) In un triangolo qualsiasi ABC, l'angolo compreso fra la bisettrice e l'altezza che escono dal vertice C
è uguale alla semidifferenza dei due angoli di vertici A e B.

17) In un triangolo ABC, siano AD, BE e CF le tre bisettrici, e si indichi con I l'incentro.
Sia poi H la proiezione di I sul lato AB.
Si chiede di dimostrare che i due angoli $A\hat{I}H$ e $B\hat{I}F$ sono fra loro uguali.

18) E' dato un triangolo ABC, rettangolo in C.
L'altezza CH relativa all'ipotenusa forma coi cateti due angoli acuti $A\hat{C}H$ e $B\hat{C}H$
dei quali si tracciano le bisettrici, fino a tagliare l'ipotenusa rispettivamente in P e in Q.
Ciascuno dei triangoli BCP, ACQ è allora isoscele: dimostralo.

19) Se si prende un punto P sul prolungamento, dalla parte di A, della base AB di un triangolo isoscele
ABC, e si tracciano le distanze PH, PK di P dalle rette su cui giacciono i lati obliqui CA e CB,
allora la differenza $PK - PH$ è uguale all'altezza relativa a uno dei lati obliqui.

20) Sia ABC un triangolo, e siano D, E, F i punti medi di AB, AC, BC rispettivamente.
Sapresti spiegare perché il baricentro di DEF coincide col baricentro di ABC?

21) Se nel triangolo ABC si tracciano le due altezze BH e CK,
l'asse del segmento HK passerà per il punto medio del lato BC: perché?

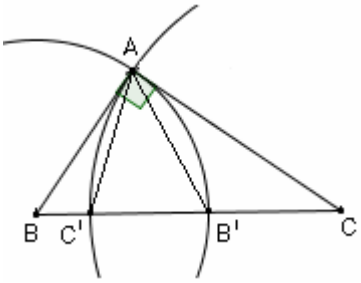
22) Nel triangolo ABC, sia O l'ortocentro, M il punto medio di AB, N il punto medio di AC,
D ed E i punti medi di OB e OC rispettivamente. Il quadrilatero DENM è un rettangolo: dimostralo.

23) Sia PQR un triangolo qualsiasi, M ed N i punti medi dei due lati PQ e PR, H la proiezione di R su PQ.
Si chiede di dimostrare che l'angolo $H\hat{N}M$ è uguale alla differenza fra i due angoli $\hat{P}$ e $\hat{Q}$.

24) In un triangolo rettangolo ABC, si traccia l'altezza AH relativa all'ipotenusa
poi le distanze HK e HS del punto H dai due cateti AB e AC rispettivamente.
Dimostra che i due angoli $H\hat{K}S$ e $\hat{B}$ sono uguali.

25) Dimostra che in ogni trapezio isoscele, gli assi dei quattro lati passano per uno stesso punto.

26) Si disegna un triangolo ABC rettangolo in A
poi, col compasso, due archi di circonferenza:
uno di centro B e passante per A, l'altro di centro C e passante per A.
Tali archi di circonferenza vanno a intersecare
l'ipotenusa BC nei due punti $B'$ e $C'$ rispettivamente.
Ora, l'angolo $C'\hat{A}B'$ avrà ampiezza costante,
qualunque sia la forma del triangolo rettangolo ABC di partenza.
Qual è questa ampiezza? Giustifica la risposta.

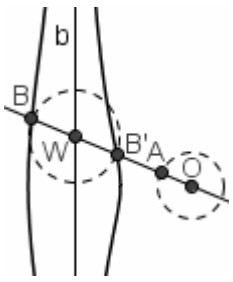



27) (*Insidioso: errori logici in agguato …*)
Considera un parallelogrammo ABCD e prolunga: il lato AB, dalla parte di B, di un segmento $BE = AD$;
poi il lato AD, dalla parte di D, di un segmento $DF = AB$. Dimostra che i tre punti E, C, F sono allineati.

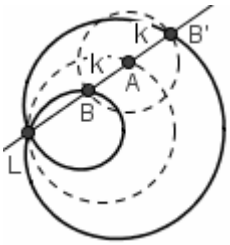
28) Disegna un angolo convesso di vertice A. Siano b, c i lati di questo angolo (dovrai "rinominarli"!)
Prendi un punto su b, chiamalo B e traccia la circonferenza di centro A e raggio AB;
questa andrà a intersecare c in un punto che chiamerai C.
Traccia per il punto B la perpendicolare al lato b; allo stesso modo traccia per C la perpendicolare al lato c;
sia D il punto di intersezione di tali due perpendicolari.
Quale sarà il luogo delle posizioni di D, al variare di B su b? Perché?
Dopo aver risposto, traccia il luogo con **GeoGebra**.

29) Traccia una retta per due punti A e B, poi la circonferenza di centro A e passante per B.
Definisci ora sulla retta AB un punto mobile; cambia il suo nome in P;
modifica il suo colore; traccia la circonferenza di centro B e raggio BP,
e chiama Q una delle sue intersezioni con la circonferenza iniziale. La retta AQ taglierà l'ultima
circonferenza tracciata in un secondo punto (oltre a Q) che denominerai W e colorerai come desideri.
Ora cerca di prevedere (non è facile!) che forma avrà il luogo delle posizioni di W
al variare di P, e traccialo infine con **GeoGebra** per confermare le tue congetture.

30) Sul foglio **GeoGebra**, crea un punto O ("polo") e una retta b non passante per O.
Con centro in O traccia una circonferenza, e prendi su di essa un punto A.
Traccia la retta OA, indica con W il punto in cui questa retta interseca la retta b,
poi con centro in W traccia una circonferenza di raggio fissato
(strumento "Circonferenza dati centro e raggio").
Siano infine $B$, $B'$ i due punti di intersezione di tale circonferenza con la retta OA.
Il luogo descritto dalla coppia di punti $B$, $B'$ al variare di A è chiamato "**concoide di Nicomede**"; è curioso osservare come cambia di forma se la retta b viene spostata.




31) Sul foglio **GeoGebra**, sia L un punto fissato di una circonferenza fissata. Sia poi A
un punto che può invece variare, su quella circonferenza. Tracciata la retta LA, i due
punti B e $B'$, che stanno su quella retta da parti opposte rispetto ad A, e sono tali
che $AB = AB' = costante = k$, determinano, al variare di A, la **lumaca di Pascal**.




32) Traccia una retta per due punti A e B piuttosto vicini, poi la circonferenza
di centro A e passante per B. Definisci ora su tale circonferenza un punto;
rinominalo, chiamandolo N; scegli per questo punto un bel colore giallo sole;
disegna la circonferenza di centro B e raggio BN, poi quella di centro N e raggio NB.
Sia G l'intersezione, esterna alla circonferenza iniziale,
dell'ultima fra le circonferenze in gioco, con la retta AN; rendi rosso l'aspetto di G.
Crea con **GeoGebra** il luogo descritto da G al variare di N.
Questa curva $N \to G$, da colorare anch'essa in rosso, è una dedica personale dell'autore del libro.

# CENNI DI LOGICA (PARTE 2) [prosecuzione della Parte 1, pagg. 74 … 78]

## 5. UNA TAVOLA DI VERITA' ANCHE PER L'IMPLICAZIONE? IL PROCESSO ALLA "TAVOLA DELLE CONTROVERSIE"

Dopo aver descritto i connettivi ET, VEL e NON mediante altrettante "tavole di verità",
è del tutto spontaneo tentare di fare lo stesso anche per il connettivo di *implicazione* "SE … ALLORA …".

Nei libri di testo scolastici si legge di solito che all'implicazione va associata la tavola di verità seguente:

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| V | V | **V** |
| V | F | **F** |
| F | V | **V** |
| F | F | **V** |

**La "tavola delle controversie"**

Noi per ora ci avviciniamo "prudentemente" a questa tavola,
presentandola come la "**tavola delle controversie**",
perché, sebbene vi siano buone ragioni IN FAVORE della sua validità,
non si può tuttavia negare che esistano anche ottime ragioni CONTRO.

Direi quindi di fare entrare subito in aula gli avvocati di questo processo,
in cui la "tavola delle controversie" gioca il ruolo di imputato.

### IL PROCESSO ALLA "TAVOLA DELLE CONTROVERSIE"



### L'ARRINGA DELLA DIFESA

La correttezza, egregi signori, della cosiddetta "tavola delle controversie", è talmente ben fondata
che mi posso permettere di presentare ben QUATTRO argomenti a suo sostegno.

- PRIMO ARGOMENTO A FAVORE

  Innanzitutto, per brevità, data un'implicazione $p \to q$,
  chiameremo "**antecedente**" la proposizione $p$ e "**conseguente**" la $q$.

  Ora, se antecedente e conseguente sono entrambe vere, è ovvio che $p \to q$ andrà considerata vera!
  Un esempio? Eccolo:

  *"Se 98700 è multiplo di 3, allora 98701 non lo è".*

  E' quindi giustificato il primo rigo della tavola:

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |

  Se invece l'antecedente è vera e la conseguente è falsa, l'implicazione è certamente da considerarsi falsa
  (*da una premessa vera, non può discendere una conclusione falsa*);
  da cui il secondo rigo

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| V | F | F |

  E andiamo ora al terzo e al quarto rigo:

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| F | V | V |
| F | F | V |

  Dico che è corretto considerare VERA una implicazione con l'antecedente falsa,
  qualunque sia il valore di verità della conseguente, in virtù della seguente considerazione:

  *se la premessa è falsa, da essa si può dedurre qualsiasi cosa, perché cade, appunto,*
  *la base di partenza sulla quale si fonda il ragionamento deduttivo.*

  Insomma, sentendo una persona che dice "Se i *reality* sono intelligenti, allora io sono un ippopotamo",
  tutti si sentono istintivamente d'accordo!

- SECONDO ARGOMENTO A FAVORE
  - La proposizione $p \to q$ seguente:

    *"Se x è divisibile per 6, allora x è divisibile per 3"*

    esprime senza ombra di dubbio un ragionamento *corretto*,
    quindi è evidente che andrà considerata vera qualunque sia *x*.

    Ora, considerato un numero intero *x*, tre sono i casi possibili:
    1) *x* è divisibile per 6 (e quindi anche per 3): *p* vera, *q* vera
    2) *x* non è divisibile per 6, ma è divisibile per 3: *p* falsa, *q* vera
    3) *x* non è divisibile né per 6 né per 3: *p* falsa, *q* falsa

    Ricapitoliamo.
    Nel caso 1) abbiamo *p* VERA, *q* VERA;
    nel caso 2) abbiamo *p* FALSA, *q* VERA;
    nel caso 3) abbiamo *p* FALSA, *q* FALSA
    e in tutti e tre questi casi, avevamo detto, l'implicazione va considerata **VERA**.

  - Invece la proposizione:

    *"Se x è un numero primo, allora x è dispari",*

    esprime una deduzione *sbagliata*.

    L'infondatezza del ragionamento può venir dimostrata facendo notare che
    c'è un numero (il 2) che è primo, e ciononostante è pari; ovvero,

    *c'è un caso in cui l'antecedente è vera ma la conseguente è falsa.*

    La verità dell'antecedente in questo caso particolare $x = 2$,
    confrontata con la falsità della conseguente,
    rivela la falsità dell'implicazione:

    *p* VERA, *q* FALSA, implicazione **FALSA**.

- TERZO ARGOMENTO A FAVORE

  Affermare che vale l'implicazione $p \to q$ equivale a sostenere che

  *in tutti i casi in cui è vera p , si verifica anche q.*

  Ciò significa dire che

  *p è falsa, oppure, nel caso opposto, certamente è vera q.*

  E quest'ultima affermazione, in simboli, è la $\boldsymbol{\overline{p} \vee q}$.

  Ricapitolando, *l'implicazione* $p \to q$ *ha lo stesso significato della proposizione composta* $\overline{p} \vee q$,
  e sarà quindi corretto fissare la tavola di verità di $p \to q$ in modo che coincida con quella di $\overline{p} \vee q$.
  Andiamo allora a compilare la tavola di verità di $\overline{p} \vee q$:

| $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $q$ | $\overline{p} \vee q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | **V** |
| V | F | F | F | **F** |
| F | V | V | V | **V** |
| F | F | V | F | **V** |

  Vediamo che in ultima colonna essa porta la sequenza **VFVV**.
  Quindi così dovrà essere anche per $p \to q$.

- QUARTO ARGOMENTO A FAVORE

  Supponiamo che io prometta a mio figlio:

  *"Se resti promosso, ti compro il motorino"*.

  Potrò essere accusato di aver fatto un'affermazione FALSA soltanto nel caso in cui,
  pur essendo mio figlio stato promosso, io (carogna!) NON gli abbia comprato il motorino.
  Negli altri 3 casi :
  - promozione SI', motorino SI';
  - promozione NO, motorino NO;
  - promozione NO, motorino SI' ugualmente (con gravissimo errore educativo)

  nessuno potrà dire che io abbia affermato il falso,
  quindi la mia affermazione andrà giudicata, in tutti e tre questi casi, VERA.
  Insomma, l'implicazione da me enunciata è da ritenersi FALSA esclusivamente in presenza
  di antecedente vera e conseguente falsa.

## L'ARRINGA DELL'ACCUSA

Le argomentazioni della difesa sono ingegnose, e gli esempi presentati son stati scelti con molta scaltrezza.
Ma io scardinerò la "tavola delle controversie" fin dalle sue fondamenta.

Questa tavola pretende di "inscatolare" l'implicazione in quattro regole, che a partire dai valori di verità di antecedente e conseguente fisserebbero il valore di verità dell'implicazione nel suo complesso.

Bene! Cosa mi dite ora della proposizione seguente?
*"SE Parigi è la capitale della Francia, ALLORA il numero 18 è divisibile per 3"*

Antecedente e conseguente qui sono entrambe vere, quindi la tavola delle controversie affermerebbe che l'implicazione va considerata vera …
Ridicolo!!! L'implicazione in questione è invece **priva di senso**,
e di fronte ad un'affermazione priva di senso
(che quindi non si può nemmeno considerare una *proposizione*)
perdono il loro significato le categorie di "verità" e "falsità".

Il fatto è che per giudicare sulla verità o falsità di un'implicazione,
non è sufficiente conoscere il valore di verità delle due proposizioni componenti!
Occorre fare molto di più, ossia entrare *all'interno* di ciascuna delle due proposizioni
per analizzare il *significato* di entrambe, e la *relazione* fra i loro contenuti.
Insomma, è indispensabile entrare in questioni di carattere **SEMANTICO**
( = concernente il **SIGNIFICATO**), perché l'aspetto FORMALE non basta.

E c'è di più, oltre alle questioni di "sensatezza" o "non sensatezza".
Anche in parecchi casi in cui l'implicazione che si considera si può giudicare "sensata",
il suo valore di verità dipende non semplicemente dai valori di verità di antecedente e conseguente,
ma da considerazioni assai più profonde.
Ascoltatemi bene, il seguente esempio vi convincerà.

Pensiamo alla proposizione

*"Se fra un'ora io immergerò questo pezzo di ferro in acqua bollente, esso fonderà"*
(l'esempio è sostanzialmente tratto da "Introduction to Mathematical Logic", E. Mendelson, 1964).

Essa è senza alcun dubbio falsa!
E' falsa anche in caso di falsità dell'antecedente (sebbene la "tavola delle controversie"
ci dica che, con antecedente falso, l'implicazione va sempre considerata vera)!
Voglio dire: resta falsa anche se io, fra un'ora, NON immergerò il pezzo di ferro in acqua bollente!
Essa è infatti falsa "per sua natura", in virtù del fatto che il ferro NON PUO' fondere a 100 °C:
la sua temperatura di fusione è infatti 1535 °C.

Così pure, la proposizione
*"Se Leopardi non avesse scritto "L'infinito", allora non sarebbe scoppiata la Prima Guerra Mondiale"*
è, evidentemente, da considerarsi falsa
(anche se l'antecedente è falsa, e, quindi, la "tavola delle controversie" direbbe che l'implicazione è vera):
non ditemi per piacere che la stesura o meno de "L'infinito" da parte di Leopardi
possa avere in qualche modo influenzato la politica internazionale del secolo successivo!!!

## LA REPLICA DELLA DIFESA

Beh, riguardo a Giacomo Leopardi, son convinto anch'io che se non avesse scritto "L'infinito"
la Prima Guerra Mondiale sarebbe scoppiata ugualmente; ma proposizioni di questo tipo,
esprimenti congetture riguardo alle conseguenze che avrebbe potuto avere un fatto non accaduto
("condizionali controfattuali"), non hanno nessun rilievo nel ragionamento matematico.

Cosa importa, poi, se l'applicazione della "tavola delle controversie" porterebbe a classificare "vere"
anche proposizioni che in realtà sono prive di significato?
Ciò che conta è che, di fronte alle implicazioni "sensate", essa "funzioni" sempre correttamente.
E in effetti funziona!

Non vorremo mica sbarazzarci di uno strumento così utile come la "tavola delle controversie"?
D'accordo, essa non è in grado di abbracciare tutta la complessità e varietà di quella costruzione logica che chiamiamo "implicazione", ma certo non si può negare che riesca a catturarne con fedeltà i tratti essenziali.

## UN RAGIONEVOLE VERDETTO

*Dal dibattito è emerso chiaramente che la "tavola delle controversie":*

- *da una parte, non è in grado, nella sua schematicità, di esprimere in modo soddisfacente tutta la ricchezza di significati insita nella costruzione linguistica "SE … ALLORA …";*
- *dall'altra, riesce tuttavia a sintetizzare con estrema concisione (e, quindi, efficacia) alcune caratteristiche fondamentali di tale costruzione linguistica.*

*Non è perciò uno strumento né da buttar via né da accettare acriticamente;*
*occorre tenerne sempre presenti sia i pregi che i limiti, bene illustrati dalla difesa e dall'accusa.*

Chiameremo, d'ora in avanti,
" **implicazione *MATERIALE*** "
la proposizione composta,
indicata col simbolo $p \to q$ ,
e letta *"se p, allora q"*,
il cui valore di verità è determinato meccanicamente
applicando le quattro regole della tavola qui a destra,
senza "entrare all'interno"
delle proposizioni componenti *p*, *q*
(senza quindi esplorare *p*, *q*
dal punto di vista *semantico*, cioè del *significato*).

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| V | V | **V** |
| V | F | **F** |
| F | V | **V** |
| F | F | **V** |

La tavola di verità per **l'implicazione materiale**

*La relazione che intercorre fra l' implicazione materiale e l' "autentica" implicazione è un po' come quella che passa tra le due figure qui riportate …*





*Marilyn Monroe*
*(1/6/1926 – 5/8/1962)*

*… tuttavia anche le bozze schematiche possono essere parecchio utili, proprio per la loro essenzialità.*

*Più che servire per controllare la validità di un ragionamento, l'implicazione materiale è un comodo strumento per verificarne rapidamente l'eventuale NON correttezza.*

*Quando nel paragrafo 11 esamineremo la forma di implicazione di gran lunga più utilizzata in matematica, la cosiddetta "implicazione logica", potremo sintetizzare efficacemente il discorso affermando che*

*"un'implicazione logica* $p(x) \Rightarrow q(x)$ *è*:

- *vera quando, per tutti i valori di x, è sempre vera la corrispondente implicazione materiale* $p \to q$
- *falsa quando esiste almeno un valore di x per cui la corrispondente implicazione materiale* $p \to q$ *è falsa".*

## 6. DOPO L'IMPLICAZIONE MATERIALE, ECCO LA BIIMPLICAZIONE MATERIALE

Un discorso analogo a quello fatto per l'implicazione
conduce alla tavola di verità
per la "*biimplicazione*" o "*doppia implicazione*",
che traduce la costruzione linguistica
*"se … allora … e viceversa"*.

Quando ci si limita a fissare il valore di verità
della proposizione composta $p \leftrightarrow q$
basandosi solo sui valori di verità
delle proposizioni componenti
senza andare a valutare il loro legame semantico
(con tutti i limiti che questa "riduzione all'osso" comporta),
si parla preferibilmente di "biimplicazione **materiale**".

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | **V** |
| V | F | **F** |
| F | V | **F** |
| F | F | **V** |

La tavola di verità per **la biimplicazione materiale**

## 7. NUOVE EQUIVALENZE LOGICHE NOTEVOLI

$p \to q = \overline{q} \to \overline{p}$ **Importantissima.** E' chiamata **"PRIMA LEGGE DELLE INVERSE"**

$p \to q = \overline{p} \vee q$ **Importantissima. Descrive la corretta interpretazione di $p \to q$**

$p \wedge q = \overline{\overline{p} \to \overline{q}}$

$p \vee q = \overline{p} \to q$

$p \to (q \wedge r) = (p \to q) \wedge (p \to r)$

$p \to (q \vee r) = (p \to q) \vee (p \to r)$

$p \to (q \to r) = (p \to q) \to (p \to r)$

$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$

$p \leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$

$\overline{p \leftrightarrow q} = \overline{p} \leftrightarrow q$

$p \leftrightarrow q = \overline{p} \leftrightarrow \overline{q}$

$p \leftrightarrow q = (\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})$

Ricordiamo (vedi pag. 75)
che **due proposizioni composte,**
**costituite dalle stesse proposizioni componenti**
(collegate, però, in modo diverso dai connettivi logici),
**si dicono "logicamente equivalenti"**
**se assumono sempre lo stesso valore di verità,**
**qualunque siano i valori di verità**
**delle proposizioni componenti.**
E che
**per verificare se due proposizioni**
**sono logicamente equivalenti,**
**ci si serve delle "tavole di verità" dei vari connettivi:**

| p | q | p ∧ q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

| p | q | p ∨ q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

| p | $\overline{p}$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

| p | q | p → q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

| p | q | p ↔ q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

**ESERCIZI**
**(ricordiamo che in questo contesto il simbolo " = " va letto "logicamente equivalente a")**

*Esercizio 1. Serviti della tabella seguente per verificare la* ***Prima Legge delle Inverse***
$p \to q = \overline{q} \to \overline{p}$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $\overline{q}$ | $\overline{p}$ | $\overline{q} \to \overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | | | | |
| V | F | | | | |
| F | V | | | | |
| F | F | | | | |

*Esercizio 2. Verifica, tramite la tabella sottostante, l'equivalenza logica*
$p \to (q \to r) = (p \to q) \to (p \to r)$

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \to r$ | $p \to (q \to r)$ | $p \to q$ | $p \to r$ | $(p \to q) \to (p \to r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | | | | | |
| V | V | F | | | | | |
| V | F | V | | | | | |
| V | F | F | | | | | |
| F | V | V | | | | | |
| F | V | F | | | | | |
| F | F | V | | | | | |
| F | F | F | | | | | |

*Esercizio 3. Verifica la validità di alcune, a tua scelta,*
*fra le equivalenze logiche riportate in questa pagina.*

**ESERCIZI** (risposte a pag. 376)

Riportiamo questi esercizi per gentilissima concessione del prof. Raffaele Mascella dell'Università di Teramo.

1) Posto:

A = "Carlo è ligure";
B = "Diego è piemontese",

scrivere le proposizioni che formalizzano i seguenti enunciati:

(a) "Se Carlo non è ligure, allora Diego non è piemontese"
(b) "È falso che se Carlo è ligure, allora Diego è piemontese"
(c) "Carlo è ligure se Diego è piemontese"
(d) "Carlo può essere ligure solo se Diego è piemontese"
(e) "Carlo è ligure se e solo se Diego è piemontese"
(f) "O Carlo è ligure o, se Carlo non è ligure, allora Diego è piemontese"

2) Posto

A = "Angelo viene alla festa",
B = "Bruno viene alla festa",
C = "Carlo viene alla festa"
e D = "Davide viene alla festa",

scrivere le proposizioni che formalizzano i seguenti enunciati:

(a) "Angelo viene alla festa, ma Bruno no"
(b) "Se Davide viene alla festa allora vengono anche Bruno e Carlo"
(c) "Carlo viene certamente alla festa se non vengono né Angelo né Bruno"
(d) "Davide viene alla festa se e solo se viene Carlo e non viene Angelo"
(e) "Alla festa vengono uno almeno fra Angelo e Bruno, e uno e uno solo fra Carlo e Davide"
(f) "Se Davide viene alla festa, allora, se Carlo non viene, viene Angelo"
(g) "Carlo viene alla festa se viene Davide, ma, se viene Davide, allora Bruno non viene"
(h) "Se vengono alla festa Angelo e Bruno, allora viene Carlo se non viene Davide"
(i) "Carlo viene alla festa se non vengono Bruno e Angelo o se viene Davide"
(l) "Se Angelo viene alla festa allora vengono Bruno o Carlo, ma se Angelo non viene alla festa, allora vengono Carlo e Davide"
(m) "Angelo, Bruno e Carlo vengono alla festa se e solo se Davide non viene, ma, se né Angelo né Bruno vengono, Davide viene se viene Carlo"

3) Dire in quali dei seguenti casi si hanno equivalenze (attraverso le tavole di verità):

(a) $p \to q$ equivale a $\overline{p \wedge \overline{q}}$?
(b) $(\overline{p} \to q) \vee (p \to \overline{q})$ equivale a $p \vee q$?
(c) $p \to \overline{q}$ equivale a $\overline{p} \vee \overline{q}$?

4) Dire quali delle seguenti coppie di forme proposizionali sono logicamente equivalenti:

(a) $p \to q$, $\overline{q} \to p$ (b) $p \wedge (q \to r)$, $q \wedge (p \to r)$ (c) $(p \vee q) \to r$, $(p \to r) \wedge (q \to r)$

5) (*Preparazione al test di ingresso del Politecnico di Torino*)

Luigi scommette con Mario che, se Eddy Merckx diventasse commissario tecnico della Nazionale Italiana di Ciclismo, un italiano vincerebbe sicuramente il prossimo giro d'Italia. In quale dei seguenti casi sicuramente Luigi perderebbe la scommessa?

(a) Eddy Merckx diventa commissario tecnico, l'italiano Garzelli vince il prossimo Tour de France
(b) Eddy Merckx diventa commissario tecnico, lo spagnolo Sastre vince il prossimo Giro d'Italia
(c) Eddy Merckx non diventa commissario tecnico, l'italiano Garzelli vince il prossimo Giro d'Italia
(d) Eddy Merckx non diventa commissario tecnico, lo spagnolo Sastre vince il prossimo Giro d'Italia
(e) Eddy Merckx non diventa commissario tecnico

# 8. TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

Esistono delle **PROPOSIZIONI COMPOSTE che sono SEMPRE VERE, qualunque siano i valori di verità delle proposizioni componenti**.
Esse vengono dette **TAUTOLOGIE**.

Esempi: 1) $p \vee \overline{p}$ 2) $\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \to (p \to r)$

Il metodo delle tavole di verità permette di verificare in modo facile (e divertente!) se una data proposizione composta è una tautologia.
Ad esempio, effettuiamo questa verifica per la 1):

| $p$ | $\overline{p}$ | $p \vee \overline{p}$ |
|---|---|---|
| V | F | **V** |
| F | V | **V** |

**ESERCIZIO -** Verifica che la 2) è una tautologia, servendoti della seguente tabella:

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \to q$ | $q \to r$ | $(p \to q) \wedge (q \to r)$ | $p \to r$ | $\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \to (p \to r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | | | | | |
| V | V | F | | | | | |
| V | F | V | | | | | |
| V | F | F | | | | | |
| F | V | V | | | | | |
| F | V | F | | | | | |
| F | F | V | | | | | |
| F | F | F | | | | | |

Ecco una piccola rassegna di tautologie particolarmente interessanti:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $p \vee \overline{p}$ | **Principio del terzo escluso** | $\overline{p \wedge \overline{p}}$ | **Principio di non contraddizione** |
| $\left(p \wedge \overline{p}\right) \to q$ | **"Ex falso quodlibet" (*)** | $\left(\overline{p} \to p\right) \to p$ | **"Consequentia mirabilis"** |
| $\left(\overline{p} \to \left(q \wedge \overline{q}\right)\right) \to p$ | **Riduzione all'assurdo** | $\left(\left(p \wedge q\right) \to r\right) \to \left(p \to \left(q \to r\right)\right)$ | |

(*) "Dal falso (si può dedurre) qualsiasi cosa"

**ESERCIZIO**: verifica tramite le tavole di verità che le proposizioni della tabella precedente sono, effettivamente, delle tautologie.

E' evidente che **due proposizioni composte $a, b$ sono logicamente equivalenti se e solo se la biimplicazione $a \leftrightarrow b$ è una tautologia.**

E pertanto da una qualsivoglia equivalenza logica è possibile ottenere una tautologia semplicemente sostituendo il segno = ("logicamente equivalente") col simbolo $\leftrightarrow$ di biimplicazione.

Esempio: dall'equivalenza logica $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ si può trarre la tautologia $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$.

In contrapposizione con le tautologie, esistono pure delle **PROPOSIZIONI COMPOSTE che sono SEMPRE FALSE, qualunque sia il valore di verità delle proposizioni componenti.**
Esse vengono dette **CONTRADDIZIONI**. Esempio: $p \wedge \overline{p}$

Ovviamente,

- **la negazione di una tautologia è sempre una contraddizione;**
- **la negazione di una contraddizione è sempre una tautologia.**

**ESERCIZI** (risposte a pag. 376)

Dire quali delle seguenti proposizioni sono tautologie:

(a) $(p \to q) \leftrightarrow \overline{p \wedge \overline{q}}$ (b) $q \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$ (c) $(p \wedge q) \to p$

(d) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ (e) $\left((p \to q) \to q\right) \to q$

(f) $\left((p \to q) \to q\right) \vee \overline{q}$ (g) $\left(p \vee (p \wedge q)\right) \leftrightarrow \left(p \wedge (p \vee q)\right)$

## 9. PROPOSIZIONI "APERTE"

Se io scrivo

*"n è multiplo di 3"*

non faccio, in tal modo, un'affermazione che si possa dire vera o falsa ***in assoluto***:
la verità o falsità di questa espressione linguistica dipenderà dal valore di *n*.

Ad esempio, con $n = 6$ è VERA, mentre con $n = 10$ è FALSA.

**Un'AFFERMAZIONE CONTENENTE UNA VARIABILE**
**è detta PROPOSIZIONE APERTA o PREDICATO.**

Ogni proposizione aperta ha dunque

a) il suo **INSIEME UNIVERSO** o **INSIEME AMBIENTE** o **DOMINIO**
vale a dire, l'insieme dei valori della variabile per i quali la proposizione ha senso:
nell'esempio fatto, è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali;

b) il suo **INSIEME DI VERITA'**
vale a dire, l'insieme dei valori della variabile che rendono vera la proposizione:
nell'esempio fatto, è $\{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

Facciamo un altro esempio:

*"Le due diagonali di x sono uguali"*

Questa è una proposizione aperta, o predicato, il cui insieme universo è costituito da quegli oggetti *x* per i quali abbia senso parlare di due diagonali: si tratta, evidentemente, dei quadrilateri.
L'insieme di verità della proposizione aperta considerata è invece costituito da tutti e soli quei quadrilateri aventi la proprietà di avere le diagonali uguali: fra di essi, troviamo in particolare i rettangoli e i trapezi isosceli.

**Per indicare una proposizione aperta** si può utilizzare
**una lettera dell'alfabeto, seguita da una coppia di parentesi**
**contenenti al loro interno la variabile da cui la proposizione aperta dipende.**
Esempi:

*"n è multiplo di* 3*" = p(n)* [*Leggi*: *p di n*]
*"Le due diagonali di x sono uguali" = d(x)*

**ESERCIZI (risposte a pag. 376)**

1) Stabilisci se la proposizione aperta
*"x è un numero primo"*
è vera o falsa nei seguenti casi:
a) $x = 111$ b) $x = 431$ c) $x = 2401$

2) Stabilisci se la proposizione aperta (a due "argomenti": NOTA)
" $x^2 \geq y$ "
è vera o falsa nei seguenti casi:
a) $x = 5,\ y = 19$ b) $x = 0,25\ \ y = 0,07$ c) $x = 1/6\ \ y = 0,02\overline{7}$

NOTA:
"argomento"
è, in linea di massima,
sinonimo di "variabile
indipendente"

**Le seguenti belle definizioni schematiche di: intersezione, unione, differenza insiemistica, sono scritte utilizzando proposizioni aperte.**

*Tieni presente che il simbolo " : "*
*è impiegato per indicare "tale che, tali che",*
*esattamente come il simbolo " / "*

**INTERSEZIONE** $\mathbf{A \cap B = \{x :\ x \in A \wedge x \in B\}}$
Leggi: $A \cap B$ è l'insieme degli *x* tali che $x \in A$ ET $x \in B$

**UNIONE** $\mathbf{A \cup B = \{x :\ x \in A \vee x \in B\}}$
Leggi: $A \cup B$ è l'insieme degli *x* tali che $x \in A$ VEL $x \in B$

**DIFFERENZA INSIEMISTICA** $\mathbf{A - B = \{x :\ x \in A \wedge x \notin B\}}$
Leggi: $A - B$ è l'insieme degli *x* tali che $x \in A$ ET $x \notin B$

## 10. CORRISPONDENZE FRA LOGICA E INSIEMI

Supponiamo ora che $a(x)$, $b(x)$ siano due proposizioni aperte, definite sullo stesso insieme ambiente.

- Detto A l'insieme di verità della $a(x)$, e detto B l'insieme di verità della $b(x)$,
  è facile convincersi che l'insieme di verità della proposizione aperta composta $a(x) \wedge b(x)$ è $A \cap B$.

  Ad esempio, considerate le proposizioni

  $$a(x) = "x \text{ è un numero } pari"; \quad b(x) = "x \text{ è un multiplo di } 3"$$

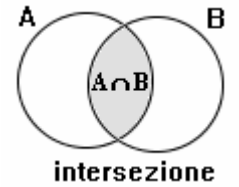
  - i rispettivi insiemi di verità sono:
    $A = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18, ...\}$; $B = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18, ...\}$
  - la proposizione $a(x) \wedge b(x)$ è la seguente:
    *"x è un numero pari e contemporaneamente è un multiplo di 3"*
  - e l'insieme di verità della $a(x) \wedge b(x)$ è perciò l'insieme dei multipli di 6, ossia
    $\{6,\ 12,\ 18, ...\}$.

  Ma quest'ultimo insieme è appunto $A \cap B$ !!!

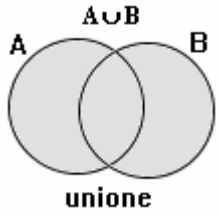
- E' altrettanto immediato determinare gli insiemi di verità di $a(x) \vee b(x)$; $\overline{a}(x)$:
  essi sono rispettivamente $A \cup B$; $\overline{A}$ ( = il complementare di A rispetto all'insieme universo)

### RIASSUNTO SCHEMATICO

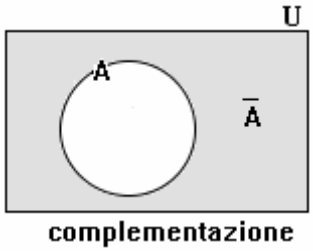
**A = insieme di verità della proposizione aperta $a(x)$**
**B = insieme di verità della proposizione aperta $b(x)$**



intersezione



unione



complementazione

| **L'insieme di verità della proposizione aperta $a(x) \wedge b(x)$ è $A \cap B$** | **L'insieme di verità della proposizione aperta $a(x) \vee b(x)$ è $A \cup B$** | **L'insieme di verità della proposizione aperta $\overline{a}(x)$ è $\overline{A}$ ( = il complementare di A rispetto all'insieme universo)** |
|---|---|---|
| Infatti, dire $a(x) \wedge b(x)$ è come dire $x \in A \wedge x \in B$ cioè $x \in A \cap B$ | Infatti, dire $a(x) \vee b(x)$ è come dire $x \in A \vee x \in B$ cioè $x \in A \cup B$ | Infatti, dire $\overline{a}(x)$ è come dire $x \notin A$ cioè $x \in U - A = \overline{A}$ |

♥ **Notare come i SIMBOLI scelti dai matematici per indicare, da una parte, i connettivi proposizionali, dall'altra le operazioni fra insiemi, sono tali che CIASCUN SIMBOLO LOGICO RICHIAMA IL SUO CORRISPONDENTE INSIEMISTICO:**

| **LOGICA** | **INSIEMI** |
|---|---|
| **congiunzione** $\wedge$ | $\cap$ **intersezione** |
| **disgiunzione** $\vee$ | $\cup$ **unione** |
| **negazione** $^-$ | $^-$ **complementazione** |

**ESERCIZI** (proposizioni aperte, logica e insiemi); le risposte sono a pag. 376.

1) Sia $a(x)=$"*x è multiplo di* 4", $b(x)=$"*x è multiplo di* 6".
Allora l'insieme di verità
di $a(x)$ è {.....}
e quello di $b(x)$ è {.....}.
Sarà poi $a(x)\wedge b(x)=$"....."
mentre l'insieme degli $x$ per cui è vera $a(x)\vee b(x)$ ha come elementi .....

2) Sia $p(x)=$"*x è multiplo di* 4", $q(x)=$"*x è multiplo di* 8".
Allora è
$p(x)\wedge q(x)=$ ……
$p(x)\vee q(x)=$ ……..
Quali sono gli $x$ che rendono vera la proposizione $p(x)\wedge \overline{q(x)}$ ? ……..

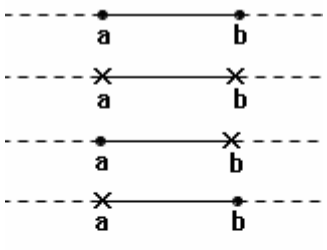
Si chiamano "**INTERVALLI**" particolari insiemi numerici (vedi schema seguente).
Gli intervalli possono essere: chiusi, aperti, semiaperti; possono essere limitati o illimitati.
Nota **l'uso delle parentesi**: parentesi **QUADRA** = **estremo COMPRESO**; **TONDA** = **estremo ESCLUSO**

Intervallo chiuso di estremi $a$ e $b$: $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\ /\ a\le x\le b\}$

Intervallo aperto di estremi $a$ e $b$: $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ a< x< b\}$

Interv. di estr. $a$ e $b$, chiuso a sinistra e aperto a destra: $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ a\le x< b\}$

Interv. di estr. $a$ e $b$, aperto a sinistra e chiuso a destra: $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\ /\ a< x\le b\}$

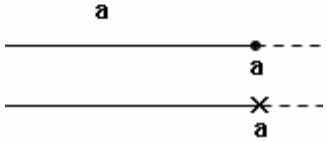



Intervallo chiuso illimitato superiormente: $[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}/x\ge a\}$

Intervallo aperto illimitato superiormente: $(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}/x> a\}$

Intervallo chiuso illimitato inferiormente: $(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}/x\le a\}$

Intervallo aperto illimitato inferiormente: $(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}/x< a\}$




Ad esempio, l'intervallo $[4,8)$:
- contiene il 4;
- contiene tutti i numeri, **NON SOLO** quelli interi **MA ANCHE** quelli "con la virgola", compresi fra 4 e 8;
- NON contiene l'8.

Anche l'intero insieme $\mathbb{R}$ si può pensare come un intervallo (illimitato da entrambe le parti): $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

3) a) $(2,5)\cap(3,7)=?$ b) $(2,5)\cup(3,7)=?$ c) $(2,5]\cap(3,7)=?$ d) $(2,5)\cup[3,7)=?$ e) $[2,5)\cup(3,7]=?$
f) $\left(-3,\frac{1}{4}\right)\cap[0,+\infty)=?$ g) $\left(-3,\frac{1}{4}\right)\cup[0,+\infty)=?$ h) $(-5,-1)\cap(2,7)=?$ i) $(-5,-1)\cup(2,7)=?$

4) Sia $a(x)=$"$0<x<5$". Qual è l'insieme ambiente di $a(x)$ ? …….. E il suo insieme di verità? ……

5) Sia $a(x)=$"$2<x<10$", $b(x)=$"$5<x<15$".
a) Qual è l'insieme di verità di $a(x)\wedge b(x)$ ? ……..
b) E quello di $a(x)\vee \overline{b(x)}$ ? ……..
c) E quello di $\overline{a(x)}\wedge b(x)$ ? ……..
d) E quello di $\overline{a(x)}\wedge b(x)$ ? ……..

6) Sia $a(n)=$"*n è divisore di* 12", $b(n)=$"*n è divisore di* 24".
Si può osservare che ogni valore di $n$ che rende vera $a(n)$, renderà vera pure $b(n)$.
Questo fatto, cosa comporta per i rispettivi insiemi di verità A, B?

7) Considerate le proposizioni aperte, nell'insieme ambiente dei quadrilateri:
$p(x)=$"*x è un parallelogrammo*", $d(x)=$"*x è un quadrilatero con le diagonali uguali*",
$c(x)=$"*x è un quadrilatero con almeno due lati opposti paralleli*",
stabilisci quali fra le proposizioni date sono vere nel caso $x$ sia
a) un trapezio scaleno
b) un rettangolo.
c) Può esserci un valore di $x$ che renda vera $d(x)$ ma false $p(x), c(x)$ ?

# 11. DALL'IMPLICAZIONE E BIIMPLICAZIONE "MATERIALE" ALL'IMPLICAZIONE E BIIMPLICAZIONE "LOGICA"

E' frequentissimo in matematica utilizzare la struttura linguistica **SE … ALLORA …**
(o espressioni linguistiche equivalenti) per mettere in relazione
**DUE PROPOSIZIONI APERTE NELLA STESSA VARIABILE**.

Si parla allora di **IMPLICAZIONE LOGICA**.

Il simbolo specifico utilizzato per indicare l'implicazione logica è $\Rightarrow$

Esempio: *x è multiplo di 6* $\Rightarrow$ *x è multiplo di 3*

Leggi: "SE *x* è multiplo di 6, ALLORA *x* è multiplo di 3"
"il fatto che *x* sia multiplo di 6 IMPLICA che *x* è multiplo di 3"

Va detto che
**la distinzione fra l'implicazione logica e l'implicazione materiale è spesso un po' "sfumata" (vedi NOTA 2).**

Si dice "**implicazione logica**" una proposizione ottenuta stabilendo, fra due proposizioni aperte con la stessa variabile, un particolare legame che potrà essere indicato col simbolo

$$p(x) \Rightarrow q(x)$$

e descritto con l'espressione linguistica: "**SE … ALLORA …**", oppure "**… IMPLICA …**", o analoghe.

♥ Un' **IMPLICAZIONE LOGICA** è considerata (vedi poi NOTA 3):

- **VERA** quando accade che
  **ogni valore della variabile che rende vera la proposizione che "scaglia la freccia" ("antecedente"), rende vera anche la proposizione che "riceve la freccia nella schiena" ("conseguente");**
- **FALSA** quando avviene il contrario, ossia quando
  **esiste almeno un valore della variabile per cui l'antecedente è vera, ma la conseguente è falsa.**

♥ Di conseguenza, per **dimostrare la FALSITA'** di un'implicazione logica fra due proposizioni aperte, basterà trovare **anche un solo CONTROESEMPIO** ( = caso in cui l'antecedente è vera, ma la conseguente è falsa).

**NOTA 1 (SULLA SIMBOLOGIA; leggi anche, a complemento del discorso, le note successive)**

Nella pratica dell'attività matematica, non è il caso di farsi eccessivi problemi quando si tratta di scegliere fra la notazione $\rightarrow$ e la notazione $\Rightarrow$ per indicare "implicazione" in un dato contesto.
$\Rightarrow$, in fondo, equivale a $\rightarrow$ abbinato con $\forall$ ("per ogni"): $p(x) \Rightarrow q(x)$ equivale a $\forall x,\ p(x) \rightarrow q(x)$.

♥ **I due simboli $\rightarrow$ e $\Rightarrow$ vanno bene entrambi allo scopo di schematizzare un "SE … ALLORA …" ; diciamo che $\Rightarrow$ suggerisce maggiormente l'idea di un "SE … ALLORA …" di carattere *generale*, riferito a una situazione in cui sono presenti una o più variabili e valido per qualunque valore delle variabili coinvolte.**

**Discorso analogo per la *doppia* implicazione "SE … ALLORA … E VICEVERSA" : $\leftrightarrow$ oppure $\Leftrightarrow$.**

E' del tutto ovvio che una "freccia" ($\rightarrow$) si può anche impiegare con l'intenzione di indicare un "verso di percorrenza", oppure come simbolo di "rimando", di "collegamento", di "corrispondenza". Qui l'implicazione evidentemente non c'entrerebbe. L'interpretazione corretta si trae con facilità dal contesto.

**NOTA 2 (SUL CONFINE A VOLTE LABILE TRA IMPLICAZIONE MATERIALE E LOGICA)**

L'implicazione "materiale" e l'implicazione "logica" differiscono nel fatto che

- la prima lega due proposizioni CHIUSE,
- mentre la seconda lega due proposizioni APERTE (nella stessa variabile).

Si può osservare tuttavia che **parecchie implicazioni che si incontrano in matematica appaiono a prima vista come implicazioni materiali, ma in realtà sono implicazioni logiche "mascherate".**
Ad esempio, quando io dico

*"Se il mio anno di nascita è divisibile per 6, allora è divisibile anche per 3"*

**in realtà sto soltanto utilizzando, riferito al caso particolare** del mio anno di nascita, il **ragionamento generale** che corrisponde all'implicazione logica

*"Se un numero x è divisibile per 6, allora x è divisibile anche per 3"*

**NOTA 3 (SULLA VERITA' O FALSITA' DI UNA IMPLICAZIONE LOGICA)**

Osserviamo che un'implicazione logica $p(x) \Rightarrow q(x)$ è dunque:

- vera quando, per tutti i valori di *x*, è sempre vera la corrispondente implicazione materiale $p \rightarrow q$
- falsa quando esiste almeno un valore di *x* per cui la corrispondente implicazione materiale $p \rightarrow q$ è falsa.

Analogo è il discorso per la **biimplicazione logica**. Eccone un esempio:

*ABC è equilatero* $\Leftrightarrow$ *ABC è equiangolo*

"SE ABC è equilatero, ALLORA ABC è equiangolo E VICEVERSA"
"ABC è equilatero SE E SOLO SE è equiangolo"
"Il fatto che ABC sia equilatero IMPLICA che ABC sia equiangolo, E VICEVERSA"
"Il fatto che ABC sia equilatero BIIMPLICA che ABC sia equiangolo"

♥ Una **biimplicazione logica** ( = biimplicazione fra due proposizioni aperte con la stessa variabile)

$$p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

è considerata

- **VERA** quando accade che
  **ogni valore della variabile che rende vera la proposizione di sinistra,**
  **rende vera anche la proposizione di destra,**
  ***E VICEVERSA***
  (in pratica, quando sono vere nel senso prima specificato,
  sia l'implicazione da sinistra verso destra $\Rightarrow$
  che l'implicazione da destra verso sinistra $\Leftarrow$);
- **FALSA** quando avviene il contrario, ossia quando
  **esiste almeno un valore della variabile**
  **per cui una delle due proposizioni risulta vera e l'altra falsa.**

**ESERCIZI (risposte a pag. 376)**

Fra le seguenti implicazioni e biimplicazioni logiche, stabilisci quali sono vere e quali false:

a) $n$ è dispari $\Rightarrow$ $n$ è primo

b) $n$ è primo $\Rightarrow$ $n$ è dispari

c) Se un quadrilatero ha i quattro lati uguali, allora ha anche le diagonali uguali

d) Se un quadrilatero ha le diagonali uguali, allora ha anche i quattro lati uguali

e) $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$

f) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$

g) $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$

h) $x$ divisibile per 6 $\Rightarrow$ $x$ è divisibile per 3

i) $x$ divisibile per 3 $\Rightarrow$ $x$ è divisibile per 6

j) $x$ divisibile per 6 $\Leftrightarrow$ $x$ è divisibile per 3

k) Se un triangolo ha due lati uguali, allora ha anche due angoli uguali

l) Se un triangolo ha due angoli uguali, allora ha anche due lati uguali

m) ABC ha due angoli uguali $\Leftrightarrow$ ABC ha due lati uguali

n) $x < 0 \Leftrightarrow x^3 < 0$

o) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

## 12. Condizione sufficiente (CS), necessaria (CN), necessaria e sufficiente (CNS); se, soltanto se, se e solo se (SSE). La Prima Legge delle Inverse

♥ **Quando vale l'implicazione $p \Rightarrow q$, si può dire che**

- **$p$ è condizione SUFFICIENTE per il verificarsi di $q$**
- **$q$ è condizione NECESSARIA per il verificarsi di $p$**

*Perché "necessaria"?*
*Perché, se non si verifica $q$, non può verificarsi neppure $p$, in quanto, se si verificasse $p$, l'implicazione ci dice che si verificherebbe anche $q$.*

Esempio: *$x$ è multiplo di 6 $\Rightarrow$ $x$ è multiplo di 3*

Per un intero $x$,
l'essere multiplo di 6 è *SUFFICIENTE* per essere multiplo di 3;
l'essere multiplo di 3 è *NECESSARIO* per essere multiplo di 6
(in quanto se un intero NON è multiplo di 3,
è già subito escluso che possa essere multiplo di 6).

$$\underbrace{p}_{\substack{\textbf{CS per il}\\ \textbf{verificarsi di } q}} \Rightarrow \underbrace{q}_{\substack{\textbf{CN per il}\\ \textbf{verificarsi di } p}}$$

*SE $p$, ALLORA $q$*
*$p$ SOLTANTO SE $q$*

♥ Una "condizione necessaria" è anche detta, dal latino, "CONDITIO SINE QUA NON", ossia "condizione senza la quale non può verificarsi l'altra".

E' facile rendersi conto che

**un'implicazione $p \Rightarrow q$ è perfettamente equivalente all'implicazione $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$**

(1) "*Se un fungo è velenoso, allora diventa nero al taglio*"
è perfettamente equivalente a
(2) "*Se un fungo non diventa nero al taglio, allora non è velenoso*"

Possiamo convincerci di questa equivalenza tramite le semplici considerazioni seguenti.

- Supponiamo che sia vera la (1); voglio dimostrare che, in tal caso, è certamente vera anche la (2).
  Infatti, qualora io prenda un fungo, lo tagli, e veda che *NON* diventa nero, posso star certo che *NON* è velenoso:
  perché se per assurdo lo fosse, in forza della la verità della (1) avrebbe dovuto diventar nero al taglio.
- E, viceversa, supponiamo che sia vera la (2); voglio far vedere che, in tal caso, è certamente vera anche la (1).
  Infatti, qualora io prenda un fungo velenoso, posso star certo che diventerà nero al taglio;
  perché, se per assurdo non lo diventasse, in forza della la verità della (2) non sarebbe velenoso.

Il ragionamento fatto con riferimento ai funghi è facilmente generalizzabile ad implicazioni qualsiasi.

Resta così stabilita la cosiddetta "**Prima Legge delle Inverse**", che afferma appunto quanto si diceva:

♥ **un'implicazione $p \Rightarrow q$ è perfettamente equivalente all'implicazione $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$**

La Prima Legge delle Inverse è valida sia nel caso dell'implicazione logica
(sul quale abbiamo ragionato quando abbiamo parlato di funghi), che in quello dell'implicazione materiale:
avevamo già visto in precedenza che le due implicazioni materiali $p \to q$, $\bar{q} \to \bar{p}$ hanno la stessa tavola di verità.

Considerata ora un'implicazione logica $p \Rightarrow q$,

- l'implicazione $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ ne viene detta la **CONTRONOMINALE**
- l'implicazione $q \Rightarrow p$ ne viene detta l' **INVERSA**
- l'implicazione $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ ne viene detta la **CONTRARIA**

**La Prima Legge delle Inverse può essere enunciata dicendo che**
**un'implicazione è equivalente alla sua contronominale,**
nel senso che, se un'implicazione è vera, allora è vera anche la rispettiva contronominale, e viceversa.

Invece **non esiste alcun legame generale fra il valore di verità di una implicazione e quello della sua inversa:**
ad esempio, per l'implicazione (vera): *"Se un triangolo ha due lati uguali, allora ha anche due angoli uguali"*,
anche l'inversa è vera;
mentre nel caso dell'implicazione (vera): *"Se un numero è divisibile per 6, allora è divisibile per 3"*,
l'inversa è falsa.

**Così pure, non c'è alcun legame generale fra il valore di verità di un'implicazione e quello della "contraria".**

Si può d'altra parte osservare che **l'inversa e la contraria di una stessa implicazione sono sempre equivalenti fra loro, in quanto sono una la contronominale dell'altra.**

♥ **Nel caso della "DOPPIA IMPLICAZIONE", si può dire che, quando è vera la**

$$p \Leftrightarrow q\,,$$

***p* è condizione SUFFICIENTE E NECESSARIA affinché si verifichi *q***

***q* è condizione NECESSARIA E SUFFICIENTE affinché si verifichi *p***

Vale a dire:

quando è vera la biimplicazione $p \Leftrightarrow q$,
possiamo affermare che
ciascuna delle due condizioni $p$, $q$ è tanto necessaria quanto sufficiente (CNS = Condizione Necessaria e Sufficiente) al verificarsi dell'altra.

♥ **Una doppia implicazione $p \Leftrightarrow q$ può essere letta:**

***p* SE E SOLO SE *q*.**

$\underbrace{p}_{\text{CNS per il verificarsi di } q} \Leftrightarrow \underbrace{q}_{\text{CNS per il verificarsi di } p}$

*p SE E SOLO SE q*

*q SE E SOLO SE p*

♥ "Se e solo se", "cond. necessaria e sufficiente" sono locuzioni "regine" per indicare DOPPIA implicazione

## ESERCIZI (risposte a pag. 376)

**Metti al posto dei puntini la locuzione corretta fra:**

- **SUFFICIENTE (SUFF), CONDIZIONE SUFFICIENTE (CS)**
- **NECESSARIO (NEC), CONDIZIONE NECESSARIA (CN),**
- **NECESSARIO E SUFFICIENTE (NS), CONDIZIONE NECESSARIA E SUFF. (CNS),**
- **SE,**
- **SOLTANTO SE,**
- **SE E SOLO SE (SSE)**

1) Per poter comandare a un sergente, è ……. essere un capitano.
*(NOTA: i "gradi" dell'esercito sono, dal basso verso l'alto:*
*soldato semplice, caporale, sergente, maresciallo, tenente, capitano, maggiore, colonnello, generale).*

2) Per poter concludere che un numero intero è pari, è ……. sapere che è multiplo di 4.

3) Un numero intero è pari …..…….. è multiplo di 4.

4) Condizione ……... affinché un numero intero sia dispari, è che il suo quadrato sia dispari.

5) Un intero è dispari ……...… il suo quadrato è dispari.

6) Condizione …… perché una persona residente in Italia possa votare alle elezioni politiche, è che abbia compiuto i 18 anni.

7) Una persona residente in Italia può votare alle elezioni politiche …..…..… ha compiuto 18 anni.

8) Per fare una buona pastasciutta, è …… ricordarsi di salare la pasta.

9) Sia ABCD un quadrilatero. Affinché ABCD sia un rettangolo, è …..…..... che abbia le diagonali uguali.

10) Condizione …… affinché un numero intero sia maggiore di 100, è che sia maggiore di 50.

11) Condizione …… affinché un numero intero sia divisibile per 10, è che sia divisibile per 5.

12) Condizione …… affinché un triangolo abbia i tre lati uguali, è che abbia i tre angoli uguali.

13) Un triangolo è equilatero ……. è equiangolo.

14) Condizione …… affinché un quadrilatero sia un rombo, è che abbia le diagonali perpendicolari.

15) Condizione …… affinché un quadrilatero sia un parallelogrammo, è che le sue diagonali si taglino scambievolmente per metà.

16) Condizione …… affinché due angoli siano uguali, è che abbiano i lati paralleli e concordi.

17) Condizione …… affinché un parallelogrammo sia un rombo, è che abbia le diagonali perpendicolari.

18) Condizione …… affinché un quadrilatero abbia le diagonali perpendicolari, è che abbia due lati consecutivi uguali fra loro, e gli altri due pure uguali fra loro.

19) Condizione …… affinché due triangoli siano uguali, è che abbiano rispettivamente uguali i tre lati.

20) Un quadrilatero è un parallelogrammo ……. ha gli angoli opposti uguali.

**ESERCIZI (risposte a pag. 377)**

**Di ciascuna delle seguenti implicazioni, scrivi**

- **la contronominale**
- **la contraria**
- **l'inversa**

**stabilendone il valore di verità e confrontandolo con il valore di verità dell'implicazione iniziale.**

1) *Se un intero è primo, allora è dispari* [Metti una croce sulla risposta corretta:] VERA / FALSA

| | |
|---|---|
| Contronominale: | VERA/FALSA |
| Contraria: | VERA/FALSA |
| Inversa: | VERA/FALSA |

2) *Se un intero è divisibile per 10, allora è divisibile anche per 5* VERA / FALSA

| | |
|---|---|
| Contronominale: | VERA/FALSA |
| Contraria: | VERA/FALSA |
| Inversa: | VERA/FALSA |

3) *Se un triangolo ha i tre lati uguali, allora ha anche i tre angoli uguali* VERA / FALSA

| | |
|---|---|
| Contronominale: | VERA/FALSA |
| Contraria: | VERA/FALSA |
| Inversa: | VERA/FALSA |

4) *Se un quadrilatero ha le diagonali perpendicolari, allora ha i quattro lati uguali* VERA / FALSA

| | |
|---|---|
| Contronominale: | VERA/FALSA |
| Contraria: | VERA/FALSA |
| Inversa: | VERA/FALSA |

5) *Se Cristina è ricoverata all'ospedale, allora ha partorito* VERA / FALSA

| | |
|---|---|
| Contronominale: | VERA/FALSA |
| Contraria: | VERA/FALSA |
| Inversa: | VERA/FALSA |

**ESERCIZI** su implicazione e biimplicazione logica, Prima Legge delle Inverse … **con risposte a pag. 377**
(da test di ammissione all'Università: 1, 4, 6, 7 Architettura, 2, 5 Medicina, 3 Veterinaria, 9 Politecnico)

1) La maestra dice a Pierino: *"Se risolvi correttamente due esercizi su cinque, ti darò la sufficienza"*.
Pierino non prende la sufficienza. Dunque, necessariamente Pierino:
A) ha risolto correttamente un esercizio B) ha risolto correttamente un esercizio e ne ha sbagliato un altro
C) non ha risolto correttamente nessun esercizio D) ha risolto correttamente al più un esercizio
E) ha risolto due esercizi, ma con errori

2) Si completi correttamente il seguente ragionamento ipotetico:
Se non avessi avuto talento non saresti diventato artista; ma sei diventato artista dunque
A) sei artista B) sarai artista C) non avrai talento D) non hai talento E) hai talento

3) L'affermazione "quando mangio troppo mi viene mal di stomaco" implica che:
A) non ho mal di stomaco pur avendo mangiato troppo
B) a volte capita che non abbia mal di stomaco pur avendo mangiato troppo
C) se ho mal di stomaco vuol dire che ho mangiato troppo
D) se non mi viene mal di stomaco allora non ho mangiato troppo
E) o mangio troppo o mi viene mal di stomaco

4) Per un intervallo *I* di numeri reali vale la seguente proprietà: *I è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*
Senza che tu debba conoscere il significato dei termini in oggetto, scegli tra le seguenti affermazioni l'unica che consegue necessariamente dalla proprietà enunciata.
A) Se I è limitato ma non compatto, allora I è chiuso B) Se I non è limitato, allora I non è compatto
C) Se I è chiuso e compatto, allora I non è limitato D) Se I è chiuso oppure è limitato, allora I è compatto
E) Se I non è chiuso oppure non è limitato, allora I è compatto

5) Quale delle seguenti proposizioni equivale a dire che
<condizione sufficiente affinché la proposizione Q sia vera è che sia vera la proposizione P> ?
A) Se Q è vera, allora P è vera B) Se P è vera, allora Q è vera
C) Se P è falsa, allora Q è falsa D) P è falsa se e solo se Q è falsa E) P è vera se e solo se Q è vera

6) Alessandro afferma: *Se Rossi parte in pole position arriva primo.*
Quale delle seguenti proposizioni è la NEGAZIONE di quella di Alessandro?
A) Se Rossi non parte in pole position non vince
B) Rossi può non vincere anche se parte in pole position
C) Rossi non vince mai ogni volta che parte in pole position
D) Rossi può non partire in pole position e non vincere
E) Rossi può arrivare primo anche se non parte in pole position

7) Se Salvatore ha superato il test e Carmela ha superato il test, allora anche Benedetto ha superato il test.
Però Salvatore non ha superato il test. Quindi:
A) Benedetto non ha superato il test B) Benedetto oppure Carmela non hanno superato il test
C) Benedetto potrebbe avere superato il test D) Benedetto non ha superato il test e Carmela ha superato il test
E) se neppure Carmela ha superato il test, Benedetto non ha superato il test

8) Anna, Bruno, Carlo e Daniela stanno valutando se partire per Cortina il prossimo fine settimana.
Si sa che: se parte Carlo, parte anche Daniela; se non parte Anna, non parte nemmeno Daniela;
se parte Anna, lo fa pure Bruno. Quale delle seguenti affermazioni può essere dedotta?
A) Non parte nessuno B) Partono Anna e Bruno C) Partono tutti
D) Se non parte Bruno, non parte nessuno E) Se parte Anna, parte anche Carlo

9) In base alle tue conoscenze di Geometria, riempi i puntini con la locuzione corretta fra
"necessaria" (N), "sufficiente" (S), "necessaria e sufficiente "NS"; "SE", "SOLO SE", "se e solo se" (SSE):
a) Un triangolo ha due angoli uguali … ha due lati uguali
b) Condizione … affinché un quadrilatero abbia le diagonali perpendicolari, è che abbia tutti i lati uguali
c) Un quadrilatero ha i lati opposti a due a due paralleli … questi lati opposti sono a due a due uguali
d) Condizione … affinché un quadrilatero abbia le diagonali uguali, è che abbia i 4 angoli di 90°
e) Condizione … affinché un triangolo sia isoscele, è che la mediana e l'altezza relative a un lato coincidano
f) Due rette sono parallele … formano con una trasversale angoli corrispondenti uguali
g) In un poligono convesso la somma degli angoli interni è di 540° … i lati sono 5
h) Condizione … affinché un quadrilatero abbia i lati opposti uguali, è che abbia gli angoli opposti uguali
i) Un quadrilatero ha i 4 angoli retti … ha le diagonali fra loro uguali
l) Un triangolo è rettangolo … la mediana relativa a un lato è uguale a metà del lato stesso
m) Condiz. … affinché un quadrilatero abbia le diagonali uguali, è che sia un trapezio isoscele o un rettangolo

# 13. REGOLE DI INFERENZA

Consideriamo la proposizione: $\left[(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge \overline{r}\right] \to \overline{p}$

Essa è (come si verifica facilmente, sia col ragionamento diretto che con la tavola di verità) una *tautologia*.
Ci interessa osservare che si tratta di una tautologia della forma $(\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \to \ldots$

Una tautologia che si presenta sotto la forma $(\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \to \ldots$

vale a dire, **una TAUTOLOGIA che sia un' IMPLICAZIONE, nella quale L'ANTECEDENTE È UNA CONGIUNZIONE DI DUE O PIÙ PROPOSIZIONI, viene detta REGOLA DI INFERENZA ( = REGOLA DI DEDUZIONE, REGOLA DI RAGIONAMENTO)**

In effetti: supponiamo che, in una determinata situazione, tutte le "premesse"
(cioè, le proposizioni che occupano i puntini fra parentesi) siano vere;
sapendo che l'implicazione è una tautologia, cioè è sempre vera, ne potremo DEDURRE con sicurezza che la conclusione (ossia, la proposizione che occupa i puntini dopo la freccia) è vera.

Abbiamo sfruttato uno "**schema di ragionamento**" che ci ha aiutato, a partire da certe premesse, a trarre una conclusione corretta.

Applicazione. Supponiamo di sapere che sono vere le seguenti proposizioni:

*"Se Bobi ha capito l'addestramento, allora Bobi farà scappare il postino"*
*"Se il postino scapperà, allora il direttore dell'ufficio postale mi telefonerà per protestare"*
*"Il direttore dell'ufficio postale non mi ha telefonato"*

Per la regola di inferenza $\left[(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge \overline{r}\right] \to \overline{p}$, possiamo allora dedurre

*"Bobi non ha capito l'addestramento"*.

Forse questo esempio ti ha un po' deluso, perché non è che ci fosse assoluto bisogno di scomodare le "tautologie" o le "tavole di verità" o le "regole di inferenza" per trarre questa conclusione sul povero Bobi.

In effetti, molte delle principali regole di inferenza, alcune delle quali vengono persino indicate con nomi particolari, appaiono piuttosto banali e scontate.
Tuttavia, non sarà del tutto inutile elencarne alcune:
quelle banali, se non altro, serviranno a classificare in modo schematico ed ordinato i principali tipi di ragionamento di cui ci serviamo nella vita di tutti i giorni.

| | |
|---|---|
| $\left[(p \to q) \wedge p\right] \to q$ | Regola del "**modus ponens**" |
| $\left[(p \to q) \wedge \overline{q}\right] \to \overline{p}$ | Regola del "**modus tollens**" |
| $\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \to (p \to r)$ | "**Sillogismo ipotetico**" |
| $\left[(p \vee q) \wedge \overline{q}\right] \to p$ | "**Sillogismo disgiuntivo**" |
| $\left[\overline{p \wedge q} \wedge q\right] \to \overline{p}$ | |
| $\left[(p \leftrightarrow q) \wedge (\overline{q} \to r) \wedge (p \to r)\right] \to r$ | (tanto per dare un esempio di regola di inferenza non troppo ovvia) |

Osserviamo, per terminare, che il "**modus tollens**"
può essere visto come un'ennesima variazione sul vecchio tema della "**Prima Legge delle Inverse**".

Ti segnalo che **in molti libri di testo le regole di inferenza vengono "raffigurate" in un modo diverso da quello che abbiamo scelto noi**:

ad esempio, anziché scrivere $\left[(p \to q) \wedge p\right] \to q$ spesso si scrive $\dfrac{p \to q \quad p}{q}$

(suggestivo! E' un po' come se la conseguenza venisse vista come la "somma", il "risultato" delle premesse).

Il significato della schematizzazione è sempre lo stesso, ossia la scrittura equivale ad affermare che "se sono vere le premesse $p \to q$ e $p$, allora ne consegue la verità di $q$".

**ESERCIZI (risposte a pag. 377)**

1) Controlla la correttezza di alcune, a tua scelta, fra le 6 regole della tabella precedentemente riportata; cioè, considerata una di tali implicazioni, costruiscine la tavola di verità per constatare che è una tautologia.

2) Considera il seguente ragionamento:

*Se c'è la luna piena, i coyote ululano.*
*Non c'è la luna piena.*
*Quindi, ne deduco che i coyote non ululano.*

Ti sarai reso conto subito che
NON si tratta di un ragionamento corretto.
I coyote potrebbero benissimo ululare anche in assenza di luna piena, ad esempio nel periodo degli amori.
Per esercizio, controlla la sua non correttezza schematizzandolo e verificando che l'implicazione ottenuta non è una tautologia.

3) Lo schema di ragionamento

$$\left[(a \to c) \wedge \left(b \to \bar{c}\right)\right] \to \left(a \to \bar{b}\right)$$

è corretto?
Cerca dapprima di giungere alla risposta senza utilizzare la tavola di verità.
Successivamente, a titolo di conferma, compila anche la tavola di verità.

4) *Se $A \subseteq X$, allora,*
*nel caso sia $B \subseteq X$,*
*è anche $C \subseteq X$.*
*Se $B \subseteq X$, anche $A \subseteq X$.*
*Ma C non è incluso in X.*
*Quindi, B non è incluso in X.*

Il ragionamento fatto è corretto?
Rispondi ragionando,
ed eventualmente aiutandoti con una tavola di verità.

5) *Per passare l'esame, è sufficiente*
*sapere a memoria l'indice del libro di testo.*
*Io imparerò a memoria l'indice del libro di testo,*
*solo se rimarrò a casa nel fine settimana.*
*Ma io andrò via per il fine settimana.*
*Quindi non passerò l'esame.*

Schematizza il ragionamento, e stabilisci se è corretto.

6) Quanti dei seguenti ragionamenti risultano logicamente attendibili? (*dal Test di Ingresso a Medicina* 2006)

| | |
|---|---|
| PRIMO | *Ogni volta che conquista una vetta, Messner si concede una bella bevuta.*<br>*Adesso ha appena conquistato una vetta.*<br>*Dunque si concederà una bella bevuta.* |
| SECONDO | *Ogni volta che vince il Tour de France, Armstrong si concede una bevuta.*<br>*Adesso si concede una bevuta.*<br>*Dunque ha appena vinto il Tour de France.* |
| TERZO | *Rossi ha appena vinto una gara.*<br>*Ogni volta che vince una gara, Rossi fa impennare la moto.*<br>*Dunque adesso Rossi farà impennare la moto.* |
| QUARTO | *Bearzot sta fumando la pipa.*<br>*Dopo aver vinto una partita, Bearzot fuma sempre la pipa.*<br>*Dunque Bearzot ha appena vinto una partita.* |

# 14. QUANTIFICATORI

$\forall$ ("*per ogni*", "*per qualsiasi*", "*qualunque sia*"): "*quantificatore UNIVERSALE*"
$\exists$ ("*esiste*") *la cui negazione è* $\nexists$ ("*non esiste*"): "*quantificatore ESISTENZIALE*"

Per imparare a trafficare coi quantificatori, ecco un buon **ESERCIZIO**.
**Leggi** ad alta voce le seguenti proposizioni; poi **stabilisci**, per ciascuna di esse, **se è vera o falsa.**

**Risposte a pag. 377; clicca sulla freccia per chiarimenti** ⇨

1) $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \exists y \in \mathbb{Z} \quad / \quad x + y = 0$

2) $\exists x \in \mathbb{Z} \quad / \quad \forall y \in \mathbb{Z}, \quad x + y = 0$

3) $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \exists y \in \mathbb{Z} \quad / \quad x \cdot y = 0$

4) $\exists x \in \mathbb{Z} \quad / \quad \forall y \in \mathbb{Z}, \quad x \cdot y = 0$

5) $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad \exists y \in \mathbb{Q} \quad / \quad x \cdot y = 1$

6) $\forall x \in \mathbb{Q} - \{0\}, \quad \exists y \in \mathbb{Q} \quad / \quad x \cdot y = 1$

7) $\exists x \in \mathbb{Z} \quad / \quad 2x - 1 = 0$

8) $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x \,/\, x \in A \wedge x \notin B$

*Tieni presente che:*

$\mathbb{Q}$ *indica l'insieme dei numeri razionali (relativi)*

$\mathbb{Z}$ *indica l'insieme degli interi relativi. Dunque* $\mathbb{Z}$ *è un sottoinsieme di* $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}_a$ *indica l'insieme dei numeri razionali assoluti*
$\mathbb{R}$ *è l' insieme dei numeri reali (relativi)*
$\mathbb{R}_a$ *è l' insieme dei numeri reali assoluti*

La "classica" **definizione schematica di sottoinsieme**:

$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$ ("A è sottoinsieme di B se e solo se quando $x$ appartiene ad A, allora $x$ appartiene anche a B")

può essere **riscritta in modo equivalente utilizzando i quantificatori**:

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \quad x \in B)$ ("A è sottoinsieme di B se e solo se per ogni $x$ appartenente ad A, $x$ appartiene anche a B")

E' importante saper scrivere correttamente la **negazione di una proposizione contenente quantificatori**.
Facciamo qualche esempio (ricorda che "/", ":" si leggono "*tale* (*o tali*) *che*"):

| | *Proposizione* | *Negazione* |
|---|---|---|
| 9) | $\forall x \in I, \; x \in J$ | $\exists x \in I \,/\, x \notin J$ |
| 10) | $\forall x \in \mathbb{R}, \; \exists y \in \mathbb{R} \,/\, xy = 1$ | $\exists x \in \mathbb{R} \,/\, \forall y \in \mathbb{R}, \quad xy \neq 1$ |
| 11) | $\exists a \in \mathbb{R} : \; \forall b,c \in \mathbb{R}, \; a \cdot b \cdot c = 0$ | $\forall a \in \mathbb{R}, \; \exists b,c \in \mathbb{R} : \; a \cdot b \cdot c \neq 0$ |

♥ C'è una **regola generale per negare una proposizione contenente quantificatori**: essa dice di
♪ **mutare ogni quantificatore universale in esistenziale, e viceversa**
♫ **e sostituire la proposizione cui si riferiscono i quantificatori con la sua negazione**.

**ESERCIZI**: fra le seguenti proposizioni contenenti quantificatori, riconosci quali sono quelle false, e in tal caso scrivine la negazione.

| | *Proposizione* | *V o F ?* | *Negazione (in caso di falsità dalla proposizione iniziale)* |
|---|---|---|---|
| 12) | $\forall x \in \mathbb{R}_a, \; x^2 \geq x$ | | |
| 13) | $\exists a \in \mathbb{N} \,/\, a^2 = 20$ | | |
| 14) | $\forall n \in \mathbb{N}, \; n^2 + n$ *è pari* | | |
| 15) | $\exists x \in \mathbb{R} \,/\, x = 1/x$ | | |
| 16) | $\exists x \in \mathbb{R} \,/\, x = -1/x$ | | |
| 17) | $\forall x,y \in \mathbb{R} \quad x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ | | |

**Risposte a pag. 377; clicca sulla freccia per chiarimenti** ⇨

**ESERCIZI** (negazione di proposizioni con quantificatori). **Risposte a pag. 377.**

1) Se non è vero che esista uno studente che ha fatto giuste tutte le domande di un certo test, allora:
A) c'è uno studente che non ne ha azzeccata neppure una
B) esiste almeno uno studente che ne ha sbagliata una o più
C) ognuno degli studenti le ha sbagliate tutte
D) ciascuno studente ne ha sbagliata almeno una
E) tutti gli studenti ne han fatta giusta almeno qualcuna

2) Aldo dice: "Dài, ci sarà chi saprà risolvere almeno uno dei miei problemi! ...".
Bruno ribatte: "Non è mica vero!".
Cosa afferma Bruno?
A) Che qualcuno non sa risolvere tutti i problemi di Aldo
B) Che tutti sanno risolverli tutti
C) Che nessuno è in grado di risolvere nemmeno uno dei problemi in questione
D) Che nessuno è in grado di risolvere tutti i problemi
E) Che qualcuno sa risolverli tutti

*I seguenti sono tratti da test di ingresso universitari:* 3, 5, 7, 8 *Architettura*; 4*, Veterinaria*; 6*, Medicina*

3) Pierino (lo sbruffone) afferma: "Ogni volta che gioco a tombola, vinco io!"
Il suo amico Carletto ribatte che questo non è vero. Carletto ha ragione; dunque necessariamente
A) una volta ha giocato a tombola con Pierino e ha vinto Pierino
B) ogni volta che ha giocato a tombola, Pierino ha perso
C) qualche volta Carletto ha giocato a tombola con Pierino e altri amici, e non ha vinto Carletto
D) ogni volta che non ha giocato a tombola con Pierino, ha vinto Carletto
E) almeno una volta Pierino ha giocato a tombola e non ha vinto

4) Negare che "ogni uomo ha un cane" equivale a dire che:
A) nessun uomo ha un cane B) tutti gli uomini non hanno cani C) esistono uomini senza cane
D) tutti i cani sono di ogni uomo E) ogni uomo non ha un cane

5) *Credevo che tutti i medici avessero un rimedio per ogni male, ma l'esperienza mi ha costretto a ricredermi.*
Quale delle seguenti affermazioni consegue necessariamente dalla premessa?
A) Per ogni male, c'è un medico che non sa porvi rimedio
B) C'è un male per cui nessun medico ha un rimedio
C) I medici non hanno rimedio per nessun male
D) Esiste un medico che non ha un rimedio per un certo male
E) Ogni medico manca del rimedio per almeno un male

6) Se è vero che «non tutti i mali vengono per nuocere»,
sarà necessariamente vera anche UNA delle affermazioni seguenti:
A) i mali non nuocciono B) quelli che nuocciono non sono mali
C) se non vengono per nuocere non sono mali D) qualche male non viene per nuocere
E) se sono mali non vengono per nuocere

7) Un grande teorico dei numeri ha scoperto i numeri *troppobelli*, e, avendo osservato che tutti quelli che ha scoperto sono pari, congettura che esistano solo numeri *troppobelli* pari.
Un suo allievo, studiando con cura questi numeri, afferma che la congettura del maestro è falsa.
Dunque l'allievo sostiene che:
A) nessun numero pari è *troppobello* B) c'è almeno un numero pari che non è *troppobello*
C) esiste solo un numero finito di *troppobelli* pari D) tutti i numeri *troppobelli* sono dispari
E) c'è almeno un numero *troppobello* dispari

8) Nel libero Stato di Burgundia tutti gli abitanti sono biondi oppure bruni. Inoltre
NON E' VERO che in ogni città di Burgundia c'è almeno una casa in cui tutti gli abitanti sono biondi.
Allora necessariamente in Burgundia:
A) c'è almeno una città dove c'è almeno un bruno in ogni casa
B) in ogni città c'è almeno una casa in cui tutti gli abitanti sono bruni
C) in ogni città c'è almeno un bruno in ogni casa
D) c'è almeno una città dove ci sono dei biondi in ogni casa
E) c'è almeno una città dove c'è almeno una casa in cui almeno un abitante è bruno

## 15. SCHEMI DI RAGIONAMENTO CON QUANTIFICATORI: COME CONTROLLARE LA LORO VALIDITA' ?

Abbiamo visto nel paragrafo 13 che le "regole di inferenza", ovvero le tautologie della forma

$$( \dots \wedge \dots \wedge \dots \wedge \dots ) \rightarrow \dots$$

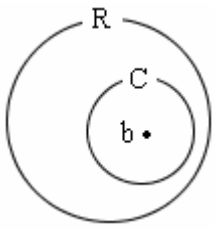
esprimono dei veri e propri "schemi di ragionamento", tramite i quali, se le premesse sono tutte vere, si è sicuri che anche la conclusione sarà vera.

Bene: **esistono anche "schemi di ragionamento" la cui validità non è controllabile per mezzo di una tavola di verità, in quanto le proposizioni coinvolte contengono dei quantificatori, e il ragionamento è basato su questi, cosicché occorre "guardare all'interno" delle proposizioni per capire se lo schema è valido o meno.**
**In questi casi, lo strumento più comodo per rendersi conto se lo schema di ragionamento è corretto consiste nei diagrammi di Venn.**

Esempi:

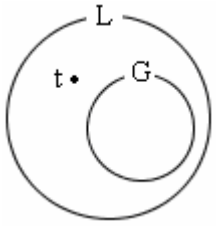
*Tutti i conigli sono roditori.*
*Bunny è un coniglio.*
*Quindi, Bunny è un roditore.*

(Banale, ma corretto!)



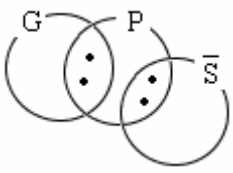

*Tutti i gatti amano il latte.*
*Tom non è un gatto.*
*Quindi, Tom non ama il latte.*

(Non corretto, come mostra il diagramma: t deve trovarsi all'esterno di G, d'accordo, ma nonostante questo vincolo è possibilissimo che si trovi all'interno del "recinto" L!)




*Alcuni giovani sono pigri.*
*Qualche persona pigra non ha mai praticato uno sport.*
*Quindi, c'è qualche giovane che non ha mai fatto sport.*

(Scorretto. La figura qui a fianco, compatibile con le due premesse, non va d'accordo con la conclusione)




**ESERCIZI** - Stabilisci se sono corretti i seguenti ragionamenti (risposte a pag. 377)

*Nessun mammifero fa le uova.*
*Tutti i felini sono mammiferi.* (NOTA)
*Quindi, nessun felino fa le uova.*

NOTA - Osserviamo che la premessa sui mammiferi è falsa (i monotremi, di cui fan parte gli ornitorinchi, sono mammiferi ma fanno le uova); tuttavia, se si guarda alla "struttura" del ragionamento …

*Tutte le sberle fanno male.*
*Alcune sberle sono educative.*
*Quindi, alcune cose che fanno male sono educative.*

*Tutti i trichechi adulti pesano più di un quintale.*
*Nessun animale dello zoo di Roma è un tricheco adulto*
*Quindi, nessun animale dello zoo di Roma pesa più di un quintale.*

*Alcuni matematici sono egoisti.*
*Fra le persone non serene ci sono parecchi egoisti.*
*Quindi, alcuni matematici non sono sereni.*

*Gli allibratori sono disonesti.*
*Nessun abitante di Collefiorito dorme male la notte.*
*I disonesti dormono male la notte.*
*Quindi nessun allibratore è abitante di Collefiorito.*

*Tutti i miei amici vanno in montagna.*
*Qualche persona che va in montagna butta le cartacce sui sentieri.*
*Quindi, qualcuno fra i miei amici butta le cartacce sui sentieri.*

*Tutte le ragazze bionde ti piacciono.*
*Tutte le ragazze della mia classe sono bionde.*
*Quindi, tutte le ragazze che ti piacciono stanno nella mia classe*




LOGICA DEDUZIONE …

**ESERCIZI** sui ragionamenti con quantificatori dai test di Ingresso universitari **(risposte a pag. 377)**

1) Se è vero che:
- tutte le persone generose sono serene;
- Lisa è generosa;
- Sara è serena;

si può dedurre che:

A) le persone non generose non sono serene
B) Sara non è generosa
C) Lisa è serena
D) le persone serene sono generose
E) Sara è generosa

(Architettura )

2) Se sono vere entrambe le affermazioni
- qualche studente della classe quinta A ha gli occhiali
- qualche studente della classe quinta A tifa Bologna

allora:

A) tutti gli studenti della quinta A tifano Bologna
B) c'è almeno uno studente della quinta A che ha gli occhiali e tifa Bologna
C) c'è almeno uno studente della quinta A che porta gli occhiali e non tifa Bologna
D) c'è almeno uno studente della quinta A che non ha gli occhiali e non tifa Bologna
E) non si può escludere che esista uno studente della quinta A che non ha gli occhiali e non tifa Bologna

(Architettura )

3) Nello stato di Burgundia, una norma di circolazione stabilisce che ogni automobile, se non è verniciata di rosso, deve avere gomme chiodate e vetri oscurati.
Poiché questa norma viene rigorosamente rispettata, possiamo affermare con sicurezza che:

A) non ci sono automobili rosse con gomme chiodate e vetri oscurati
B) ogni automobile verniciata di rosso ha gomme chiodate e vetri oscurati
C) ogni automobile è rossa oppure ha vetri oscurati
D) c'è almeno un'automobile che ha vetri oscurati oppure non è verniciata di rosso
E) ogni automobile che ha gomme chiodate e vetri oscurati è rossa

(Architettura )

4) Il signor Candido constata che
a) Giovanna ha fatto una rapidissima carriera come economista.
Il signor Candido ne deduce che
b) Giovanna non è una persona onesta.
La ragione necessaria e sufficiente del passaggio logico che opera il signor Candido dalla constatazione del fatto a) al giudizio b)
è la sottintesa convinzione che (UNA SOLA IPOTESI E' CORRETTA):

A) solo alcune persone eccezionali facciano onestamente carriera come economisti
B) nessuna persona onesta faccia carriera in campo economico
C) le persone disoneste facciano rapida carriera solo in campo economico
D) nessuna economista onesta faccia rapida carriera nel suo campo
E) tutte le donne-economiste siano disoneste

(Medicina)

5) Tutti i cani sono fedeli e tutti gli animali fedeli sono mammiferi.
Alcuni mammiferi possono passeggiare sui tetti.
Dunque
…
Una sola delle deduzioni qui elencate completa correttamente il sillogismo:

A) è impossibile che alcuni cani non possano passeggiare sui tetti
B) è impossibile che alcuni mammiferi non siano fedeli
C) è impossibile che alcuni cani possano passeggiare sui tetti
D) non è impossibile che alcuni cani possano passeggiare sui tetti
E) gli animali che possono passeggiare sui tetti sono mammiferi

(Medicina)

6) Nessun ingenuo è cattivo - qualche cattivo è adulto - dunque …….... non è ingenuo.
S'individui il CORRETTO COMPLETAMENTO del sillogismo:

A) qualche ingenuo B) qualche cattivo C) ogni cattivo D) qualche adulto E) ogni adulto

(Medicina)

7) Tutti i condottieri sono coraggiosi - nessun coraggioso è dissimulatore - dunque …….. è condottiero.
Si individui il CORRETTO COMPLETAMENTO del sillogismo:
A) nessun coraggioso B) qualche condottiero C) qualche dissimulatore
D) ogni dissimulatore E) nessun dissimulatore

(Medicina)

8) Se è vero che «chi disprezza compra; chi loda vuol lasciare»
sarà necessariamente vera anche UNA delle affermazioni seguenti:
A) chi vuol comprare, loda B) chi vuol lasciare, disprezza C) chi non vuol comprare, disprezza
D) chi vuol lasciare, non loda E) chi disprezza, non vuol lasciare

(Medicina)

9) Se è vero che «tutti gli intellettuali sono interlocutori noiosi»,
sarà necessariamente VERA anche UNA delle affermazioni seguenti:
A) tutti gli interlocutori sono intellettuali noiosi B) nessun interlocutore noioso è intellettuale
C) tutti i noiosi sono intellettuali D) tutti gli interlocutori sono noiosi
E) alcuni interlocutori noiosi sono intellettuali

(Medicina)

10) Nessun minerale è animato - qualche esistente è animato - dunque ..... non è minerale.
S'individui il CORRETTO COMPLETAMENTO del sillogismo:
A) qualche esistente B) ogni animato C) qualche minerale D) ogni esistente E) ogni minerale

(Medicina)

11) Tutti i piccioni mangiano le fave - alcuni uccelli non mangiano le fave - dunque ..... non sono piccioni.
S'individui il CORRETTO COMPLETAMENTO del sillogismo:
A) le fave B) alcuni piccioni C) alcune fave D) tutti gli uccelli E) alcuni uccelli

(Medicina)

12) Quale di questi ragionamenti è corretto da un punto di vista deduttivo?
A) Carlo frequenta la prima elementare.
La maggioranza dei bambini che frequentano la prima elementare ha sei anni, quindi Carlo ha sei anni
B) Carlo ha 4 anni. I bambini sopra 4 anni sono biondi. Quindi Carlo non è biondo
C) Carlo ha 4 anni. I bambini di 4 anni sono tutti biondi. Quindi Carlo è biondo
D) Carlo ha 4 anni. I bambini sopra 4 anni non sono biondi. Quindi Carlo è biondo
E) se Carlo avesse sei anni e frequentasse la prima elementare, e se tutti gli altri bambini di quella classe fossero biondi, Carlo sarebbe biondo

(Medicina)

13) Quale delle seguenti affermazioni equivale a dire:
"Non tutti i laureati in Veterinaria fanno il veterinario"?
A) Vi è almeno un laureato in Veterinaria che non fa il veterinario
B) Nessun laureato in Veterinaria fa il veterinario
C) Tutti i laureati in Veterinaria fanno i veterinari
D) Non esiste un laureato in Veterinaria che non faccia il veterinario
E) Tutti i laureati in Veterinaria fanno un lavoro diverso dal veterinario

(Veterinaria)

14) Quale delle seguenti affermazioni è falsa?
A) fra i numeri pari ci sono tutti i multipli di 12 B) tra i multipli di 12 ci sono tutti i numeri pari
C) i multipli di 12 sono tutti pari D) ci sono numeri pari che non sono multipli di 12
E) ci sono numeri pari che sono multipli di 12

(Veterinaria)

15) Tutti gli eccessi sono biasimevoli - alcune passioni non sono biasimevoli -
dunque ..... non sono eccessi.
S'individui il CORRETTO COMPLETAMENTO del sillogismo:
A) alcuni eccessi B) alcune passioni C) tutte le passioni D) tutti gli eccessi E) tutti i biasimevoli

(Veterinaria)

16) Tutti i notai sono ricchi. Nessun ricco è una persona insicura. Quindi ……. è un notaio
Si individui il CORRETTO completamento del sillogismo:
A) nessuna persona insicura B) qualche persona insicura
C) qualche ricco D) ogni ricco E) soltanto un ricco

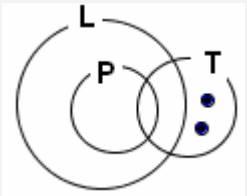
(Veterinaria)

**ARISTOTELE E I SILLOGISMI**

Il sommo filosofo greco Aristotele (384-322 a. C.)
era una mente di eccezionali qualità, con un formidabile senso della regolarità e dell'ordine.
Le sue riflessioni sulle più semplici e fondamentali strutture del pensiero razionale lo portarono ad analizzare il cosiddetto "sillogismo", una sequenza di tre proposizioni (Premessa 1 + Premessa 2 = Conclusione) l'ultima delle quali rappresenta una conseguenza logica delle due precedenti.

Ecco un esempio di sillogismo:

Tutti i Presidi hanno la laurea
Qualche cittadino di Trieste non ha la laurea
Quindi qualche cittadino di Trieste non è un Preside




Questo sillogismo è corretto.

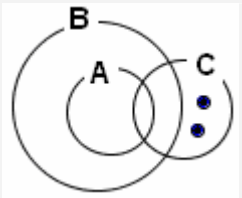
Ed ecco un altro esempio:

Tutte le gomme pesano almeno un chilo
Qualche oggetto nella mia cartella pesa meno di un chilo
Quindi qualche oggetto nella mia cartella non è una gomma

Questo sillogismo è corretto, ed è del tutto equivalente al precedente.
Non ci interessa il fatto che la prima premessa sia falsa;
è *la forma del ragionamento* ad essere corretta,
è la *struttura* che "funziona", indipendentemente dal suo contenuto.

Insomma: sia nel caso dei Presidi che in quello delle gomme siamo di fronte a un sillogismo del tipo

Tutti gli A sono B
Qualche C non è B
Quindi qualche C non è A




Un sillogismo di questa "forma" è corretto, esprime un ragionamento valido,
nel senso che ogniqualvolta le due premesse siano vere,
conduce sempre a una conclusione vera: non accade mai, insomma,
che le due premesse possano essere vere ma la conclusione falsa.

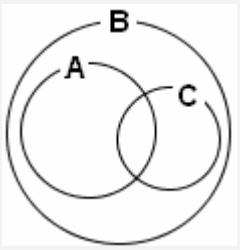
Ancora:

Tutti i mammiferi hanno il sangue caldo
Tutti gli equini hanno il sangue caldo
Quindi tutti gli equini sono mammiferi

Questo sillogismo NON è invece corretto.
Non importa che la conclusione sia vera
(come del resto entrambe le premesse);
è la concatenazione logica che non "va"!

Per rendercene meglio conto, portiamolo sotto la forma astratta

Tutti gli A sono B
Tutti i C sono B
Quindi tutti i C sono A




Un diagramma di Venn ci aiuta a cogliere la non correttezza del ragionamento:
non è detto che tutti i C debbano per forza essere A!!!

"Quando noi affermiamo o neghiamo qualcosa di qualcos'altro, cioè giudichiamo o formuliamo proposizioni, noi non ragioniamo ancora. E nemmeno, ovviamente, noi ragioniamo quando formuliamo una serie di giudizi ed elenchiamo una serie di proposizioni fra loro sconnesse. Noi ragioniamo, invece, quando passiamo da giudizi a giudizi, da proposizioni a proposizioni che abbiano fra loro determinati nessi, e che siano, in certo qual modo, le une cause di altre, le une antecedenti, le altre conseguenti.
Non c'è ragionamento, se non c'è questo nesso, questa consequenzialità." (G. Reale, *Introduzione ad Aristotele*)

"Un ragionamento è una successione di enunciati collegati fra loro da inferenze [ = procedimenti deduttivi] che consentono di passare da alcune premesse date ad una certa conclusione […]. Possiamo anche dire che il ragionamento è finalizzato a giustificare una certa tesi, espressa nella conclusione, a partire da certe premesse. […] Le premesse sono enunciati, e come tali sono vere o false, mentre l'inferenza può essere valida o invalida a seconda che segua correttamente o meno le leggi logiche." (G. Boniolo e P. Vidali, *Strumenti per ragionare*)

Un sillogismo è, in definitiva, una sequenza di tre proposizioni

Premessa 1
Premessa 2
---
Conclusione

dove ciascuna proposizione può essere della forma

- UNIVERSALE se contiene "ogni", "PARTICOLARE" se contiene "qualche"
- AFFERMATIVA o NEGATIVA

e quindi si può descrivere la "forma" di ciascuna delle tre proposizioni dicendo che si tratta di una proposizione

- universale affermativa (A, prima vocale di "AFFIRMO"): "tutti i P sono Q, ogni P è Q"
- oppure universale negativa (E, prima vocale di "NEGO"): "tutti i P non sono Q, nessun P è Q"
- oppure particolare affermativa (I, seconda vocale di "AFFIRMO"): "qualche P è Q, esiste un P che è Q"
- o particolare negativa (O, seconda vocale di "NEGO"): "qualche P non è Q, esiste un P che non è Q".

In questo modo, possiamo già avere ben $4^3 = 64$ diversi tipi di sillogismo: AAA, AAE, AAI, … fino a OOO.

Poi ogni tipo di sillogismo si distingue in 4 possibili "figure", a seconda che il "termine medio", quello che compare in entrambe le premesse - e non compare più nella conclusione - faccia: da soggetto nella $1^a$ premessa e da predicato nella $2^a$ (sp), oppure da predicato in entrambe (pp) , oppure … , come nella schematizzazione seguente, nella quale abbiamo indicato il "termine medio" sempre con Q:

| I figura (sp) | II figura (pp) | III figura (ss) | IV figura (ps) |
|---|---|---|---|
| ogni / qualche Q — è / non è P | ogni / qualche P — è / non è Q | ogni / qualche Q — è / non è P | ogni / qualche P — è / non è Q |
| ogni / qualche R — è / non è Q | ogni / qualche R — è / non è Q | ogni / qualche Q — è / non è R | ogni / qualche Q — è / non è R |
| ogni / qualche R — è / non è P | ogni / qualche R — è / non è P | ogni / qualche R — è / non è P | ogni / qualche R — è / non è P |

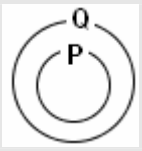
E allora, dato che per ciascuno dei 64 tipi ci sono 4 diverse "figure", si hanno ben $64 \cdot 4 = 256$ sillogismi diversi.

Bene: **di questi 256 sillogismi, soltanto una piccola parte è corretta**; gli altri esprimono ragionamenti fallaci.

Ai vari sillogismi validi (che sono in totale 24, comprendendo anche quelli che per essere corretti richiedono di supporre che un determinato insieme non sia vuoto, e quelli che indeboliscono una conclusione "universale" sostituendola con la corrispondente "particolare") la tradizione medievale ha dato dei nomi fascinosi: ad esempio, B**A**RB**A**R**A** (che indicava il sillogismo **AAA sp**), C**E**L**A**R**E**NT (**EAE sp**), D**A**R**II** (**AII sp**), F**E**R**IO** (**EIO sp**)**,** F**E**STI**N**O (**EIO pp**), F**E**RI**SO**N (**EIO ss**), FR**E**SI**SO**N (**EIO ps**), ecc. ecc.

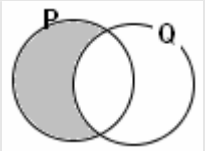
La correttezza o meno dei vari sillogismi può essere stabilita tramite i **diagrammi di Venn**, tenendo conto che:

"Tutti i P sono Q"
equivale a $P \subseteq Q$




*oppure* $P - Q = \varnothing$

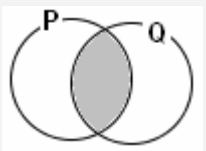
*(sfondo grigio = insieme vuoto)*



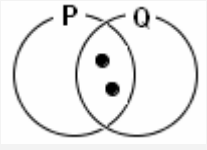

"Nessun P è Q"
equivale a $P \cap Q = \varnothing$



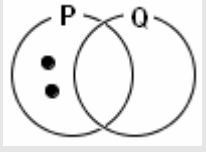

*visualizzabile anche così:*




"Qualche P è Q"
equivale a $P \cap Q \neq \varnothing$




"Qualche P non è Q"
equivale a $P - Q \neq \varnothing$




Esempio:
sarà corretto il ragionamento che segue?

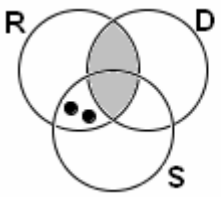
*Nessun ricco ha i debiti.*
*Qualche ricco è spendaccione.*
*Quindi qualche spendaccione non ha i debiti.*

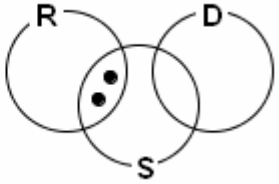
Riscritto in forma astratta, esso diventa:

*Nessun R è D.*
*Qualche R è S.*
*Quindi qualche S non è D.*

Si tratta di un sillogismo di tipo EIO, figura ss.

Rappresentiamo R, D, S nel modo che preferiamo:




… e vediamo che il sillogismo è CORRETTO.

NOTA 1 - Il famoso “Tutti gli uomini sono mortali; Socrate è un uomo; quindi Socrate è mortale” può rientrare in una delle forme “standard” di sillogismo se pensiamo di sostituire al posto di “Socrate” le parole “ogni *x* che è identico a Socrate”, “ogni *x* che coincide con Socrate”.

NOTA 2 - Si potrebbe obiettare che c’è ulteriormente le possibilità di “inventare” nuovi sillogismi, oltre ai 256 di cui si è parlato, scambiando la posizione delle due lettere nella conclusione; ma in realtà, così facendo, si rientrerebbe in casi di sillogismo già esaminati, come si può vedere scambiando l’ordine, che è irrilevante, delle due premesse.

**ESERCIZI** **(risposte a pag. 377)**

1) A) *Verifica che i seguenti sillogismi sono corretti*. B) *Il primo è della forma “AOO pp”; e gli altri quattro?*

| (a) | (b) | (c) | (d) | (e) |
|---|---|---|---|---|
| Tutti i P sono Q | Nessun P è Q | Tutti i P sono Q | Qualche Q è P | Qualche Q non è P |
| Qualche R non è Q | Ogni R è Q | Nessun R è Q | Ogni Q è R | Ogni Q è R |
| Qualche R non è P | Nessun R è P | Nessun R è P | Qualche R è P | Qualche R non è P |

2) *Verifica che i seguenti sillogismi NON sono corretti*:

| (a) | (b) | (c) | (d) | (e) |
|---|---|---|---|---|
| Ogni Q è P | Nessun P è Q | Ogni P è Q | Ogni Q è P | Qualche P è Q |
| Nessun R è Q | Nessun R è Q | Qualche Q è R | Nessun Q è R | Qualche R non è Q |
| Nessun R è P | Nessun R è P | Nessun R è P | Qualche R non è P | Qualche R non è P |

3) *Verifica che il sillogismo*

Tutti i Q sono P
Tutti i Q sono R
Qualche R è P

*non sarebbe, a ben guardare, corretto, e tuttavia diventa corretto se si suppone che l’insieme Q non sia …*
*[NOTA: Qualche R è P = Esiste almeno un R che è P]*

4) *Stabilisci quali dei seguenti ragionamenti sono corretti e quali scorretti (nota che non tutti sono nella forma standard del sillogismo, ma comunque potrebbero essere ad essa ricondotti)*

(a) “Nessun cane sa leggere.
Tutti i barboncini sono cani.
Quindi nessun barboncino sa leggere”

(b) “Tutti gli ubriaconi sono teste calde.
Tutti i bergamaschi sono teste calde.
Quindi tutti i bergamaschi sono ubriaconi”

(c) “Tutti gli elefanti sono mammiferi.
Nessuna gallina è un elefante.
Quindi nessuna gallina è un mammifero”

(d) “Alcuni cantanti non sanno suonare.
Alcuni giovani non sanno suonare.
Quindi alcuni giovani non sono cantanti”

(e) “Nessuna persona onesta è violenta.
Alcuni politici sono onesti.
Nessun politico è violento”

(f) “Nessun pesce ha i polmoni.
Tutti i pesci sono animali che vivono sott’acqua.
Nessun animale che vive sott’acqua ha i polmoni”

(g) “Nessun pastore è vegetariano.
Qualche pastore è laureato.
Quindi qualche laureato non è vegetariano”

(h) “Tutti gli asini volano.
Alcuni asini sono carnivori.
Perciò qualche essere carnivoro vola”

(i) “Solo i maggiorenni possono votare.
Qualche persona che può votare è analfabeta.
Quindi alcuni maggiorenni sono analfabeti”

(l) “Gli avari sono scontrosi.
Alcuni ignoranti sono scontrosi.
Quindi alcuni avari sono ignoranti”

(m) “Alcuni filosofi hanno la testa fra le nuvole.
Alcune persone con la testa fra le nuvole sono geniali.
Quindi alcuni filosofi sono geniali”

(n) “Some small birds live on honey.
All birds that live on honey are colourful.
Hence, some colourful birds are small”

(o) “Nessuna mucca fa le uova.
Qualche animale che fa le uova ha il pelo.
Perciò qualche essere col pelo non è una mucca”

(p) “Tutti gli insegnanti sono pazienti.
Chi è paziente non urla.
Quindi nessuna persona che urla è un insegnante”

(q) “Nessuno, tranne gli iscritti all’Università, può entrare in aula.
Solo chi è studente è iscritto all’Università.
Quindi solo chi è studente può entrare in aula”

Qui sotto, la **tavola dei 24 sillogismi validi**. I 9 a destra, però, lo sono a patto di supporre non vuoto un certo insieme.

| | AAA | EAE | AEE | AII | IAI | EIO | AOO | OAO | AAI | EAO | AEO | EAO | AAI | AAI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **sp** | BARBARA | CELARENT | | DARII | | FERIO | | | BARBARI | CELARONT | | | | |
| **pp** | | CESARE | CAMESTRES | | | FESTINO | BAROCO | | | CESARO | CAMESTROS | | | |
| **ss** | | | | DATISI | DISAMIS | FERISON | | BOCARDO | | | | FELAPTON | DARAPTI | |
| **ps** | | | CALEMES | | DIMARIS | FRESISON | | | | | CALEMOS | FESAPO | | BAMALIP |

## 16. RISPOSTE AD ALCUNI FRA I QUESITI DEL CAPITOLO DI LOGICA

**pag. 355**:

1) (a) $\overline{A} \to \overline{B}$ (b) $\overline{A \to B}$ (c) $B \to A$ (d) $A \to B$ (e) $A \leftrightarrow B$ (f) $A \vee (\overline{A} \to B)$

2) (a) $A \wedge \overline{B}$
(b) $D \to (B \wedge C)$
(c) $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \to C$
(d) $D \leftrightarrow (C \wedge \overline{A})$
(e) $(A \vee B) \wedge \big((C \wedge \overline{D}) \vee (\overline{C} \wedge D)\big)$; oppure $(A \vee B) \wedge \big((C \vee D) \wedge (\overline{C \wedge D})\big)$
(f) $D \to (\overline{C} \to A)$
(g) $(D \to C) \wedge (D \to \overline{B})$
(h) $(A \wedge B) \to (\overline{D} \to C)$
(i) $\big((\overline{B} \wedge \overline{A}) \vee D\big) \to C$
(l) $\big(A \to (B \vee C)\big) \wedge \big(\overline{A} \to (C \wedge D)\big)$
(m) $\big((A \wedge B \wedge C) \leftrightarrow \overline{D}\big) \wedge \big((\overline{A} \wedge \overline{B}) \to (C \to D)\big)$

3) Si hanno equivalenze solo nei casi (a), (c) 4) (c) 5) (b)

**pag. 356**: a, c, d, f, g sono tautologie, le altre no

**pag. 357**: 1a) Falsa 1b) Vera 1c) Falsa 2a) Vera 2b) Falsa 2c) Vera

**pag. 359**:

1) $\{4,8,12,16,20,24,...\}$; $\{6,12,18,24,30,36,...\}$; $a(x) \wedge b(x) = "x \text{ è multiplo di } 12"$; 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24,...

2) $p(x) \wedge q(x) = "x \text{ è multiplo di } 8" = q(x)$; $p(x) \vee q(x) = "x \text{ è multiplo di } 4" = p(x)$; 4, 12, 20, 28, 36,...

3) a) $(3,5)$ b) $(2,7)$ c) $(3,5]$ d) $(2,7)$ e) $[2,7]$ f) $[0, 1/4)$ g) $(-3,+\infty)$ h) $\varnothing$
i) L'insieme che si indica, appunto, con $(-5,-1) \cup (2,7)$

4) $\mathbb{R}$; l'intervallo $(0, 5)$

5) a) $(5, 10)$ b) $(2, 15)$ c) $(2,5]$ d) $[10, 15)$

6) Comporta che $A \subseteq B$ $A = \{\textit{divisori di } 12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ $B = \{\textit{divisori di } 24\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\}$

7) a) *c* b) *p, d, c* c) Sì, esistono quadrilateri con le diagonali uguali ma non dotati delle proprietà *p, c*

**pag. 361**: a) F (controesempi: $n = 9$, $n = 15$, $n = 21$, $n = 25$, … b) F (controesempio: $n = 2$)
c) F d) F e) V f) F (*x* e *y* potrebbero essere opposti …)
g) F (non valendo l'implicazione in uno dei due versi, è ovvio che non vale la doppia implicazione)
h) V i) F j) F k) V l) V m) V n) V o) V

**pag. 363**:

1) SUFF.

*x è un capitano* $\Rightarrow$ *x può comandare a un sergente*
**La condizione che "scaglia la freccia" è SUFFICIENTE per il verificarsi dell'altra.**

2) SUFF. 3) SE 4) NEC. E SUFF. (quando c'è doppia implicazione, si parla di CNS)

5) SE E SOLO SE (SSE) (quando c'è doppia implicazione, la locuzione corretta è SE E SOLO SE)

6) NEC. (*non* è anche suff.: se uno ha compiuto i 18 anni, ma non ha la cittadinanza, …

7) SOLO SE

8) NEC. (*non* è anche suff.: se ad es. la si lascia nell'acqua bollente per un'ora …)

9) NEC.

*ABCD è un rettangolo* $\Rightarrow$ *ABCD ha le diagonali uguali*
**La condiz. che "riceve la freccia nella schiena" è NECESSARIA per il verificarsi dell'altra.**

10) NEC. 11) NEC. 12) NEC. E SUFF. 13) SE E SOLO SE (che "va d'accordo" con NEC. E SUFF. dell'es. prec.)

14) NEC. 15) NEC. E SUFF. 16) SUFF. 17) NEC. E SUFF. 18) SUFF. 19) NEC. E SUFF. 20) SE E SOLO SE

**pag. 364**:

1) *Se un intero è primo, allora è dispari* [Metti **una croce sulla risposta corretta**:] VERA / ~~FALSA~~
   Contronominale: *Se un intero non è dispari, allora non è primo* VERA / ~~FALSA~~
   Contraria: *Se un intero non è primo, allora non è dispari* VERA / ~~FALSA~~
   Inversa: *Se un intero è dispari, allora è primo* VERA / ~~FALSA~~

2) *Se un intero è divisibile per 10, allora è divisibile anche per 5* ~~VERA~~ / FALSA
   Contronominale: *Se un intero non è divisibile per 5, allora non è divisibile per 10* ~~VERA~~ / FALSA
   Contraria: *Se un intero non è divisibile per 10, allora non è divisibile per 5* VERA / ~~FALSA~~
   Inversa: *Se un intero è divisibile per 5, allora è divisibile per 10* VERA / ~~FALSA~~

3) *Se un triangolo ha i tre lati uguali, allora ha anche i tre angoli uguali* ~~VERA~~ / FALSA
   Contronominale: *Se un triangolo non ha i tre angoli uguali, allora non ha i tre lati uguali* ~~VERA~~ / FALSA
   Contraria: *Se un triangolo non ha i tre lati uguali, allora non ha i tre angoli uguali* ~~VERA~~ / FALSA
   Inversa: *Se un triangolo ha i tre angoli uguali, allora ha anche i tre lati uguali* ~~VERA~~ / FALSA

4) *Se un quadrilatero ha le diagonali perpendicolari, allora ha i quattro lati uguali* VERA / ~~FALSA~~
   Contronominale: *Se un quadr. non ha i quattro lati uguali, allora non ha le diag. perp.* VERA / ~~FALSA~~
   Contraria: *Se un quadr. non ha le diag. perp., allora non ha i quattro lati uguali* ~~VERA~~ / FALSA
   Inversa: *Se un quadr. ha i quattro lati uguali, allora ha le diag. perp.* ~~VERA~~ / FALSA

5) *Se Cristina è ricoverata all'ospedale, allora ha partorito* VERA? / FALSA? (vedi NOTA)
   Contronominale: *Se Cristina non ha partorito, allora non è ricoverata all'ospedale* VERA? / FALSA?
   Contraria: *Se Cristina non è ricoverata all'ospedale, allora non ha partorito* VERA? / FALSA?
   Inversa: *Se Cristina ha partorito, allora è ricoverata all'ospedale* VERA? / FALSA?

NOTA
Sembra ragionevole considerare l'implicazione 5) falsa solo qualora l'antecedente sia vera (Cristina ricoverata) e la conseguente falsa (Cristina non ha partorito). Stesso discorso per l'inversa.
In ogni caso, è chiaro che non possiamo scrivere nulla se non sappiamo chi è Cristina e come sono andate le cose.
E' però sicuro, a priori, che la proposizione data e la sua contronominale avranno lo stesso valore di verità;
e che la contraria e l'inversa avranno lo stesso valore di verità (essendo una la contronominale dell'altra).
Puoi controllare che ciò avviene per tutti gli esempi di questa pagina.

**pag. 365**:

1) D 2) E 3) D 4) B 5) B 6) B 7) C 8) D

9) a) SSE b) SUFF. c) SSE d) SUFF e) NEC E SUFF f) SSE g) SSE h) NEC E SUFF
   i) SOLO SE (l'espress. linguistica che in realtà si utilizzerebbe in questo caso è: "*può avere* i 4 angoli retti")
   l) SSE m) SUFF

**pag. 367**: 3) corretto 4) corretto 5) non corretto 6) 2 (il primo e il terzo)

**pag. 368**: 1) V 2) F (non c'è nessun $x$ che vada bene *per ogni* $y$!) 3) V 4) V 5) F (per via dello 0)
6) V 7) F $(1/2 \notin \mathbb{Z})$ 8) V 12) F $\exists x \in \mathbb{R}_a \,/\, x^2 < x$ 13) F $\forall a \in \mathbb{N},\ a^2 \neq 20$ 14) V 15) V
16) F $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq -1/x$ 17) F $\exists x, y \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = y^2 \not\Rightarrow x = y$ oppure $\exists x, y \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = y^2 \wedge x \neq y$

**pag. 369**:

1) D 2) C 3) E 4) C 5) D 6) D 7) E 8) A

**pag. 370**:

Il primo è corretto.
Osserviamo che la premessa sui mammiferi è falsa
(i monotremi, di cui fan parte gli ornitorinchi, sono mammiferi ma fan le uova);
tuttavia il ragionamento, come struttura, è valido.
Anche il secondo e il quinto ragionamento della lista sono corretti, gli altri non lo sono.

**pagg. 371-372**:

1) C 2) E 3) C 4) D 5) D 6) D 7) E 8) E 9) E 10) A 11) E 12) C 13) A 14) B 15) B 16) A

**pag. 375**:

1B) (b) EAE pp (CESARE) (c) AEE pp (CAMESTRES) (d) IAI ss (DISAMIS) (e) OAO ss (BOCARDO)
3) l'insieme Q non sia vuoto 4) Sono corretti: (a), (g), (h), (i), (n), (o), (p), (q).

# EQUAZIONI FRATTE E LETTERALI

## 1. EQUAZIONI FRATTE

**Sono quelle equazioni nelle quali l'incognita compare, almeno una volta, a denominatore.**

Risolvendo un'equazione fratta, si perviene sempre a un passaggio del tipo:

(1) $\dfrac{N_1(x)}{D(x)} = \dfrac{N_2(x)}{D(x)}$ (*la x fra parentesi evidenzia che si tratta di espressioni contenenti l'incognita x*)

Eliminando a questo punto i due denominatori uguali, si ottiene l'equazione

(2) $N_1(x) = N_2(x)$

LE DUE EQUAZIONI (1) e (2) NON SONO PERO' NECESSARIAMENTE EQUIVALENTI
( = non hanno necessariamente le stesse soluzioni, può darsi che non abbiano le stesse soluzioni).
Infatti:

a) $\Downarrow$ se un certo valore di *x* è soluz. della (1), allora lo stesso valore di *x* è certamente soluz. anche della (2);

b) $\not\Uparrow$ però **non vale il viceversa**. Infatti, se un certo valore di *x* è soluzione della (2), vuol dire che quel valore di *x* rende uguali le due espressioni che stanno a NUMERATORE nella (1); ma può eccezionalmente accadere che il valore in questione vada pure ad annullare l'espressione D(*x*), ossia il DENOMINATORE della (1), e in questo caso NON renderebbe i due membri della (1) uguali, bensì li renderebbe entrambi privi di significato, quindi NON SAREBBE soluzione della (1).

Ricapitolando,

**♥ nel caso delle equazioni fratte, la soluzione che si trova alla fine è accettabile (cioè, è soluzione anche dell'equazione di partenza) soltanto se NON annulla il denominatore eliminato D(*x*).**

❑ **Esempio**:

$$\frac{2}{4x^3 - x} = \frac{5}{6x^2 + 3x} + \frac{1}{2x^2 - x}$$

$$\frac{2}{x(2x+1)(2x-1)} = \frac{5}{3x(2x+1)} + \frac{1}{x(2x-1)}$$

$$\frac{6}{3x(2x+1)(2x-1)} = \frac{5(2x-1)+3(2x+1)}{3x(2x+1)(2x-1)} \rightarrow$$

$$6 = 10x - 5 + 6x + 3$$

$$6 = 16x - 2; \quad -16x = -8$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} \text{ NON ACCETTABILE}}$$

L'equazione è perciò IMPOSSIBILE.

OCCHIO!



$3x \neq 0;\ 2x+1 \neq 0;\ 2x-1 \neq 0$
*ossia*

$$\boxed{x \neq 0;\ x \neq -\frac{1}{2};\ x \neq \frac{1}{2}}$$

↓

**" CONDIZIONI DI ACCETTABILITA' "**

(leggi l'osservazione qui a destra)

♥ Queste annotazioni, che si scrivono nel momento in cui si mandano via i due denominatori uguali, significano:

**se alla fine dovessimo trovare come soluzione *x* = 0, oppure *x* = –1/2, oppure *x* = 1/2, si tratterebbe di una "falsa soluzione", o, come si suol dire, di una "soluzione non accettabile", quindi da scartare.**

❑ **Un altro esempio**:

$$\frac{1}{x(x+7)} = \frac{1}{2x(3x-4)}$$

$$\frac{2(3x-4)}{2x(x+7)(3x-4)} = \frac{x+7}{2x(x+7)(3x-4)} \qquad \boxed{2x \neq 0} \quad \boxed{x \neq 0} \qquad \boxed{x+7 \neq 0} \quad \boxed{x \neq -7} \qquad 3x-4 \neq 0;\ 3x \neq 4;\ \boxed{x \neq 4/3}$$

$$6x - 8 = x + 7;\ 5x = 15; \quad \boxed{x = 3 \quad \textit{accettabile}}$$

Come avrai notato, di fronte alle **condizioni contenenti il simbolo ≠ ("diverso da")** ci si comporta esattamente come di fronte alle equazioni: si isola la lettera con gli stessi passaggi, semplicemente scrivendo "≠" anziché "=".

Qualche altro caso:

$\dfrac{\ldots}{5x+4}$ $\quad 5x + 4 \neq 0;\ 5x \neq -4;\ \boxed{x \neq -\dfrac{4}{5}}$

$\dfrac{\ldots}{(x+3)^2}$ $\quad (x+3)^2 \neq 0,\ x+3 \neq 0,\ \boxed{x \neq -3}$

**Un quadrato è uguale a 0 quando è uguale a 0 la sua base, è diverso da 0 quando è diversa da 0 la sua base**

Schematicamente: $\frac{N_1(x)}{D(x)}=\frac{N_2(x)}{D(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} N_1(x)=N_2(x) \\ D(x)\neq 0 \end{cases}$ OSSIA **l'equazione è equivalente al sistema**. Ricordiamo che la graffa di sistema esprime il connettivo logico $\wedge$ ("ET")

$\Rightarrow$ *Se, per un certo x, è* $\frac{N_1(x)}{D(x)}=\frac{N_2(x)}{D(x)}$, *allora, per lo stesso x, sarà anche* $\begin{cases} N_1(x)=N_2(x) \\ D(x)\neq 0 \end{cases}$

$\Leftarrow$ *Se, per un certo x, è* $\begin{cases} N_1(x)=N_2(x) \\ D(x)\neq 0 \end{cases}$, *allora, per lo stesso x, sarà anche* $\frac{N_1(x)}{D(x)}=\frac{N_2(x)}{D(x)}$

♥ **Le "condizioni" vanno poste ogniqualvolta un denominatore cessa di essere tale**, per effetto:

a) dell'**eliminazione dei due denominatori uguali**

b) … ma anche di un "**capovolgimento**"! Esempio:

$\frac{\frac{x+1}{x+2}}{\frac{x-3}{x-4}}=1 \quad \frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x-4}{x-3}=1 \quad \boxed{x\neq 4}$ (perché $x-4$, che era a denominatore, per effetto del capovolgimento ha cessato di esserlo)

c) … ma anche di una **semplificazione**! Esempio:

$\frac{\cancel{x-5}}{x-3}\cdot\frac{2x+1}{\cancel{x-5}}=7 \quad \boxed{x\neq 5}$ (perché $x-5$, che era a denominatore, per effetto della semplificazione ha cessato di esserlo)

d) … ma anche del **procedimento "veloce"** col quale si può eliminare il denominatore pure senza fare i due denominatori comuni uguali, ma invece **moltiplicando ambo i membri dell'equazione per il denominatore stesso**! Prendiamo ad es. l'equazione $\frac{3x-2}{x}+7=0$;

per mandar via il denominatore, in questa situazione molto semplice, anziché fare i due denominatori comuni uguali posso più rapidamente moltiplicare ambo i membri per $x$ ottenendo:

$x\cdot\left(\frac{3x-2}{x}+7\right)=0\cdot x \quad 3x-2+7x=0 \quad \boxed{x\neq 0}$ (perché comunque, prima della moltiplicazione, un denominatore $x$ c'era)

**ESERCIZI** 1) $\frac{x+1}{x}=\frac{x+4}{x+2}$ 2) $3\cdot\frac{x}{x-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{9x-1}{x}$ 3) $\frac{x+3}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}=\frac{11x+3}{x^2-9}$ 4) $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{2x+4}$ ⇨

5) $\frac{3}{x^2+4+4x}=\frac{2}{x^2-4}$ ⇨ 6) $\frac{3x-1}{2x^2-2x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}=0$ 7) $\frac{x-2}{x}=\frac{x}{x+1}$ 8) $\frac{1}{x^2-2x+1}+\frac{2}{x-1}=\frac{1}{2x-2}$

9) $\frac{2}{x-4}-\frac{1}{x}=0$ 10) $\frac{2}{x^2-1}=\frac{3}{x^2-x-2}$ 11) $\frac{2}{3}-\frac{4x+5}{x-2}=1$ 12) $\frac{4}{x^2-3x+2}=\frac{3}{x^2-5x+6}$

13) $2\cdot\frac{x}{2x-1}=\frac{3x+1}{3x-1}$ ⇨ 14) $\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x-4}=\frac{x}{x^2-6x+8}$ 15) $\frac{1}{x^2-2x-3}-\frac{1}{x^2-6x+9}=\frac{x-9}{(x+1)(x-3)^2}$

16) $\frac{2}{3x-2}+\frac{x+2}{3x^2-8x+4}=0$ ⇨ 17) $\left(\frac{1}{4x-3}-\frac{1}{4x+3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4x}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4x+3}=\frac{1}{2x}$ 18) $\frac{5x-2}{x^4-5x^2+4}=\frac{3}{x^3+2x^2-x-2}$

19) $\frac{3}{4x^4-5x^2+1}+\frac{1}{x^2-4x^4}=\frac{1}{2x^4+3x^3+x^2}$ ⇨ 20) $\frac{\frac{x+1}{x-7}-\frac{x-7}{x-1}}{7x-25}+(x-1)\left[x^{-2}-(x-1)^{-2}\right]=0$

21) $\left(\frac{1}{3x+8}-\frac{1}{2x+8}\right)\cdot\left(\frac{4}{x}+1\right)=\frac{1}{2}$ 22) $\frac{3}{x-1}-\frac{5}{x^2-2x}=\frac{3x^2-11x+5}{x^3-3x^2+2x}$ 23) $\frac{x}{x+3}=\frac{x+5}{x+7}$

24) $\frac{\frac{2x+3}{x(16x^2-1)}-\frac{1}{4x^2+x}}{x^2}\cdot\frac{(x-1)(1+x)-x^2}{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2}=\frac{4}{4x^4-x^3}$ 25) $\frac{\frac{2}{3x+1}-\frac{1}{3x-2}}{3x-1}-\frac{1-\frac{2}{3x}}{\frac{9}{2}x^2-3x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}}=0$

**SOLUZIONI**

1) $x=2$ 2) $x=1/10$ 3) IMP. ($x=3$ *non acc.*) 4) $x=0$ 5) $x=10$ 6) IMP. ($x=1$ *non acc.*)
7) $x=-2$ 8) $x=1/3$ 9) $x=-4$ 10) IMP. ($x=-1$ *non acc.*) 11) $x=-1$ 12) $x=9$ 13) $x=1$
14) IMP. ($x=4$ *non acc.*) 15) $x=5$ 16) IMP. ($x=2/3$ *non acc.*) 17) $x=-2$ 18) IMP. ($x=-2$ *non acc.*)
19) IMP. ($x=0$ *non acc.*) 20) $x=7/15$ 21) Si trova una soluzione accettabile. Fai la verifica, sostituendo.
22) E' INDET.: ammette come soluzione QUALUNQUE numero reale, TRANNE 0, 1, 2. $S=\mathbb{R}-\{0,1,2\}$
23) $x=-15$ 24) $x=20$ 25) IMP. ($x=-1/3$ *non acc.*)

## 2. EQUAZIONI LETTERALI

- **Problema 1**
  *Un padre ha 53 anni, suo figlio ne ha 15.*
  *Fra quanti anni il padre avrà il triplo dell'età del figlio?*

Facile:

$x$ = numero di anni che devono passare affinché l'età del padre sia tripla di quella del figlio.
Fra $x$ anni, il padre avrà $53+x$ anni, il figlio ne avrà $15+x$.
Possiamo perciò scrivere l'equazione

$$53+x=3(15+x)$$

e risolverla coi semplici passaggi seguenti:

$$\begin{aligned} &53+x=45+3x\\ &x-3x=45-53\\ &-2x=-8\\ &x=4 \end{aligned}$$

Fra 4 anni, dunque!

Vediamo se è giusto.

- Il padre, che attualmente ha 53 anni, fra 4 anni ne avrà 57.
- E il figlio, che attualmente ha 15 anni, fra 4 anni ne avrà 19.

Bene, 57 è proprio il triplo di 19. Dunque la soluzione è corretta.

- **Problema 2**
  *Un padre ha 45 anni, suo figlio ne ha 11.*
  *Fra quanti anni il padre avrà il triplo dell'età del figlio?*

**"Ma professore …" – mi dirai tu a questo punto –**
**" … questo problema è identico al precedente, cambiano solo i dati!"**

**Infatti, evidentemente è proprio così!!!**
**… Però io penso che tu stia già comprendendo dove voglio arrivare ...**

**Abbi pazienza un attimo ancora.**
**Risolviamo anche questo problema n. 2,**
**dopodiché saremo pronti per entrare nel "cuore" del discorso.**

$x$ = numero di anni che devono passare affinché l'età del padre sia tripla di quella del figlio.
Fra $x$ anni, le due età saranno $45+x$ e $11+x$; l'equazione risolvente è

$$45+x=3(11+x)$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} &45+x=33+3x\\ &x-3x=33-45\\ &-2x=-12\\ &x=6 \end{aligned}$$

Facciamo la verifica.
Fra 6 anni, le due età, che attualmente sono 45 e 11, saranno 45+6 = 51 e 11+6 = 17.
E 51 è proprio il triplo di 17. Tutto OK.

**I due problemi proposti avevano dunque "la stessa struttura", differivano soltanto per i dati.**
**Ma allora … IDEA!**
**Perché non indicare i dati (l'età attuale del padre e quella del figlio)**
**con dei SIMBOLI anziché direttamente con dei numeri?**
**In questo modo, il procedimento sarebbe del tutto GENERALE**
**e non più legato ad un caso particolare …**
**e la risoluzione andrebbe bene per TUTTI i problemi di QUEL tipo,**
**che possiamo divertirci ad inventare.**

- **Problema 3 (generalizzato)**
  *Un padre ha p anni, suo figlio f anni.*
  *Fra quanti anni il padre avrà il triplo dell'età del figlio?*

$x$ = numero di anni che devono passare affinché l'età del padre sia tripla di quella del figlio.
Fra $x$ anni, il padre avrà $p+x$ anni, il figlio ne avrà $f+x$.
L'equazione risolvente è

$$p+x=3(f+x)$$

**EQUAZIONE "LETTERALE" O "PARAMETRICA"**
**nella quale**

**$x$ è l'INCOGNITA**

**mentre $p$, $f$ NON sono incogniti, al contrario:**

**$p$, $f$ sono NUMERI NOTI, FISSATI, ANCHE SE VOLUTAMENTE IMPRECISATI**

Ricaviamo $x$:

$$p+x=3(f+x)$$
$$p+x=3f+3x$$
$$x-3x=3f-p$$
$$-2x=3f-p$$
$$2x=p-3f$$
$$x=\frac{p-3f}{2}$$

**La formuletta trovata fornisce ora, istantaneamente,**
**la soluzione di TUTTI i problemi del tipo considerato.**

Ad esempio, per un padre di 38 anni e un figlio di 8, avremo

$$x=\frac{38-3\cdot 8}{2}=\frac{38-24}{2}=\frac{14}{2}=7$$

… infatti, passati 7 anni, le età saranno 38+7 = 45 e 8+7 = 15; ed è proprio $45=15\cdot 3$.
Verifica tu stesso che, com'è ovvio, anche i due problemi affrontati precedentemente
($p$ = 53, $f$ = 15; $p$ = 45, $f$ = 11) sono risolti in modo esatto dalla formula appena ottenuta.

- **Problema 4 (ulteriore generalizzazione)**
  *Un padre ha p anni, suo figlio f anni.*
  *Fra quanti anni il padre avrà k volte l'età del figlio?*

$x$ = numero di anni che devono passare affinché l'età del padre sia $k$ volte quella del figlio

$$p+x=k(f+x)$$
$$p+x=kf+kx$$
$$x-kx=kf-p$$
$$(1-k)x=kf-p \quad \text{(NOTA 1)}$$
$$x=\frac{kf-p}{1-k}=_{\text{NOTA 2}}\frac{p-kf}{k-1}$$

Ad esempio, con
$p=31,\ f=7,\ k=4$
si ha

$$x=\frac{p-kf}{k-1}=\frac{31-4\cdot 7}{4-1}=\frac{31-28}{3}=1$$

NOTA 1
*Qui si è dovuta RACCOGLIERE L'INCOGNITA x fra i termini che la contenevano, allo scopo di ottenere che x comparisse, a primo membro, una sola volta, moltiplicata per il suo bravo coefficiente $(1-k)$. Dopodiché, dividendo per il coefficiente di x, si isola x:*

$$\frac{\cancel{(1-k)}x}{\cancel{1-k}}=\frac{kf-p}{1-k}$$

NOTA 2
Abbiamo preferito cambiare i segni
di numeratore e denominatore,
in quanto i valori che il parametro $k$ può assumere sono,
evidentemente, 2, 3, 4, … per cui il numero $1-k$ è negativo.

Dunque, ricapitolando:

**Si dice "EQUAZIONE LETTERALE" (o anche: "equazione PARAMETRICA")**
**un'equazione nella quale, OLTRE ALL'INCOGNITA,**
**compaiono anche ALTRE LETTERE che però**
**♥ *non* stanno a rappresentare numeri incogniti**
**bensì NUMERI NOTI, FISSATI,**
**ANCHE SE VOLUTAMENTE IMPRECISATI.**

**Tali lettere vengono dette "PARAMETRI" o "costanti"**
**(meglio sarebbe dire: "COSTANTI ARBITRARIE").**

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{para-}\\ \text{metro}}}{p} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{inco-}\\ \text{gnita}}}{x} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{para-}\\ \text{metro}}}{k}\,(\,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{para-}\\ \text{metro}}}{f} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{inco-}\\ \text{gnita}}}{x}\,)$$

Altri esempi:

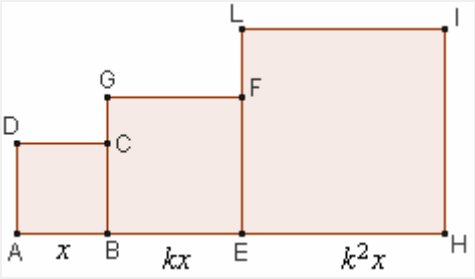
- **Problema 5**
  *Trovare due numeri che diano per somma $s$ e per differenza $d$*

numero minore = $x$, numero maggiore = $x+d$

$$x+x+d=s$$
$$2x=s-d$$
$$x=\frac{s-d}{2}$$

numero minore = $\boxed{\frac{s-d}{2}}$, numero maggiore $=\frac{s-d}{2}+d=\frac{s-d+2d}{2}=\boxed{\frac{s+d}{2}}$

- **Problema 6**
  *Nella figura sottostante compaiono 3 quadrati.*




*Il lato del quadrato intermedio è k volte il lato del quadrato più piccolo,*
*e il lato del quadrato più grande è k volte il lato del quadrato intermedio.*
*Inoltre il contorno del poligono AHILFGCD ha una misura nota $2p$.*
*Determinare i lati dei tre quadrati.*

$$AB=x,\quad BE=kx,\quad EH=k\cdot kx=k^2x$$
$$GC=BG-BC=kx-x,\quad LF=EL-EF=k^2x-kx$$
$$\underset{x}{AB}+\underset{kx}{BE}+\underset{k^2x}{EH}+\underset{k^2x}{HI}+\underset{k^2x}{IL}+\underset{k^2x-kx}{LF}+\underset{kx}{FG}+\underset{kx-x}{GC}+\underset{x}{CD}+\underset{x}{DA}=2p$$

$$\underline{x}\ \underline{\underline{+kx}}+\widehat{k^2x}+\widehat{k^2x}+\widehat{k^2x}+\widehat{k^2x}\ \cancel{-kx}\ \cancel{+kx}\ \underline{\underline{+kx}}\ \cancel{-x}\ \cancel{+x}\ \underline{+x}=2p$$
$$2x+2kx+4k^2x=2p$$
$$x+kx+2k^2x=p$$
$$\left(1+k+2k^2\right)x=p$$

$$AB=\boxed{\frac{p}{1+k+2k^2}},\quad BE=\boxed{\frac{kp}{1+k+2k^2}},\quad EH=\boxed{\frac{k^2p}{1+k+2k^2}}$$

## ESERCIZI: EQUAZIONI LETTERALI

**NOTA**

In realtà, quando nel procedimento si deve dividere per un'espressione contenente il parametro, occorrerebbe fare la cosiddetta "**discussione**", cioè riconoscere quei valori del parametro per i quali tale divisione non è effettuabile, in quanto l'espressione in gioco si annulla.
In tali casi l'equazione diventa impossibile, o indeterminata.
Vedremo questo aspetto, che per ora fingiamo di ignorare, un po' più avanti.

1) $7x-6a=5x$ 2) $4x+a=0$ 3) $1-ax=0$ 4) $mx-m=0$ 5) $5x-k=1$ 6) $3(x+d)=5(x-d)$

7) $a(2x-3)+2(x-1)=1$ 8) $h+\frac{x}{3}=\frac{x}{2}$ 9) $2x-m=n$ 10) $22x+44a=33x-55b$

11) $4dx-c=dx+a+b$ 12) $3(1+x+c)=4(c+x)$ 13) $ax=2+x$ 14) $10(ax-b)=bx+a$

15) $2(3bx+1)=b(x+5)$ 16) $a(x-1)-1=x$ 17) $3(c-x)-cx=0$ 18) $\frac{x}{4}-1=kx+k$

19) $n(x-n)+1=-x$ 20) $k^3=k(x-1)+k$ 21) $(e-1)x+2(ex+1)-1=ex$ 22) $\frac{px+qx}{p}=\frac{1+x}{2}$

23) $a(x-1)+b(x+1)=c(1-x)$ 24) $x-\left[\frac{k}{3}(x-1)+2\right]=0$ 25) $\frac{x(1+c)}{b}+x=1$

26) $\frac{1}{2}ax=\frac{bx}{2}+ax+1$ 27) $a(x-3)=a^2-x+2$ 28) $p\left(p^2+p+1\right)=x\left(p+1\right)-1$

29) $a^2(x-1)+(2a+1)x+1=0$ 30) $h\left(2x-2+\frac{x}{h}\right)=x+2h^2(h+1)$ 31) $a\cdot\frac{3ax+1}{2}=\frac{1+2x}{3}$

www.mathvizza.com

**Solve for the variable indicated in the parenthesis**
(vai a rivedere anche il capitoletto sull' "inversione di formule" alle pagine 172-173)!

32) $P=IRT$ $[T]$ 33) $A=2(L+W)$ $[W]$ 34) $y=5x-6$ $[x]$ 35) $2x-3y=8$ $[y]$ 36) $\frac{x+y}{3}=5$ $[x]$

37) $y=mx+b$ $[b]$ 38) $ax+by=c$ $[y]$ 39) $P=\frac{R-C}{N}$ $[R]$ 40) $A=4\pi r^2$ $[r^2]$ 41) $A=\frac{R}{2L}$ $[L]$

http://webserver.exeter.k12.pa.us

**Literal Equations. Formulas can be manipulated through the process of solving literal equations.**

42) Solve for $b$: $A=bh$ (area of a parallelogram)

43) Solve for $h$: $A=\frac{1}{2}bh$ (area of a triangle)

44) Solve for $d$: $C=\pi d$ (circumference of a circle)

45) Solve for $L$: $P=2L+2W$ (perimeter of a rectangle) [beh, di solito un perimetro si indica con $\mathbf{2}p$ !]

## RISPOSTE

1) $x=3a$ 2) $x=-\frac{a}{4}$ 3) $x=\frac{1}{a}$ 4) $x=1$ 5) $x=\frac{k+1}{5}$ 6) $x=4d$ 7) $x=\frac{3}{2}$ 8) $x=6h$

9) $x=\frac{m+n}{2}$ 10) $x=4a+5b$ 11) $x=\frac{a+b+c}{3d}$ 12) $x=3-c$ 13) $x=\frac{2}{a-1}$ 14) $x=\frac{a+10b}{10a-b}$

15) $x=\frac{5b-2}{5b}$ 16) $x=\frac{a+1}{a-1}$ 17) $x=\frac{3c}{c+3}$ 18) $x=\frac{4(1+k)}{1-4k}$ 19) $x=n-1$ 20) $x=k^2$

21) $x=-\frac{1}{2e-1}=\frac{1}{1-2e}$ 22) $x=\frac{p}{p+2q}$ 23) $x=\frac{a-b+c}{a+b+c}$ 24) $x=\frac{6-k}{3-k}=\frac{k-6}{k-3}$ 25) $x=\frac{b}{1+b+c}$

26) $x=-\frac{2}{a+b}$ 27) $x=a+2$ 28) $x=p^2+1$ 29) $x=\frac{a-1}{a+1}$ 30) $x=h^2+h+1$ 31) $x=-\frac{1}{3a+2}$

32) $T=\frac{P}{IR}$ 33) $W=\frac{A}{2}-L=\frac{A-2L}{2}$ 34) $x=\frac{y+6}{5}$ 35) $y=\frac{2x-8}{3}$ 36) $x=15-y$

37) $b=y-mx$ 38) $y=\frac{c-ax}{b}$ 39) $R=PN+C$ 40) $r^2=\frac{A}{4\pi}$ 41) $L=\frac{R}{2A}$

42) $b=\frac{A}{h}$ 43) $h=\frac{2A}{b}$ 44) $d=\frac{C}{\pi}$ 45) $L=\frac{P-2W}{2}$

## ESERCIZI: PROBLEMI CHE CONDUCONO A UN'EQUAZIONE LETTERALE

1) L'età di Mario fra $k$ anni sarà doppia di quella che egli aveva $k$ anni fa. Quanti anni ha Mario?

2) (*Ulteriore generalizzazione del problema precedente*)
L'età di Mario fra $k$ anni sarà $n$ volte quella che egli aveva $k$ anni fa. Quanti anni ha Mario?

3) Trovare due numeri interi positivi consecutivi sapendo che la differenza dei loro quadrati è $D$.

4) (*Ulteriore generalizzazione del problema precedente*)
Trovare due numeri positivi sapendo che la loro differenza è $d$ e la differenza dei loro quadrati è $D$.

5) La somma di cinque numeri interi positivi consecutivi è $s$. Quanto vale il numero più piccolo?

6) ⇨ In un triangolo isoscele di perimetro $2p$, la differenza fra lato obliquo e base è $d$. Trovare i lati.

7) In un triangolo isoscele di perimetro $2p$, la differenza fra base e lato obliquo è $d$. Trovare i lati.

8) Trovare i lati di un triangolo isoscele di perimetro $2p$,
sapendo che la somma fra base e lato obliquo misura $s$.

9) Trovare i lati di un triangolo isoscele conoscendone il perimetro $2p$
e sapendo che il lato obliquo è lungo $k$ volte la base.

10) Trovare i lati di un triangolo isoscele conoscendone il perimetro $2p$
e sapendo che la base è $k$ volte il lato obliquo.

11) ⇨ Dopo uno sconto del $p$%, il prezzo finale di un oggetto è $f$. Qual era il prezzo originario?

12) Un commerciante pratica uno sconto del $p$%, e dopo qualche mese decide di fare un ulteriore sconto, sul prezzo già ribassato, del $q$%, portando l'articolo a un prezzo finale $f$. Risali al prezzo originario.

13) Quando nacquero i suoi 3 figli, un padre aveva rispettivamente: $p_1$ anni, $p_2$ anni e $p_3$ anni.
Oggi l'età del padre è uguale alla somma delle età dei tre figli. Qual è l'età attuale del padre?

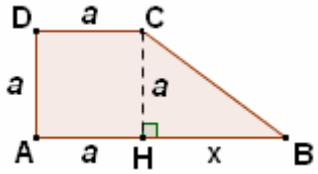
14) ⇨ In un triangolo rettangolo un cateto misura $a$, e l'ipotenusa supera di $d$ l'altro cateto.
Trovare le misure del cateto incognito, dell'ipotenusa e del perimetro.
(*L'equazione risolvente si può impostare applicando il Teorema di Pitagora, vedi pag. 214*)

15) In un rettangolo di perimetro noto $2p$, la base è $k$ volte l'altezza. Trovare le dimensioni.

16) In un rettangolo di perimetro noto $2p$, la differenza fra le dimensioni è $d$. Trovare le dimensioni.

17) Di due circonferenze si sa che la somma dei loro diametri è $s$, mentre la differenza fra le lunghezze delle due circonferenze uguaglia il diametro della circonferenza maggiore.
Quanto misura quest'ultimo?

18) Determina $x$,
con riferimento al trapezio della figura qui a fianco,
in modo che sia uguale a $S$ l'area del trapezio.




19) Dividere un numero dato $a$ in due parti, proporzionali ai numeri $h$ e $k$ $(x:h=y:k)$

20) Una classe si reca in gita scolastica; il costo, che è stato pagato in anticipo all'agenzia di viaggi, è di $a$ euro per studente. Tuttavia, il giorno prima della partenza, uno dei ragazzi ha un infortunio che lo costringe a rinunciare alla gita. Sul pullman, i ragazzi discutono di questo fatto e decidono di tassarsi per rimborsare al compagno il prezzo pagato; così il costo *pro capite*, per i partecipanti, sale a $b$ euro. Quanti sono gli studenti che effettivamente partono per la gita?

21) Il piano tariffario dei telefonini di marca A prevede una spesa di $a$ centesimi di euro al minuto, con l'apparecchio fornito gratuitamente, mentre per la marca B i centesimi al minuto sono $b$, con $b<a$, ma in compenso è prevista una spesa iniziale di $m$ euro per l'acquisto del telefonino.
Dopo quanti minuti di conversazione si comincia a risparmiare, con la compagnia B?

22) Due autobus, sulle due corsie di una lunga autostrada, procedono in direzioni opposte venendosi incontro. Supposto che si trovino a una distanza $d$ (in km) e che procedano alle velocità costanti di $v_1$ e $v_2=v_1+k$ km/h, dopo quanti minuti si incroceranno?

23) Un autobus transita davanti a un pittoresco castello ai bordi dell'autostrada, procedendo ad una velocità costante $v_1$ (in km/h). Dopo $r$ minuti nella stessa posizione troviamo un secondo autobus, in viaggio nella stessa direzione del primo, ma ad una diversa velocità costante di $v_2>v_1$ km/h.
Quanti minuti devono ancora passare prima che l'autobus più veloce sorpassi il più lento?

**SOLUZIONI dei problemi**

1) $3k$ anni

2) $\frac{k(n+1)}{n-1} = k\frac{n+1}{n-1}$ anni

3) $\frac{D-1}{2}, \frac{D+1}{2}$

4) $\frac{D-d^2}{2d}, \frac{D+d^2}{2d}$

5) $\frac{s-10}{5}$

6) $base = \frac{2(p-d)}{3}$; $lato\ obliquo = \frac{2p+d}{3}$

7) $base = \frac{2(p+d)}{3}$; $lato\ obliquo = \frac{2p-d}{3}$

8) $base = 2s-2p$; $lato\ obliquo = 2p-s$

9) $base = \frac{2p}{1+2k}$; $lato\ obliquo = \frac{2kp}{1+2k}$

10) $base = \frac{2kp}{2+k}$; $lato\ obliquo = \frac{2p}{2+k}$

11) $\frac{100f}{100-p} = \frac{100}{100-p}\cdot f = f\cdot\frac{100}{100-p}$

12) $\frac{10000}{(100-p)(100-q)}\cdot f$

13) $\frac{p_1+p_2+p_3}{2}$

14) $\frac{a^2-d^2}{2d}, \frac{a^2+d^2}{2d}, \frac{a^2+ad}{d}$

15) $altezza = \frac{p}{1+k}$; $base = \frac{kp}{1+k}$

16) $\frac{p-d}{2}, \frac{p+d}{2}$

17) $\frac{\pi s}{2\pi-1}$

18) $x = \frac{2S-2a^2}{a}$

19) $\frac{ah}{h+k}, \frac{ak}{h+k}$

20) Sono $\frac{a}{b-a}$

21) Dopo $\frac{100m}{a-b}$ minuti

22) Dopo $\frac{60d}{2v_1+k}$ minuti

23) L'equazione risolvente può essere $v_2\cdot\frac{x}{60} = v_1\cdot\frac{r}{60} + v_1\cdot\frac{x}{60}$ se si indica con $x$ il numero di minuti che devono passare; si trova $x = \frac{v_1}{v_2-v_1}r$ minuti

Dal sito www.amsi.org.au:

EXAMPLE
Solve the equation

$$5(x - a) + 2a = 3x + 7a - 2$$

for $x$.

SOLUTION
We proceed using the usual rules, keeping our focus on the unknown $x$

$$\begin{aligned} 5(x - a) + 2a &= 3x + 7a - 2 \\ 5x - 5a + 2a &= 3x + 7a - 2 \\ 5x - 3x &= 7a + 5a - 2a - 2 \\ 2x &= 10a - 2 \\ x &= 5a - 1. \end{aligned}$$

Note:
The answer can be checked in the usual way

LHS = $5(5a - 1 - a) + 2a = 22a - 5$

RHS = $3(5a - 1) + 7a - 2 = 22a - 5$

Therefore, LHS = RHS

[LHS = Left Hand Side = Primo membro
RHS = Right Hand Side = Secondo membro]




"*Idle no more*" è un movimento di protesta che con la disobbedienza civile e la resistenza non violenta si propone di promuovere i diritti delle popolazioni indigene, espropriate delle loro terre e della loro dignità, e di combattere contro il degrado dell'ecosistema e l'ingiustizia sociale.
..... Cosa ha a che fare tutto ciò con le equazioni letterali? .....
Dovremmo piuttosto ribaltare il punto di vista e chiederci che senso possono avere la scienza e la matematica se il mondo in cui viviamo è sempre più innaturale, iniquo e autolesionista.
Il sistema perverso del profitto a tutti i costi, della predazione delle risorse e dello spreco sistematico, per il feticcio assurdo di una produzione e un consumo che dovrebbero crescere senza fine, genera solo infelicità e falsi bisogni: e va (pacificamente) rivoltato come un calzino!!!!!! *Questa* soprattutto è l'equazione che mi auguro tu comprenda, e contribuisca a risolvere.

## 3. "DISCUSSIONE" DELLE EQUAZIONI LETTERALI

**Si dice "DISCUSSIONE" di un'equazione letterale, la RICERCA di quei PARTICOLARI VALORI DEL PARAMETRO (o dei parametri) PER CUI L'EQUAZIONE RISULTA**
- **IMPOSSIBILE ( = priva di soluzioni)**
- **oppure INDETERMINATA ( = dotata di infinite soluzioni).**

*Il riconoscimento di tali valori "notevoli" avviene all'atto del passaggio finale, ossia quando, per isolare x, occorre dividere ambo i membri per il coefficiente di x; ed eventualmente nel caso (raro) in cui l'equazione sia semplificabile per un'espressione contenente il parametro.*

**Di fronte ad un'equazione letterale, dobbiamo innanzitutto tenere conto di un'idea fondamentale:**

♪ **quando noi pensiamo che il parametro indica UN NUMERO FISSATO, da *questo* punto di vista abbiamo *UNA* EQUAZIONE**

♫ **quando pensiamo che il valore del parametro può essere FISSATO AD ARBITRIO, da *quest'altro* punto di vista abbiamo *UNA FAMIGLIA DI INFINITE* EQUAZIONI: ad *ogni* valore che il parametro può assumere corrisponde *una* delle equazioni della "famiglia".**

♥ **Ora, la "discussione" consiste nell'andare a cercare gli eventuali "elementi degeneri" di questa famiglia, ossia quelle particolari equazioni della famiglia (se ce ne sono) che risultano, eccezionalmente, impossibili o indeterminate.**

Vediamo una piccola rassegna di ESEMPI.

1) $ax-2=5x$

Trasportiamo i termini contenenti $x$ a 1° membro e i termini noti a 2° membro:

$$ax-5x=2$$

Raccogliamo $x$:

$$\underbrace{(a-5)}_{\substack{\textit{coefficiente}\\ \textit{di } x}}\ x=2$$

Ora l'obiettivo è di isolare $x$;
$x$ è moltiplicata per il suo coefficiente $(a-5)$,
per cui occorrerà dividere entrambi i membri per tale coefficiente.

**♥ MA UNA DIVISIONE E' EFFETTUABILE SOLTANTO SE IL NUMERO PER CUI SI INTENDE DIVIDERE E' DIVERSO DA ZERO !**



Quindi dobbiamo DISTINGUERE DUE CASI !!!

$$\boxed{(a-5)x=2}$$

$\boxed{1°\ caso:\ se\ a-5\neq 0}$, ossia $a\neq 5$,
possiamo dividere per $(a-5)$ e ricavare $x=\dfrac{2}{a-5}$

$\boxed{2°\ caso:\ se\ a-5=0}$, ossia $a=5$,
NON possiamo isolare $x$;
siamo BLOCCATI al passaggio $(a-5)x=2$
che diventa, nella fattispecie,
$(5-5)\cdot x=2$.
Perciò, nel caso particolare $a=5$,
la nostra equazione si riduce a
$0\cdot x=2$
IMPOSSIBILE (*non esiste nessun numero il quale, moltiplicato per* 0, *dia come risultato* 2)

- Facciamo una verifica: l'equazione iniziale $ax-2=5x$, cosa diventa nel caso particolare $a=5$?
  Diventa $5x-2=5x$ ossia $\cancel{5x}-2=\cancel{5x}$; $-2=0$ IMPOSSIBILE.
- Vediamo la verifica per un qualunque caso "normale", ad esempio il caso $a=3$. Si ha
  $3x-2=5x;\ -2x=2;\ x=\boxed{-1}$ … e $-1$ è proprio il valore assunto dalla frazione $\dfrac{2}{a-5}$ quando $a=3$.

2) $\dfrac{m(mx-1)-x}{3}=1$

$m(mx-1)-x=3;\quad m^2x-m-x=3;\quad m^2x-x=m+3;\quad (m^2-1)x=m+3$

$\boxed{(m+1)(m-1)x=m+3}$

Se $(m+1)(m-1)\neq 0$, ossia $m\neq -1$ e $m\neq +1$, brevemente: $m\neq \pm 1$ (un prodotto è diverso da zero quando lo sono tutti i suoi fattori; è uguale a zero quando si annulla anche un solo fattore), potremo dividere per $(m+1)(m-1)$ ottenendo $x=\dfrac{m+3}{(m+1)(m-1)}$

- Se $m=1$ l'equazione diventa $0\cdot x=4$ *impross.*
- Se $m=-1$ l'equazione diventa $0\cdot x=2$ *impross.*

3) $\dfrac{1}{3}ax+x-\dfrac{2}{3}=\dfrac{ax}{2}-\dfrac{1}{6}b$

$\dfrac{2ax+6x-4}{6}=\dfrac{3ax-b}{6};\quad 2ax-3ax+6x=-b+4;\quad -ax+6x=-b+4;\quad ax-6x=b-4$

$\boxed{(a-6)x=b-4}$

**NOTA** ♥ **$0\cdot x$ = un numero diverso da zero IMPOSSIBILITA'**
**$0\cdot x=0$ INDETERMINAZIONE (infinite soluzioni)**

Se $a-6\neq 0$, ossia $a\neq 6$, $x=\dfrac{b-4}{a-6}$

Se $a=6$ l'equazione diventa $0\cdot x=b-4$ (NOTA)
- *impossibile se* $b-4\neq 0$, *ossia* $b\neq 4$
- *indeterminata* $(0\cdot x=0)$ *se* $b=4$

4) $3(px-4)-q=0$

$3px-12-q=0$

$\boxed{3px=q+12}$

Se $3p\neq 0$, ossia $p\neq 0$: $x=\dfrac{q+12}{3p}$

Se $p=0$ l'equazione diventa $3\cdot 0\cdot x=q+12$

$0\cdot x=q+12$
- *impross. se* $q+12\neq 0$, *ossia* $q\neq -12$
- *indet. se* $q=-12$

5) $a(x-1)+5=x+b$

$ax-a+5=x+b;\quad ax-x=a+b-5$

$\boxed{(a-1)x=a+b-5}$

Se $a-1\neq 0$, ossia $a\neq 1$, $x=\dfrac{a+b-5}{a-1}$

Se $a=1$ l'equazione diventa $0\cdot x=1+b-5$

$0\cdot x=b-4$
- *impossibile se* $b\neq 4$
- *indeterminata se* $b=4$

6) $(a-b)^2x-1=a+b(bx+1)$

$a^2x-2abx+b^2x-1=a+b^2x+b;\quad a^2x-2abx=a+b+1$

$\boxed{a(a-2b)x=a+b+1}$

Se $a(a-2b)\neq 0$, ossia $a\neq 0\wedge a\neq 2b$, $x=\dfrac{a+b+1}{a(a-2b)}$

- Se $a=0$ l'equazione diventa $0\cdot x=b+1$
  - *impross. se* $b\neq -1$
  - *indet. se* $b=-1$
- Se $a=2b$ l'equazione diventa $0\cdot x=2b+b+1$, quindi $0\cdot x=3b+1$
  - *impross. se* $b\neq -\dfrac{1}{3}$
  - *indet. se* $b=-\dfrac{1}{3}$ *perciò* $a=2b=-\dfrac{2}{3}$

7) $x\left(a^3+1\right)-a^2\left(3x+b\right)=a-x\left(2a-1\right)$

$a^3x+\cancel{x}-3a^2x-a^2b=a-2ax+\cancel{x}$

$\boxed{a^3x-3a^2x-a^2b=a-2ax}$

Si osserva a questo punto che l'equazione è semplificabile per $a$ !
Ora, SEMPLIFICARE equivale a DIVIDERE, e, di nuovo,

**UNA DIVISIONE E' EFFETTUABILE SOLTANTO SE**
**IL NUMERO PER CUI SI INTENDE DIVIDERE E' DIVERSO DA ZERO!**

Quindi dovremo DISTINGUERE DUE CASI:

Se $\boxed{a\neq 0}$ è possibile semplificare, ottenendo:

$a^{\cancel{3}^{2}}x-3a^{\cancel{2}}x-a^{\cancel{2}}b=\overset{1}{\cancel{a}}-2\cancel{a}x$

$a^2x-3ax-ab=1-2x$

Se $\boxed{a=0}$ l'equazione diventa

$0\cdot x-0\cdot x-0\cdot b=0-0\cdot x$

$0=0$

INDETERMINATA

Proseguiamo ora, ponendoci nel caso $a\neq 0$, con l'equazione semplificata:

$$a^2x-3ax-ab=1-2x$$
$$a^2x-3ax+2x=ab+1$$
$$\left(a^2-3a+2\right)x=ab+1$$
$$\boxed{(a-1)(a-2)x=ab+1}$$

Se $(a-1)(a-2)\neq 0$, cioè $\boxed{a\neq 1\wedge a\neq 2}$:

$$x=\frac{ab+1}{(a-1)(a-2)}$$

Se $\boxed{a=1}$ l'equazione diventa:

$(1-1)(1-2)x=1\cdot b+1$

$0\cdot x=b+1$ $\begin{cases}\text{impossibile se } b\neq -1\\ \text{indeterminata se } b=-1\end{cases}$

Se $\boxed{a=2}$ l'equazione diventa:

$(2-1)(2-2)x=2b+1$

$0\cdot x=2b+1$ $\begin{cases}\text{impossibile se } b\neq -\frac{1}{2}\\ \text{indeterminata se } b=-\frac{1}{2}\end{cases}$

IN DEFINITIVA,
i CASI DI INDETERMINAZIONE sono:

- $a=0$, $b$ *qualsiasi (infinite equazioni)*
- $a=1$, $b=-1$
- $a=2$, $b=-\frac{1}{2}$

mentre i CASI DI IMPOSSIBILITA' sono:

- $a=1$, $b\neq -1$ (*infinite equazioni*)
- $a=2$, $b\neq -\frac{1}{2}$ (*infinite equazioni*)

*Per esercizio, dai, riprendi l'equazione iniziale*

$x\left(a^3+1\right)-a^2\left(3x+b\right)=a-x\left(2a-1\right)$

*e …*

- *va' a vedere cosa diventa nel caso* $a=1, b=-1$*: fatti i vari calcoli e passaggi, troverai un'equazione INDETERMINATA.*
- *Fai lo stesso con* $a=1, b=2$*: troverai un'equazione IMPOSSIBILE.*
- *Fai lo stesso con* $a=3, b=4$*: troverai un'equazione con una e una sola soluzione, data da*

$$x=\left[\frac{ab+1}{(a-1)(a-2)}\right]_{a=3,\,b=4}=$$
$$=\frac{3\cdot 4+1}{(3-1)(3-2)}=\frac{12+1}{2\cdot 1}=\frac{13}{2}$$

## ESERCIZI SULLE EQUAZIONI LETTERALI CON DISCUSSIONE

(*soluzioni alle pagine 391, 392, 393*)

1) Scrivi l'equazione che si ottiene dall'equazione letterale $m(1+x)=2(1+m)$ dando a $m$ il valore $-4$. Risolvi l'equazione. Fai lo stesso per $m=1,\ m=3,\ m=0$. Poi risolvi e discuti l'equazione "generale" per vedere se il suo risultato va d'accordo con quanto hai stabilito nei casi particolari considerati.

2) Scrivi l'equazione che si ottiene dall'equazione letterale $\frac{k(x+k)}{2}=x(k+1)$ dando a $k$, successivamente, i valori $2,\ 1,\ 0, -1, -2$. Risolvi l'equazione nei vari casi. Poi risolvi e discuti l'equazione "generale" e controlla se c'è accordo con quanto ricavato in precedenza.

3) Risolvi l'equazione che si ottiene dall'equazione letterale $ax+1=2(a-x+1)$ attribuendo al parametro i valori $2,\ 1,\ 0, -1, -2$. Successivamente risolvi e discuti l'equazione "generale".

4) Risolvi l'equazione che si ottiene dall'equazione letterale $p(1-x)+2(x-q)=0$ per:
a) $p=3, q=5$ b) $p=1, q=-3$ c) $p=2, q=1$ d) $p=2, q=4$.
Successivamente risolvi e discuti l'equazione "generale".

RISOLVI E DISCUTI le seguenti equazioni letterali:

5) a) $ax-1=0$ b) $ax-a=0$ c) $ax-1=a$ d) $mx+n=0$ e) $2(x-1)=a$ f) $ax-2=b$

6) $m(x-5)=3x$

7) $ax=4(2-x)$ Dopo aver risolto l'equazione letterale $ax=4(2-x)$, poni, in essa, al posto di $a$ il valore 3 e risolvi l'equazione numerica così ottenuta, controllando che il risultato "particolare" e quello generale vadano d'accordo. Fai poi lo stesso con $a=0,\ a=4,\ a=-3,\ a=-4$.

8) $\frac{x}{2}-\frac{1}{6}=k(2x-1)+\frac{1}{3}$ 9) $b(x-4)=b-x$ 10) $\frac{c(x-1)}{3}=x+1$ 11) $ax+b=3(2b-x)+1$

12) $\frac{bx-a}{4}+1=2x$ Dopo aver risolto l'equazione letterale $\frac{bx-a}{4}+1=2x$, poni, in essa, $a=1$ e $b=-1$, e risolvi l'equazione numerica così ottenuta, controllando che il risultato "particolare" e quello generale vadano d'accordo. Fai poi lo stesso con $\begin{cases}a=5\\b=9\end{cases}$, $\begin{cases}a=3\\b=7\end{cases}$, $\begin{cases}a=3\\b=8\end{cases}$, $\begin{cases}a=4\\b=8\end{cases}$, $\begin{cases}a=4\\b=7\end{cases}$, $\begin{cases}a=-2\\b=5\end{cases}$

13) $(p+1)x+4=n$ 14) $3(bx-a)+1=0$ 15) $4x(1-m)=2q-m^2x$

16) $p(x-1)+x(q-2)=q(x+1)-(x+5)$ 17) $bx+a^2=(a+1)^2-(a+b+2)$ 18) $px+1=s+2(x-p)$

19) $\frac{mx+m}{6}=\frac{x+2a}{3}-\frac{a}{2}$ 20) $\frac{p(x-q)-1}{10}=x$ 21) $a(x-1)+b(x+1)+2=0$ 22) $b(x-1)-c(x+1)=x$

23) $k(x-1)-2h=0$ 24) $m(x-1)=n$ 25) $h+2x=\frac{k}{2}(x-1)$ 26) $\frac{h}{2}(x-h)+2=x$

27) $s(sx-2x-1)=1$ 28) $x(m^2+k)-(k+9)(x+1)+8=0$ 29) $a(ax-1)+1=-ax$

30) $(k-1)^2x+2(kx-n)=2x$ 31) $c(2-dx)+d(1-cx)+2=0$ 32) $r(r^2x-s)=r^2x+2$

33) $4abx-3=a+2b$ 34) $x(k^2+1)=k(2x+1)$ 35) $a(ax-1)=2(3x+b)+ax$

36) $a(bx-2x+1)=2(a-x)+b(x+1)$ 37) $p(qx-2)+1=0$ 38) $mx-4=(-m-2)(-m+2)+m$

39) $a(x-2)-5x=(a-6)(a+4)-1$ 40) $b^2(x-1)+x=x(2b+1)$ 41) $4a^2(3x-4)+1=(7a-1)x$

42) $bx-3(x-1)=c-2x$ 43) $\frac{6+n^2(n+x)}{3}=2-\frac{n(1+n)(1-n)}{3}$ 44) $2(ax-1)=a+b$ 45) $3(ax-1)=-bx$

46) $\frac{ax}{10}-\frac{1}{2}bx+\frac{1}{10}=\frac{a}{5}+\frac{1}{10}b-1$ 47) $c(3x-1)-1=d(2x+1)$ 48) $a(ax-bx-1)=b+6$

49) $(a-b)x=x+a+b$ 50) $q(1+x)+1=p(1-x)+x$ 51) $\frac{b(x-1)}{2}+1=cx$

52) $a(x-a)+3b(2a-x)=9b^2$ 53) $a(x-1)=\frac{1-\left[b(x+1)+x\right]}{2}$

54) $b(3bx-1)=a-c$ 55) $r(x-1)+s(x+1)=0$

56) Per quale valore del parametro l'equazione letterale seguente: $k(x-1)+3=5x$ ha per soluzione
a) 2? b) 0? c) $-3$? d) 1?

57) Per quale valore del parametro l'equazione letterale seguente: $m(x+1)=1$ ha per soluzione
a) 2? b) 0? c) 1? d) $-1$?

58) Per quale valore del parametro l'equazione letterale seguente: $hx-1=2(h-x)$ ha per soluzione
a) 0? b) 1? c) 2? d) 3?

59) Quali valori occorre dare ai due parametri *a*, *b* in modo che l'equazione $a(x-3)+b=1-x$ risulti indeterminata?

60) Può l'equazione $x=\frac{m}{2}(x-1)$ risultare impossibile? E indeterminata?

61) Può l'equazione $ax-1=(a-1)(a+1)+a(1-x)$
a) risultare impossibile? b) essere indeterminata? c) avere per soluzione $x=0$?

62) Per quale valore del numero *k* l'equazione $3(2x+1)-x=k(x+1)-2$ è impossibile?
a) Per $k=0$? b) o per $k=5$? c) o per $k=-5$? d) o per nessun valore di $k$?

63) Seleziona l'affermazione corretta. L'equazione $3(x+5)+11x=7(2x+2)+1$
a) ha come unica soluzione $x=0$ b) non ha nessuna soluzione c) ha infinite soluzioni
d) nessuna delle affermazioni precedenti è vera

64) Seleziona l'affermazione corretta. L'equazione $3ax-5=x$ ha come soluzione $x=0$
a) quando $a=\frac{1}{3}$ b) quando $a=0$ c) quando $a=-1$ d) per nessun valore di *a*

65) Seleziona l'affermazione corretta. L'equazione $x^n=x+2$ ha come soluzione $x=-1$
a) quando *n* è pari b) quando *n* è dispari c) solo quando *n*=2 d) nessuna delle risposte precedenti è esatta

66) Per quale valore del numero *k* le due equazioni $4(x+1)=x-2$ e $2x+1=k$ hanno la stessa soluzione?
a) Per $k=-5$? b) Per $k=-3$? c) Per $k=-1$? d) Per nessun valore di $k$?

67) Per quale valore del numero *h* le due equazioni $2(x-2h)+h=1$ e $\frac{x}{2}+\frac{1-h}{3}+\frac{1}{6}h=0$
hanno la stessa soluzione? E qual è il valore della soluzione comune?

68) Per quale valore di *m* accade che la soluzione dell'equazione $x-1=\frac{m}{3}$ è uguale al doppio
della soluzione dell'equazione $x+1=\frac{x+m}{2}$? E quanto valgono in tal caso tali soluzioni?

69) Scrivi un'equazione letterale, col parametro *a*, della quale le equazioni seguenti:
$13x=9$; $6x=2$; $0\cdot x=-4$
siano casi particolari, ottenuti assegnando al parametro un determinato valore.

70) Scrivi un'equazione letterale, col parametro *a*, che:
sia impossibile quando $a=3$; abbia soluzione nulla quando $a=2$ e anche quando $a=1$

# SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULLE EQUAZIONI LETTERALI CON DISCUSSIONE

## OSSERVAZIONE METODOLOGICA

Di fronte all'equazione letterale (tanto per fare un esempio) $(k-2)x = m-3$,

si potrebbe anche dividere "brutalmente" per $(k-2)$, ottenendo $x = \dfrac{m-3}{k-2}$,

per ragionare poi sulla **frazione** ottenuta,
domandandosi per quali valori di $k$ e di $m$
essa "salta" perché risulta

- impossibile (denominatore nullo, numeratore non nullo)
- oppure indeterminata (denom. e num. entrambi nulli).

♥ $\dfrac{\textbf{numero diverso da zero}}{\mathbf{0}}$ **= fraz. IMPOSSIBILE**

$\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ **= frazione INDETERMINATA**

Il ragionamento sull'*equazione* (con la distinzione: determinata, indeterminata, impossibile)
verrebbe allora sostituito da un ragionamento sulla *frazione*. Si farebbe, in pratica, così:

$(k-2)x = m-3;$

$x = \dfrac{m-3}{k-2}$ se $k \neq 2$; con $k = 2$ la frazione diventa $x = \dfrac{m-3}{0}$ che è $\begin{cases} \text{indet.}\left(\dfrac{0}{0}\right) \text{ con } m = 3 \\ \text{imposs. con } m \neq 3 \end{cases}$

In questo modo, le conclusioni sarebbero identiche a quelle che si possono trarre ragionando sull'equazione,
perché, se noi mettiamo a confronto l'equazione $ax = b$ e la frazione $x = \dfrac{b}{a}$, vediamo che

♪ l'etichetta di "indeterminazione" si appiccica *tanto* all'equazione, *quanto* alla frazione, nel caso $a = b = 0$
♫ e l'etichetta di "impossibilità" si appiccica *tanto* all'equazione, *quanto* alla frazione, nel caso $a = 0,\ b \neq 0$

A parere di chi scrive, il ragionamento "sull'equazione" è più lineare e diretto, e quindi preferibile.

D'altronde, per qual motivo una frazione del tipo $\dfrac{\textit{numero diverso da zero}}{0}$ è considerata
"IMPOSSIBILE"?
Il motivo è che tale frazione esprime (frazione = divisione = operazione inversa della moltiplicazione)
la ricerca di un numero $x$, tale che $x \cdot 0 = \textit{numero diverso da zero}$; e tale **equazione** è *impossibile*.
Cose analoghe si potrebbero dire sull'indeterminazione.
Dunque sono sempre le **equazioni**, più che le frazioni, il FONDAMENTO del pensiero, in questi contesti.
Tuttavia anche il ragionamento "sulla frazione" può avere i suoi vantaggi; se non altro, vantaggi di brevità.

1) Con $m = -4$ si trova l'equazione $-4(1+x) = 2(1-4)$ che ha per soluzione $x = \dfrac{1}{2}$.
Con $m = 1,\ m = 3,\ m = 0$ si trova rispettivamente $x = 3,\ x = 5/3$, equazione impossibile.
Risolvendo e discutendo l'equazione generale si ottiene $x = \dfrac{m+2}{m}$ $(m \neq 0)$, e impossibilità con $m = 0$.

$\left[\dfrac{m+2}{m}\right]_{m=-4} = \dfrac{1}{2},\quad \left[\dfrac{m+2}{m}\right]_{m=1} = 3,\quad \left[\dfrac{m+2}{m}\right]_{m=3} = \dfrac{5}{3},\quad \left[\dfrac{m+2}{m}\right]_{m=0} = \textit{impossibile}$

2) Risolvendo e discutendo l'equazione generale si ottiene $x = \dfrac{k^2}{k+2}$ $(k \neq -2;\ \textit{con } k = -2,\ \textit{impross.})$, e:

$\left[\dfrac{k^2}{k+2}\right]_{k=2} = 1,\quad \left[\dfrac{k^2}{k+2}\right]_{k=1} = \dfrac{1}{3},\quad \left[\dfrac{k^2}{k+2}\right]_{k=0} = 0,\quad \left[\dfrac{k^2}{k+2}\right]_{k=-1} = 1,\quad \left[\dfrac{k^2}{k+2}\right]_{k=-2} = \textit{impossibile}$

3) $x = \dfrac{2a+1}{a+2}$ $(a \neq -2)$ 4) $x = \dfrac{2q-p}{2-p} = \dfrac{p-2q}{p-2}$ $(p \neq 2)$

5) a) $x = \dfrac{1}{a}$ $(a \neq 0)$; *con* $a = 0$ *è impross.* b) $x = 1$ $(a \neq 0)$; *con* $a = 0$ *è indet.*

c) $x = \dfrac{a+1}{a}$ $(a \neq 0)$; *con* $a = 0$ *è impross.* d) $x = -\dfrac{n}{m}$ $(m \neq 0)$; *con* $m = 0$ *è*: $\begin{cases} \textit{impross. se } n \neq 0 \\ \textit{indet. se } n = 0 \end{cases}$

e) $x = \dfrac{a+2}{2}$. L'eq. non è mai impross. o indet. f) $x = \dfrac{b+2}{a}$ $(a \neq 0)$; *con* $a = 0$ *è*: $\begin{cases} \textit{impross. se } b \neq -2 \\ \textit{indet. se } b = -2 \end{cases}$

6) *Se* $m \neq 3 : x = \dfrac{5m}{m-3}$; *se* $m = 3$ *è impross.*

7) $x = \dfrac{8}{a+4}$ $(a \neq -4)$; *con* $a = -4$, *impross.* 8) $x = \dfrac{1-2k}{1-4k} = \dfrac{2k-1}{4k-1}$ $\left(k \neq \dfrac{1}{4}\right)$; *con* $k = \dfrac{1}{4}$, *impross.*

9) $x = \dfrac{5b}{b+1}$ $(b \neq -1)$; *con* $b = -1$, *impross.* 10) $x = \dfrac{c+3}{c-3}$ $(c \neq 3)$; *con* $c = 3$, *impross.*

11) *Se* $a \neq -3 : x = \dfrac{5b+1}{a+3}$; *se* $a = -3 \wedge b \neq -\dfrac{1}{5}$ : *impross.*; *se* $a = -3 \wedge b = -\dfrac{1}{5}$ : *indet.*

12) $x = \dfrac{a-4}{b-8}$ $(b \neq 8)$; *con* $b = 8 : \begin{cases} \text{impross. se } a \neq 4 \\ \text{indet. se } a = 4 \end{cases}$ 13) $x = \dfrac{n-4}{p+1}$ $(p \neq -1)$; *con* $p = -1 : \begin{cases} \text{se } n \neq 4 \text{ impross.} \\ \text{se } n = 4 \text{ indet.} \end{cases}$

14) $x = \dfrac{3a-1}{3b}$ $(b \neq 0)$; *se* $b = 0 : \begin{cases} \text{con } a \neq \dfrac{1}{3}, \text{ impross.} \\ \text{con } a = \dfrac{1}{3}, \text{ indet.} \end{cases}$ 15) $x = \dfrac{2q}{(m-2)^2}$ $(m \neq 2)$; *con* $m = 2 : \begin{cases} q \neq 0 : \text{impross.} \\ q = 0 : \text{indet.} \end{cases}$

16) *Se* $p \neq 1 : x = \dfrac{p+q-5}{p-1}$; *se* $p = 1 : \begin{cases} q \neq 4 : \text{impross.} \\ q = 4 : \text{indet.} \end{cases}$

17) $x = \dfrac{a-b-1}{b}$ $(b \neq 0)$; *con* $b = 0 : \begin{cases} \text{impross. se } a \neq 1 \\ \text{indet. se } a = 1 \end{cases}$

18) $x = \dfrac{s-2p-1}{p-2}$ $(p \neq 2)$; *con* $p = 2 : \begin{cases} \text{impross. se } s \neq 5 \\ \text{indet. se } s = 5 \end{cases}$

19) $x = \dfrac{a-m}{m-2}$ $(m \neq 2)$; *con* $m = 2 : \begin{cases} \text{impross. se } a \neq 2 \\ \text{indet. se } a = 2 \end{cases}$

20) $x = \dfrac{pq+1}{p-10}$ $(p \neq 10)$; *con* $p = 10 : \begin{cases} \text{impross. se } q \neq -1/10 \\ \text{indet. se } q = -1/10 \end{cases}$

21) $x = \dfrac{a-b-2}{a+b}$ $(a \neq -b)$; *con* $a = -b : \begin{cases} \text{impross. se } b \neq -1 \\ \text{indet. se } b = -1 \text{ (quindi } a = 1) \end{cases}$

22) $x = \dfrac{b+c}{b-c-1}$ $(b \neq c+1)$; *con* $b = c+1 : \begin{cases} \text{impross. se } c \neq -1/2 \\ \text{indet. se } c = -1/2 \text{ (quindi } b = 1/2) \end{cases}$

23) *Se* $k \neq 0 : x = \dfrac{k+2h}{k}$; *se* $k = 0 : \begin{cases} h \neq 0 : \text{impross.} \\ h = 0 : \text{indet.} \end{cases}$

24) $x = \dfrac{m+n}{m}$ $(m \neq 0)$; *con* $m = 0 : \begin{cases} \text{impross. se } n \neq 0 \\ \text{indet. se } n = 0 \end{cases}$

25) $x = \dfrac{2h+k}{k-4}$ $(k \neq 4)$; *con* $k = 4 : \begin{cases} \text{imp. se } h \neq -2 \\ \text{ind. se } h = -2 \end{cases}$

26) $x = h+2$ $(h \neq 2)$; *con* $h = 2$, *indet.* 27) *Se* $s \neq 0 \wedge s \neq 2 : x = \dfrac{s+1}{s(s-2)}$; *se* $s = 0$ : *impross.* *se* $s = 2$ : *impross.*

28) *Se* $m \neq \pm 3 : x = \dfrac{k+1}{(m+3)(m-3)}$; *se* $m = 3 \wedge k = -1$ : *indet.*; *se* $m = 3 \wedge k \neq -1$ : *impross.* *se* $m = -3 \wedge k = -1$ : *indet.*; *se* $m = -3 \wedge k \neq -1$ : *impross.*

29) $x = \dfrac{a-1}{a(a+1)}$ $(a \neq 0, a \neq -1)$; *con* $a = 0$ : *impross.*; *con* $a = -1$ : *impross.*

30) $x = \dfrac{2n}{(k+1)(k-1)}$ $(k \neq \pm 1)$; *con* $k = 1 \vee k = -1 : \begin{cases} \text{impross. se } n \neq 0 \\ \text{indet. se } n = 0 \end{cases}$

31) $x = \dfrac{2c+d+2}{2cd}$ $\begin{pmatrix} c \neq 0 \\ d \neq 0 \end{pmatrix}$; *se* $c = 0 : \begin{cases} \text{impross. se } d \neq -2 \\ \text{indet. se } d = -2 \end{cases}$; *se* $d = 0 : \begin{cases} \text{impross. se } c \neq -1 \\ \text{indet. se } c = -1 \end{cases}$

32) $x = \dfrac{rs+2}{r^2(r-1)}$ $(r \neq 0,\ r \neq 1)$; *con* $r = 0$ : *impross.*; *con* $r = 1 : \begin{cases} \text{impross. se } s \neq -2 \\ \text{indet. se } s = -2 \end{cases}$

33) $x = \dfrac{a+2b+3}{4ab}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$; *con* $a = 0 : \begin{cases} \text{imp. se } b \neq -3/2 \\ \text{ind. se } b = -3/2 \end{cases}$; *con* $b = 0 : \begin{cases} \text{imp. se } a \neq -3 \\ \text{ind. se } a = -3 \end{cases}$

34) *Se* $k \neq 1 : x = \dfrac{k}{(k-1)^2}$; *se* $k = 1$ : *impross.*

35) *Se* $a \neq 3 \wedge a \neq -2 : x = \dfrac{a+2b}{(a-3)(a+2)}$; *se* $a = 3 \wedge b = -3/2$ : *indet.*; *se* $a = 3 \wedge b \neq -3/2$ : *impross.*
*se* $a = -2 \wedge b = 1$ : *indet.*; *se* $a = -2 \wedge b \neq 1$ : *impross.*

36) *Se* $a \neq 1 \wedge b \neq 2 : x = \dfrac{a+b}{(a-1)(b-2)}$; *se* $a = 1 \wedge b = -1$ : *indet.*; *se* $a = 1 \wedge b \neq -1$ : *impross.*;
*se* $b = 2 \wedge a = -2$ : *indet.*; *se* $b = 2 \wedge a \neq -2$ : *impross.*

37) *Se* $p \neq 0 \wedge q \neq 0 : x = \dfrac{2p-1}{pq}$; *se* $p = 0$ : *impross.*; *se* $q = 0 \wedge p \neq \dfrac{1}{2}$ : *impross.*; *se* $q = 0 \wedge p = \dfrac{1}{2}$ : *indet.*

38) *Se* $m \neq 0 : x = m+1$; *se* $m = 0$ : *indet.* 39) *Se* $a \neq 5 : x = a+5$; *se* $a = 5$ : *indet.*

40) *Se* $b \neq 0 \wedge b \neq 2 : x = \dfrac{b}{b-2}$; *se* $b = 0$ : *indet.*; *se* $b = 2$ : *impross.*

41) $12a^2 - 7a + 1 = 12a^2 - 4a - 3a + 1 = \ldots$ *Se* $a \neq \dfrac{1}{4} \wedge a \neq \dfrac{1}{3} : x = \dfrac{4a+1}{3a-1}$; *se* $a = \dfrac{1}{4}$ : *ind.*; *se* $a = \dfrac{1}{3}$ : *imp.*

42) *Se* $b \neq 1 : x = \dfrac{c-3}{b-1}$; *se* $b = 1 : \begin{cases} c \neq 3 : \textit{impross.} \\ c = 3 : \textit{indet.} \end{cases}$ 43) *Se* $n \neq 0 : x = -\dfrac{1}{n}$; *se* $n = 0$ : *indet.*

44) *Se* $a \neq 0 : x = \dfrac{a+b+2}{2a}$; *se* $a = 0 : \begin{cases} b \neq -2 : \textit{impross.} \\ b = -2 : \textit{indet.} \end{cases}$ 45) *Se* $b \neq -3a : x = \dfrac{3}{3a+b}$; *se* $b = -3a$ : *impross.*

46) *Se* $a \neq 5b : x = \dfrac{2a+b-11}{a-5b}$; *se* $a = 5b : \begin{cases} \textit{indet. se } b = 1 \textit{ (e quindi } a = 5) \\ \textit{impross. se } b \neq 1 \end{cases}$

47) *Se* $c \neq \dfrac{2}{3}d : x = \dfrac{c+d+1}{3c-2d}$; *se* $c = \dfrac{2}{3}d : \begin{cases} \textit{indet. se } d = -3/5 \ \left(\textit{e quindi } c = -2/5\right) \\ \textit{impross. se } d \neq -3/5 \end{cases}$

48) *Se* $a \neq 0 \wedge a \neq b : x = \dfrac{a+b+6}{a(a-b)}$; *se* $a = 0 \wedge b = -6$ : *indet.*; *se* $a = 0 \wedge b \neq -6$ : *impross.*
*se* $a = b = -3$ : *indet.*; *se* $a = b \neq -3$ : *impross.*

49) *Se* $a \neq b+1 : x = \dfrac{a+b}{a-b-1}$; *se* $a = b+1 : \begin{cases} \textit{indet. se } b = -1/2 \ \left(\textit{e quindi } a = 1/2\right) \\ \textit{impross. se } b \neq -1/2 \end{cases}$

50) $x = \dfrac{p-q-1}{p+q-1} \ \left(q \neq 1-p\right)$; *se* $q = 1-p : \begin{cases} \textit{impross. con } p \neq 1 \\ \textit{indet. con } p = 1 \ (\rightarrow q = 0) \end{cases}$

51) $x = \dfrac{b-2}{b-2c} \ (b \neq 2c)$; *con* $b = 2c : \begin{cases} \textit{impross. se } c \neq 1 \\ \textit{indet. se } c = 1 \ (\rightarrow b = 2) \end{cases}$

52) *Se* $a \neq 3b : x = a - 3b$; *se* $a = 3b$ : *indet.*

53) *Se* $b \neq -2a - 1 : x = \dfrac{2a-b+1}{2a+b+1}$; *se* $b = -2a - 1 : \begin{cases} \textit{indet. se } a = -1/2 \ (\textit{e quindi } b = 0) \\ \textit{impross. se } a \neq -1/2 \end{cases}$

54) *Se* $b \neq 0 : x = \dfrac{a+b-c}{3b^2}$; *se* $b = 0 : \begin{cases} \textit{indet. se } a = c \\ \textit{impross. se } a \neq c \end{cases}$

55) *Se* $r \neq -s : x = \dfrac{r-s}{r+s}$; *se* $r = -s \neq 0$ : *impross*; *se* $r = 0 \wedge s = 0$ : *indet.*

56) a) La soluzione è $x = \dfrac{k-3}{k-5} \ (k \neq 5)$ ed è uguale a 2 se $\dfrac{k-3}{k-5} = 2$; $k - 3 = 2k - 10$; $k = 7$.
Oppure: $k(x-1) + 3 = 5x$ ha per soluzione $x = 2$ se e solo se, sostituendo 2 al posto di *x*,
si ottiene un'uguaglianza vera; dunque $k(2-1) + 3 = 5 \cdot 2$; $k + 3 = 10$; $k = 7$.
b) $k = 3$ c) $k = 9/2$ d) impross.: per nessun valore di *k* questa equaz. può avere come soluz. $x = 1$

57) a) $m = 1/3$ b) $m = 1$ c) $m = 1/2$ d) impross. 58) a) $h = -1/2$ b) $h = 1$ c) impross. d) $h = -5$

59) $a = -1, b = -2$ 60) E' impross. con $m = 2$. Non può mai essere indeterminata, per nessun valore di *m*.

61) a) Non può mai essere impross., per nessun valore di *a* b) E' indet. con $a = 0$ c) Con $a = -1$ e $a = 0$

62) d) 63) c) 64) d) 65) a) 66) b) 67) Per $h = -1$; $x = -1$ 68) Per $m = 3$; $x = 2$ e $x = 1$.

69) Ad esempio, $ax = a - 4$ oppure $(a+4)x = a$

70) Ad esempio, $(a-3)x = (a-2)(a-1)$

# 4. EQUAZIONI LETTERALI FRATTE

**Sono quelle che, oltre a presentare il parametro, contengono almeno una volta l'incognita a denominatore.**

Vediamo un **esempio**.

- $\dfrac{(a+1)x-2}{a^2x-6a^2-2ax+12a}+\dfrac{x-1}{ax-6a}=\dfrac{x+1}{ax-6a-2x+12}$

Scomponiamo i denominatori e facciamo il denominatore comune:

$$\frac{(a+1)x-2}{a(a-2)(x-6)}+\frac{x-1}{a(x-6)}=\frac{x+1}{(a-2)(x-6)}$$

$$\frac{ax+x-2+(a-2)(x-1)}{a(a-2)(x-6)}=\frac{a(x+1)}{a(a-2)(x-6)} \qquad x\neq 6 \quad (*) \qquad a\neq 0 \quad a\neq 2 \quad (**)$$

$$ax+x-2+ax-a-2x+2=ax+a$$

$$ax-x=a+a$$

$$(a-1)x=2a$$

| Se $a\neq 1$: | Se $a=1$: |
|---|---|
| $x=\dfrac{2a}{a-1}$ | $0\cdot x=2$ *impossibile* |

**C'è a questo punto una "coda".**
All'atto di spedir via il denominatore,
noi avevamo scritto la "condizione di accettabilità"
$x\neq 6$.

Ora, *in generale*, la soluzione trovata $x=\dfrac{2a}{a-1}$
*è*, in effetti, diversa da $6$;
tuttavia, può darsi che esista un valore del parametro $a$
per il quale tale soluzione risulti proprio uguale a 6!
Se ciò accadesse, per quel valore di $a$ l'equazione risulterebbe impossibile, in quanto dotata di soluzione non accettabile.

Si tratta quindi di andare a cercare quell'eventuale valore di $a$, impostando l'equazione

$$\frac{2a}{a-1}=6$$

nella quale $a$ fa da incognita.

$$\frac{2a}{a-1}=6$$

$$\frac{2a}{a-1}=\frac{6(a-1)}{a-1} \quad (a\neq 1)$$

$$2a=6a-6$$

$$-4a=-6$$

$$a=\frac{3}{2}$$

(*) ♥

**La condizione riferita all'incognita**
$x\neq 6$
**è una**
**"CONDIZIONE DI ACCETTABILITA' "**
e significa:
se alla fine dovesse capitare
di trovare come soluzione $x=6$,
bisognerebbe scrivere:
"soluzione NON ACCETTABILE".

(**) ♥

**Le condizioni riferite al parametro**
$a\neq 0$, $a\neq 2$
**hanno un significato COMPLETAMENTE DIVERSO: sono "CONDIZIONI PRELIMINARI",**
e significano:
al parametro $a$ possiamo attribuire
il valore che desideriamo,
ma con due eccezioni:
**non è lecito attribuire ad $a$ né il valore 0 né il valore 2, perché altrimenti si otterrebbe un'equazione priva di significato.**

**"Priva di significato" non equivale affatto a "impossibile":**

♪ **un'equazione "impossibile" è un'equazione che ha senso affrontare e cercare di risolvere, ma che non ha soluzioni, come un albero senza frutti;**

♫ **di fronte ad un'equazione "priva di significato", invece, si rimane bloccati fin dall'inizio, perché ci si trova a che fare con una o più operazioni non eseguibili.**

Ricapitoliamo:

- con $a=0 \vee a=2$ l'equazione non ha significato
- con $a=1$ l'equazione è impossibile
- con $a=\dfrac{3}{2}$ l'equazione è impossibile (soluzione non accettabile)
- con $a\neq 0 \wedge a\neq 1 \wedge a\neq 2 \wedge a\neq \dfrac{3}{2}$ l'equazione ha 1 e 1 sola soluzione e precisamente $x=\dfrac{2a}{a-1}$

Facciamo una **verifica**.

Cosa diventa la nostra equazione nel caso particolare $a=\frac{3}{2}$?

Sostituiamo:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}+1\right)x-2}{\frac{9}{4}x-\cancel{6}^{3}\cdot\frac{9}{\cancel{4}^{2}}-\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}x+\cancel{12}^{6}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}}+\frac{x-1}{\frac{3}{2}x-\cancel{6}^{3}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}}=\frac{x+1}{\frac{3}{2}x-\cancel{6}^{3}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}-2x+12}$$

$$\frac{\frac{5}{2}x-2}{\frac{9}{4}x-\frac{27}{2}-3x+18}+\frac{x-1}{\frac{3}{2}x-9}=\frac{x+1}{\frac{3}{2}x-9-2x+12}$$

$$\frac{\frac{5x-4}{2}}{\frac{9x-54-12x+72}{4}}+\frac{x-1}{\frac{3x-18}{2}}=\frac{x+1}{\frac{3x-18-4x+24}{2}}$$

$$\frac{\frac{5x-4}{2}}{\frac{-3x+18}{4}}+\frac{x-1}{\frac{3x-18}{2}}=\frac{x+1}{\frac{-x+6}{2}};\qquad \frac{5x-4}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{-3(x-6)}+(x-1)\cdot\frac{2}{3(x-6)}=(x+1)\cdot\frac{2}{-(x-6)};$$

$$-\frac{2(5x-4)}{3(x-6)}+\frac{2(x-1)}{3(x-6)}=-\frac{2(x+1)}{x-6};\qquad \frac{-10x+8+2x-2}{\cancel{3(x-6)}}=\frac{-6x-6}{\cancel{3(x-6)}}\qquad (x\neq 6)$$

$$-8x+6=-6x-6;\quad -2x=-12;\quad x=6\ \ \textit{NON ACCETTABILE, come ci attendevamo}$$

**Un altro esempio**:

- $\frac{1}{3(x+1)}+\frac{x+m}{m(x-4)(x+1)}=\frac{1}{m(x-4)}$

$$\frac{mx-4m+3x+3m}{\cancel{3m(x-4)(x+1)}}=\frac{3x+3}{\cancel{3m(x-4)(x+1)}}\qquad m\neq 0,\ \ x\neq 4,\ \ x\neq -1$$

$$mx\cancel{-4m}\cancel{+3x}\cancel{+3m}=\cancel{3x}+3$$

$$mx=m+3$$

$x=\frac{m+3}{m}$ (ricordiamo che avevamo già posto come condizione preliminare $m\neq 0$: con $m=0$ l'equazione sarebbe priva di significato).

La soluzione trovata $x=\frac{m+3}{m}$ in generale è accettabile;

non lo è, eccezionalmente, se risulta

$$\frac{m+3}{m}=4;\quad m+3=4m;\quad -3m=-3;\quad m=1 \qquad \textit{oppure} \qquad \frac{m+3}{m}=-1;\quad m+3=-m;\quad 2m=-3;\quad m=-\frac{3}{2}$$

**SCHEMA DI RICAPITOLAZIONE**

**Valori del parametro per cui l'equazione è:**

| Determinata | Impossibile | Indeterminata | Priva di significato |
|---|---|---|---|
| $\begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 1 \\ m\neq -\frac{3}{2} \end{cases}$ | $m=1$<br>$m=-\frac{3}{2}$ | | $m=0$ |

*Consigliate alcune verifiche, MOLTO istruttive! Ad esempio, per:*

$m=1$
$m=2$
$m=-3/2$
$m=-3$

| **EQUAZIONI LETTERALI FRATTE (NOTA) CON DISCUSSIONE ESERCIZI** | | | | Discussione | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Equazione** | | **Condizioni da porre** | **Soluzione (quando l'equaz. è determinata)** | **Determinata** | **Indet.** | **Impossibile** | **Priva di significato** |
| 1) $\frac{a-x}{a+2}+\frac{8ax}{a^2-a-6}=0$ | | $a\neq -2$<br>$a\neq 3$ | $x=\frac{3a-a^2}{7a+3}$ | $\begin{cases}a\neq -2\\ a\neq 3\\ a\neq -3/7\end{cases}$ | | $a=-3/7$ | $a=-2$<br>$a=3$ |
| 2) $\frac{6x}{a+8}-\frac{x}{a^2+8a}=\frac{5a^2x-1-\left[a(9x-1)-1\right]}{a^2(a+8)}$ | | $a\neq 0$<br>$a\neq -8$ | $x=\frac{1}{a+8}$ | $\begin{cases}a\neq 0\\ a\neq -8\end{cases}$ | | | $a=0$<br>$a=-8$ |
| 3) $\frac{x-b}{b^2+b}-\frac{x-2b}{b^2-b}=\frac{x}{1-b}$ | | $b\neq 0$<br>$b\neq \pm 1$ | $x=-\frac{b^2+3b}{(b+2)(b-1)}$ | $\begin{cases}b\neq 0\\ b\neq \pm 1\\ b\neq -2\end{cases}$ | | $b=-2$ | $b=0$<br>$b=\pm 1$ |
| 4) $\frac{x}{2m+1}-5\frac{x}{2m-1}+\frac{m+6x}{4m^2-1}=0$ | | $m\neq \pm\frac{1}{2}$ | $x=\frac{1}{8}$ | $\begin{cases}m\neq \pm 1/2\\ m\neq 0\end{cases}$ | $m=0$ | | $m=\pm 1/2$ |
| 5) $\frac{x}{b^2}-\frac{x}{a^2}=\frac{a-b}{ab}$ | NOTA:<br>*per la precisione le equaz. da 1) a 6) sono letterali ma non "fratte", perché in esse l'incognita NON compare a denominatore.* | $a\neq 0$<br>$b\neq 0$ | $x=\frac{ab}{a+b}$ | $\begin{cases}a\neq 0\\ b\neq 0\\ a\neq b\\ a\neq -b\end{cases}$ | $a=b$<br>$(\neq 0)$ | $a=-b$<br>$(\neq 0)$ | $a=0$<br>$b=0$ |
| 6) $\frac{11kx+4}{k(k+5)}=2x$ | | $k\neq 0$<br>$k\neq -5$ | $x=\frac{4}{k(2k-1)}$ | $\begin{cases}k\neq 0\\ k\neq -5\\ k\neq 1/2\end{cases}$ | | $k=1/2$ | $k=0$<br>$k=-5$ |
| 7) $\frac{1}{5x-1}-\frac{7a}{25x^2-1}=0$ | | $x\neq \pm\frac{1}{5}$ | $x=\frac{7a-1}{5}$ | $\begin{cases}a\neq 2/7\\ a\neq 0\end{cases}$ | | $a=2/7$<br>(*assegnando ad a questo valore si otterrebbe* $x=1/5$ *non acc.*)<br>$a=0$<br>(*assegnando ad a questo valore si otterrebbe* $x=-1/5$ *non acc.*) | |
| 8) $2\cdot\frac{a}{x-3}-\frac{a}{x+2}=\frac{1}{x^2-x-6}$ | | $x\neq 3$<br>$x\neq -2$ | $x=\frac{1-7a}{a}$ | $\begin{cases}a\neq 0\\ a\neq 1/10\\ a\neq 1/5\end{cases}$ | | $a=0$<br>$a=1/10$ ($x=3$ *non acc.*)<br>$a=1/5$ ($x=-2$ *non acc.*) | |

| **EQUAZIONI LETTERALI FRATTE CON DISCUSSIONE ESERCIZI** | | | Discussione | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Equazione** | **Condizioni da porre** | **Soluzione (quando l'equaz. è determinata)** | **Determinata** | **Indet.** | **Impossibile** | **Priva di significato** |
| 9) $\frac{a}{x-2}-\frac{3a-1}{x}=0$ | $x\neq 2$<br>$x\neq 0$ | $x=\frac{6a-2}{2a-1}$ | $\begin{cases} a\neq 1/2 \\ a\neq 1/3 \\ a\neq 0 \end{cases}$ | | $a=1/2$<br>$a=0$ $(x=2$ *non acc.*$)$<br>$a=1/3$ $(x=0$ *non acc.*$)$ | |
| 10) $\frac{x}{x-4}+a=0$ | $x\neq 4$ | $x=\frac{4a}{a+1}$ | $a\neq -1$ | | $a=-1$ | |
| 11) $\frac{x-3}{x-2}-\frac{1}{d}=\frac{21}{dx-2d}$ | $x\neq 2$<br>$d\neq 0$ | $x=\frac{3d+19}{d-1}$ | $\begin{cases} d\neq 0 \\ d\neq 1 \\ d\neq -21 \end{cases}$ | | $d=1$<br>$d=-21$ $(x=2$ *non acc.*$)$ | $d=0$ |
| 12) $\frac{1}{b^2+b}+\frac{2x-b}{bx-5b}=\frac{3x-5}{b(b+1)(x-5)}$ | $b\neq 0$<br>$b\neq -1$<br>$x\neq 5$ | $x=\frac{b+1}{2}$ | $\begin{cases} b\neq 0 \\ b\neq -1 \\ b\neq 9 \end{cases}$ | | $b=9$ $(x=5$ *non acc.*$)$ | $b=0$<br>$b=-1$ |
| 13) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{a}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}-\frac{1}{x-a}=2$ | $x\neq 0$<br>$a\neq 0$<br>$x\neq a$ | $x=\frac{a-1}{3}$ | $\begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq 1 \\ a\neq -1/2 \end{cases}$ | | $a=1$ $(x=0$ *non acc.*$)$<br>$a=-1/2$ $(x=a$ *non acc.*$)$ | $a=0$ |
| 14) $\frac{3k}{x-5}=1$ | $x\neq 5$ | $x=3k+5$ | $k\neq 0$ | | $k=0$ $(x=5$ *non acc.*$)$ | |
| 15) $\frac{3}{x-5}=\frac{1}{k}$ | $x\neq 5$<br>$k\neq 0$ | $x=3k+5$ | $k\neq 0$ | | | $k=0$ |
| 16) $\frac{x}{b^2-x^2}=\frac{b}{b+x}+\frac{1}{b-x}$ | $x\neq b$<br>$x\neq -b$ | $x=b+1$ | $\begin{cases} b\neq 0 \\ b\neq -1/2 \end{cases}$ | $b=0$ | $b=-1/2$ $(x=-b$ *non acc.*$)$ | |
| 17) $(c+1)\left(\frac{cx}{c^2-1}-\frac{c}{c+1}\right)=\frac{c^2x}{c-1}$ | $c\neq \pm 1$ | $x=-1$ | $\begin{cases} c\neq \pm 1 \\ c\neq 0 \end{cases}$ | $c=0$ | | $c=\pm 1$ |
| 18) $\frac{x}{x-a+2}-3=0$ | $x\neq a-2$ | $x=\frac{3a-6}{2}$ | $a\neq 2$ | | $a=2$ $(x=a-2$ *non acc.*$)$ | |

## ALTRI ESERCIZI SULLE EQUAZIONI LETTERALI CON LETTERE A DENOMINATORE

**Risolvi e discuti le equazioni seguenti:**

1) $\frac{2}{a+1}+\frac{a-1}{x-1}=1$ 2) $\frac{x}{x-2}=2\cdot\frac{b}{b-3}$ 3) $\frac{x}{m}-\frac{2x-3}{2m}=\frac{x+1}{x-1}$ 4) $\frac{a}{x-a-2}=\frac{2}{x-1}$ 5) $\frac{x+a}{x+3}-\frac{x^2+3}{x^2+3x}=0$

**Per le seguenti equazioni letterali, non è richiesta la discussione.**
**Si chiede di fare invece la verifica**, ossia, trovata la soluzione, di sostituirla al posto di *x* nell'equazione di partenza per controllare che l'uguaglianza sia, effettivamente, verificata.

6) $\frac{2}{x^2-a^2}-\frac{x}{x+a}+\frac{x}{x-a}=0$ 7) $\frac{\frac{x}{q}-\frac{x}{p}}{x+1}=\frac{1}{pq}$ 8) $\frac{x}{x^2-x-6}-\frac{c}{x-3}=0$ 9) $\frac{\frac{k+3}{x+3}-1}{2}+1=0$

10) $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$ 11) $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{x-a-b}=a^{-1}b^{-1}$ 12) $\frac{a}{x^2+x}+\frac{b}{2x+2}=3\cdot\frac{bx}{2x^2+2x}$

13) $\frac{1-\frac{1}{x}+b}{a-1}+1=0$ 14) $\frac{1}{ax-x-a+1}+\frac{1}{ax-x}+\frac{1}{x-x^2}=0$ 15) $\frac{a}{x^2+x-2}-\frac{b}{x^2-3x+2}=0$

16) $\frac{2x+a}{2x-a}-\frac{2x-a}{2x+a}=\frac{x+1}{4x^2-a^2}$ 17) $\frac{x-3}{x+k-1}=\frac{x+3}{x-k+1}$ 18) $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{x}}=\frac{b}{a}$ 19) $\frac{a}{4x^2-4}-\frac{b}{8x+8}=0$

## PROBLEMI CON DISCUSSIONE

20) Sia *a* un numero reale fissato.
Esiste un numero *x* tale che, addizionandogli *a* o moltiplicandolo per *a*, si ottenga il medesimo risultato?
In caso affermativo, stabilire il valore di *x*.

21) Sia *a* un numero reale non nullo fissato.
Determinare, qualora esista, il numero *x* tale che, dividendolo per *a* o diminuendolo di *a*, si ottenga lo stesso risultato.

22) Dati due numeri reali non nulli *a* e *b*,
quale numero *x* bisogna sommare ai due termini della frazione *a*/*b* per ottenere la frazione *b*/*a*?

23) Sia $a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$.
Quale numero occorre togliere a ciascuno dei due termini della frazione *a*/*b*
per ottenere il quadrato di tale frazione?

24) Determina quel numero che aumenta di 1 unità se lo si moltiplica per *m*.

25) Sottraendo *k* da un numero, o dividendolo per *k*, si ottiene il medesimo risultato.
Di che numero si tratta?

26) Quale numero occorre addizionare ad entrambi i termini di una frazione $a/b$, affinché questa raddoppi?

27) Trovare due numeri sapendo che il rapporto fra il 1° e il 2° è *r* e la differenza fra il 1° e il 2° è *d*.

28) Trovare due numeri sapendo che la loro somma è *s* e il loro rapporto è *r*.

## RISPOSTE

1) Perde significato con $a=-1$.
E' indeterminata con $a=1$: in tal caso, ne sono soluzione tutti i valori di *x*, tranne $x=1$.
Con $a\neq\pm1$, è $x=a+2$

2) Ha significato solo con $b\neq3$. E' impossibile quando $b=-3$. Per $b\neq\pm3$, è $x=\frac{4b}{b+3}$

3) Ha significato solo con $m\neq0$. E' impossibile se $m=\frac{3}{2}$. Con $m\neq\frac{3}{2}, m\neq0$ ha come soluz. $x=\frac{3+2m}{3-2m}$.

4) Si trova $x=-\frac{a+4}{a-2}$, sotto le condizioni $a\neq2,\ a\neq0,\ a\neq-1$. Con $a=2, a=0, a=-1$ l'equaz. è imposs.

[ La condizione di accettabilità $-\frac{a+4}{a-2}\neq a+2$ equivale a
$-a-4\neq a^2-4$ $(a\neq2)$; $a^2+a\neq0$; $a(a+1)\neq0$ ossia $a\neq0, a\neq-1$ ]

5) $x=\frac{3}{a}\ (a\neq 0,\ a\neq -1)$. Con $a=0\ \vee\ a=-1$ l'equazione è impossibile.

6) $x=-\frac{1}{a}$ 7) $x=\frac{1}{p-q-1}$ 8) $x=\frac{2c}{1-c}$ 9) $x=-(k+6)$ 10) $x=abc$ 11) $x=2(a+b)$ 12) $x=\frac{a}{b}$

13) $x=\frac{1}{a+b}$ 14) $x=\frac{a}{2}$ 15) $x=2\cdot\frac{a+b}{a-b}$ 16) $x=\frac{1}{8a-1}$ 17) $x=0$ 18) $x=\frac{a-b}{2}$ 19) $x=\frac{2a+b}{b}$

20) Il numero *x* esiste, ed è $x=\frac{a}{a-1}$.

Fa eccezione però il caso $a=1$. In questo caso il problema è impossibile: non c'è nessun numero *x* tale che addizionandogli 1 o moltiplicandolo per 1 si ottenga il medesimo risultato.

Facciamo la verifica? Ma sì, dài:

$\frac{a}{a-1}\boxed{+a}=\frac{a+a(a-1)}{a-1}=\frac{\cancel{a}+a^2-\cancel{a}}{a-1}=\boxed{\frac{a^2}{a-1}}$; $\frac{a}{a-1}\boxed{\cdot a}=\boxed{\frac{a^2}{a-1}}$ *OK, stesso risultato.*

*Ad es., nel caso* $a=3$, *il numero x è* $\left[\frac{a}{a-1}\right]_{a=3}=\frac{3}{2}$: *e infatti* $\frac{3}{2}+3=\frac{3+6}{2}=\frac{9}{2}$ *e anche* $\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{2}$

21) Il numero *x* in generale esiste, e vale $x=\frac{a^2}{a-1}$.

Soltanto nel caso particolare $a=1$, il problema è impossibile.

22) $x=-(a+b)$. Se però $a=b$, allora il problema è indeterminato:
infatti, in questo caso particolare, ogni numero *x* è soluzione del problema, escluso soltanto $x=-b$.

23) Nel caso generale $a\neq\pm b$, il numero è $\frac{ab}{a+b}$.

Il problema è invece:
- indeterminato se $a=b$ (in questo caso, qualsiasi numero va bene tranne il numero $b$);
- impossibile se $a=-b$.

Verifica: $\dfrac{a-\frac{ab}{a+b}}{b-\frac{ab}{a+b}}=\dfrac{\frac{a(a+b)-ab}{a+b}}{\frac{b(a+b)-ab}{a+b}}=\dfrac{\frac{a^2+\cancel{ab}-\cancel{ab}}{a+b}}{\frac{\cancel{ab}+b^2-\cancel{ab}}{a+b}}=\frac{a^2}{\cancel{a+b}}\cdot\frac{\cancel{a+b}}{b^2}=\frac{a^2}{b^2}$, OK

24) Il numero è $\frac{1}{m-1}$, purché sia $m\neq 1$. Con $m=1$ il problema è impossibile.

25) Il problema ha senso solo per $k\neq 0$. La sua soluzione è il numero $\frac{k^2}{k-1}$, se $k\neq 1$. Con $k=1$, è imposs.

26) Questo problema ha senso solo con $b\neq 0$. Il numero è $\frac{ab}{b-2a}$, se $b\neq 2a\ \wedge\ b\neq a$.

Dev'essere $b\neq a$ in quanto l'equazione risolvente è $\frac{a+x}{b+x}=2\cdot\frac{a}{b}$ e occorre porre la condizione

$b+x\neq 0,\ x\neq -b$ da cui $\frac{ab}{b-2a}\neq -b,\ ab\neq -b(b-2a)$ ossia $a\neq -b+2a,\ b\neq a$.

Qualora sia $b=2a\ \vee\ b=a$ il problema è impossibile.

27) I due numeri sono $\frac{d}{r-1}$ e $\frac{rd}{r-1}$ rispettivamente, se $r\neq 1$.

Nel caso $r=1$, se $d\neq 0$ il problema è impossibile mentre nel caso $d=0$ è indeterminato, con l'avvertenza, in quest'ultimo caso, che tutte le coppie di numeri fra loro uguali ne sono soluzione, TRANNE la coppia (0, 0) per la quale non ha senso il rapporto.

28) I due numeri sono $\frac{rs}{r+1}$ e $\frac{s}{r+1}$ rispettivamente, se $r\neq -1$.

Nel caso $r=-1$, se $s\neq 0$ il problema è impossibile mentre nel caso $s=0$ è indeterminato, con l'avvertenza, in quest'ultimo caso, che tutte le coppie di numeri fra loro opposti ne sono soluzione, TRANNE la coppia (0, 0) per la quale non ha senso il rapporto.

# SISTEMI (SECONDA PARTE)

## 1. SISTEMI IMPOSSIBILI E INDETERMINATI

Osserva bene il seguente sistema: $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 6x+3y=14 \end{cases}$

Che ne dici? Non ti sembra che abbia qualcosa di "strano"? …

Se rifletti attentamente, scoprirai che le due equazioni che lo compongono
sono **incompatibili**, sono in contraddizione l'una con l'altra,
e non possono quindi essere verificate "contemporaneamente" ( = da una stessa coppia $x$, $y$).
Infatti, $6x+3y$ è il triplo di $2x+y$, mentre 14 NON è il triplo di 10.
Se una data coppia $(x,\ y)$ è tale che per essa risulti $2x+y=10$,
allora per la stessa coppia $(x,\ y)$ varrà l'uguaglianza $6x+3y=3(2x+y)=3\cdot 10=30$
e quindi NON potrà valere la $6x+3y=14$.
Insomma, se una data coppia $(x,\ y)$ verifica la prima equazione del sistema,
allora non potrà mai verificare la seconda.
Non esiste dunque nessuna coppia $(x,\ y)$ che soddisfi simultaneamente
sia l'una che l'altra equazione del sistema.
Quest'ultimo è IMPOSSIBILE (= privo di soluzioni).

L'impossibilità del sistema in esame è legata al fatto che, mentre i coefficienti di $x$ e di $y$
nella seconda equazione sono ciascuno il triplo del coefficiente corrispondente nella prima equazione
(6 è il triplo di 2, e 3 è il triplo di 1), invece il termine noto 14 NON è il triplo di 10.

Generalizzando, si riconosce facilmente che un sistema della forma

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

risulta **IMPOSSIBILE** ( = privo di soluzioni) ogniqualvolta accade che

**(1)** $\boxed{\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}}$

cioè **i coefficienti delle incognite sono proporzionali fra loro, ma non coi termini noti del sistema**.

Invece si può vedere che il sistema seguente: $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 6x+3y=30 \end{cases}$
è INDETERMINATO, vale a dire: è verificato da INFINITE coppie $(x,\ y)$. Infatti,
la $2^a$ equazione non è altro che la $1^a$ moltiplicata per 3, quindi è sostanzialmente una ripetizione della $1^a$.
Ma allora è come se avessimo soltanto l'equazione $2x+y=10$, e **una sola equazione**
**(salvo casi eccezionali) non è sufficiente a determinare in modo unico i valori di due incognite**.
La "nostra" equazione $2x+y=10$ è verificata, ad esempio, dalla coppia $x=3,\ y=4$;
ma è verificata pure dalle coppie $x=-1,\ y=12$; $x=1/2,\ y=9$; $x=8,\ y=-6$; ecc. ecc. ecc.
Noi possiamo divertirci a costruire tante coppie $(x,\ y)$, soluzioni della $2x+y=10$, quante ne desideriamo.
A tale scopo ci basterà riscrivere la $2x+y=10$ sotto la forma $y=10-2x$:
comprenderemo così che la $2x+y=10$ è verificata da tutte le coppie costruibili
assegnando a $x$ un valore a piacere, poi calcolando $y$ mediante la formula $y=10-2x$.
Ad esempio, ponendo $x=2$, si ottiene $y=10-2x=10-4=6$:
ecco che la coppia $(2,\ 6)$ è soluzione della nostra equazione.
Ponendo invece $x=-1$, otteniamo $y=10-2x=10+2=12$:
bene, la coppia $(-1,\ 12)$ è un'altra soluzione della nostra equazione.

Il sistema proposto $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 6x+3y=30 \end{cases}$,
che equivale alla sola equazione $2x+y=10$
(perché l'altra, come già osservato, è una "ripetizione" di questa)
ha dunque infinite soluzioni, riassumibili con la scrittura $\begin{cases} x\ qualsiasi \\ y=10-2x \end{cases}$.

Notiamo bene che **le soluzioni sono infinite, ma non qualsiasi**:
infatti, per scrivere una coppia-soluzione, è vero che noi possiamo fissare $x$ a nostro piacere,
ma poi non potremo abbinare al valore di $x$ scelto un valore di $y$ arbitrario,
bensì dovremo calcolare $y$ proprio mediante la formula specifica $y=10-2x$.

Generalizzando quanto detto, comprendiamo che un sistema della forma

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

è certamente **INDETERMINATO** ( = dotato di infinite soluzioni) nel caso si abbia

**(2)** $\boxed{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}}$ (**coefficienti delle incognite proporzionali fra loro E coi termini noti**).

**Attenzione** però**: le condizioni (1), (2)**
**non sono le uniche circostanze sotto le quali un sistema può risultare impossibile o indeterminato**.

Consideriamo infatti ad esempio il caso seguente:

$$\begin{cases} 0\cdot x+y=4 \\ 0\cdot x+2y=8 \end{cases}$$

E' evidente che il sistema in esame è indeterminato:
si osserva che è verificato da tutte le infinite coppie $(x,\ y)$ con $x$ qualsiasi, $y=4$,
tuttavia i suoi coefficienti NON soddisfano alla condizione (2):
infatti lo zero a denominatore non ha significato.

Ancora: se prendiamo il sistema

$$\begin{cases} x-3y=4 \\ 3(x-2y)+2(x+y+2)=5x-4(y-3) \end{cases}$$

e svolgiamo i calcoli nella seconda equazione, troveremo $3x-6y+2x+2y+4=5x-4y+12$
e vedremo così che tale equazione è IMPOSSIBILE, cioè non è verificata da nessuna coppia $(x,\ y)$.
Pertanto non può esistere, a maggior ragione, nessuna coppia $(x,\ y)$
che verifichi sia l'una che l'altra equazione del sistema proposto: questo è dunque IMPOSSIBILE.

Se invece avessimo una situazione come la seguente:

$$\begin{cases} x-3y=4 \\ 2(x+y+1)=3x-(x-2y-2) \end{cases}$$

ci troveremmo di fronte ad una seconda equazione indeterminata, ossia verificata da *qualsiasi* coppia $(x,\ y)$.
Ma un'equazione indeterminata è come se non ci fosse, perché non pone alcun vincolo ad $x$ e $y$.
Rimane solo la prima equazione, e, come abbiamo già visto, una sola equazione in due incognite
non individua queste in modo univoco, ma lascia aperte infinite possibilità.
Il nostro sistema è verificato dalle infinite coppie $(x,\ y)$ con $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=\frac{x-4}{3} \end{cases}$ ed è perciò INDETERMINATO.

*Senza pretendere affatto di esaurire l'argomento*
*(la teoria dei sistemi "lineari" ossia di 1° grado, che è coronata dal grande Teorema di Rouché-Capelli*
*di cui ci occuperemo in un capitolo del Volume 2, non è semplicissima),*
*ci limitiamo qui solo a un paio di indicazioni generali:*

- **Un sistema di 1° grado a n equazioni ed n incognite è "determinato", cioè ha regolarmente una e una sola soluzione (NOTA), se e solo se il determinante (pag. 201) dei coefficienti delle incognite, quello che nella regola di Cramer (pag. 202) è indicato con D, è diverso da zero. Quando invece tale determinante è uguale a zero, allora si ha un caso "speciale", che potrà essere di impossibilità o di indeterminazione (bisognerà valutare di volta in volta).**

**NOTA:** l'aggettivo "**determinato/a**", riferito a un sistema o a una singola equazione, significa:
"**dotato/a di un numero *finito e non nullo* di soluzioni**".
Quando il sistema, o l'equazione, è di 1° grado, nel caso ciò avvenga la soluzione è *unica*.

- **Per scoprire se un sistema di 1° grado a n equazioni ed n incognite è determinato, indeterminato o impossibile si può dunque calcolarne il determinante D. Oppure, in alternativa, si può procedere, coi metodi di sostituzione o di riduzione, fino a giungere ad una equazione in una sola incognita: si tratta poi di risolvere questa e di trarre le conclusioni opportune.**

*Gli ESERCIZI su questo paragrafo si trovano a pag. 410.*

# 2. SISTEMI DI 1° GRADO IN CUI IL NUMERO DELLE EQUAZIONI DIFFERISCE DAL NUMERO DELLE INCOGNITE

## A) PIU' EQUAZIONI CHE INCOGNITE

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=9 \\ 3x-2y=7 \end{cases}$$

nel quale le incognite sono 2, ma le equazioni sono 3 (quindi: una in più, rispetto alle incognite).

Se ci limitiamo a considerare solamente le prime due equazioni,
queste formeranno un "sotto-sistema" del sistema dato:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=9 \end{cases}$$

Risolvendo ora, con un metodo qualsiasi, tale sotto-sistema,
si trova che esso ammette come unica soluzione la coppia

$$\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

Questa coppia $x=4,\ y=1$ è dunque la sola che verifichi contemporaneamente
tanto la $1^a$ quanto la $2^a$ equazione del sistema iniziale.
Tuttavia, possiamo constatare che tale coppia NON rende verificata la $3^a$ equazione del sistema,
ossia la $3x-2y=7$.

E allora, in definitiva, siamo costretti a concludere che non esiste alcuna coppia $(x,\ y)$
che "vada bene" per tutte e tre le equazioni del sistema assegnato.

Questo è perciò IMPOSSIBILE (si dice anche: "INCOMPATIBILE").

Se l'ultima equazione, anziché essere $3x-2y=7$, fosse stata, poniamo, $3x-2y=10$,
allora la coppia $x=4,\ y=1$ avrebbe verificato, oltre alle prime due equazioni, anche l'ultima,
quindi il sistema sarebbe stato possibile (si dice preferibilmente: "COMPATIBILE"),
con soluzione, appunto, data da:

$$\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

L'esempio fatto mostra che, IN GENERALE,
da un sistema in cui ci siano più equazioni che incognite dobbiamo *aspettarci* impossibilità.
Infatti, se da un sistema siffatto andiamo ad "estrarre" un "sotto-sistema"
nel quale le equazioni siano tante quante le incognite, tale "sotto-sistema"
avrà, generalmente, una e una sola soluzione;
però tale soluzione, per essere soluzione pure del sistema "complessivo",
dovrebbe a questo punto verificare anche tutte le equazioni rimanenti,
e questo, evidentemente, avviene solo in via eccezionale:
di norma, non avviene.

Insomma:

**Se il numero delle equazioni è maggiore del numero delle incognite,
queste ultime hanno troppi vincoli da rispettare
e, IN LINEA DI MASSIMA, "non ce la faranno" a soddisfarli tutti.
Salvo casi eccezionali, il sistema sarà impossibile.**

NOTA
Questo discorso, fatto pensando ai sistemi "lineari" ( = di 1° grado),
si estende comunque, sempre come indicazione di carattere generale,
ai sistemi di equazioni di qualsiasi tipologia

♥ Nel volume 2
studieremo
il bel Teorema
di Rouché-Capelli,
che darà ordine e rigore
a ciò che
in queste pagine
presentiamo
come indicazioni
"valide in linea di massima".

## B) PIU' INCOGNITE CHE EQUAZIONI

E se invece avessimo più incognite che equazioni?

Consideriamo l'esempio seguente:

$$\begin{cases} 3x+2y-z=20 \\ x+y-2z=6 \end{cases}$$

Isoliamo $y$ dalla seconda equazione, e sostituiamo nella prima:

$$\begin{cases} y=6-x+2z \\ 3x+2(6-x+2z)-z=20; \quad 3x+12-2x+4z-z=20; \quad x+3z=8 \end{cases}$$

Ora isoliamo $x$ dall'ultima equazione ottenuta, e sostituiamo nell'altra:

$$\begin{cases} \boxed{x=8-3z} \\ y=6-(8-3z)+2z; \quad y=6-8+3z+2z; \quad \boxed{y=5z-2} \end{cases}$$

Pertanto sono soluzioni del nostro sistema tutte e sole le terne $(x, y, z)$ costruibili assegnando a $z$ un valore ad arbitrio, poi calcolando i valori di $x$ e di $y$ mediante le uguaglianze $x=8-3z;\ y=5z-2$.
Ad es., scegliendo per $z$ il valore 1, avremo $x=8-3=5,\ y=5-2=3$.
Bene, la terna $x=5,\ y=3,\ z=1$ è soluzione del nostro sistema.
Ponendo invece $z=0$, avremo $x=8,\ y=-2$
e la terna $(8, -2, 0)$ è un'altra soluzione del sistema in esame.

Possiamo indicare le infinite soluzioni del sistema dato con la scrittura $\begin{cases} x=8-3z \\ y=5z-2 \\ z \ \textit{qualsiasi} \end{cases}$

E quindi il sistema proposto, per il fatto di avere infinite soluzioni, è INDETERMINATO.

Vediamo quest'altro esempio:

$$\begin{cases} x+y+u+v+z=1 \\ 5x+4y-3u+2v+z=2 \\ x-u-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u+z \\ (u+z)+y+u+v+z=1 \\ 5(u+z)+4y-3u+2v+z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u+z \\ y+2u+v+2z=1 \\ 4y+2u+2v+6z=2; \quad 2y+u+v+3z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u+z \\ y=1-2u-v-2z \\ 2(1-2u-v-2z)+u+v+3z=1; \quad -3u-v-z=-1; \quad 3u+v+z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u+z \\ y=1-2u-v-2z \\ v=1-3u-z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u+z \\ y=1-2u-(1-3u-z)-2z \\ v=1-3u-z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u+z \\ y=u-z \\ v=1-3u-z \end{cases}$$

Le soluzioni sono perciò tutte e sole le cinquine $(x, y, u, v, z)$ nelle quali:

$$\begin{cases} x=u+z \\ y=u-z \\ u \ \textit{qualsiasi} \\ v=1-3u-z \\ z \ \textit{qualsiasi} \end{cases}$$

Nel sistema dato, che aveva 3 equazioni e 5 incognite,
abbiamo espresso 3 delle incognite in funzione delle 2 incognite rimanenti.

Generalizzando:

**Quando un sistema ha più incognite che equazioni (diciamo, per fissare le idee: n incognite e k equazioni, con n>k), allora esso sarà (IN LINEA DI MASSIMA) "indeterminato con $n-k$ gradi di libertà", nel senso che $k$ fra le incognite potranno essere espresse in funzione delle $n-k$ incognite rimanenti (alle quali si potranno assegnare valori arbitrari).**

NOTA - Questo discorso, fatto pensando ai sistemi "lineari" ( = di 1° grado), si estende comunque, sempre come indicazione di carattere generale, ai sistemi di equazioni di qualsiasi tipologia

Nel volume 2 studieremo il bel Teorema di Rouché-Capelli, che darà ordine e rigore a ciò che in queste pagine abbiamo presentato come indicazioni "valide in linea di massima".

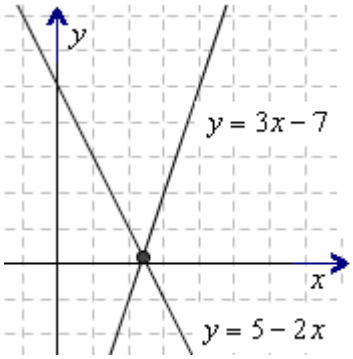
*Gli ESERCIZI su questo paragrafo sono a pag. 410.*

## 3. LA RISOLUZIONE GRAFICA DI UN SISTEMA LINEARE IN DUE INCOGNITE

**La si può effettuare isolando la $y$ in entrambe le equazioni:**

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{y=5-2x} \\ \boxed{y=3x-7} \end{cases}$$




**Poi si tracciano, in uno stesso riferimento cartesiano, i grafici delle due funzioni così ottenute**:

$y=5-2x,\ y=3x-7$

(*nel nostro esempio, poiché le funzioni sono di 1° grado, si tratterà di due rette*)

**… per cercare infine la coppia (*x*, *y*) che appartiene ad *entrambi* i grafici.**

**In pratica, dunque, si va a prendere il PUNTO DI INTERSEZIONE fra i due grafici tracciati.**

**La *x* e la *y* di quel punto costituiranno la coppia $\begin{cases} x=\dots \\ y=\dots \end{cases}$ soluzione del sistema.**

Nel nostro caso, graficamente non siamo in grado di stabilire quale sia il valore *esatto* di questa coppia $(x,y)$; possiamo solo osservare che è $2<x<3$ e $0<y<1$ (con *y* molto più vicina a 0 che a 1).

In effetti, **di norma, queste risoluzioni grafiche ci permettono di *approssimare* la soluzione, piuttosto che di determinarla perfettamente**.

♥ L'interpretazione grafica può essere un'utile occasione per ribadire che (salvo rare eccezioni) *una singola* equazione in due incognite è verificata da INFINITE coppie (*x*, *y*).

Consideriamo, ad esempio, la retta "in discesa", che "rappresenta" l'equazione $2x+y=5$ $(y=5-2x)$.
Se nell'equazione $y=5-2x$ noi poniamo, ad esempio, $x=1$, otteniamo $y=5-2\cdot 1=3$;
bene, ciò significa che la coppia $x=1,\ y=3$ (brevemente: la coppia $(1,3)$) è soluzione dell'equazione $y=5-2x$ quindi anche della sua equivalente $2x+y=5$ (controlliamo: $2\cdot 1+3=5$ *OK*).
Dando poi a *x* altri valori possiamo determinare *altre* coppie (*x*, *y*) che rendono vera l'equazione $y=5-2x$:

$$(0,5);\ \ (2,1);\ \ (3,-1);\ \ (10,-15);\ \ (-1,7);\ \ \left(\frac{1}{2},4\right);\ \ (3,7;\ -2,4);\ \ \dots$$

Tali infinite coppie $(x,y)$ sono per l'appunto le coordinate degli infiniti punti che compongono la retta in discesa; mentre le coordinate $(x,y)$ degli infiniti punti della retta in salita sono quelle coppie $(x,y)$ che "vanno bene" per l'equazione $y=3x-7$ (o per la sua equivalente $3x-y=7$).
Le coordinate del punto in cui le due rette si intersecano sono dunque quei valori $x=\dots$, $y=\dots$ per i quali sono verificate SIMULTANEAMENTE ENTRAMBE le equazioni in gioco.

- ❑ E se le due rette fossero parallele? Vorrebbe dire che quel sistema è IMPOSSIBILE (1).
- ❑ Se poi quelle due rette coincidessero, saremmo di fronte a un sistema INDETERMINATO, avente per soluzioni tutte le infinite coppie $(x,y)$ che verificano una a piacere fra le equazioni in gioco (2).

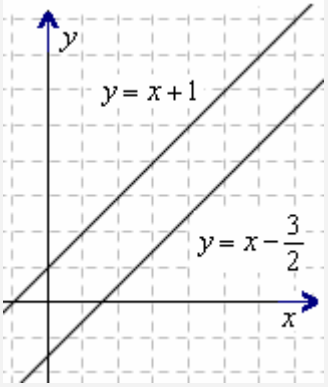
(1) Il sistema

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x-2y=3 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=x-\frac{3}{2} \end{cases}$$

ed è IMPOSSIBILE (rette parallele).




Osserviamo che è verificata la *condizione sufficiente di impossibilità*

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$: è infatti $\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{-1}{3}$

(2) Il sistema

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$$

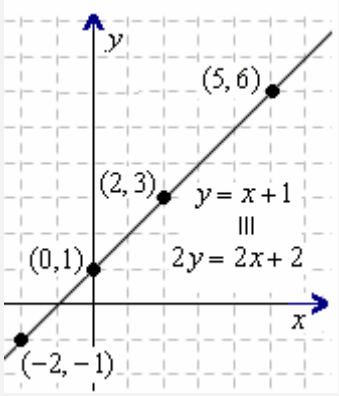
equivale a

$$\begin{cases} y=x+1 \\ 2y=2x+2 \quad (y=x+1) \end{cases}$$

ed è INDETERMINATO (rette coincidenti).

Qui è verificata la *condizione sufficiente di indeterminazione*

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$




Le soluzioni del sistema sono tutte le coppie $(x,y)$ che corrispondono ai punti di una qualsiasi delle due rette:

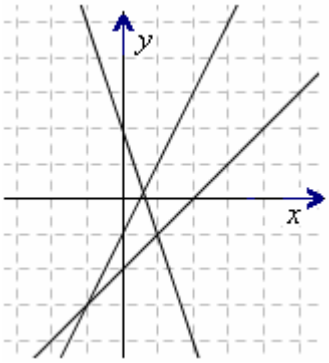
$(-2,-1);\ \ (0,1);\ \ (2,3);\ \ (5,6);\ \ (2,45;3,45);\ \ \dots$

**Supponiamo ora che il sistema abbia 2 incognite, ma 3 equazioni**: ad esempio

$$\begin{cases} 3x+y=2 \\ x-y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{y=2-3x} \\ \boxed{y=x-2} \\ \boxed{y=2x-1} \end{cases}$$

Già abbiamo visto che, **di norma, sistemi di questo tipo sono impossibili;**
**ma** che **potrebbero però, eccezionalmente, avere soluzione o addirittura risultare indeterminati**.

In effetti, qui le rette in gioco sono 3:

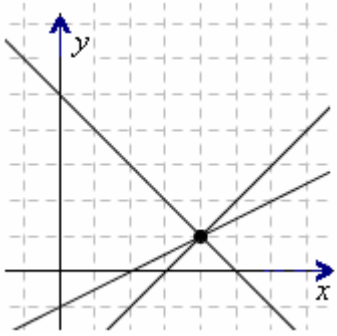



nel nostro caso, le tre rette NON passano tutte per uno stesso punto,
situazione che è poi la più "ordinaria" per 3 rette su un piano,
quindi non esiste una coppia $(x,y)$ che soddisfi simultaneamente tutte e tre le equazioni considerate.

Invece il sistema che segue:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \\ x-2y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{y=5-x} \\ \boxed{y=x-3} \\ \boxed{y=\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{1}{2}x-1} \end{cases}$$

è, eccezionalmente, determinato, in quanto le tre rette passano tutte per uno stesso punto,
le cui coordinate $x=4,\ y=1$ costituiscono la soluzione del sistema.




## ESERCIZI

Risolvi, sia graficamente che algebricamente, i sistemi che seguono:

1) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-y=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x+2y=8 \\ 3x+y=4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=3 \\ 3x-3y=1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ x+4y=-1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x-5y=1 \\ 5x-y=1/5 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x-2y=4 \\ 2x-4y=1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ -x+y=3 \\ x+y=5 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 4x+y=7 \\ x-2y+5=0 \\ 2x+0,5y=3,5 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x+y=4 \\ 0,25x+0,25y=1 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 0,125x-0,125y=0,25 \\ 0,5x=1+0,5y \\ y+2=x \end{cases}$

## RISPOSTE

1) $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 2) indet.: $\begin{cases} x=x \\ y=4-3x \end{cases}$ 3) imposs. 4) $\begin{cases} x=1 \\ y=-1/2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=0 \\ y=-1/5 \end{cases}$ 6) imposs.

7) imposs. 8) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 10) imposs. 11) indet.: $\begin{cases} x=x \\ y=x-2 \end{cases}$

## 4. SISTEMI LETTERALI

Esempio:

$$\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Per **SOSTITUZIONE**:

$$\begin{cases} ax = a^2 + b^2 + by; \quad x = \dfrac{a^2 + b^2 + by}{a} \quad (a \neq 0) \\ b \cdot \dfrac{a^2 + b^2 + by}{a} + ay = a^2 + b^2 \end{cases} \quad \text{NOTA 1}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 + b^2 + by}{a} \\ \dfrac{a^2 b + b^3 + b^2 y + a^2 y}{\cancel{a}} = \dfrac{a^3 + ab^2}{\cancel{a}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 + b^2 + by}{a} \\ b^2 y + a^2 y = a^3 + ab^2 - a^2 b - b^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{"} \\ \left(a^2 + b^2\right) y = a\left(a^2 + b^2\right) - b\left(a^2 + b^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{"} \\ \left(a^2 + b^2\right) y = \left(a^2 + b^2\right)(a - b); \quad y = a - b \quad \text{(NOTA 2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = a - b \\ x = \dfrac{a^2 + b^2 + b(a - b)}{a} = \dfrac{a^2 + \cancel{b^2} + ab - \cancel{b^2}}{a} = \dfrac{\cancel{a}(a + b)}{\cancel{a}} = a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases}$$

NOTA 1
Questo passaggio, finalizzato a isolare $x$, è effettuabile solo nel caso $a \neq 0$; il caso particolare $a = 0$ andrà valutato a parte (lo riprenderemo alla fine dell'esercizio)

NOTA 2
La semplificazione dell'equazione è effettuabile solo nel caso $a^2 + b^2 \neq 0$; d'altra parte, potrebbe risultare $a^2 + b^2 = 0$ soltanto se fosse $a = b = 0$, e noi in questo momento ci siamo posti nel caso $a \neq 0$, quindi la quantità $a^2 + b^2$ per la quale abbiamo semplificato è certamente diversa da 0. Non è pertanto necessario porre alcuna condizione per la semplificazione.

Per **RIDUZIONE**:

$$\begin{matrix} a \cdot \\ b \cdot \end{matrix} \begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases} \quad (a \neq 0,\ b \neq 0 : \textit{vedi} \text{ NOTA 3})$$

$$\begin{cases} a^2 x - aby = a^3 + ab^2 \\ b^2 x + aby = a^2 b + b^3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1) + (2) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} a^2 x + b^2 x = a^3 + ab^2 + a^2 b + b^3; \quad \cancel{\left(a^2 + b^2\right)} x = \cancel{\left(a^2 + b^2\right)}(a + b) \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + b \\ b(a + b) + ay = a^2 + b^2; \quad ab + \cancel{b^2} + ay = a^2 + \cancel{b^2}; \quad \cancel{a}\, y = a^{\cancel{2}} - \cancel{a} b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases}$$

NOTA 3
Con l'obiettivo di mandar via la $y$, moltiplichiamo la prima equazione per $a$ e la seconda per $b$. A tale scopo, dobbiamo supporre $a \neq 0$ e $b \neq 0$, quindi in coda all'esercizio dovremo andare a valutare cosa succede nei due casi particolari ($a = 0, b = 0$) che stiamo provvisoriamente lasciando da parte.

Con **CRAMER**:

$$\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a^2+b^2 & -b \\ a^2+b^2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a\left(a^2+b^2\right)+b\left(a^2+b^2\right)}{a^2+b^2} = \frac{\cancel{\left(a^2+b^2\right)}(a+b)}{\cancel{a^2+b^2}} = a+b \qquad \left(a^2+b^2 \neq 0\right)$$

NOTA 4

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & a^2+b^2 \\ b & a^2+b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a\left(a^2+b^2\right)-b\left(a^2+b^2\right)}{a^2+b^2} = \frac{\cancel{\left(a^2+b^2\right)}(a-b)}{\cancel{a^2+b^2}} = a-b \qquad \left(a^2+b^2 \neq 0\right)$$

NOTA 4

L'applicazione nel metodo di Cramer comporta l'introduzione di denominatori,
quindi vale a condizione che i denominatori stessi siano diversi da 0.
Il caso opposto $a^2+b^2=0$ (che si verifica esclusivamente con $a=b=0$) andrà valutato a parte.

**LA DISCUSSIONE DEL SISTEMA**

Come abbiamo visto, **la risoluzione, con qualunque metodo venga effettuata,
può comportare l'individuazione di casi particolari,
che vengono "provvisoriamente messi da parte",
per valutarli poi alla fine.**

Ad esempio,

- risolvendo con SOSTITUZIONE, abbiamo "accantonato" il caso $a=0$;
- con RIDUZIONE, abbiamo lasciato da parte i casi $a=0$ e $b=0$;
- col metodo di CRAMER, abbiamo accantonato il caso $a^2+b^2=0$ $(a=b=0)$

♥ **Questi casi particolari vanno ripresi in coda all'esercizio,
per capire "cosa diventa" il sistema in ciascun caso,
e per stabilire se si tratta, eventualmente,
di un caso di impossibilità o di indeterminazione per il sistema.**

❑ *Ad esempio, se abbiamo risolto con SOSTITUZIONE, il caso accantonato è* $a=0$.

*Bene! Con* $a=0$ *il sistema* $\begin{cases} ax-by=a^2+b^2 \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{cases}$ *diventa*

$\begin{cases} -by=b^2 \\ bx=b^2 \end{cases}$ *e ora possiamo dire che:*

- *se* $b\neq 0$ *è lecito semplificare entrambe le equazioni ottenendo* $\begin{cases} x=b \\ y=-b \end{cases}$
- *se invece è anche* $b=0$ *il sistema è COMPLETAMENTE INDETERMINATO (qualsiasi coppia (x, y) ne è soluzione).*

*Osserviamo che, con* $a=0$ *e* $b\neq 0$, *la soluzione ottenuta* $\begin{cases} x=b \\ y=-b \end{cases}$ *non è altro che la "normalissima" soluzione* $\begin{cases} x=a+b \\ y=a-b \end{cases}$, *nel caso particolare* $a=0$ *!!!*

*E allora l'unico caso "anomalo" per questo sistema è in definitiva il caso* $a=b=0$, *nel quale il nostro sistema risulta, come abbiamo visto, completamente indeterminato.*

❑ *Analogamente, se si è risolto con RIDUZIONE, occorre riprendere i due casi accantonati ecc.
Stessa cosa se la risoluzione è stata effettuata con CRAMER: va ripreso il caso accantonato.
E' ovvio che la conclusione della discussione dovrà essere sempre la medesima, comunque si proceda.*

Ecco qui di seguito **un altro esempio**.
Si tratta di un sistema che si presta molto bene ad essere risolto per RIDUZIONE.

$$\begin{cases}(a^2+9)(x+y-1)=6a(x-y)\\(a-3)(x-y-1)=6y\end{cases}$$

**Portiamo innanzitutto in "forma normale"**:

$$\begin{cases}(a^2+9)(x+y-1)=6a(x-y)\\(a-3)(x-y-1)=6y\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2x+a^2y-a^2+9x+9y-9=6ax-6ay\\ax-ay-a-3x\underline{+3y}+3=\underline{6y}\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2x-6ax+9x+a^2y+6ay+9y=a^2+9\\ax-3x-ay-3y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a^2-6a+9)x+(a^2+6a+9)y=a^2+9\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}(a-3)^2x+(a+3)^2y=a^2+9\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}\quad\text{FORMA NORMALE}}$$

Risolviamo per **RIDUZIONE**, moltiplicando la seconda equazione per $(a+3)$

*Con* $a\neq -3$ (NOTA): $(a+3)\cdot\begin{cases}(a-3)^2x+(a+3)^2y=a^2+9\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}$

$$\begin{cases}(a-3)^2x+(a+3)^2y=a^2+9\\(a^2-9)x-(a+3)^2y=a^2-9\end{cases}$$

NOTA
La moltiplicazione per $(a+3)$
è effettuabile soltanto supponendo
$a\neq -3$,
altrimenti l'equazione verrebbe
moltiplicata per 0 e quindi "distrutta".
Il caso particolare $a=-3$
andrà valutato separatamente.

$$(1)+(2)\quad\begin{cases}(a-3)^2x+(a^2-9)x=a^2\cancel{+9}+a^2\cancel{-9}\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2x-6ax\cancel{+9x}+a^2x\cancel{-9x}=2a^2\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a^2x-6ax=2a^2;\quad a^2x-3ax=a^2;\quad ax-3x=a\quad(a\neq 0);\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-3)x=a;\quad x=\dfrac{a}{a-3}\quad(a\neq 3);\\\cancel{(a-3)}\cdot\dfrac{a}{\cancel{a-3}}-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{a-3}\\\cancel{a}-(a+3)y=\cancel{a}-3;\quad(a+3)y=3;\quad y=\dfrac{3}{a+3}\quad(a\neq -3)\end{cases}$$

Cerchiamo ora di capire (DISCUSSIONE)
cosa accade nei casi particolari, che abbiamo provvisoriamente lasciato da parte.

**DISCUSSIONE**

Il sistema in forma normale era

$$\boxed{\begin{cases}(a-3)^2 x+(a+3)^2 y=a^2+9\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}}$$

Vediamo cosa diventa, rispettivamente, nei tre casi: $a=-3$; $a=3$; $a=0$

- Con $\boxed{a=-3}$ il sistema diventa

$$\begin{cases}(-3-3)^2 x+(-3+3)^2 y=(-3)^2+9\\(-3-3)x-(-3+3)y=-3-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}36x=18; \quad x=1/2\\-6x=-6; \quad x=1\end{cases}$$

Le due equazioni sono, evidentemente, incompatibili; il sistema, con $a=-3$, è IMPOSSIBILE.

- Con $\boxed{a=3}$ il sistema diventa

$$\begin{cases}(3-3)^2 x+(3+3)^2 y=3^2+9\\(3-3)x-(3+3)y=3-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}36y=18; \quad y=1/2\\-6y=0; \quad y=0\end{cases}$$

Le due equazioni sono, evidentemente, incompatibili; il sistema, con $a=3$, è IMPOSSIBILE.

- Con $\boxed{a=0}$ il sistema diventa:

$$\begin{cases}9x+9y=9; \quad x+y=1\\-3x-3y=-3; \quad x+y=1\end{cases}$$

Le due equazioni coincidono; il sistema, con $a=0$, è INDETERMINATO

e ha come soluzioni le infinite coppie: $\begin{cases}x \text{ qualsiasi}\\y=1-x\end{cases}$

Risolvendo per **SOSTITUZIONE** avremmo avuto passaggi più pesanti:

$$\begin{cases}(a-3)x=(a+3)y+a-3; \quad x=\dfrac{(a+3)y+a-3}{a-3} \quad (a\neq 3)\\(a-3)^{\cancel{2}} \cdot \dfrac{(a+3)y+a-3}{\cancel{a-3}}+(a+3)^2 y=a^2+9\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{(a+3)y+a-3}{a-3}\\(a-3)(a+3)y+(a-3)^2+(a+3)^2 y=a^2+9\end{cases}; \quad \begin{cases}\quad "\\a^2y-\cancel{9y}+\cancel{a^2}-6a+\cancel{9}+a^2y+6ay+\cancel{9y}=\cancel{a^2}+\cancel{9}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\quad "\\2a^2y+6ay=6a; \quad a^2y+3ay=3a; \quad ay+3y=3 \quad (a\neq 0)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{(a+3)y+a-3}{a-3}\\(a+3)y=3; \quad y=\dfrac{3}{a+3} \quad (a\neq -3)\end{cases}; \quad \begin{cases}x=\dfrac{\cancel{(a+3)}\cdot\dfrac{3}{\cancel{a+3}}+a-3}{a-3}=\dfrac{\cancel{3}+a\cancel{-3}}{a-3}=\dfrac{a}{a-3}\\y=\dfrac{3}{a+3}\end{cases}$$

… e a questo punto avremmo dovuto, come prima,
procedere con la valutazione dei casi particolari trovati, e provvisoriamente accantonati
($a=-3$, $a=3$, $a=0$).

## 5. ESERCIZI

### ESERCIZI SUI SISTEMI DI 1° GRADO IMPOSSIBILI E INDETERMINATI

**Per ciascuno dei seguenti sistemi, stabilisci se è determinato, impossibile, o indeterminato. In caso di indeterminazione, stabilisci anche quali sono le soluzioni.** Correzione ⇨

1) $\begin{cases} x+y=12 \\ 2x+2y=46 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+3y=21 \\ x+y=7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x-8y=12 \\ 10x-20y=30 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2(x+y)=y+2x+3 \\ x-3y=y-(12-x) \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-2y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{1}{5}y=1 \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{20}y=\frac{1}{4} \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x+y=2-(x-y) \\ x-y=6-(x+y) \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x+y=2-(x-y) \\ 2(x+y)=x+2y+1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x+3y=3(y-x) \\ 2x-y=-(y-x) \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 3x+4y=0 \\ 5x-6y=0 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x+2y+3z=5 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=1 \\ x-2y=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x+6y=8 \\ 2y=1 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 2(2x+y)=3y-(y-4x) \\ x+y=9 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 3(x+y+2)=3x+8+3y \\ 4x-y=2 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} 2(x-y)-1=x+y-(3y-x+1) \\ 2(x+y)=x+3y+1-(y-x) \end{cases}$

**Negli esercizi seguenti, è richiesto di determinare il valore del parametro in modo che il sistema non sia determinato, e di stabilire se, per quel valore, si ha impossibilità o indeterminazione.**

17) $\begin{cases} 6x+ay=10 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} kx+(k-1)y=5 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} bx-y=-2 \\ (b-4)x+y=b \end{cases}$ 20) $\begin{cases} 3x+my=6 \\ 2x+(m+3)y=4 \end{cases}$ 21) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ hx+hz=5 \\ x-y+z=3 \end{cases}$

### ESERCIZI (SISTEMI IN CUI IL NUMERO DELLE EQUAZ. E' ≠ DA QUELLO DELLE INCOGNITE)

**Per ciascuno dei seguenti sistemi, stabilisci se è determinato, impossibile, o indeterminato. In caso di indeterminazione, stabilisci anche quali sono le soluzioni.**

22) ⇨ $\begin{cases} 3x-y=12 \\ 2x+y=13 \\ 4x-7y=2 \end{cases}$ 23) $\begin{cases} a-2b=3 \\ 7a+b=36 \\ 11a-6b=49 \end{cases}$ 24) ⇨ $\begin{cases} x+y+z+t+w=0 \\ x-y-z-t+w=2 \\ x+y-z-t-w=4 \end{cases}$ 25) $\begin{cases} a-b-2c=9 \\ 2a+b=0 \\ c=b-a \\ a+b+c+4=0 \end{cases}$

26) $\begin{cases} a=2b \\ c=3d \\ a+b+c+d=0 \end{cases}$

27) $\begin{cases} x+y+z=8 \\ x+y-z=6 \end{cases}$

28) $\begin{cases} p+q=9 \\ 3p-2q=17 \\ 2p=7q \\ p-q=5 \\ 4p+3q=10 \\ 2p-5q=4 \end{cases}$

29) ⇨ $\begin{cases} w-4x=0 \\ t-y=1 \\ w-t=1 \\ x+y+t+w=10 \\ x-2y+3w=9 \\ 3x+2t=9 \\ w-y=2 \end{cases}$

30) *Dato il sistema*:

$\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ 4x+y+2z=3 \end{cases}$

*è richiesto di esprimere*

*I)* *x e y in funzione di z*
*II)* *y e z in funzione di x*
*III)* *x e z in funzione di y*

### RISPOSTE

1) imp. 2) indet.: $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=7-x \end{cases}$ *opp.* $\begin{cases} x=7-y \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$ 3) indet.: $\begin{cases} x=2y+3 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$ *opp.* $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=\frac{x-3}{2} \end{cases}$ 4) indet.: $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=1/3 \\ y=-1/3 \end{cases}$ 6) indet. $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=\frac{15-10x}{3} \end{cases}$ 7) imp. 8) indet. $\begin{cases} x=1 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$ 9) indet. $\begin{cases} x=0 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

11) indet. $\begin{cases} x=z-3 \\ y=7-3z \\ z \text{ qualsiasi} \end{cases}$ 12) imp. 13) $\begin{cases} x=5 \\ y=1/2 \end{cases}$ 14) indet. $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=9-x \end{cases}$ 15) imposs. 16) imposs.

17) $a=-8$; ind. 18) $k=-2$; imp. 19) $b=2$; ind. 20) $m=-9$; ind. 21) ind. con $h=2$, imp. con $h\neq 2$

22) imposs. 23) $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$ 24) indet.: $x$ *qualsiasi*, $y=2-x$, $z=x-t-3$, $t$ *qualsiasi*, $w=1-x$ 25) $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$

26) indet.: $a=-\frac{8}{3}d$; $b=-\frac{4}{3}d$; $c=3d$; $d$ *qualsiasi oppure* … 27) indet.: $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=7-x \\ z=1 \end{cases}$ *oppure*: $\begin{cases} x=7-y \\ y \text{ qualsiasi} \\ z=1 \end{cases}$

28) impossibile 29) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ t=3 \\ w=4 \end{cases}$ 30) *I)* $\begin{cases} x=\frac{3-z}{9} \\ y=\frac{15-14z}{9} \end{cases}$ *II)* $\begin{cases} y=14x-3 \\ z=3-9x \end{cases}$ *III)* $\begin{cases} x=\frac{y+3}{14} \\ z=\frac{15-9y}{14} \end{cases}$

## ESERCIZI SUI SISTEMI LETTERALI

**Clicca sulla freccia, se presente, per la correzione**

1) ⇨ $\begin{cases} 3x-2y=5a \\ 2x+3y=12a \end{cases}$ 2) ⇨ $\begin{cases} x+y=2a \\ x-y=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+y=3k+1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=k \\ x+2y=k+1 \end{cases}$

5) ⇨ $\begin{cases} mx-y=m^2 \\ 2x+my=(m+1)^2+1 \end{cases}$ 6) ⇨ $\begin{cases} x+ay=2a \\ x-y=a-1 \end{cases}$ 7) ⇨ $\begin{cases} (2a-1)x-(a+1)y=2(2a-1)(a-1) \\ (a-1)x+(a+1)y=a(5a-3) \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2(b+1)x-(b-1)^2 y=0 \\ 4x+(b-1)y=3b-1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} (m-1)x-my=2m^2 \\ mx=4y+[2m-(m-2)]^2 \end{cases}$ 10) ⇨ $\begin{cases} \frac{kx}{2}=1-\frac{x-y}{2} \\ (k-1)(x-3)+2y=0 \end{cases}$

11) $\begin{cases} (a+1)(x-y)=2(1-ay) \\ (a^2+1)(x-y)=2[1-a(x+y)] \end{cases}$ 12) ⇨ $\begin{cases} \frac{a-1}{y+2}=\frac{1}{x-a} \\ x-y=\frac{2a}{a-1} \end{cases}$ 13) $\begin{cases} m\frac{y}{x}-\frac{1}{x}=m-1 \\ x+m(y-1)=m^2+1 \end{cases}$

14) $\begin{cases} ax+by=2ab \\ ax-by=0 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} (2a-1)x=2y-1 \\ a\frac{x-2}{y}+1=0 \end{cases}$ 16) ⇨ $\begin{cases} x+y+z=3a+1 \\ x-y+z=a+1 \\ x+2z=2(a+1) \end{cases}$ 17) $\begin{cases} mx+y+mz=m+1 \\ y-x=1 \\ x+z=0 \end{cases}$

18) $\begin{cases} px+qy=2 \\ x+y=\frac{p+q}{pq} \end{cases}$ 19) ⇨ $\begin{cases} x+y+z+t=6 \\ x-y-z+t=0 \\ x+2y+z+3t=10 \\ ax+y+4t=2(a+3) \end{cases}$ 20) $\begin{cases} a^2x+a^2y+z=3a \\ ax-ay+z=a \\ x-y+az=a^2 \end{cases}$

## SOLUZIONI (ED EVENTUALE DISCUSSIONE)

1) $\begin{cases} x=3a \\ y=2a \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=a+1 \\ y=a-1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=k+1 \\ y=k-1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=k-1 \\ y=1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=m+1 \\ y=m \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=a \\ y=1 \end{cases}$ *Se* $a=-1$, *il sistema è INDETERMINATO, con le soluzioni* $\begin{cases} x=y-2 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$

7) *Se* $a\neq\frac{2}{3}\wedge a\neq-1$, $\begin{cases} x=3a-1 \\ y=2a-1 \end{cases}$ *Se* $a=\frac{2}{3}$, *il sistema è INDET., con le soluzioni* $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=\frac{3x+2}{15} \end{cases}$

*Se* $a=-1$, *il sistema è INDET., con le soluzioni* $\begin{cases} x=-4 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$

8) *Se* $b\neq1\wedge b\neq\frac{1}{3}$, $\begin{cases} x=\frac{b-1}{2} \\ y=\frac{b+1}{b-1} \end{cases}$ *Se* $b=1$, *il sistema è IMPOSSIBILE*;
*se* $b=1/3$, *il sistema è INDETERMINATO,*
*e in questo caso le sue soluz. sono le infinite coppie:* $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=6x \end{cases}$

9) *Se* $m\neq2$, $\begin{cases} x=m \\ y=-(m+1) \end{cases}$ *Se* $m=2$, *il sistema è INDETERMINATO, con le soluzioni* $\begin{cases} x=2y+8 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$

10) *Se* $k\neq-\frac{1}{3}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=k-1 \end{cases}$ *Se* $k=-\frac{1}{3}$, *il sistema è INDETERMINATO, con le soluzioni* $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=\frac{2}{3}x-2 \end{cases}$

11) *Se* $a\neq\pm1\wedge a\neq0$, $\begin{cases} x=\frac{1}{a+1} \\ y=\frac{1}{a-1} \end{cases}$ *Se* $a=1\vee a=-1$, *il sistema è IMPOSSIBILE*
*Se* $a=0$, *il sistema è INDETERMINATO,*
*con le soluzioni* $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=x-2 \end{cases}$

12) *Se* $a \neq 1 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq -1$, $\begin{cases} x = \dfrac{a^2+1}{a-1} \\ y = a-1 \end{cases}$

*Il valore* $1$ *è "inammissibile" per* $a$.
*Se* $a = 2$, *il sistema risulta INDETERMINATO,*
*con le soluzioni* $\begin{cases} x \text{ qualsiasi, purché diverso da } 2; \\ y = x - 4 \end{cases}$
*Se* $a = -1$, *il sistema è IMPOSSIBILE,*
*perché la soluzione che si trova non è accettabile.*

13) *Se* $m \neq 0 \wedge m \neq -1$, $\begin{cases} x = m+1 \\ y = m \end{cases}$

*Se* $m = 0$, *il sistema è INDET., con le soluzioni* $\begin{cases} x = 1 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$
*Se* $m = -1$, *il sistema è IMPOSSIBILE,*
*perché la soluzione che si trova non è accettabile.*

14) *Se* $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, $\begin{cases} x = b \\ y = a \end{cases}$

*Se* $a = 0 \wedge b \neq 0$, *il sistema è INDETERMINATO:* $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y = 0 \end{cases}$
*Se* $a \neq 0 \wedge b = 0$, *il sistema è INDETERMINATO:* $\begin{cases} x = 0 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$
*Se* $a = b = 0$, *il sistema è COMPLETAMENTE INDET.:* $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$

15) *Se* $a \neq \dfrac{1}{4} \wedge a \neq 0$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = a \end{cases}$

*Se* $a = 1/4$, *il sistema è INDETERMINATO,*
*con le soluzioni* $\begin{cases} x = 2 - 4y \\ y \text{ qualsiasi purché diverso da } 0 \end{cases}$
*Se* $a = 0$, *il sistema è IMPOSSIBILE,*
*perché la soluzione che si trova non è accettabile.*

16) $\begin{cases} x = 2a \\ y = a \\ z = 1 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} x = m \\ y = m+1 \\ z = -m \end{cases}$

18) $p \neq 0, q \neq 0$. *Se* $p \neq q$, $\begin{cases} x = 1/p \\ y = 1/q \end{cases}$ *Se* $p = q$, *il sistema è INDET., con le soluz.* $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y = \dfrac{2-px}{p} \end{cases}$ $\left( o \begin{cases} x = \dfrac{2-py}{p} \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases} \right)$

19) *Se* $a \neq 2$: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases}$ *Con* $a = 2$, *il sistema è INDET., con le soluz.* $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 - 2t \\ z = 2t - 1 \\ t \text{ qualsiasi} \end{cases}$

20) *Se* $a \neq 0, a \neq \pm 1$: $\begin{cases} x = 1/a \\ y = 1/a \\ z = a \end{cases}$

*Con* $a = 0$ *il sistema diventa:* $\begin{cases} z = 0 \\ z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ *ed è perciò INDET., con le soluzioni* $\begin{cases} x = y \\ y \text{ qualsiasi} \\ z = 0 \end{cases}$

*Con* $a = 1$ *il sistema diventa:* $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ *che equivale a* $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

*Sommando, si ha* $\begin{cases} 2x + 2z = 4; \;\; x + z = 2 \\ y = 3 - (x + z) = 3 - 2 = 1 \end{cases}$ *e il sistema è INDET.:* $\begin{cases} x = \text{qualsiasi} \\ y = 1 \\ z = 2 - x \end{cases}$

*Con* $a = -1$ *il sistema diventa:* $\begin{cases} x + y + z = -3 \\ -x + y + z = -1 \;\; (x - y - z = 1) \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ *che equivale a* $\begin{cases} x + y + z = -3 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

*Sommando, si ha* $\begin{cases} 2x = -2; \;\; x = -1 \\ -1 - y - z = 1; \; y + z = -2 \end{cases}$ *e il sistema è INDET.:* $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 - z \\ z = \text{qualsiasi} \end{cases}$

## PROBLEMI CHE CONDUCONO AD UN SISTEMA LETTERALE

**Clicca sulla freccia, se presente, per la correzione**

1a) ⇨ Un liquido A contiene il 2% di alcool
Un altro liquido B contiene il 6% di alcool.
Si vogliono miscelare *x* litri del liquido A e *y* litri del liquido B in modo da ottenere 60 litri di liquido, che contenga il 3,2% di alcool. Quanto devono valere *x* e *y*?

1b) Risolvi lo stesso problema precedente, supponendo che A contenga il 15% di alcool, B il 5% e si desideri miscelare in modo da ottenere 100 litri di liquido al 12% di alcool.

1c) Generalizziamo. Un liquido A contiene una certa percentuale nota di alcool, percentuale che indichiamo con $p_1$ (quindi, il liquido A contiene il $p_1\%$ di alcool).
Un altro liquido B contiene il $p_2\%$ di alcool.
Si vogliono miscelare *x* litri del liquido A e *y* litri del liquido B in modo da ottenere $k$ litri di liquido, che contenga il $p\%$ di alcool. Quanto devono valere *x* e *y*?

2a) Un treno merci parte dalla stazione di Milano Centrale diretto a Taranto, e procede a 35 km/h.
1 ora dopo un altro treno parte da Milano Centrale in direzione Taranto, su di un binario parallelo al precedente, viaggiando a 40 km/h.
A quale distanza da Milano i due treni si incontreranno, e dopo quante ore dalla partenza del secondo treno?
*(Poni due incognite: s = distanza cercata, t = numero di ore impiegate per percorrere questa distanza, dal treno che parte per secondo)*

2b) Risolvi il precedente problema supponendo questa volta che: il primo treno viaggi a 30 km/h; il secondo treno parta 2 ore dopo e viaggi a 45 km/h.

2c) ⇨ Generalizzazione.
Un treno parte da una stazione procedendo alla velocità di $v_1$ km/h.
Un secondo treno parte dalla medesima stazione con un ritardo di $r$ ore rispetto al primo treno, su di un binario parallelo, nella stessa direzione, viaggiando alla velocità di $v_2$ km/h (con $v_2 > v_1$).
A quale distanza dalla stazione i due treni si incontreranno, e dopo quante ore dalla partenza del secondo treno?

3a) Un ricco signore ha depositato una cifra complessiva di 100000 euro, per un anno, parte in una banca A (all'interesse del 3% annuo) e parte in una banca B (all'interesse del 2% annuo).
Sapendo che l'interesse complessivo riscosso dopo un anno è stato di 2180 euro, stabilire quale cifra era stata depositata nella banca A e quale cifra era stata depositata nella banca B.

3b) Risolvere il problema precedente nel caso generale: sia
- s la cifra complessiva iniziale,
- a % l'interesse annuo concesso dalla banca A,
- b % l'interesse annuo concesso dalla banca B,
- i l'interesse totale maturato.

Si vogliono conoscere le cifre *x* e *y* depositate rispettivamente in A e in B.

4) Nel triangolo ABC:
la media fra le misure dei due lati AB e AC è p; la media fra AB e BC è q; la media fra AC e BC è r.
Trovare le misure dei tre lati AB, AC, BC.

## SOLUZIONI

1a) $x = 42$ litri, $y = 18$ litri  1b) $x = 70$ litri, $y = 30$ litri

1c) $x = \dfrac{(p - p_2)\cdot k}{p_1 - p_2}$ litri, $y = \dfrac{(p_1 - p)\cdot k}{p_1 - p_2}$ litri . Il problema è impossibile se $p_1 = p_2 \neq p$, indeterminato se $p_1 = p_2 = p$.

2a) $s = 280$ km, $t = 7$ h  2b) $s = 180$ km, $t = 4$ h  2c) $s = \dfrac{v_1 v_2 r}{v_2 - v_1}$ km, $t = \dfrac{v_1 r}{v_2 - v_1}$ ore.

In 2c), il testo specifica che dev'essere $v_2 > v_1$; effettivamente, con $v_1 = v_2$ il problema sarebbe: indeterminato se $r = 0$ oppure $v_1 = v_2 = 0$, altrimenti impossibile. Infine, cosa diremo se si suppone $v_1 > v_2$?

3a) 18000 euro in A e 82000 in B.  3b) $x = \dfrac{100i - bs}{a - b}$; $y = \dfrac{as - 100i}{a - b}$ $(a \neq b)$. E se $a = b$, cosa si può dire?

4) $AB = p + q - r$; $AC = p - q + r$; $BC = q + r - p$

# NUMERI IN BASE DIVERSA DA DIECI

## 1. MODI ALTERNATIVI DI CONTARE

Se storicamente si è affermata la consuetudine di privilegiare il numero **dieci** come **base del calcolo**, ciò è senza dubbio dovuto al fatto che - di norma - ogni persona nelle sue mani ha *dieci* dita.

**Quando scriviamo,** ad es., **il numero 1971, noi ci serviamo di una notazione "posizionale in base dieci"** ("posizionale" nel senso che il valore di ogni cifra dipende dalla *posizione* che essa occupa).

- L'ultima cifra a destra rappresenta le unità,
- la penultima i gruppi di dieci (decine),
- la terzultima le decine di decine (centinaia),
- la quartultima le decine di decine di decine (migliaia)
- … e così via.

| 1 | 9 | 7 | 1 |
|---|---|---|---|
| **decine di decine di decine** *o migliaia* | **decine di decine** *o centinaia* | **decine** | **unità** |

**Una popolazione nella quale le persone avessero otto dita anziché dieci**, tenderebbe probabilmente ad elaborare un sistema di **numerazione in base otto**, nel quale **le cifre andrebbero da 0 fino a 7**, e la sequenza dei numeri naturali verrebbe scritta nel modo seguente:

**0 zero**
**1 uno**
**2 due**
**3 tre**
**4 quattro**
**5 cinque**
**6 sei**
**7 sette**
**10 otto (1 ottina, 0 unità)**
**11 nove (1 ottina, 1 unità)**
**12 dieci (1 ottina, 2 unità)**
**13 undici (1 ottina, 3 unità)**
**14 dodici (1 ottina, 4 unità)**
**15 tredici (1 ottina, 5 unità)**
**16 quattordici (1 ottina, 6 unità)**
**17 quindici (1 ottina, 7 unità)**
**20 sedici (2 ottine, 0 unità)**
**21 diciassette (2 ottine, 1 unità)**
**22 diciotto (2 ottine, 2 unità)**
**... ...**
**77 sessantatre (sette ottine, sette unità)**
**100 sessantaquattro (una ottina di ottine o sessantaquattrina, zero ottine, zero unità)**
**101 sessantacinque (una sessantaquattrina, zero ottine, una unità)**
**102 sessantasei (una sessantaquattrina, zero ottine, due unità)**
**... ...**




**Ad esempio, la scrittura 2067 , nel sistema in base otto, significherebbe**

| 2 | 0 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|
| **ottine di ottine di ottine** *o* "*cinquecento-dodicine*" | **ottine di ottine** *o* "*sessanta-quattrine*" | **ottine** | **unità** |

**… quindi indicherebbe**
(tornando per comodità alla nostra abituale notazione in base dieci)
**il numero**

$$\boxed{2}\cdot 512+\boxed{0}\cdot 64+\boxed{6}\cdot 8+\boxed{7}\cdot 1 = \underset{8^3}{} \quad \underset{8^2}{} \quad \underset{8^1}{} \quad \underset{8^0}{}$$

$$= 1024 + 0 + 48 + 7 = \mathbf{1079}$$

**Insomma,**

$(\mathbf{2067})_{\mathbf{otto}} = (\mathbf{1079})_{\mathbf{dieci}}$ (leggi: "due-zero-sei-sette in base otto UGUALE uno-zero-sette-nove in base dieci")

Come si rappresenteranno, allora, i numeri in **BASE TRE**?
**Le cifre saranno esclusivamente 0, 1 e 2** (NOTA);

- **l'ultima cifra a destra rappresenterà le unità,**
- **la penultima i gruppi di tre (terne),**
- **la terzultima le terne di terne (gruppi di nove),**
- **la quartultima le terne di terne di terne (gruppi di ventisette)**
- **… e così via;**

NOTA:
la cifra più alta sarà 2,
cioè 1 in meno della base!
Pensa: nella abituale base dieci,
la cifra più alta è 9, perché,
quando si arriva a dieci oggetti,
li si pensa come 1 decina più 0 unità!

**la scrittura 120111** (tanto per fare un esempio) **significherà**

$$(\mathbf{120111})_{\mathbf{tre}} = \boxed{1}\cdot\underset{3^5}{\mathbf{243}} + \boxed{2}\cdot\underset{3^4}{\mathbf{81}} + \boxed{0}\cdot\underset{3^3}{\mathbf{27}} + \boxed{1}\cdot\underset{3^2}{\mathbf{9}} + \boxed{1}\cdot\underset{3^1}{\mathbf{3}} + \boxed{1}\cdot\underset{3^0}{\mathbf{1}} = 243+162+9+3+1 = (\mathbf{418})_{\mathbf{dieci}}$$

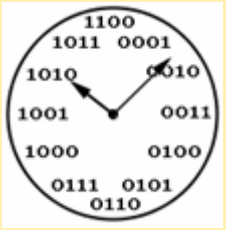
**e la sequenza dei numeri naturali, in base tre, sarà**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** zero | **10** tre | **20** sei | **100** nove | **110** dodici | **120** quindici | **200** diciotto | **210** ventuno | **220** ventiquattro | **1000** ventisette |
| **1** uno | **11** quattro | **21** sette | **101** dieci | **111** tredici | **121** sedici | **201** diciannove | **211** ventidue | **221** venticinque | **1001** ventotto |
| **2** due | **12** cinque | **22** otto | **102** undici | **112** quattordici | **122** diciassette | **202** venti | **212** ventitre | **222** ventisei | **...** ... |

♫ ATTIVITA' DIVERTENTE. Quattro compagni/e si mettono fianco a fianco, dando la schiena alla lavagna. Chi sta ultimo a destra - rispetto alla classe che guarda - conterà le unità, il penultimo le terne, chi lo precede le terne di terne, ecc. Ciascuno usa una mano sola, e di questa soltanto tre dita. Si fanno entrare le pecore (immaginarie ☺): una, un'altra, poi un'altra ancora … E questi pastori con tre dita le contano via via, alzando (o abbassando) le dita opportune. *Quando una persona dovrebbe alzare tutte e tre le dita, in realtà le chiude, incaricando chi lo precede di alzare un dito in più*. Ad esempio, dopo che sarà entrata l'undicesima pecora, il primo a sinistra non avrà alcun dito alzato, chi gli sta a fianco uno solo, il successivo nessuno, l'ultimo a destra due. La classe vedrà in quel momento il numero $(0102)_{tre}$, che corrisponde appunto all'*undici*.

E come si rappresenteranno i numeri in **BASE DUE** (**sistema BINARIO**, fondamentale per i *computer*)?
**Le cifre saranno esclusivamente 0 e 1**;

- **l'ultima cifra a destra rappresenterà le unità,**
- **la penultima i gruppi di due (coppie),**
- **la terzultima le coppie di coppie (gruppi di quattro),**
- **la quartultima le coppie di coppie di coppie (gruppi di otto)**
- **… e così via;**



*Un orologio binario*

**la scrittura 1110100 significherà**

$$(\mathbf{1110100})_{\mathbf{due}} = \boxed{1}\cdot\underset{2^6}{\mathbf{64}} + \boxed{1}\cdot\underset{2^5}{\mathbf{32}} + \boxed{1}\cdot\underset{2^4}{\mathbf{16}} + \boxed{0}\cdot\underset{2^3}{\mathbf{8}} + \boxed{1}\cdot\underset{2^2}{\mathbf{4}} + \boxed{0}\cdot\underset{2^1}{\mathbf{2}} + \boxed{0}\cdot\underset{2^0}{\mathbf{1}} = 64+32+16+0+4+0+0 = (\mathbf{116})_{\mathbf{dieci}}$$

**… e la sequenza dei numeri naturali sarà:**

| | |
|---|---|
| **0** | zero |
| **1** | uno |
| **10** | due |
| **11** | tre |
| **100** | quattro |
| **101** | cinque |
| **110** | sei |
| **111** | sette |
| **1000** | otto |
| **1001** | nove |
| **1010** | dieci |
| **1011** | undici |
| **1100** | dodici |
| **1101** | tredici |
| **1110** | quattordici |
| **1111** | quindici |
| **10000** | sedici |
| **10001** | diciassette |
| **...** | ... |

**ESERCIZI** (risultati a pag. 419)

a) Trasforma in base dieci:

1) $(2201)_{tre} = (\quad)_{dieci}$
2) $(2201)_{cinque} = (\quad)_{dieci}$
3) $(357)_{otto} = (\quad)_{dieci}$
4) $(11033)_{quattro} = (\quad)_{dieci}$
5) $(1100100)_{due} = (\quad)_{dieci}$
6) $(10000000000)_{due} = (\quad)_{dieci}$

b) Provaci, procedendo come credi:

7) $(538)_{dieci} = (\quad)_{cinque}$
8) $(64)_{dieci} = (\quad)_{otto}$
9) $(64)_{dieci} = (\quad)_{tre}$
10) $(31)_{dieci} = (\quad)_{tre}$
11) $(31)_{dieci} = (\quad)_{otto}$
12) $(40)_{dieci} = (\quad)_{due}$
13) $(64)_{dieci} = (\quad)_{quattro}$
14) $(64)_{dieci} = (\quad)_{due}$
15) $(31)_{dieci} = (\quad)_{quattro}$
16) $(31)_{dieci} = (\quad)_{due}$

c) Utilizza dieci come base intermedia:

17) $(212)_{tre} = (\quad)_{due}$
18) $(212)_{cinque} = (\quad)_{tre}$
19) $(10110111)_{due} = (\quad)_{otto}$
20) $(212)_{tre} = (\quad)_{cinque}$

## 2. TRASFORMAZIONE DALLA BASE DIECI A UN'ALTRA BASE

Come hai svolto, nella pagina precedente, l'esercizio

$(538)_{dieci} = (\quad\quad)_{cinque}$ ?

*Suppongo che tu ti sia preparato uno specchietto delle potenze successive della base di arrivo,*

| | |
|---|---|
| $5^0$ | 1 |
| $5^1$ | 5 |
| $5^2$ | 25 |
| $5^3$ | 125 |
| $5^4$ | 625 che è già più grande di 538 ! |

*per poi ragionare pressappoco così:*
***c'è da esprimere il 538 come somma dei numeri 1, 5, 25, 125, …***
***ciascuno moltiplicato per una delle cifre 0, 1, 2, 3 o 4****, quindi*

- *Quante volte il 125 sta nel 538? Risposta: 4 volte; dunque* $538 = \underbrace{4\cdot 125}_{500} + 38$
- *Ma anche il 38 andrà ora espresso utilizzando come "mattoni" le potenze di 5.*
  *Nel 38, il 25 ci sta 1 volta; dunque* $538 = \underbrace{4\cdot 125}_{500} + \overbrace{\underbrace{1\cdot 25}_{25} + 13}^{38}$
- *Poi, nell'13, il 5 ci sta 2 volte; dunque* $538 = \underbrace{4\cdot 125}_{500} + \underbrace{1\cdot 25}_{25} + \overbrace{\underbrace{2\cdot 5}_{10} + 3}^{13}$
- *Perciò, in definitiva,* $(\mathbf{538})_{\mathbf{10}} = \boxed{4}\cdot\underbrace{\mathbf{125}}_{\mathbf{5^3}} + \boxed{1}\cdot\underbrace{\mathbf{25}}_{\mathbf{5^2}} + \boxed{2}\cdot\underbrace{\mathbf{5}}_{\mathbf{5^1}} + \boxed{3}\cdot\underbrace{\mathbf{1}}_{\mathbf{5^0}} = (\mathbf{4123})_{\mathbf{5}}$

Bene! Giustissimo!

C'è tuttavia **un secondo metodo** per effettuare queste trasformazioni dalla base dieci a un'altra base.

Per descriverlo, prendiamo sempre spunto dall'esempio di cui sopra: $(538)_{dieci} = (\quad\quad)_{cinque}$

Il metodo è il seguente:

- calcolo quoziente e resto della divisione $538:5 = \boxed{107}$ col resto di $\boxed{3}$
- calcolo quoziente e resto della divisione $107:5 = \boxed{21}$ col resto di $\boxed{2}$
- calcolo quoziente e resto della divisione $21:5 = \boxed{4}$ col resto di $\boxed{1}$
- calcolo quoziente e resto della divisione $4:5 = \boxed{0}$ col resto di $\boxed{4}$
- Avendo ottenuto un quoziente 0, mi fermo e trascrivo A RITROSO i resti via via ottenuti; ottengo 4123 che è, appunto, la codifica in base 5 del numero assegnato.

*Per qual motivo il metodo funziona?*

*Riflettiamo.*

*Il 538 può essere suddiviso in tanti gruppetti di 5,*
*con eventualmente un resto (di 0, 1, 2, 3 o 4 unità).*
*Se andiamo a calcolare quoziente e resto della divisione 538:5,*
*il resto costituirà l'ultima cifra a destra, quella delle unità, del numero trasformato!*

$538:5 = \boxed{107}$ col resto di $\boxed{3}$

*Quindi, a parte quel resto di 3 unità, nel 538 sono contenute 107 cinquine.*
*Ora, queste 107 cinquine potranno essere riunite a loro volta in gruppi di 5;*
*in questo modo si otterranno le "venticinquine";*
*dunque facciamo il calcolo*

$107:5 = \boxed{21}$ col resto di $\boxed{2}$

*e stabiliamo così che le EFFETTIVE cinquine in gioco sono 2 (penultima cifra),*
*perché le altre 105 verranno invece utilizzate per comporre 21 "venticinquine".*

*Queste a loro volta …*

*Ormai le considerazioni fatte dovrebbero essere sufficienti a giustificare ciò che si diceva:*
*i resti via via ottenuti, se trascritti a ritroso, costituiranno le cifre del numero trasformato.*

**ESERCIZI** - Puoi a questo punto riprendere gli esercizi 8 … 20 della pagina precedente e svolgerli con questo efficace metodo delle divisioni successive e dei resti.

## 3. RICAPITOLAZIONE TEORICA, APPROFONDIMENTI

♥ **Quando si vuole rappresentare un numero intero $N$ in una certa base $b$**
(essendo $b$ un numero naturale maggiore o uguale a 2)
**si utilizzano come cifre i numeri da $0$ fino a $b-1$** e la rappresentazione è

$$N=(c_k c_{k-1}\ldots c_2 c_1 c_0)_b = c_k b^k + c_{k-1} b^{k-1} + \ldots + c_2 b^2 + c_1 b + c_0$$

♥ **Che differenza c'è, a proposito, fra "numero" e "cifra"?**
Diciamo che "**cifra**" è un ***singolo* segno grafico, indicante un numero *intero***
(le sequenze di più cifre, opportunamente interpretate, indicano poi altri numeri).

❑ Nello studio dei numeri in base diversa da dieci, si scrivono catene come

$$(433)_{\text{cinque}} = \boxed{4}\cdot 5^2 + \boxed{3}\cdot 5^1 + \boxed{3}\cdot 5^0 = 4\cdot 25 + 3\cdot 5 + 3\cdot 1 = 100+15+3 = (118)_{\text{dieci}}$$

Bene: è importante osservare che in queste catene **i passaggi intermedi sono codificati nella consueta base dieci** (la base dieci, cioè, viene impiegata come "base ausiliaria con cui condurre il discorso"; si dice che funge da "meta-base").

❑ Anzi, si suole scrivere, per brevità, $(433)_5 = (118)_{10}$
con la medesima convenzione: **i numeri a destra in basso delle parentesi, indicanti la base di numerazione, sono sempre codificati in base dieci**.

## 4. IL SISTEMA ESADECIMALE, OSSIA: IN BASE SEDICI

**Le cifre sono: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A (dieci), B (undici), C (dodici), D (tredici), E (quattordici), F (quindici);**

**la scrittura A3B, ad esempio, significa**

$$(\mathbf{A3B})_{16} = \boxed{\mathbf{A}}\cdot 16^2 + \boxed{3}\cdot 16^1 + \boxed{\mathbf{B}}\cdot 16^0 = 10\cdot 256 + 3\cdot 16 + 11\cdot 1 = 2560+48+11 = (\mathbf{2619})_{10}$$

**La sequenza dei numeri naturali in esadecimale è la seguente:**

| | |
|---|---|
| **0** | *zero* |
| **1** | *uno* |
| **2** | *due* |
| **3** | *tre* |
| **4** | *quattro* |
| **5** | *cinque* |
| **6** | *sei* |
| **7** | *sette* |
| **8** | *otto* |
| **9** | *nove* |
| **A** | *dieci* |
| **B** | *undici* |
| **C** | *dodici* |
| **D** | *tredici* |
| **E** | *quattordici* |
| **F** | *quindici* |
| **10** | *sedici* |
| **11** | *diciassette* |
| **12** | *diciotto* |
| **...** | ... |

### DA BINARIO A ESADECIMALE E VICEVERSA: UNA *SCORCIATOIA*

**I sistemi di numerazione BINARIO ed anche ESADECIMALE occupano un ruolo IMPORTANTISSIMO nel mondo dei computer.**

Esiste la possibilità di trasformare *rapidissimamente*
un numero binario in esadecimale, o viceversa: illustriamola mediante un esempio.

Sia dato il numero binario $(10011110101)_2$.

Se vogliamo trasformarlo in esadecimale,
ci basta separarne le cifre in blocchetti di quattro, a partire da destra:

0100 1111 0101 (lo 0 iniziale è stato aggiunto affinché tutti i blocchetti avessero esattamente 4 cifre).

A questo punto ciascun blocchetto potrà essere interpretato
come un numero binario di quattro cifre, e un binario a quattro cifre
può valere da un minimo di zero (0000) fino a un massimo di quindici (1111),
perciò corrisponde ad una *cifra esadecimale*, da 0 a F.
Se dunque trasformiamo i blocchetti ottenuti
ciascuno nella corrispondente cifra esadecimale, avremo:

$$\underbrace{0100}_{4}\ \underbrace{1111}_{F}\ \underbrace{0101}_{5}$$

dopodiché potremo constatare che è proprio
$(10011110101)_2 = (4F5)_{16}$ (verificalo trasformando ambo i membri in decimale!)

Si può dimostrare che il procedimento ha una validità del tutto generale.
Quindi, tanto per fare qualche altro esempio, si avrà pure

$(100000)_2 = (20)_{16}$ *in quanto* $100000 \to \underbrace{0010}_{2}\ \underbrace{0000}_{0}$

$(111100011)_2 = (1E3)_{16}$ *in quanto* $111100011 \to \underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{1110}_{E}\ \underbrace{0011}_{3}$

$(A5)_{16} = (10100101)$ *in quanto* $A5 \to \underbrace{A}_{1010}\ \underbrace{5}_{0101}$; $(5A)_{16} = (1011010)$ *in quanto* $5A \to \underbrace{5}_{0101}\ \underbrace{A}_{1010}$

## 5. CENNI ALLE OPERAZIONI COI NUMERI IN BASE DIVERSA DA DIECI

### ADDIZIONE

- Base cinque

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | + |
| **2** | **1** | **1** | **3** | = |
| **3** | **4** | **0** | **2** | |

*Inizio dall'ultima colonna a destra, quella delle unità, e sommo 4+3;*
*ottengo sette, ma in base cinque la cifra corrispondente non esiste,*
*e il sette è visto come la somma di 1 cinquina + 2 unità,*
*quindi nel risultato scrivo 2 e riporto 1 cinquina.*
*Poi sulla colonna delle cinquine effettuo il calcolo 1+3+1, il cui risultato è cinque,*
*sennonché, di nuovo, in base cinque il cinque come cifra non esiste*
*e bisogna pensare a 0 col riporto di 1,*
*nel senso di 0 cinquine col riporto di 1 "cinquina di cinquine" (venticinquina).*
*Mi sposto sulla colonna delle venticinquine per il calcolo 1+2+1, che dà 4*
*analogamente, sulla colonna delle centoventicinquine, ottengo 1+2=3.*

- Base due

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | |
| | **1** | **1** | **1** | **1** | **0** | **0** | **1** | + |
| | | **1** | **1** | **0** | **0** | **1** | **1** | = |
| **1** | **0** | **1** | **0** | **1** | **1** | **0** | **0** | |

*Ed ecco, qui a sinistra, un altro esempio,*
*questa volta con numeri binari.*
*Controlla l'esattezza del calcolo*
*trasformando in base dieci*
*addendi e risultato.*

- Base sedici

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | 1 | | | |
| **4** | **8** | **9** | + | | **9** | **8** | **A** | + |
| **6** | **8** | **1** | = | | **A** | **3** | **B** | = |
| **B** | **0** | **A** | | **1** | **3** | **C** | **5** | |

*Per terminare,*
*due esempi*
*in esadecimale.*

*Ne approfitto per segnalarti che*
*se trovi, al posto della base, la sigla "hex",*
*significa che la base è sedici*
*("hex" sta per "hexadecimal"= esadecimale).*
*Es.* $(489)_{hex}+(681)_{hex}=(\mathrm{B0A})_{hex}$

### MOLTIPLICAZIONE

- Base tre

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **2** | **1** | **2** | · |
| | | **1** | **2** | = |
| | **1** | **2** | **0** | **1** |
| | **2** | **1** | **2** | |
| **1** | **1** | **0** | **2** | **1** |

*In base tre, abbiamo* $2\cdot 2=$ *quattro* $=11$ (1 *unità col riporto di* 1 *terna*).
*La "tabellina"della moltiplicazione in base tre è:*

| · | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 11 |

*base tre*

- Base due

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **1** | **0** | **1** | · | |
| | | | **1** | **1** | **0** | = | |
| | | **0** | **0** | **0** | **0** | | |
| | **1** | **1** | **0** | **1** | | | |
| **1** | **1** | **0** | **1** | | | | |
| **1** | **0** | **0** | **1** | **1** | **1** | **0** | |

*La tabellina*
*in base due*
*è la seguente:*

| · | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

*base due*

- Base sedici

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **3** | **A** | · |
| | **B** | **2** | = |
| | **7** | **4** | |
| **2** | **7** | **E** | |
| **2** | **8** | **5** | **4** |

*Controlla la correttezza*
*del calcolo qui a sinistra.*
*La tabellina in base sedici*
*è riportata alla successiva*
*pagina 419.*

**ESERCIZI** (altri ne trovi alla pagina successiva):
non ti dico quali sono i risultati … controlla tu trasformando tutto, alla fine, in base dieci!

$(2012)_3+(112)_3$ $(2012)_3\cdot(112)_3$ $(133)_4+(23)_4$ $(133)_4\cdot(23)_4$
$(1110)_2+(1011)_2$ $(1110)_2\cdot(1011)_2$ $(1D)_{16}+(39)_{16}$ $(1D)_{16}\cdot(39)_{16}$
$(60)_7+(45)_7$ $(60)_7\cdot(45)_7$ $(44)_5+(33)_5$ $(44)_5\cdot(33)_5$ $(27)_8+(36)_8$ $(27)_8\cdot(36)_8$

♣ **Un programma freeware per fulminee CONVERSIONI DI BASE (Numbers, di David Dirkse)** ⇨
♣ **CALCOLATRICE IN BINARIO, OTTALE, ESADECIMALE (Bitcalc, di Curt van den Heuvel)** ⇨

**APPROFONDIMENTO: NUMERI CON LA VIRGOLA IN BASE DIVERSA DA DIECI** ⇨

Ad esempio, è $(20,212)_3=2\cdot 3^1+0\cdot 3^0+2\cdot 3^{-1}+1\cdot 3^{-2}+2\cdot 3^{-3}=2\cdot 3+0\cdot 1+2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{27}=\ldots$

## 6. ESERCIZI

**RISULTATI degli esercizi iniziali (pag. 415) sulla conversione di base**

1) $(73)_{dieci}$ 2) $(301)_{dieci}$ 3) $(239)_{dieci}$ 4) $(335)_{dieci}$ 5) $(100)_{dieci}$

6) $(1024)_{dieci}$ 7) $(4123)_{cinque}$ 8) $(100)_{otto}$ 9) $(2101)_{tre}$ 10) $(1011)_{tre}$

11) $(37)_{otto}$ 12) $(101000)_{due}$ 13) $(1000)_{quattro}$ 14) $(1000000)_{due}$ 15) $(133)_{quattro}$

16) $(11111)_{due}$ 17) $(10111)_{due}$ 18) $(2010)_{tre}$ 19) $(267)_{otto}$ 20) $(43)_{cinque}$

**ALTRI ESERCIZI** (risposte in fondo alla pagina)

21) $(124)_{10}=(\quad)_2$ 22) $(124)_{10}=(\quad)_3$ 23) $(124)_{10}=(\quad)_4$

24) $(124)_{10}=(\quad)_5$ 25) $(124)_{10}=(\quad)_8$ 26) $(124)_{10}=(\quad)_{16}$

27) $(11111111)_2=(\quad)_4$ 28) $(11111111)_2=(\quad)_8$ 29) $(11111111)_2=(\quad)_{16}$

30) $(1202)_3=(\quad)_6$ 31) $(AB5)_{16}=(\quad)_2$ 32) $(1202)_3=(\quad)_9$

33) $(110)_2+(11)_2$ 34) $(121)_3+(122)_3$ 35) $(567)_8+(345)_8$

36) $(101110)_2+(11011)_2$ 37) $(246)_8+(642)_8$ 38) $(2222)_3+1$

39) $(1A)_{16}+(2B)_{16}$ 40) $(F74)_{16}+(AD)_{16}$ 41) $(101)_2+(110)_2+(1011)_2$

42) $(23)_5\cdot(34)_5$ 43) $(101)_2\cdot(110)_2$ 44) $(22)_3\cdot(21)_3$ 45) $(321)_4\cdot(123)_4$ 46) $(111)_2\cdot(111)_2$

47) $(222)_3\cdot(222)_3$

48) $(35)_8\cdot(57)_8$

49) $(1A)_{16}\cdot(34)_{16}$

50) Compila la tabellina della **moltiplicazione in base quattro:**

| • | 0 | 1 | 2 | 3 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 10 | | | | | |

51) **Criteri di divisibilità**
Guardando un intero scritto in base 3, si riconosce che è divisibile
a) per tre quando …
b) per nove quando …
c) per due quando …

| • | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| 1 | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** | **10** |
| 2 | **0** | **2** | **4** | **6** | **8** | **A** | **C** | **E** | **10** | **12** | **14** | **16** | **18** | **1A** | **1C** | **1E** | **20** |
| 3 | **0** | **3** | **6** | **9** | **C** | **F** | **12** | **15** | **18** | **1B** | **1E** | **21** | **24** | **27** | **2A** | **2D** | **30** |
| 4 | **0** | **4** | **8** | **C** | **10** | **14** | **18** | **1C** | **20** | **24** | **28** | **2C** | **30** | **34** | **38** | **3C** | **40** |
| 5 | **0** | **5** | **A** | **F** | **14** | **19** | **1E** | **23** | **28** | **2D** | **32** | **37** | **3C** | **41** | **46** | **4B** | **50** |
| 6 | **0** | **6** | **C** | **12** | **18** | **1E** | **24** | **2A** | **30** | **36** | **3C** | **42** | **48** | **4E** | **54** | **5A** | **60** |
| 7 | **0** | **7** | **E** | **15** | **1C** | **23** | **2A** | **31** | **38** | **3F** | **46** | **4D** | **54** | **5B** | **62** | **69** | **70** |
| 8 | **0** | **8** | **10** | **18** | **20** | **28** | **30** | **38** | **40** | **48** | **50** | **58** | **60** | **68** | **70** | **78** | **80** |
| 9 | **0** | **9** | **12** | **1B** | **24** | **2D** | **36** | **3F** | **48** | **51** | **5A** | **63** | **6C** | **75** | **7E** | **87** | **90** |
| A | **0** | **A** | **14** | **1E** | **28** | **32** | **3C** | **46** | **50** | **5A** | **64** | **6E** | **78** | **82** | **8C** | **96** | **A0** |
| B | **0** | **B** | **16** | **21** | **2C** | **37** | **42** | **4D** | **58** | **63** | **6E** | **79** | **84** | **8F** | **9A** | **A5** | **B0** |
| C | **0** | **C** | **18** | **24** | **30** | **3C** | **48** | **54** | **60** | **6C** | **78** | **84** | **90** | **9C** | **A8** | **B4** | **C0** |
| D | **0** | **D** | **1A** | **27** | **34** | **41** | **4E** | **5B** | **68** | **75** | **82** | **8F** | **9C** | **A9** | **B6** | **C3** | **D0** |
| E | **0** | **E** | **1C** | **2A** | **38** | **46** | **54** | **62** | **70** | **7E** | **8C** | **9A** | **A8** | **B6** | **C4** | **D2** | **E0** |
| F | **0** | **F** | **1E** | **2D** | **3C** | **4B** | **5A** | **69** | **78** | **87** | **96** | **A5** | **B4** | **C3** | **D2** | **E1** | **F0** |
| 10 | **0** | **10** | **20** | **30** | **40** | **50** | **60** | **70** | **80** | **90** | **A0** | **B0** | **C0** | **D0** | **E0** | **F0** | **100** |

52) Ecco qui sopra la tabellina per la **moltiplicazione esadecimale.**
a) Osservala bene: quali regolarità puoi cogliere in essa?
b) Copri una linea (riga o colonna) a tua scelta e poi ricostruiscila.

**RISPOSTE**

21) $(1111100)_2$ 22) $(11121)_3$ 23) $(1330)_4$ 24) $(444)_5$ 25) $(174)_8$

26) $(7C)_{16}$ 27) $(3333)_4$ 28) $(377)_8$ 29) $(FF)_{16}$ 30) $(115)_6$

31) $(101010110101)_2$ 32) $(52)_9$ 33) $(1001)_2$ 34) $(1020)_3$

35) $(1134)_8$ 36) $(1001001)_2$ 37) $(1110)_8$ 38) $(10000)_3$ 39) $(45)_{16}$

40) $(1021)_{16}$ 41) $(10110)_2$ 42) $(1442)_5$ 43) $(11110)_2$ 44) $(2002)_3$

45) $(120003)_4$ 46) $(110001)_2$ 47) $(221001)_3$ 48) $(2523)_8$ 49) $(548)_{16}$ 51) ⇨

50)

| • | 0 | 1 | 2 | 3 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| 1 | **0** | **1** | **2** | **3** | **10** |
| 2 | **0** | **2** | **10** | **12** | **20** |
| 3 | **0** | **3** | **12** | **21** | **30** |
| 10 | **0** | **10** | **20** | **30** | **100** |

# APPROSSIMAZIONI, ERRORI, INCERTEZZE

## 1. PERCHE', E COME, APPROSSIMARE

- **Un numero con tante cifre è "ingombrante", scomodo da maneggiare, e soprattutto**
  ***può darsi che le sue cifre meno "pesanti", vale a dire quelle più a destra, siano trascurabili***
  per il grado di precisione che è sensato osservare in un determinato contesto,
  o che è concretamente possibile ottenere
  (ad esempio, una macchinetta calcolatrice può gestire solo un numero limitato di cifre dopo la virgola).
- **Può anche avvenire che il *vero valore* di un numero sia *sconosciuto,***
  ***ma sia invece noto un valore che si sa non differire molto da esso.***

**Si rende quindi sovente opportuno o necessario "approssimare" un numero $\alpha$,**
**sostituendolo con un altro numero, vicino ad $\alpha$, le cui ultime cifre a destra siano tutte 0.**

Tale **approssimazione** può essere effettuata in due modi:

A) **per** "**troncamento**", se semplicemente tutte le cifre a destra di una cifra fissata vengono sostituite con degli 0; ad esempio
   - il troncamento del numero 378614 alla cifra delle migliaia è 378000
   - il troncamento del numero 62,328 alla cifra dei decimi è 62,3
   - il troncamento del numero 62,378 alla cifra dei decimi è ancora 62,3

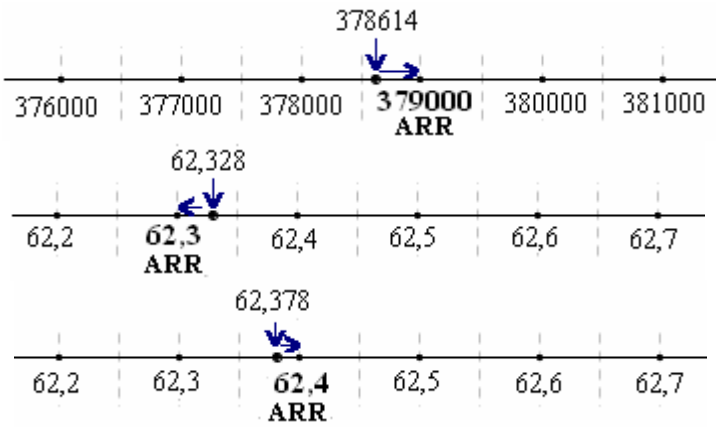
   [è chiaro che il troncamento di un numero assoluto ( = senza segno) porta sempre a un'approssimazione per *difetto*, ossia alla sostituzione di quel numero con un altro che è *minore* di quello originario]

B) oppure **per** "**arrotondamento**", che possiamo pensare come la **sostituzione del numero con un altro che gli sia** (per difetto o per eccesso) **il più possibile vicino**.
   Ad esempio,

l'arrotondamento del numero 378614
alle *migliaia*
è il multiplo di 1000 più vicino, ossia 379000

l'arrotondamento di 62,328
ai *decimi*
è il numero con 1 cifra dopo la virgola
( = quella dei decimi) più vicino, ossia 62,3

l'arrotondamento del numero 62,378
ai *decimi*
è il numero con 1 cifra dopo la virgola
( = quella dei decimi) più vicino, ossia 62,4




### LA REGOLA PER ARROTONDARE

♥ La **REGOLA** che si applica per l'arrotondamento di un numero è la seguente.

♪ **Se vengono trasformate in "0" tutte le cifre a partire da una certa cifra e verso destra,**
**quando la prima cifra da trasformare in "0" è 0, 1, 2, 3 o 4,**
**allora nell'arrotondamento la cifra precedente resta invariata;**

♫ **se invece la prima cifra da trasformare in "0" è 5 (ma vedi NOTA), 6, 7, 8 o 9,**
**allora nell'arrotondamento la cifra precedente viene aumentata di un'unità.**

Esempi: l'arrotondamento di 12328 alle centinaia è 12300; quello di 0,1372 ai centesimi è 0,14

**NOTA: l'arrotondamento "del banchiere" (banker's rounding, o round-to-even method)**
Se la **prima cifra da mutare in 0** è **5**, e tale cifra è **l'ultima del numero**, oppure è **seguita solo da zeri**, allora il passaggio al "valore più vicino" potrebbe esser fatto indifferentemente per difetto o per eccesso, perché ad esempio il numero 1,235 ha la stessa distanza sia da 1,23 che da 1,24;
per questo motivo, nel caso in cui i numeri da sottoporre ad arrotondamento siano tanti,
c'è chi preferisce procedere in modo un poco diverso dalla *regola* che abbiamo illustrato, ossia:
**se la cifra che precede il 5 è pari, la si lascia invariata, mentre se è dispari, la si aumenta di un'unità**
*In tal modo le approssimazioni per difetto e per eccesso così effettuate tenderanno a "bilanciarsi"*
*(sui valori arrotondati secondo questa convenzione, metà circa lo saranno per difetto e metà per eccesso),*
*e l'insieme di dati risentirà il meno possibile, globalmente, delle modifiche apportate.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Per esempio, volendo arrotondare ai centesimi | 3,875 | 3,645 | 3,735 | 3,865 |
| si scriverà rispettivamente | 3,88 | 3,64 | 3,74 | 3,86 |

**Col "banker's rounding", l'ultima cifra del numero arrotondato sarà sempre pari!** (*even* = pari)

**ESEMPIO RIASSUNTIVO**

**1845,74893** diventa, se è richiesto di

- arrotondare alle *migliaia*: **2000**
- arrotondare alle *centinaia*: **1800**
- arrotondare alle *decine*: **1850**
- *troncare* alle *decine*: **1840**
- arrotondare alle *unità*: **1846**
- arrotondare ai *decimi*: **1845,7**
- arrotondare ai *centesimi*: **1845,75**
- arrotondare ai *millesimi*: **1845,749**
- *troncare* ai *millesimi*: **1845,748**
- …

**ARROTONDAMENTO "NORMALE" O "DEL BANCHIERE" ???**

**Sta a noi decidere, a seconda delle nostre esigenze, quale applicare!**

**0,725** arrotondato ai centesimi diventa:

**0,73** se decidiamo per un **arrotondamento "normale"**,
perché in questo caso la regola ci dice che se la prima cifra da mutare in 0 è 5,
allora la cifra precedente va aumentata di un'unità;

**0,72** se decidiamo di fare l'**arrotondamento "del banchiere"**,
perché in questo caso la cifra che precede il 5, essendo pari, deve rimanere inalterata.

*Abbiamo già detto che si può preferire l' "arrotondamento del banchiere"*
*di fronte ad un numero consistente di dati statistici.*

**OSSERVAZIONI: E' SEMPRE OPPORTUNO ESPRIMERSI CON LA DOVUTA CHIAREZZA!**

1) La parola "*arrotondamento*" è a volte impropriamente adoperata per indicare
sia un'approssimazione di tipo A) che un'approssimazione di tipo B).
Ma è molto meglio essere *accurati* nella terminologia usata, e riservare il termine "arrotondamento"
soltanto a un'approssimazione di tipo "B", ossia alla "scelta del numero più vicino",
denominando invece "troncamento" un'approssimazione di tipo "A".

2) Capita di sentire in giro delle espressioni verbali *ambigue* e dunque non appropriate.
Ad esempio, la frase "arrotondare un numero a 2 cifre" come andrà interpretata?
Si tratterà di "arrotondare in modo che rimangano due cifre soltanto *in totale*",
oppure di "arrotondare il numero in modo da conservare solo due cifre *dopo la virgola*"?
Per evitare equivoci, bisognerebbe comunicare in modo più preciso, quindi dire, a seconda dei casi,

- "arrotondare il numero *a 2 cifre significative*"
(per un discorso esauriente sulle "cifre significative" vedi Volume 2, Statistica, paragrafo 12)

oppure

- "arrotondare il numero *alla cifra dei centesimi*, o *alla* $2^a$ *cifra dopo la virgola* ".

Ad esempio, prendiamo il numero 1,4723:

- "arrotondarlo a due cifre significative" significa approssimarlo con 1,5
- "arrotondarlo a due cifre dopo la virgola", o "arrotondarlo ai centesimi",
significa approssimarlo con 1,47.

**E' sempre meglio dire o scrivere qualche parola in più, ed evitare l'ambiguità,**
**piuttosto che essere troppo sintetici e lasciare spazio ai dubbi!**
**Non seguiamo il pessimo esempio dei giornali e della televisione, per carità!!!**



3) Ancora: consideriamo il numero, scritto in notazione esponenziale, $3{,}425 \cdot 10^{-6}$.
Scrivere che il suo "arrotondamento ai decimi" è $3{,}4 \cdot 10^{-6}$ non ha molto senso,
perché il coefficiente iniziale 3,425 è moltiplicato per $10^{-6}$
quindi la sua cifra delle unità (che è 3) indica in realtà dei "milionesimi",
e la sua prima cifra dopo la virgola (che è 4) indica in realtà dei "decimilionesimi".
Molto meglio, allora, dire che

- $3{,}4 \cdot 10^{-6}$ è l' "arrotondamento di $3{,}425 \cdot 10^{-6}$ a due cifre significative"

oppure

- $3{,}4 \cdot 10^{-6}$ è l' "approssimazione di $3{,}425 \cdot 10^{-6}$ ottenuta
arrotondando *il coefficiente* alla *prima cifra dopo la virgola* ".

## 2. L' ERRORE (ERRORE "ASSOLUTO") NELL'APPROSSIMAZIONE

Quando noi passiamo da un numero a una sua approssimazione, per "troncamento" o per "arrotondamento", commettiamo un "errore", nel senso che il *nuovo* numero *non* è più quello "*vero*":

$$errore = |valore\ approssimato - valore\ esatto|$$

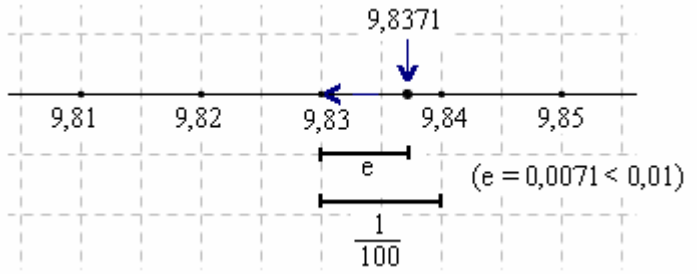
L'errore qui definito viene anche chiamato "errore assoluto"
per distinguerlo dall' "errore relativo" che introdurremo fra poco.
Tuttavia, per la presenza, nella nostra definizione, delle stanghette di "valore assoluto", si tratta anche di un numero "assoluto" nel senso di "senza segno" (o, volendo, di "maggiore o uguale a 0", "non negativo").

- Ad esempio, se arrotondiamo ai decimi il numero 7,418 otterremo 7,4 e sarà
  $errore = |valore\ approssimato - valore\ esatto| = |7,4 - 7,418| = |-0,018| = 0,018$.
- Arrotondando invece lo stesso numero 7,418 ai centesimi si otterrà 7,42 e avremo
  $errore = |valore\ approssimato - valore\ esatto| = |7,42 - 7,418| = |0,002| = 0,002$.

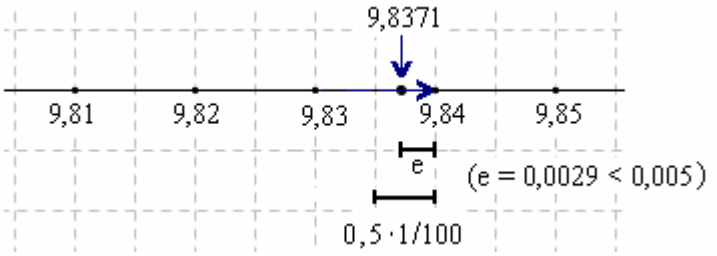
Di questo $errore = errore\ "assoluto" = |valore\ approssimato - valore\ esatto|$
è possibile dare con facilità una "maggiorazione",
cioè un confine al di sopra del quale esso non potrà comunque andare. Precisamente:

- **nel caso del "troncamento" si può affermare che l'errore sarà sempre minore della grandezza che corrisponde all'ultima cifra del nuovo numero ottenuto …**
- **… e nel caso dell'arrotondamento, sempre minore o uguale alla metà di questa grandezza**.

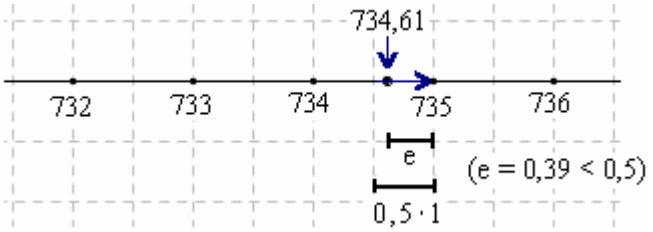
Se **tronchiamo** ai **centesimi**
il numero 9,8371
otteniamo 9,83
la cui differenza in valore assoluto
dal vero valore ("**errore**")
è $|9,83 - 9,8371| = |-0,0071| = 0,0071$
che risulta **inferiore a un centesimo**



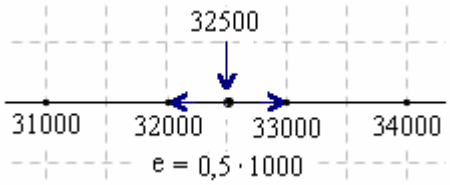

Se **arrotondiamo** ai **centesimi**
lo stesso numero 9,8371
otteniamo 9,84
la cui differenza in valore assoluto
dal vero valore ("**errore**")
è **inferiore alla metà di un centesimo**




Se **arrotondiamo** alle **unità**
il numero 734,61
otteniamo 735
la cui differenza in valore assoluto
dal vero valore ("**errore**")
è **inferiore alla metà di una unità**




Se **arrotondiamo** alle **migliaia** il numero 32500
otteniamo 33000 o 32000, a seconda che applichiamo
l'arrotondamento "normale" oppure quello "del banchiere";
ma in entrambi i casi, la differenza in valore assoluto
fra l'approssimazione e il vero valore (cioè, l' "**errore**")
è **uguale alla metà di un migliaio**.




Insomma, detto $\alpha$ il numero da approssimare, e detti:
T il suo troncamento, A il suo arrotondamento, riferiti alla "cifra di posto *n*", dove intendiamo - ad es. - che

- "cifra di posto 3" = cifra delle migliaia
- "cifra di posto 2" = cifra delle centinaia
- "cifra di posto 1" = cifra delle decine
- "cifra di posto 0" = cifra delle unità
- "cifra di posto $-1$" = cifra dei decimi
- "cifra di posto $-2$" = cifra dei centesimi

avremo:

- nel caso del **troncamento**, $e = errore = |T - \alpha| < 10^n$
- nel caso dell'**arrotondamento**, $e = errore = |A - \alpha| \le 0,5 \cdot 10^n$

## 3. L' "ERRORE RELATIVO" NELL' APPROSSIMAZIONE

Se noi arrotondiamo alle decine *l'età di una persona*,
certamente l'errore di approssimazione potrà essere rilevante, specie se la persona è giovane!
Se invece arrotondiamo alle decine *l'altezza in metri di una montagna*,
è ovvio che comunque l'errore sarà trascurabile.
E' perciò spesso conveniente, oltre o alternativamente all'errore "assoluto" visto precedentemente,
considerare il cosiddetto "errore relativo", il quale non è altro che il quoziente ( = il rapporto)
fra l'errore assoluto e il numero considerato (che per una serie di ragioni si intende di prendere
nella sua versione approssimata, e in valore assoluto, cioè ignorandone un eventuale segno negativo).

Vale a dire: $$\textbf{errore relativo} = \frac{\textbf{errore assoluto}}{\left|\textbf{valore dell'approssimazione}\right|}$$

da cui: $\textbf{errore assoluto} = \textbf{errore relativo} \cdot \left|\textbf{valore dell'approssimazione}\right|$

Ad esempio, se l'età di una ragazza 23enne viene arrotondata a 20 anni,
si commette un errore relativo uguale a 3/20 , cioè uguale a 0,15 o anche uguale al 15%,
mentre se l'altezza di una montagna himalayana di 7576 metri viene arrotondata a 7580 metri,
l'errore relativo sarà uguale a 4/7580 = 0,0005… ossia sarà circa dello 0,05%.

A proposito di errore relativo espresso come percentuale, avremo

$$\textbf{errore relativo } \textit{percentuale} = \textbf{errore relativo} \cdot 100$$

## 4. ERRORI E INCERTEZZE

A ben guardare, nelle varie situazioni della matematica pura e applicata,
più che l'*errore* è facile che sia nota una sua *maggiorazione*, cioè che l'informazione di cui si dispone sia:

"*al massimo*, l'errore potrà valere *tot*, non di più".

Quel "tot" è allora l'INCERTEZZA del nostro dato.

**Cos'è dunque l' INCERTEZZA?**
**E' la MAGGIORAZIONE DELL'ERRORE.**
**Se sappiamo che l'errore è $\le k$ , quel $k$ viene chiamato "incertezza".**

Se il valore approssimato è $x$ e l'incertezza è $k$ , il vero valore sarà compreso fra $x-k$ e $x+k$ ;
non sappiamo dove si trovi tale vero valore, ma esso apparterrà all'intervallo $[x-k,\ x+k]$

La questione si presenta *sempre* nelle scienze sperimentali,
quando si effettua la misurazione di una qualsiasi grandezza fisica.

Allora il *vero* valore (NOTA) della quantità da misurare è pressoché impossibile da cogliere:
intervengono infatti inevitabili circostanze per le quali la misura rilevata
è affetta, rispetto al valore vero, da un errore.

In generale si fanno *diverse* misurazioni, se ne calcola la media aritmetica $\bar{x}$ (leggi: "*x* segnato")
e si conclude

- NON che il valore di quella grandezza sia $\bar{x}$ ,
- BENSI' che tale valore sia compreso
  (*non* con "*sicurezza*", ma con una certa *probabilità*, più o meno quantificabile) fra $\bar{x}-k$ e $\bar{x}+k$ ,
  essendo $k$ un determinato numero positivo individuato con opportuni procedimenti statistici.

Il vero valore *non* è stato stabilito esattamente, ma è stato *stimato* in $\bar{x}$ con una INCERTEZZA di $k$ .

NOTA – Il discorso sul "valore *vero*" viene ripreso nel capitolo di Statistica del Volume 2

**OCCHIO!**



♥ **In parecchi libri di testo, ad esempio di Fisica ma anche di Matematica,**
**viene sbrigativamente e impropriamente chiamato ERRORE …**
**… ciò che in realtà dovrebbe essere denominato INCERTEZZA.**
**Ti avverto, perché ciò può essere fonte di una ben giustificata difficoltà di lettura!!!**

## 5. L' "INCERTEZZA RELATIVA"

$$\textbf{incertezza relativa} = \frac{\textbf{incertezza assoluta}}{\left|\textbf{valore dell'approssimazione}\right|}$$

da cui : $\textbf{incertezza assoluta} = \textbf{incertezza relativa} \cdot \left|\textbf{valore dell'approssimazione}\right|$

Si ha poi $\textbf{incertezza relativa } \textit{percentuale} = \textbf{incertezza relativa} \cdot 100$

## 6. LA "PROPAGAZIONE" DEGLI ERRORI, O MEGLIO: DELLE "INCERTEZZE"

♥ **Cos'è l' ERRORE? E' LA DIFFERENZA, PRESA IN VALORE ASSOLUTO, FRA IL VALORE APPROSSIMATO, O IL VALORE RICAVATO DA UNA MISURA, E IL VALORE VERO.**

♥ **Cos'è l' INCERTEZZA?**
**E' LA MAGGIORAZIONE DELL'ERRORE.**
**Se sappiamo che l'errore è $\le k$ , quel $k$ viene chiamato "incertezza".**

Se il valore approssimato è $x$ e l'incertezza è $k$ , il vero valore sarà compreso fra $x-k$ e $x+k$ ; non sappiamo dove si trovi tale vero valore, ma esso apparterrà all'intervallo $[x-k,\ x+k]$

♥ NOTA - **IN UN'ACCEZIONE PIÙ GENERALE, si intende per "incertezza" il grado di indeterminazione cui è soggetto il valore che viene attribuito a una data quantità.**
In alcuni contesti, come la teoria degli errori di misura, non si può dire che il valore vero si trovi in $[x-k,\ x+k]$ "sicuramente", bensì "con una certa probabilità", più o meno quantificabile. Vedi Volume 2, cap. di Statistica.

**Insistiamo (sigh!): in parecchi libri di testo viene impropriamente chiamato ERRORE ciò che in realtà dovrebbe essere denominato INCERTEZZA … e questo può complicare la vita al povero lettore !!!** ☹

Siano a, b due grandezze, e sia G una terza grandezza che derivi da un'operazione aritmetica su a, b . Allora:

- **L' incertezza della SOMMA $G = a + b$**
  **è la somma delle incertezze da cui sono affetti gli addendi:** $\Delta G = \Delta a + \Delta b$ **se** $G = a + b$

Di solito questa regola viene enunciata impropriamente così ☹ :
"L'errore della somma è uguale alla somma degli errori degli addendi"
(semmai, riferendosi all'*errore*, sarebbe vera l'affermazione che:
"L'errore della somma è sempre *minore o uguale* alla somma degli errori degli addendi")

**Il simbolo $\Delta$ ("delta") è sovente utilizzato, in matematica, per indicare "differenza".**
Ad es., fra due persone che hanno risp. 15 anni e 47 anni, c'è una differenza di età "delta $e$" $\Delta e = 47 - 15 = 32$ .
Se considero, in Fisica, due istanti di tempo successivi $t_1$ e $t_2$ , nei quali la velocità di un corpo è risp. $v_1$ e $v_2$ , allora nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ la variazione di velocità ( $>$ , $<$ o $= 0$ ) è data da $\Delta v = v_2 - v_1$ .

- **La stessa identica regola vale per la differenza: l' incertezza della DIFFERENZA $G = a - b$**
  **è la somma delle incertezze da cui sono affetti i termini:** $\Delta G = \Delta a + \Delta b$ **se** $G = a - b$
- **L'incertezza del PRODOTTO $G = ca$ DI UN NUMERO COSTANTE $c > 0$ PER UNA GRANDEZZA**
  **è il prodotto del numero fisso per l'incertezza della grandezza:** $\Delta G = c\Delta a$ **se** $G = ca$
- **L' *incertezza relativa* (OCCHIO! RELATIVA, questa volta, non assoluta!) del PRODOTTO $G = a \cdot b$**
  **è la somma delle *incertezze relative* dei fattori:** $\dfrac{\Delta G}{G} = \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b}$ **se** $G = a \cdot b$

Di solito questa regola viene enunciata impropriamente così ☹ :
"L'errore relativo del prodotto è la somma degli errori relativi dei fattori"

- **Del tutto analoga a quella sul prodotto, e come essa basata sulle incertezze *relative*,**
  **è la regola per il QUOZIENTE** $G = \dfrac{a}{b}$ **:** $\dfrac{\Delta G}{G} = \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b}$ **se** $G = \dfrac{a}{b}$
- **Per la POTENZA** $G = a^n$ **:** $\dfrac{\Delta G}{G} = n\dfrac{\Delta a}{a}$ **se** $G = a^n$

(valida anche se $n$ è frazionario, ossia con le radici: tieni presente che, ad es., $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ e $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ )

**ESERCIZIO SVOLTO**

Se il valore approssimato di un numero $t$ è $\boxed{5{,}30}$ , e l'*incertezza* è $\boxed{0{,}10}$ , si avrà
$5{,}30 - 0{,}10 \le t \le 5{,}30 + 0{,}10$ cioè $5{,}20 \le t \le 5{,}40$ .

Se il valore approssimato di un numero $t$ è $\boxed{5{,}30}$ , e si sapesse che l'*errore* è, in valore assoluto, $\boxed{0{,}10}$ , allora
$t = 5{,}20$ oppure $t = 5{,}40$ .

Se il valore appross. di $t$ è $\boxed{5{,}30}$ , e l'*incertezza relativa* è $\boxed{0{,}10}$ , quindi l'inc. rel. percentuale è del 10%, si avrà
*incertezza assoluta* $= 5{,}30 \cdot 0{,}10 = 0{,}53$ da cui $5{,}30 - 0{,}53 \le t \le 5{,}30 + 0{,}53$ .

**7. ESERCIZI. Armati di macchinetta calcolatrice e riempi le seguenti tabelle**.
Le risposte sono alla pagina successiva.

1)

| Numero | Troncamento ai centesimi | Arrotondamento ai centesimi | Errore assoluto dell'arrotondamento | Errore relativo dell'arr. anche percentuale |
|---|---|---|---|---|
| 887,2851 | | | | |
| 0,038 | | | | |
| 3,141592 | | | | |
| 23,88888 | | | | |
| **Numero** | **Troncamento alle decine** | **Arrotondamento alle decine** | **Errore assoluto dell'arrotondamento** | **Errore relativo dell'arr. anche percentuale** |
| 7777 | | | | |
| 324 | | | | |
| 325 | | | | |
| 500001 | | | | |
| **Numero** | **Troncamento ai millesimi** | **Arrotondamento ai millesimi** | **Errore assoluto dell'arrotondamento** | **Errore relativo dell'arr. anche percentuale** |
| 9,3485 | | | | |
| 27,9474 | | | | |
| 0,000208 | | | | |
| **Numero** | | **Arrotondamento a 3 cifre significative** | **Errore assoluto dell'arrotondamento** | **Errore relativo dell'arr. anche percentuale** |
| 9,3485 | – – – | | | |
| 27,9474 | – – – | | | |
| 0,000208 | – – – | | | |

2)

| Valore ottenuto arrotondando $x$ ai centesimi | Valori possibili del numero $x$ ($x$ compreso fra …) |
|---|---|
| 33,47 | |
| 4,01 | |
| 2,00 | |

| Valore ottenuto arrotondando $x$ ai decimi | Valori possibili del numero $x$ |
|---|---|
| 33,4 | |
| 4,0 | |

3)

| Valore approssimato di $x$ | Incertezza assoluta | Valori possibili del numero $x$ ($x$ compreso fra …) |
|---|---|---|
| 23 | 1 | |
| 98,65 | 0,02 | |
| 1,500 | 0,001 | |

4)

| Valore approssimato di $x$ | Incertezza relativa | Valori possibili del numero $x$ |
|---|---|---|
| 131 | 5% | |
| 0,08 | 1% | |
| 4,59 | 1,5% | |

5)

| Incertezza assoluta di $a$ | Incertezza assoluta di $b$ | Incertezza assoluta di $a+b$ | Valore approssimato di $a+b$ | Valori possibili di $a+b$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,1 | | 43,8 | |
| 0,05 | 0,1 | | 3,00 | |
| 0,03 | 0,02 | | 12,34 | |

6)

| Incertezza relativa di $a$ | Incertezza relativa di $b$ | Incertezza relativa di $a \cdot b$ | Valore approssimato di $a \cdot b$ | Valori possibili di $a \cdot b$ |
|---|---|---|---|---|
| 5% | 5% | | 83,40 | |
| 0,01 | 0,02 | | 5,20 | |
| 0,001 | 0,001 | | 8,000 | |

**RISPOSTE**

1)

| Numero | Troncamento ai centesimi | Arrotondamento ai centesimi | Errore assoluto dell'arrotondamento | Errore relativo dell'arr. anche percentuale |
|---|---|---|---|---|
| 887,2851 | 887,28 | 887,29 | 0,0049 | 0,0000055… ($\approx 0{,}00055\%$) |
| 0,038 | 0,03 | 0,04 | 0,002 | 0,05 (5%) |
| 3,141592 | 3,14 | 3,14 | 0,001592 | 0,000507… ($\approx 0{,}0507\%$) |
| 23,88888 | 23,88 | 23,89 | 0,00112 | 0,00004688… ($\approx 0{,}004688\%$) |
| Numero | Troncamento alle decine | Arrotondamento alle decine | Errore assoluto dell'arrotondamento | Errore relativo dell'arr. anche percentuale |
| 7777 | 7770 | 7780 | 3 | 0,0003856… ($\approx 0{,}03856\%$) |
| 324 | 320 | 320 | 4 | 0,0125 (1,25%) |
| 325 | 320 | 330 | 5 | 0,0151515… ($\approx 1{,}51515\%$) |
| 500001 | 500000 | 500000 | 1 | 0,000002 (0,0002%) |
| Numero | Troncamento ai millesimi | Arrotondamento ai millesimi | Errore assoluto dell'arrotondamento | Errore relativo dell'arr. anche percentuale |
| 9,3485 | 9,348 | 9,349 | 0,0005 | 0,00005348… ($\approx 0{,}005348\%$) |
| 27,9474 | 27,947 | 27,947 | 0,0004 | 0,0000143… ($\approx 0{,}00143\%$) |
| 0,000208 | 0 | 0 | 0,000208 | Non valutabile |
| Numero | | Arrotondamento a 3 cifre significative | Errore assoluto dell'arrotondamento | Errore relativo dell'arr. anche percentuale |
| 9,3485 | – – – | 9,35 | 0,0015 | 0,0001604… ($\approx 0{,}01604\%$) |
| 27,9474 | – – – | 27,9 | 0,0474 | 0,0016989… ($\approx 0{,}16989\%$) |
| 0,000208 | – – – | 0,000208 | 0 | 0 (0%) |

2)

| Valore ottenuto arrotondando $x$ ai centesimi | Valori possibili del numero $x$ |
|---|---|
| 33,47 | $33{,}465 \le x < 33{,}475$ |
| 4,01 | $4{,}005 \le x < 4{,}015$ |
| 2,00 | $1{,}995 \le x < 2{,}005$ |

| Valore ottenuto arrotondando $x$ ai decimi | Valori possibili del numero $x$ |
|---|---|
| 33,4 | $33{,}35 \le x < 33{,}45$ |
| 4,0 | $3{,}95 \le x < 4{,}05$ |

3)

| Valore approssimato di $x$ | Incertezza assoluta | Valori possibili del numero $x$ |
|---|---|---|
| 23 | 1 | $22 \le x \le 24$ |
| 98,65 | 0,02 | $98{,}63 \le x \le 98{,}67$ |
| 1,500 | 0,001 | $1{,}499 \le x \le 1{,}501$ |

4)

| Valore approssimato di $x$ | Incertezza relativa | Valori possibili del numero $x$ |
|---|---|---|
| 131 | 5% | $124{,}45 \le x \le 137{,}55$ |
| 0,08 | 1% | $0{,}0792 \le x \le 0{,}0808$ |
| 4,59 | 1,5% | $4{,}52115 \le x \le 4{,}65885$ |

5)

| Incertezza assoluta di $a$ | Incertezza assoluta di $b$ | Incertezza assoluta di $a+b$ | Valore approssimato di $a+b$ | Valori possibili di $a+b$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 43,8 | $43{,}6 \le a+b \le 44{,}0$ |
| 0,05 | 0,1 | 0,15 | 3,00 | $2{,}85 \le a+b \le 3{,}15$ |
| 0,03 | 0,02 | 0,05 | 12,34 | $12{,}29 \le a+b \le 12{,}39$ |

6)

| Incertezza relativa di $a$ | Incertezza relativa di $b$ | Incertezza relativa di $a \cdot b$ | Valore approssimato di $a \cdot b$ | Valori possibili di $a \cdot b$ |
|---|---|---|---|---|
| 5% | 5% | 10% | 83,40 | $75{,}06 \le a \cdot b \le 91{,}74$ |
| 0,01 | 0,02 | 0,03 | 5,20 | $5{,}044 \le a \cdot b \le 5{,}356$ |
| 0,001 | 0,001 | 0,002 | 8,000 | $7{,}984 \le a \cdot b \le 8{,}016$ |

## 8. L' "ORDINE DI GRANDEZZA" E I DIVERSI MODI DI DEFINIRLO

Per "ordine di grandezza" di un numero si intende "una potenza di 10 adatta ad approssimare il numero".

Ad esempio,

- l'ordine di grandezza di 814 è $10^3$ ($10^3 = 1000$ è la potenza di 10 più vicina a 814);
- l'ordine di grandezza di 357 è $10^2$ ($10^2 = 100$ è la potenza di 10 più vicina a 357);
- l'ordine di grandezza di 74972,1 è $10^5$ ($10^5 = 100000$ è la potenza di 10 più vicina a 74972,1);
- l'ordine di grandezza di 14,7 è $10^1$ ($10^1 = 10$ è la potenza di 10 più vicina a 14,7);
- l'ordine di grandezza di 4,15 è $10^0$ ($10^0 = 1$ è la potenza di 10 più vicina a 4,15);
- l'ordine di grandezza di 0,00008 è $10^{-4}$ ($10^{-4} = 0,0001$ è la potenza di 10 più vicina a 0,00008).

Nella pratica, si suole procedere nel modo seguente:

- ai numeri $y$ tali che $5 \le y < 50$ si attribuisce ordine di grandezza $10^1$
  (NOTA: anche se, a ben guardare, 5 sarebbe più prossimo a $10^0 = 1$ che a $10^1 = 10$ !)
- ai numeri $y$ tali che $50 \le y < 500$ si attribuisce ordine di grandezza $10^2$
- ai numeri $y$ tali che $500 \le y < 5000$ si attribuisce ordine di grandezza $10^3$; e così via.

Quindi per fissare l'ordine di grandezza di un numero basta scriverlo in *notazione esponenziale*, ossia come

$a \cdot 10^n$, con $n$ intero relativo e (importante!) $1 \le a < 10$;

dopodiché l'ordine di grandezza sarà $10^n$ se $1 \le a < 5$, e sarà invece $10^{n+1}$ se $5 \le a < 10$. Esempi:

- $814 = 8,14 \cdot 10^2$ da cui, essendo $5 \le 8,14 < 10$, si trae che l'ordine di grandezza di 814 è $10^3$
- $357 = 3,57 \cdot 10^2$ da cui, essendo $1 \le 3,57 < 5$, si trae che l'ordine di grandezza di 357 è $10^2$.

Semplice, se non fosse che NON TUTTI I TESTI DANNO PRECISAMENTE QUESTA DEFINIZIONE.

Molti autori, infatti, pur partendo sempre dalla premessa che
l' "ordine di grandezza" debba essere "una potenza di 10 vicina al numero dato",
affermano che per "ordine di grandezza di un numero" si debba intendere $10^n$ qualora n sia … ascolta …
"l'arrotondamento all'intero più vicino del logaritmo in base 10 del numero", ossia
"l'arrotondamento all'intero più vicino dell'esponente che occorre dare alla base 10 per ottenere il numero".

Ci sono, è ovvio, ottime motivazioni per preferire siffatta impostazione;
tuttavia, evidentemente, non è altrettanto semplice dell'altra. Facciamo degli esempi.

- Vale l'uguaglianza $814 \approx 10^{\frac{291}{100}} = 10^{2,91}$ (gli esponenti frazionari sono trattati nel Volume 2)
  quindi l'ordine di grandezza di 814, secondo questa definizione, sarà $10^3$
  perché 3 è l'arrotondamento di 2,91 all'intero più vicino.

- Nel caso precedente la conclusione è stata *la medesima* che con la definizione data all'inizio.
  Ma prendiamo ora il numero 357: si ha $357 = 10^{2,55\ldots}$ e l'arrotondamento di 2,55…
  all'intero più vicino è 3; dunque con questa definizione si dovrebbe concludere
  che l'ordine di grandezza di 357 è $10^3$, e *non* $10^2$ come si era detto all'inizio.

Qualora si proceda nello strano modo che abbiamo descritto, la situazione diventa all'incirca la seguente:

- ai numeri $y$ tali che $3,16 \le y < 31,6$ viene attribuito ordine di grandezza $10^1$;
- ai numeri $y$ tali che $31,6 \le y < 316$ viene attribuito ordine di grandezza $10^2$; eccetera.

**Altri testi poi ☹ adottano una definizione ancora diversa!!!**
**E infine (ma qui è una questione di uso delle parole, più che di sostanza)**
**in qualche caso per "ordine di grandezza" non si intende la potenza di 10, bensì il suo esponente!**

♥ Questa **disomogeneità** nelle definizioni in uso è antipatica; tuttavia la nozione di "ordine di grandezza" è utilizzata soprattutto per *confrontare* fra loro *approssimativamente* due grandezze della stessa specie, al fine di valutare se hanno lo stesso ordine di grandezza oppure ordini di grandezza diversi;
ora, *qualunque definizione* si adotti, accade sempre che due quantità

- ❑ "differiscono di 1 ordine di grandezza" se il rapporto fra la più grande e la più piccola è all'incirca 10
- ❑ "differiscono di 2 ordini di grandezza" se il rapporto fra la più grande e la più piccola è all'incirca 100
- ❑ … e così via.

E ciò basta a dare una idea di quante volte, pressappoco, una grandezza sia maggiore o minore di un'altra.

Ad esempio, la distanza della Terra dal Sole e la distanza del sistema solare dalla Proxima Centauri,
la stella a noi più vicina dopo il Sole, differiscono di 5 ordini di grandezza
(vuol dire che la distanza sistema solare - Proxima Centauri è intorno a 100000 volte la distanza Terra-Sole);
a sua volta, la distanza del sistema solare dalla Proxima Centauri e il raggio stimato della Via Lattea
differiscono di altri 5 ordini di grandezza.

Cliccando sulla freccia ⇨ potrai vedere una tabella molto interessante a proposito degli ordini di grandezza.

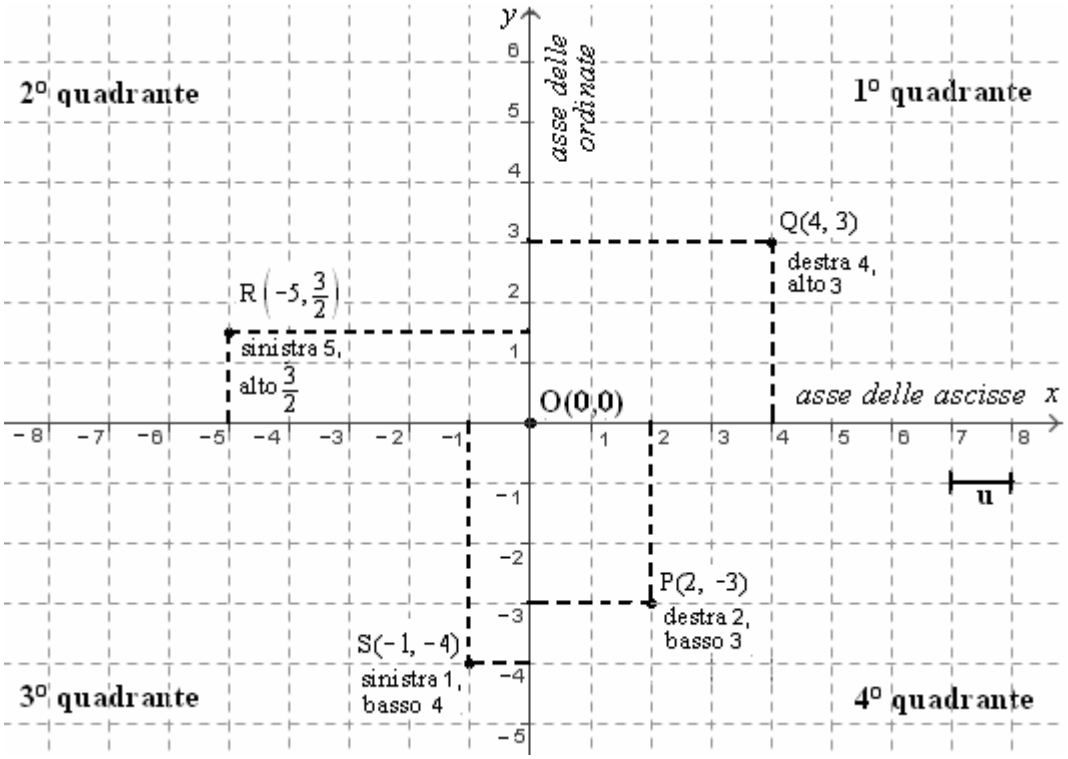
# IL RIFERIMENTO CARTESIANO; LE FUNZIONI E IL LORO GRAFICO

## 1. IL RIFERIMENTO CARTESIANO

Un "riferimento cartesiano" consta di **due "number lines" che si tagliano perpendicolarmente** (riferimento cartesiano "ortogonale": dei "non ortogonali" non ci occuperemo) **nell'origine comune**.
Esse sono dette "**assi cartesiani**".

- Uno dei due assi è chiamato **"asse delle ascisse" o "asse delle *x*"**,
- l'altro **"asse delle ordinate" o "asse delle *y*"** (NOTA).

Di norma l'asse delle ascisse è disposto *orizzontalmente* rispetto al lettore, l'asse delle ordinate *verticalmente*.
Ove possibile, per i due assi si sceglie la stessa unità di misura (sistema di riferimento "*monometrico*"); quando ciò, per motivi vari di opportunità, non avviene, si parla di sistema "*dimetrico*".




Ad ogni punto di un "**piano cartesiano**" ( = piano sul quale è stato fissato un riferimento cartesiano) si fanno corrispondere due numeri, il primo dei quali si chiama "**ascissa**" del punto considerato, il secondo "**ordinata**".
Si dice che ogni punto del piano cartesiano ha due "**coordinate**": l'ascissa e l'ordinata.

- **L'ascissa di un punto P è il numero che si incontra proiettando P sull'asse delle ascisse;**
- **l'ordinata di P è il numero che si incontra proiettando P sull'asse delle ordinate.**
  [Ricordiamo che "proiettare" vuol dire "calarsi perpendicolarmente su"]

Al posto di dire "l'ascissa" si dice spesso anche "la *x*"; e al posto di dire "l'ordinata" si dice "la *y*" (NOTA).
Se un punto P ha, ad es., ascissa $2$ e ordinata $-3$, si scrive $P(2,-3)$, e si legge: "P, di coordinate 2 e $-3$".

♥ Si può anche dire che

- l'**ascissa** di un punto P è il numero che descrive lo **scostamento "orizzontale"** di P rispetto all'origine,
- l'**ordinata** di P è il numero che descrive lo **scostamento "verticale"** di P rispetto all'origine:

insomma, se è, per esempio, $P(2,-3)$, vuol dire che, a partire dall'origine, possiamo giungere al punto P muovendoci di 2 unità verso *destra* e di 3 unità verso il *basso*.

❑ Ogni punto dell'asse delle ascisse ha ordinata 0, mentre ogni punto dell'asse delle ordinate ha ascissa 0.
❑ L'origine comune dei due assi, detta "origine del riferimento" e di norma indicata con la lettera O, ha coordinate entrambe nulle: si scrive dunque $O(0,0)$.
❑ Gli assi cartesiani suddividono il piano in quattro "*quadranti*".
Il 1° quadrante è l'insieme dei punti con $x>0,\ y>0$;
la numerazione dei quadranti prosegue poi in senso *antiorario*.

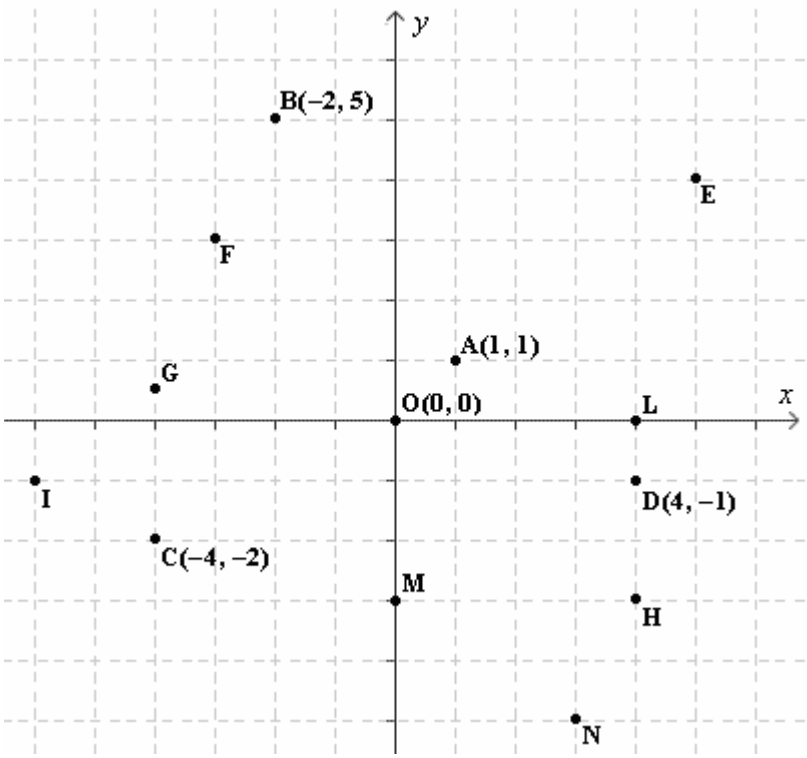
Ogni punto, sul piano cartesiano, è "individuato biunivocamente" dalla coppia delle sue coordinate, ossia:
♥ **ad ogni punto preso sul piano cartesiano corrisponde una e una sola coppia (*x*, *y*) di numeri reali; e viceversa, presa una qualsiasi coppia (*x*, *y*) di numeri reali, ad essa corrisponde uno e un solo punto sul piano cartesiano**.

NOTA - Naturalmente, questo s'intende a patto che (è la norma, ma non è la generalità) si sia deciso di utilizzare effettivamente il simbolo *x* per indicare i numeri rappresentati sull'asse delle ascisse, e *y* per quelli sull'altro asse (a volte è più opportuna una scelta diversa)

**ESERCIZI** Clicca per le risposte ⇨

**Quando non specifichiamo l'unità di misura, intendiamo sempre che sia di 1 quadretto.**

1) Nella figura qui a fianco, sono riportate le coordinate di alcuni punti. Scrivi le coordinate di ciascuno dei punti restanti.




*Si scrive, tra parentesi, prima l'ascissa ($x$) e poi l'ordinata ($y$). L'ascissa è il numero che si ottiene calandosi perpendicolarmente dal punto sopra l'asse orizzontale, l'ordinata … sull'asse verticale.*

*In alternativa, l'ASCISSA è il numero che descrive quale spostamento IN ORIZZONTALE devo effettuare se, partendo dall'origine, voglio raggiungere il punto (positivo se devo andare verso destra, negativo se devo andare a sinistra); l'ORDINATA è il numero che descrive quale spostamento IN VERTICALE devo effettuare se, partendo dall'origine, voglio raggiungere il punto (positivo se devo andare verso l'alto, negativo se devo andare verso il basso)*

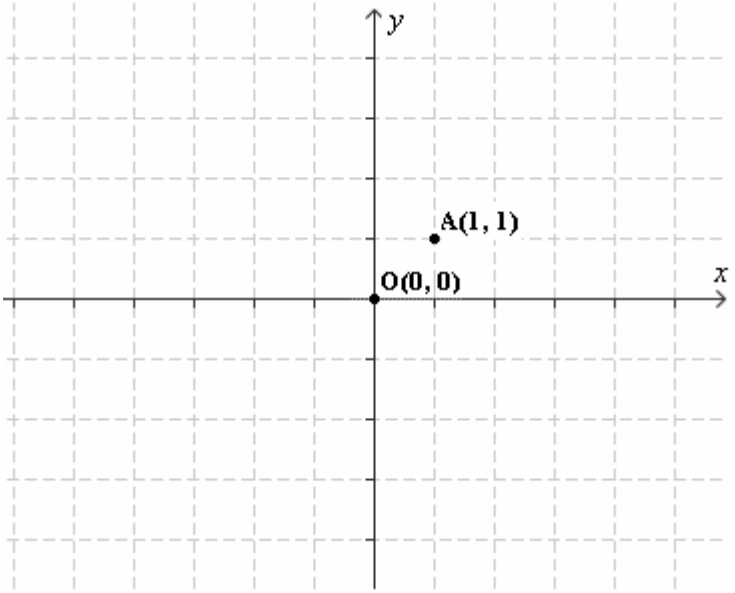
2) Nella figura qui a fianco, disegna i punti

$Q(-4,1)$ $R(1,-4)$ $S(-1,-4)$

$T(2,2)$ $U(0,3)$ $V(-5,0)$

$W\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)$ $Z\left(\frac{13}{5},-\frac{11}{3}\right)$

$J\left(-\frac{23}{5},\frac{23}{6}\right)$ $K\left(\frac{19}{4},-\frac{11}{4}\right)$



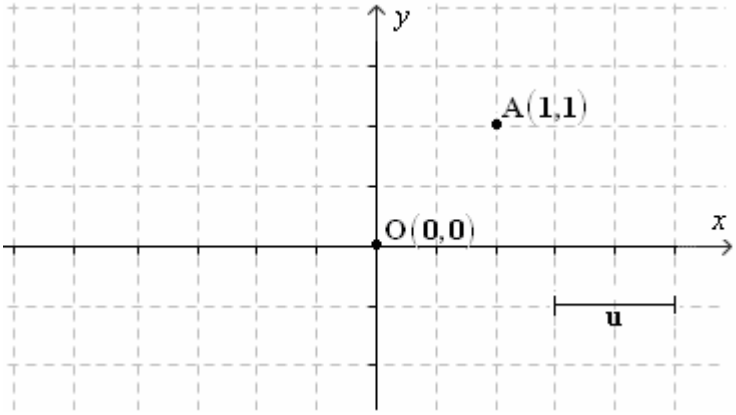

*Voglio il punto* $(-4,1)$ ?
*Allora, partendo dall'origine, devo andare*

- *prima a sinistra di 4 unità,*
- *poi in alto di 1.*

*Per le coordinate frazionarie, quando la frazione ha il numeratore più grande del denominatore, prima converrà trasformare nella somma algebrica di un intero con una frazione "piccola":*

*es.* $\frac{13}{5}=\frac{10+3}{5}=2+\frac{3}{5}$; $-\frac{11}{3}=\frac{-9-2}{3}=-3-\frac{2}{3}$

3) Questa volta l'unità di misura è di DUE quadretti. Disegna i punti seguenti:




$B(-1,2)$ $C\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ $D\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

$E\left(\frac{1}{4},-1\right)$ $F(-1,0)$ $G\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

$H\left(-\frac{7}{4},\frac{6}{5}\right)$ $I\left(\frac{8}{3},-\frac{4}{3}\right)$ $J\left(\frac{7}{3},\frac{12}{7}\right)$

## 2. INTRODUZIONE AL CONCETTO DI FUNZIONE

Definizione

♥ **Si ha una FUNZIONE quando si hanno due grandezze variabili, legate fra loro in modo che ad ogni valore di una di esse (variabile indipendente) corrisponde UNO E UN SOLO valore dell'altra (variabile dipendente).**

*Di preferenza, la variabile indipendente si indica con la lettera x, e la variabile dipendente con y, ma a volte è più opportuna una scelta dei simboli diversa.*

**ESEMPI**

**a)** Com'è noto, il **volume della sfera** si ottiene applicando la formula $\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$.

E' chiaro (sia dalla formula che dall'intuizione geometrica)
che **ad ogni valore del raggio corrisponde uno e un solo valore del volume.**
**Il raggio ( r ) è la variabile indipendente; il volume ( V ) è la variabile dipendente.**
Si ha una **funzione**, che potremmo chiamare ad esempio **f**
(per indicare una funzione si usa di solito una lettera alfabetica, minuscola o maiuscola).

Scriveremo allora $\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi r^3 = f(r)}$

**La scrittura**
**$V = f(r)$**
**si legge**
**" V uguale f di r "**
**e significa:**

**"ho una funzione,**
**che ho indicato col simbolo f ,**
**nella quale**
**la variabile indipendente è stata indicata col simbolo r**
**e la variabile dipendente col simbolo V ".**

$$\underset{\textit{var. dip.}}{V} = \underset{\textit{nome della funzione}}{f} \left(\underset{\textit{var. ind.}}{r}\right)$$



Ad esempio, il volume di una sfera di raggio 3 metri è: $f(3) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi \approx 113{,}1\ \text{m}^3$.

**b)** Se un'automobile si muove con la velocità costante di 1,5 metri al secondo,
- dopo 1 secondo dall'istante in cui facciamo scattare il cronometro avrà percorso 1,5 m,
- dopo 2 secondi 3 m,
- dopo 3 secondi 4,5 m,
- dopo ½ secondo 0,75 m,
- ecc. ecc.

In questo caso la variabile indipendente è il tempo (che potremmo indicare con t)
e la variabile dipendente è lo spazio percorso (lo indicheremo con s).
La funzione, cioè il legame fra le due variabili, si può esprimere mediante la formula $s = 1{,}5\ t$.
Se chiamiamo questa funzione D ( D come Distanza), avremo: $s = D(t) = 1{,}5\ t$.
E potremo scrivere, ad esempio: $D(2) = 3$, $D(10) = 15$, ecc.

**c)** Supponiamo di misurare il tempo in ore, e le temperature in gradi centigradi. Immaginiamo di piazzarci con un termometro davanti al cancello della scuola e di far scattare il cronometro.

La nostra unità di misura per i tempi sarà la durata di 1 ora.

La temperatura, all'istante $t = 0$, avrà un certo valore,
all'istante $t = 1$ (cioè dopo 1 ora) avrà un certo altro valore (>, < o eventualmente = al precedente),
all'istante $t = 1{,}4$ (cioè dopo 1 ora e 4/10 di ora, 1 ora e 24 minuti) un certo altro valore, ecc.

E' chiaro che, in questo caso, non c'è alcuna formula
che permetta di calcolare la temperatura conoscendo il valore di t.

Si ha ancora una funzione,
perché ad ogni valore del tempo t corrisponde 1 e un solo valore della temperatura T,
ma questa funzione NON è esprimibile mediante una formula matematica.

Si ha cioè una funzione "**empirica**",
perché solo l'osservazione diretta può farci conoscere qual è il valore
che la variabile dipendente assume in corrispondenza di un certo valore della variabile indipendente.
Le funzioni degli esempi precedenti erano invece funzioni "matematiche".

*Una funzione si dice "**matematica**" (o anche "analitica")*
*quando esiste una "legge" che consenta di passare*
*da un dato valore della variabile indipendente*
*al corrispondente valore della variabile dipendente,*
*semplicemente effettuando dei calcoli.*
*Si dice "**empirica**" in caso contrario.*

## 3. IL "DOMINIO" DI UNA FUNZIONE; PRECISAZIONI SULLA DEFINIZIONE

♥ **Si dice "dominio" o "campo di esistenza" (C.E.) di una funzione,**
**l'insieme dei valori che è possibile attribuire alla variabile indipendente,**
**affinché esista il corrispondente valore della variabile dipendente.**

**ESEMPI**

| Funzione | Dominio |
|---|---|
| $y = \frac{1}{x}$ | $\{x \in \mathbb{R} / \ x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$ |
| $y = \sqrt{x-5}$ | $\{x \in \mathbb{R} / \ x \geq 5\}$ |
| $y = x^2 - x - 2$ | $\mathbb{R}$ |

♥ **Avevamo iniziato il discorso affermando che**
**si ha una FUNZIONE quando ci sono due grandezze variabili,**
**legate fra loro in modo che ad OGNI valore di una di esse (variabile indipendente)**
**corrisponde UNO E UN SOLO valore dell'altra (variabile dipendente).**

**Ma più precisamente, QUELL' "OGNI" VA INTERPRETATO.**
**Si deve intendere "AD OGNI VALORE DELLA VARIABILE INDIPENDENTE …**
**… PRESO DA UN OPPORTUNO INSIEME DI RIFERIMENTO (il 'dominio', appunto)".**

A volte, poi, per determinare il "dominio" di una funzione,
occorre badare, oltre che al puro aspetto del calcolo,
anche a considerazioni di carattere "contestuale".

Prendiamo ad esempio la funzione $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = f(r)$ legata al volume della sfera.

Dal punto di vista della pura Algebra, alla lettera r potremmo assegnare anche valori <0;
ma dal punto di vista dell'interpretazione geometrica, questi non avrebbero senso e dunque
è più corretto dire che il dominio di questa funzione è l'insieme dei valori di r maggiori di 0 (o $\geq 0$,
se si accetta l'idea di una sfera di raggio nullo, che si ridurrebbe ad un punto, e avrebbe volume nullo).

♥ **IN DEFINITIVA, per "DOMINIO" di una funzione si intenderà**

**l'insieme dei valori che è possibile attribuire alla variabile indipendente,**
**affinché esista il corrispondente valore della variabile dipendente**
**oppure anche un insieme più "ristretto" di questo,**
**quando intervengano ulteriori limitazioni**
**legate al contesto nel quale la funzione viene applicata.**

## 4. IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Di una funzione, si può disegnare il grafico, che è poi una visualizzazione efficace della funzione stessa, ossia del legame che essa stabilisce fra la variabile indipendente e la variabile dipendente.
Come si fa? Vediamo.

Innanzitutto, per meglio fissare le idee, noi supporremo sempre che la variabile indipendente sia indicata con *x*, e la variabile dipendente con *y* (anche se sappiamo che non sempre è così).
In questo modo, potremo dire sbrigativamente "la *x*" e "la *y*" anziché, come sarebbe più generale ma un pochino pesante, "la variabile indipendente" e "la variabile dipendente".

Dunque, supponiamo di avere una determinata funzione $y = f(x)$, e di volerne tracciare il grafico.
Molto semplice.

- Diamo a *x* un valore (badando, è ovvio, che questo valore faccia parte del "dominio" della funzione), e calcoliamo il corrispondente valore di *y*
- disegniamo il punto che ha come coordinate QUEI due valori (*x*, *y*)
- facciamo questo per un opportuno insieme di valori di *x*
- congiungiamo i punti ottenuti.

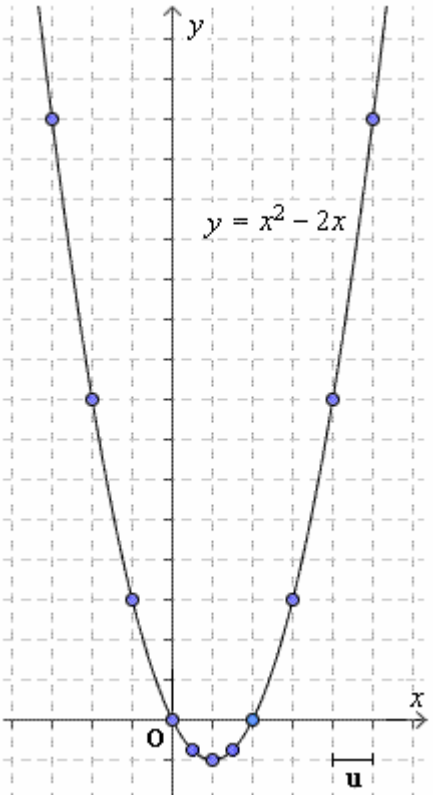
Ed ecco il grafico!
( … O meglio, ecco un *abbozzo* del grafico, tanto più preciso quanto più "fitti" sono i valori di *x* considerati, ed evidentemente limitato a un campo di valori di *x* "comodi", o comunque a quei valori che ci interessano).

Facciamo un esempio, prendendo la funzione $y = f(x) = x^2 - 2x$.
Attribuiamo a *x* dei valori, e calcoliamo, per ciascun valore dato a *x*, il corrispondente valore di *y*.
Possiamo anche organizzarci attraverso una tabella:

| $x$ | $y = f(x) = x^2 - 2x$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | –1 |
| 2 | 0 |
| 3 | 3 |
| 4 | 8 |
| 5 | 15 |
| –1 | 3 |
| –2 | 8 |
| –3 | 15 |
| $\frac{1}{2}$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$ |
| $\frac{3}{2}$ | $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$ |

*Abbiamo assegnato a x pure due valori frazionari,* $\frac{1}{2}$ *e* $\frac{3}{2}$*, perché si avvertiva la necessità di stabilire con maggior precisione l'andamento della curva in prossimità dell'ascissa 1.*

♥ *Dammi ascolto:*
*man mano che*
*si compila la tabella,*
*conviene disegnare SUBITO*
*i punti via via determinati.*
*Mi spiego:*
*con x=0, ottengo y=0.*
*Bene! Allora segno SUBITO,*
*sulla figura,*
*che il punto di coordinate* $(0,0)$
*(che è poi l'origine)*
*appartiene al grafico.*
*Poi passo ad assegnare a x*
*il valore 1.*
*Ottengo*
$y = f(1) = 1^2 - 2\cdot 1 = 1 - 2 = -1$
*e allora segno SUBITO,*
*nel disegno, il punto* $(1,-1)$.
*E così via:*
*non aspetto*
*di aver completato la tabella*
*per passare al disegno,*
*ma appena trovo un punto*
*salto immediatamente*
*dalla tabella al disegno.*

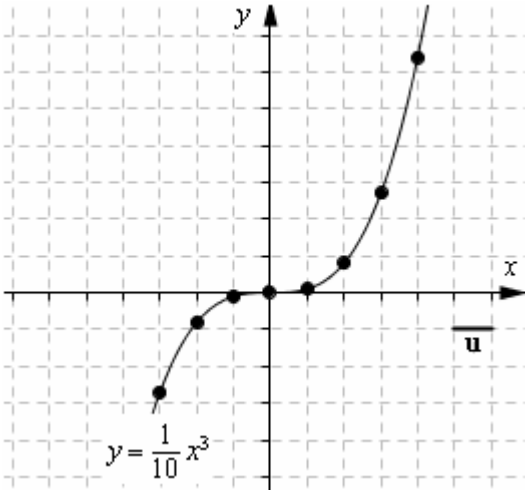


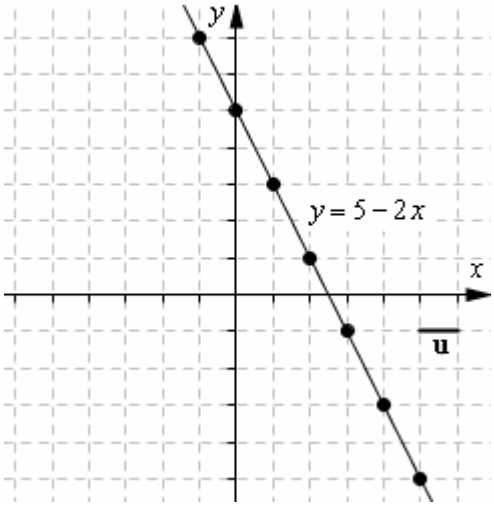

Il grafico ci fa cogliere con immediatezza tante informazioni sull' "andamento" della funzione, e sulle sue caratteristiche. Ad esempio,

- possiamo notare che il valore minimo che la *y* può assumere è –1 (valore che si ottiene per $x = 1$)
- vediamo che la *y* decresce, al crescere di *x*, quando è $x<1$, mentre cresce, al crescere di *x*, quando è $x>1$
- osserviamo la presenza di una "simmetria", nel senso che se due valori di *x* stanno uno a sinistra e l'altro a destra dell'ascissa 1, ma alla stessa distanza, ad essi corrispondono due valori di *y* uguali fra loro
- … eccetera.

Certo, quanto abbiamo scritto ha bisogno di essere comunque controllato con ragionamenti e calcoli vari, per il fatto che, per forza di cose, abbiamo potuto dare a *x* soltanto *alcuni* fra gli infiniti valori possibili; ma la figura è senz'altro utilissima per una visione d'insieme iniziale e come punto di partenza per un eventuale studio più accurato.

**ALTRI ESEMPI: le due funzioni** $y=\frac{1}{10}x^3$, $y=5-2x$




**GRAFICI DI FUNZIONI CON GEOGEBRA**

**(però, innanzitutto devi saperli fare in MATITA!!!)**

Apri GeoGebra;
guarda in basso e noterai una casella bianca, preceduta dalla scritta "Inserimento":




E' lì che devi digitare l'espressione della funzione; ad esempio,
$y=5-2x$; $y=x\wedge 2$; $y=sqrt(x)$; $y=6/(1+x\wedge 2)$

Occhio ad un uso accorto delle **parentesi** !!!

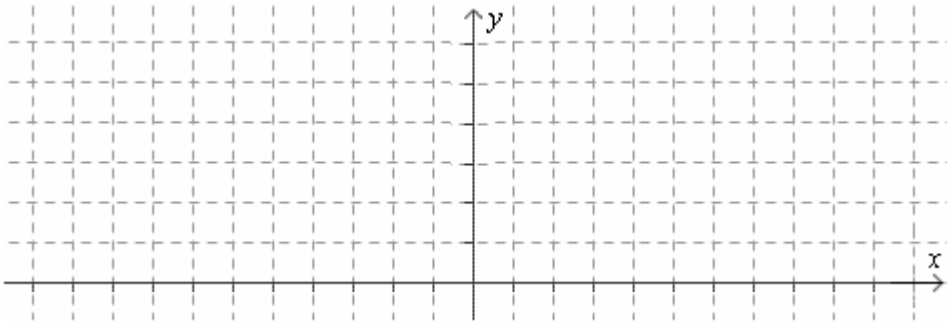
La **moltiplicazione** si esprime con un **asterisco**, che però **sovente si può sottintendere**; la **radice quadrata**, con **sqrt()** oppure con **^(1/2)**

Per ogni ragguaglio, consulta la Guida in Linea.

**ESERCIZI**

| $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | –1 | |
| 2 | | –2 | |
| 3 | | –3 | |
| 4 | | –4 | |
| 5 | | –5 | |
| 6 | | –6 | |
| 10 | | –10 | |
| ½ | | –½ | |
| ¼ | | –¼ | |

1) Traccia il grafico della funzione $y=\frac{6}{1+x^2}$ *Soluzione* ⇨

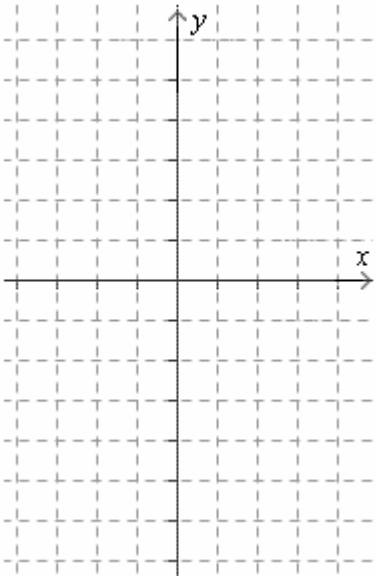



NOTA: se non è specificata l'unità di misura, si intende che sia di un quadretto

2) Traccia il grafico della funzione $y=2x-1$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| –4 | |
| –3 | |
| –2 | |
| –1 | |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |

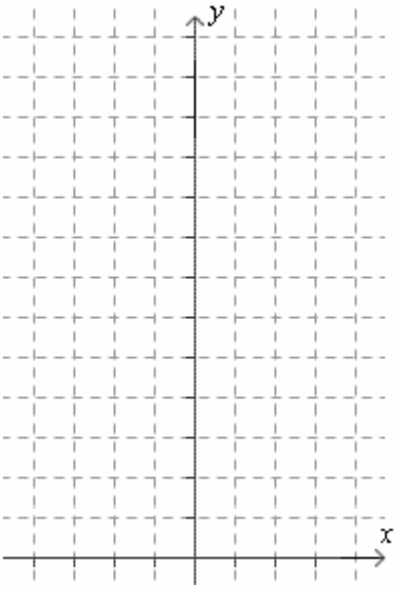
*Soluzione* ⇨




3) Traccia il grafico di $y=x^2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| –4 | |
| –3 | |
| –2 | |
| –1 | |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| ½ | |
| –½ | |

*Soluzione* ⇨



## 5. FUNZIONI LINEARI: RETTE

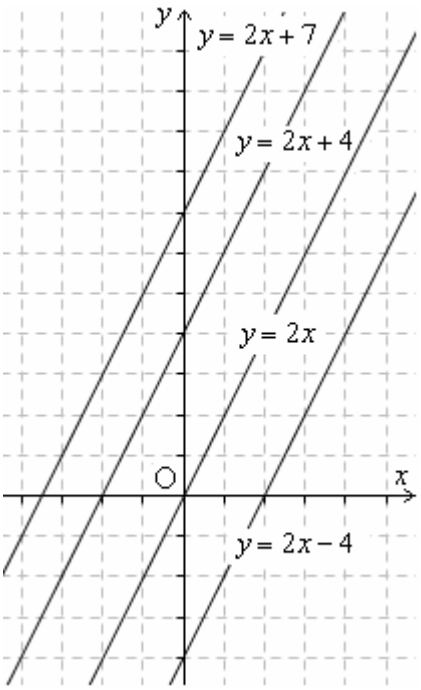
Prova a disegnare, sul tuo quaderno, il grafico di una funzione della forma

$\boxed{y = mx + q}$ , **essendo *m, q* due numeri fissati**

(ad esempio, potresti prendere $y = 3x + 4$, $y = x - 1$, $y = -2x$ … )

Le funzioni della forma $y = mx + q$ sono anche dette "**funzioni di 1° grado**" o "**funzioni lineari**".

Bene! Ti accorgerai che
**una funzione di questo tipo ha sempre come grafico una RETTA**
(*ecco* perché i matematici utilizzano con lo stesso significato
la locuzione "di 1° grado" e l'aggettivo "lineare"!)




Quelli qui sopra sono i grafici delle rette

$y = 2x + 7$
$y = 2x + 4$
$y = 2x$
$y = 2x - 4$

Come vediamo, tali rette sono fra loro *parallele*.

Da qui possiamo intuire che se due rette

$y = mx + q$, $y = m'x + q'$

hanno $m = m'$, allora sono parallele fra loro.

La costante ***m*** dell'equazione $y = mx + q$
viene detta "**coefficiente angolare**".

Ricordalo, è importante:

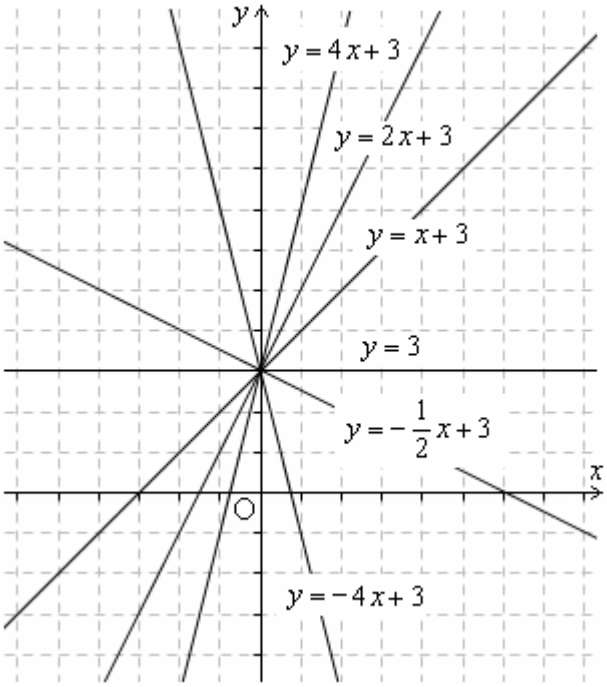
♥ "**Se due rette hanno lo stesso coeff. angolare *m*, allora sono parallele**".

Dalle figure emerge pure il significato della costante *q*.

♥ **La costante *q* esprime l'ordinata del punto nel quale la retta taglia l'asse verticale**.

In effetti, data l'equazione $y = mx + q$,
se si pone $x = 0$ si ottiene $y = q$
per cui la retta in questione passerà per $(0,\ q)$.

La costante ***q*** viene detta "l'**ordinata all'origine**",
per il fatto che **indica l'ordinata del punto della retta che sta sopra (o sotto) l'origine**.




Questi altri grafici corrispondono alle rette

$y = 4x + 3$ $\quad y = 3$
$y = 2x + 3$ $\quad y = -\frac{1}{2}x + 3$
$y = x + 3$ $\quad y = -4x + 3$

accomunate dalla stessa "ordinata all'origine" $q$
(mentre i coeff. angolari sono fra loro differenti).

Si vede chiaramente che

♥ **quando il coeff. angolare è positivo** ( $m > 0$ ) **la retta è in salita,**

♥ **quando il coeff. angolare è negativo** ( $m < 0$ ) **la retta è in discesa**,

♥ **quando il coeff. angolare è nullo** ( $m = 0$ ) **la retta è in orizzontale**.

Il caso del coefficiente angolare nullo è quello della "funzione costante", ad esempio

$y = 3$,

che potrebbe anche essere scritta come

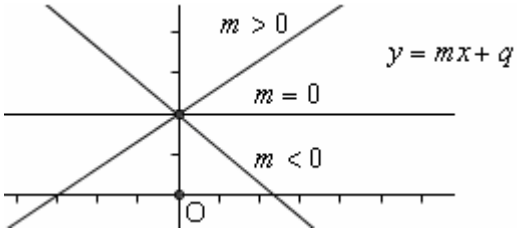
$y = 0 \cdot x + 3$

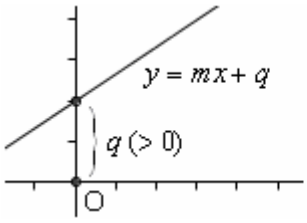
e assume sempre il valore $y = 3$ per qualsiasi valore di $x$.

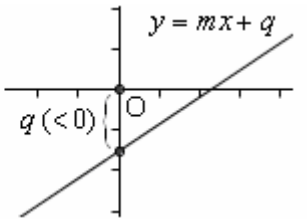
Inoltre,

♥ **quanto più è grande il valore assoluto** $|m|$ del coefficiente angolare, tanto più la retta **è inclinata nella sua salita o discesa.**

## RIASSUNTO SCHEMATICO



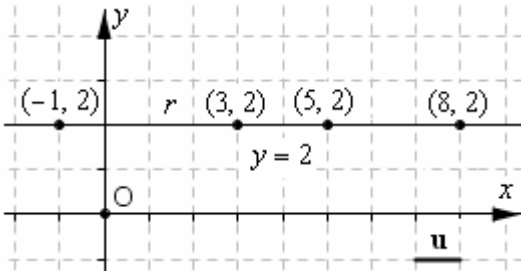




*m = coefficiente angolare*
*m > 0 salita*
*m < 0 discesa*
*m = 0 orizzontalità*

*q = "ordinata all'origine"*
*= ordinata del punto che ha x = 0*
*= ordinata del punto di intersezione con l'asse y*

## RETTE ORIZZONTALI



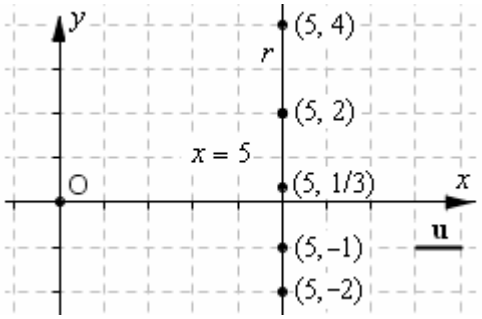

Sappiamo che **una retta orizzontale** ( **= parallela all'asse *x***) **ha coefficiente angolare nullo** ($m = 0$) .
**Riflettiamo ancora un attimo su questo fatto.**

In effetti, una retta orizzontale è il luogo dei punti del piano cartesiano, con la proprietà di avere una certa ordinata fissata $k$ (ad esempio, nella figura qui a fianco è rappresentata la retta formata da tutti e soli i punti di ordinata uguale a 2).
L'equazione "gemellata" a tale retta, ossia l'uguaglianza indicante la proprietà che è caratteristica di tutti i suoi punti e di essi soltanto, è perciò della forma $y = k$ (per la retta in figura, $y = 2$ ).
Un'uguaglianza del tipo $y = k$ può anche essere riscritta come $y = 0 \cdot x + k$ ; vediamo che qualunque valore si attribuisca a $x$, la $y$ corrispondente vale sempre $k$, e il moltiplicatore di $x$, ossia il coefficiente angolare, è appunto 0.

Riassumendo: **il coefficiente angolare $m = 0$ è associato all'orizzontalità**;
♥ **una retta orizzontale** (NOTA) **ha** dunque **equazione della forma $y = k$ ($k$ costante)**

NOTA: spesso in queste pagine ci prendiamo la licenza, per brevità, di scrivere "retta *orizzontale/verticale*" quando invece dovremmo parlare di "retta *parallela all'asse delle ascisse/ordinate*". Di norma, in effetti, l'asse delle ascisse è disposto orizzontalmente rispetto all'osservatore, e quello delle ordinate verticalmente.

## RETTE VERTICALI




♥ **Per una retta "verticale" ( = parallela all'asse delle *y*) il coefficiente angolare non esiste, non è definito.**

Infatti si intende per "coefficiente angolare" la costante che moltiplica $x$ in un'equazione della forma $y = mx + q$ ; ma una retta verticale *non ha* un'equazione di tal forma.
**L'equazione di una retta (o, più in generale, di una data curva sul piano cartesiano) esprime una proprietà "caratteristica" dei punti di quella retta, ossia una proprietà che è posseduta dalle coordinate *x, y* di tutti i punti di quella retta, e di essi soltanto.**
Ora, prendiamo la retta verticale della figura a destra.
Qual è la proprietà che caratterizza i suoi punti?
E' facile riconoscere che i suoi punti sono tutti e soli i punti del piano cartesiano, la cui ascissa è 5.
Pertanto tale retta sarà associata all'equazione $x = 5$ .
… Impossibile riscriverla sotto la forma $y = mx + q$ !

♥ **Una retta verticale ha equazione della forma $x = k$ .**

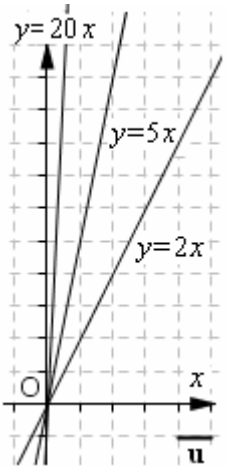
Osserviamo che tale equazione
- NON indica una funzione in cui $x$ sia var. indipendente
- NON può essere portata sotto la forma $y = mx + q$ .

♥ **DA UN CERTO PUNTO DI VISTA, si può però dire che "una retta verticale ha coefficiente angolare INFINITO".**

Questa affermazione va interpretata nel senso che
**"se una retta ha inclinazione altissima, quasi verticale, il suo coefficiente angolare sarà grandissimo, tendendo all'infinito all'aumentare dell'inclinazione".**

♥ Anche **l'asse delle *y*** è una particolare retta verticale: la sua equazione è **$x = 0$** .
♥ E **l'asse *x*** è una particolare retta orizzontale, di equazione **$y = 0$** .

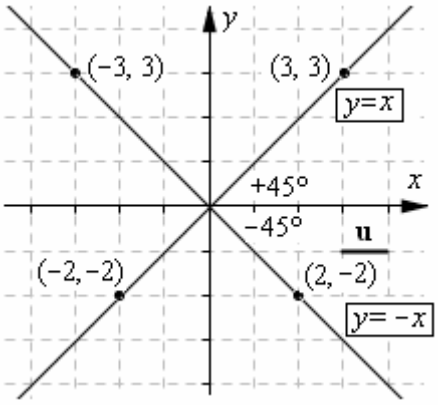
Osserva la figura qui a fianco. E immagina che inclinazione avrebbe una retta con coefficiente angolare uguale a 1.000.000.000 !!!



## BISETTRICI DEI QUADRANTI E RETTE INCLINATE DI 45°

- ♥ **La bisettrice del 1° e 3° quadrante ha equazione $y = x$**
  (è il luogo dei punti del piano cartesiano la cui ordinata è uguale all'ascissa).
  Quindi **il coefficiente angolare $m = 1$** contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale, sono inclinate di **45° in salita ( + 45° )**.

- ♥ **La bisettrice del 2° e 4° quadrante ha equazione $y = -x$**
  (è il luogo dei punti del piano cartesiano la cui ordinata è uguale all'opposto dell'ascissa).
  Quindi **il coefficiente angolare $m = -1$** contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale, sono inclinate di **45° in discesa ( − 45° )**.



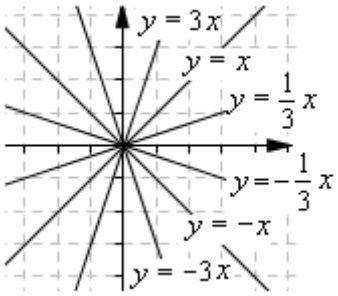
Le bisettrici dei quadranti

## RETTE CON INCLINAZIONE MAGGIORE, O MINORE, DI 45°

- **Una retta, con inclinazione (in salita o in discesa) > 45°, ha $|m| > 1$; una retta, con inclinazione (in salita o in discesa) < 45°, ha $0 \le |m| < 1$**

- **Due rette, che siano ugualmente inclinate, ma una in salita e l'altra in discesa, hanno coefficienti angolari fra loro OPPOSTI.**

- ♥ **Si può dimostrare che due rette PERPENDICOLARI hanno coefficienti angolari fra loro ANTIRECIPROCI (si dice "antireciproco" l'opposto del reciproco).**




## LA PROPRIETA' FONDAMENTALE DEL COEFFICIENTE ANGOLARE

Prendi una retta qualsiasi: che so, la $y = 2x + 3$. Adesso, assegna a $x$ due valori, per calcolare i corrispondenti valori di $y$ e determinare dunque due punti della retta stessa. Ad esempio,

- puoi porre $x = 1$, e avrai quindi $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ e di conseguenza un primo punto A(1, 5);
- poi puoi porre $x = 4$, e avrai quindi $y = 2 \cdot 4 + 3 = 11$ da cui un secondo punto B(4, 11).

Ora vai a calcolare il rapporto ( = quoziente) fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse dei due punti ottenuti:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \underset{\text{NOTA}}{=} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11-5}{4-1} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$$

Come hai potuto vedere, il risultato di questo calcolo coincide col coefficiente angolare $m$ della retta.

Prova con un'altra coppia di punti, fai nuovamente il calcolo: otterrai ancora lo stesso valore, il valore del coefficiente angolare. Prendi un'altra retta, considera una coppia di suoi punti: vedrai che il calcolo

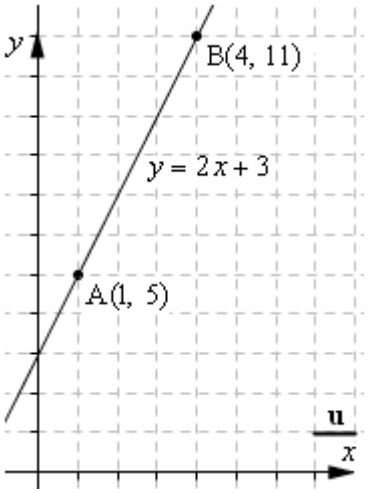
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

darà sempre il coefficiente angolare $m$ di quella retta.

Vale dunque (lo si potrebbe dimostrare in generale) la **formula**

♥ $\boxed{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = m}$ (importantissima!)

**Data una retta di equazione $y = mx + q$, il suo coefficiente angolare $m$ è uguale al rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti qualsiasi della retta stessa.**



*Ecco una retta* $y = 2x + 3$, *e due suoi punti* A(1, 5); B(4, 11).

*Calcoliamo* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;

*avremo* $\dfrac{11-5}{4-1} = \dfrac{6}{3} = \boxed{2}$.

*Ma 2 è il coeff. angolare!!!*

**NOTA - Il simbolo $\Delta$ è sovente utilizzato, in matematica, per indicare "differenza".**
Ad es., fra due persone che hanno risp. 15 anni e 47 anni, c'è una differenza di età $\Delta e = 47 - 15 = 32$.
Presi, in Fisica, due istanti di tempo successivi $t_1$ e $t_2$, nei quali la velocità di un corpo è risp. $v_1$ e $v_2$, allora nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ l'incremento di velocità (>, < o = 0) è dato da $\Delta v = v_2 - v_1$.

E' utile ed importante osservare (vedi figura) che

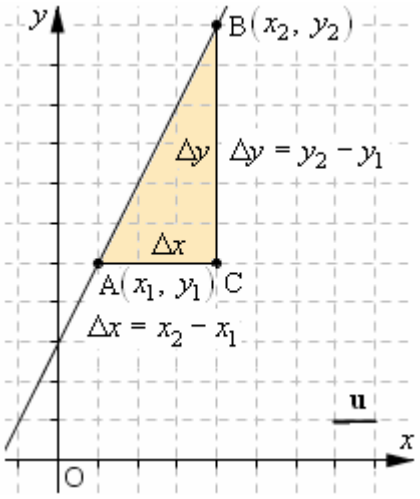
♥ **le due quantità $\Delta x$ e $\Delta y$**
**corrispondono alle due misure (con segno)**
**dei due segmenti orizzontale ( $\Delta x$ ) e verticale ( $\Delta y$ )**
**che occorre percorrere per passare dal primo punto al secondo**

… **misure CON SEGNO**, nel senso che

il segmento orizzontale andrà preso col segno
- positivo se viene percorso da sinistra verso destra,
- negativo se viene percorso da destra verso sinistra;

e allo stesso modo

il segmento verticale andrà preso col segno
- positivo se viene percorso dal basso verso l'alto,
- negativo se viene percorso dall'alto verso il basso.




Quanto sopra ci dice che in una funzione "lineare", ossia della forma $y = mx + q$, l'incremento di $x$ è proporzionale all'incremento corrispondente di $y$: il rapporto fra questi due incrementi è costante.
Si può dimostrare che VALE ANCHE IL VICEVERSA:
se due grandezze $x$, $y$ sono legate fra loro in modo tale che l'incremento di $x$ è proporzionale all'incremento corrispondente di $y$ (se raddoppia uno, raddoppia anche l'altro … )
allora la relazione tra le due grandezze è della forma $y = mx + q$.

Segnaliamo infine che molti testi chiamano "**AFFINE**" una funzione della forma $y = ax + b$, riservando il termine "**LINEARE**" solo, o prevalentemente, al caso in cui $b = 0$ ( $y = ax$ ).

**ENGLISH**
- coefficiente angolare = **slope** (lett.: *pendenza*), o **gradient**
- ordinata all'origine = **y-intercept**
- $\Delta y / \Delta x$ = "**rise over run**" = spostamento *verticale fratto spostamento laterale*

## DISEGNARE UNA RETTA CONOSCENDONE UN PUNTO E IL COEFFICIENTE ANGOLARE

Se noi sappiamo che una retta passa per un dato punto $P_0$,
e conosciamo il coefficiente angolare $m$ di quella retta,
potremo disegnare la retta con precisione
anche senza aver determinato la costante $q$ dell'equazione $\boldsymbol{y = mx + q}$.

Infatti, poiché sappiamo che per il coefficiente angolare vale la formula $\boldsymbol{m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$,

ci basterà fare il disegno in modo che la retta passi per $P_0$
e per un altro punto $P_1$ per ottenere il quale partiremo da $P_0$ e ci sposteremo
- ♪ prima orizzontalmente di un segmento orientato $\Delta x$
- ♫ poi verticalmente di un altro segmento orientato $\Delta y$,

dopo aver scelto $\Delta x$ e $\Delta y$ in modo tale che il loro quoziente sia uguale a quel valore $m$ che ci interessa.

- Ad esempio (figura 1), per disegnare la retta passante per $P_0(3,3)$ e avente coefficiente angolare $m = 2$, possiamo partire da $P_0$ e poi spostarci di 1 verso destra ( $\Delta x = 1$ ) e di 2 verso l'alto ( $\Delta y = 2$ ). Troveremo così il nuovo punto $P_1$, tale che la retta $P_0P_1$ avrà $m = \Delta y / \Delta x = 2$ e sarà perciò la retta desiderata.
- Facciamo un altro esempio (fig. 2). Per disegnare la retta passante per $A(1,5)$ e di coeff. ang. $m = -3/4$, possiamo partire da A e spostarci di 4 verso destra ( $\Delta x = 4$ ) poi di 3 verso il basso ( $\Delta y = -3$ ). Raggiungeremo così un nuovo punto B e congiungendo A con B il gioco sarà fatto.

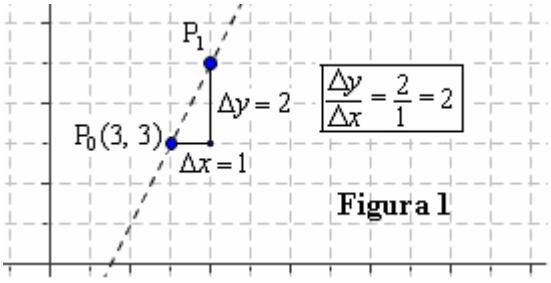


**Figura 1**

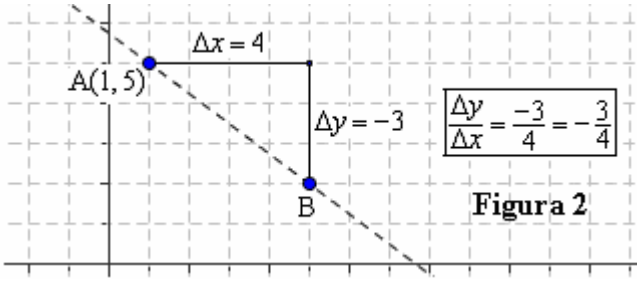
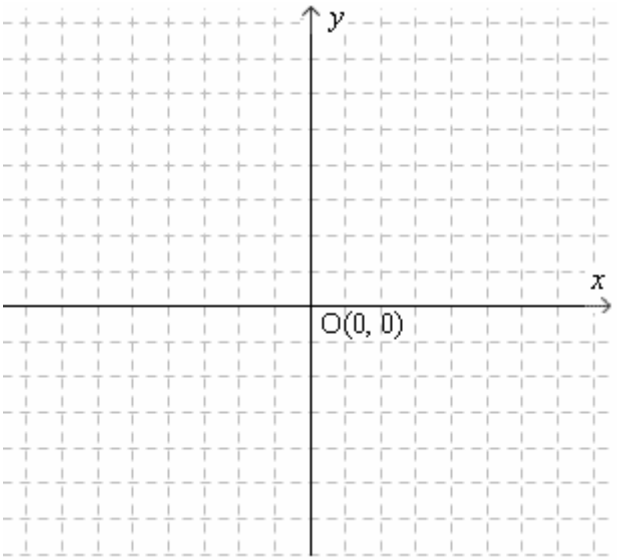
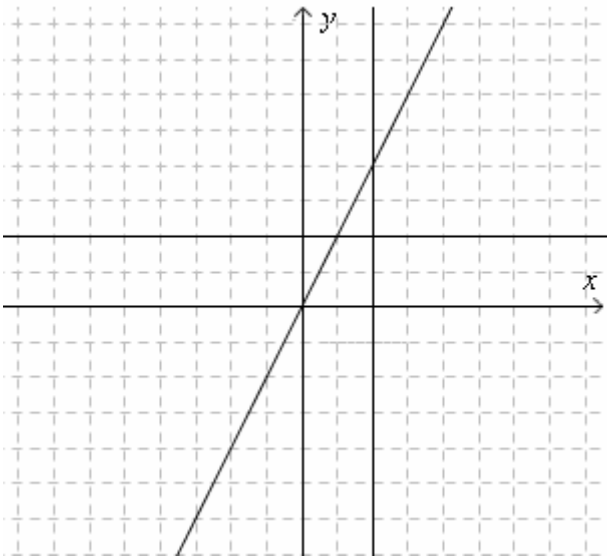


**Figura 2**

## ESERCIZIETTI PER FAMILIARIZZARE CON LA RETTA NEL PIANO CARTESIANO




1) In questo riferimento cartesiano, disegna le rette

$y = 2x - 1$ $\quad y = 2x + 1$

$y = x + 3$ $\quad y = -\frac{1}{2}x + 3$

$y = -3$ $\quad x = -3$

2) La retta di equazione $y = -2x + 15$
   a) passa per il punto $(12, -11)$?
   b) passa per il punto $(4, 7)$?
   c) passa per il punto $(-6, 27)$?

3) La retta di equazione $y = 3x - 22$ passa per un punto di ordinata $-40$.
   Qual è l'ascissa di quel punto?
   E quali sono le coordinate dei punti in cui la retta taglia i due assi cartesiani?

4) In questo riferimento cartesiano ci sono tre rette; scrivi, accanto a ciascuna di esse, la rispettiva equazione.
   Ricorda che l'equazione di una retta esprime la proprietà che caratterizza la coppia di coordinate di ciascun punto di quella retta!
   Ad esempio, per la retta inclinata, che relazione c'è fra la $y$ e la $x$ di ciascuno dei suoi punti?
   Insomma, detta $(x, y)$ la coppia delle coordinate di uno qualsiasi dei suoi punti, qual è l'uguaglianza che lega $x$ a $y$?

5) Qual è la retta, sul piano cartesiano, che è associata all'equazione $y = 0$?
   E qual è la retta, sul piano cartesiano, che è associata all'equazione $x = 0$?

Da www.mathworksheets4kids.com

6) *Find equation of Straight Line*

Slope = coefficiente angolare
y-intercept = ordinata all'origine

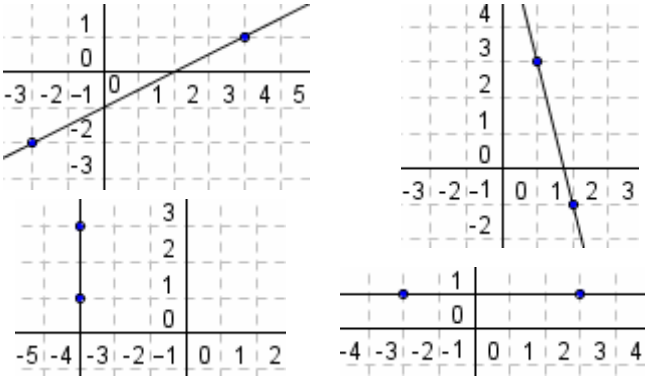
| Slope | y-intercept | Equation |
|---|---|---|
| 4 | −1 | |
| −1 | 0 | |

7) *Find slope*

| Equation of straight line | Slope of the line |
|---|---|
| $y = -5x + 5$ | |
| $y = x$ | |
| $x + y = 7$ | |
| $4y - 6x = 7$ | |
| $4x - y = 1$ | |
| $-4x + 2y - 1 = 0$ | |

8) Determina il coefficiente angolare della retta AB:
   a) A(1, −1); B(2, −2) b) A(1, 0); B(2, 3)
   c) A(−3, 5); B(2, −7) d) A(−4, 1); B(−4, −2)

9) Determina il coeff. angolare a partire dal grafico:



**RISPOSTE e INDICAZIONI**

2) Controlla se sostituendo 12 al posto di $x$ si ottiene $y = -11$. In pratica, sostituisci 12 al posto di $x$ e $-11$ al posto di $y$: se l'uguaglianza ottenuta è vera, il punto apparterrà alla retta, altrimenti no. a) No b) Sì c) Sì
3) Poni nell'equazione $y = -40$ e risali al valore di $x$. Si trova $x = -6$.
   L'intersezione con l'asse delle $x$ si ottiene ponendo $y = 0$ … Intersezioni con gli assi: $(22/3, 0)$; $(0, -22)$
4) Le equazioni delle tre rette sono: $y = 2$, $x = 2$, $y = 2x$ 5) L'asse $x$ (equazione $y = 0$) e l'asse $y$ ($x = 0$)
6) $y = 4x - 1$; $y = -x$ 7) In alcuni casi occorre prima isolare $y$. $-5$, $1$, $-1$, $3/2$, $4$, $2$.
8) $\Delta y / \Delta x = m$. $m = -1$, $m = 3$, $m = -12/5$, $m = \infty$ (*retta verticale*) 9) $\Delta y / \Delta x = m$. $m = 1/2$, $m = \infty$, $m = -4$, $m = 0$

# 6. COMPLEMENTI SULLA RETTA E SUL PIANO CARTESIANO

## A) Scrivere l'EQUAZIONE DELLA RETTA (NON VERTICALE) PASSANTE PER DUE PUNTI ASSEGNATI

A dire il vero, esisterebbe anche un'apposita formula, a questo scopo: la vedremo più avanti nel capitolo; tuttavia, è sufficiente procedere nel modo illustrato dal seguente esempio.

Supponiamo di voler scrivere l'equazione della retta passante per i due punti $A(-3,\,5)$ e $B(1,\,3)$.

La nostra retta non è verticale: la sua equazione è perciò della forma $y = mx + q$,
dove i valori di $m$ e di $q$ sono da determinare in modo che la retta passi per i due punti dati.

Ma una retta passa per $A(-3,\,5)$ se e soltanto se,
assegnando a $x$ il valore $-3$ nell'equazione della retta, si ottiene 5 come corrispondente valore di $y$;
quindi la retta $y = mx + q$ passerà per $A(-3,\,5)$ se e solo se l'uguaglianza $5 = m\cdot(-3) + q$ è vera.

Allo stesso modo, la retta $y = mx + q$ passerà per $B(1,\,3)$ se e soltanto se l'uguaglianza $3 = m\cdot 1 + q$ è vera.

Perciò per determinare l'equazione della retta in questione basterà risolvere il sistema

$$\begin{cases} 5 = m\cdot(-3) + q \\ 3 = m\cdot 1 + q \end{cases} \quad \text{(NOTA)}.$$

Si trova $\begin{cases} 5 = -3m + q \\ 3 = m + q \end{cases}$; $\begin{cases} -3m + q = 5 \\ m + q = 3 \end{cases}$; $\begin{matrix} (1)-(2) \\ (2) \end{matrix}\begin{cases} -4m = 2; \quad m = -1/2 \\ -1/2 + q = 3; \quad q = 7/2 \end{cases}$ per cui la retta che ci interessa è $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}$

NOTA - Si dice in questi casi che "si è posta la **CONDIZIONE DI APPARTENENZA**" (di un punto dato, a una curva di equazione data)




♥ **Un punto appartiene ad una curva associata a una certa equazione se e solo se, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione della curva al posto di *x* e di *y* rispettivamente, si ottiene un'uguaglianza vera.**

Questo fatto è banale se si tiene presente che, come insegna la Geometria Analitica,

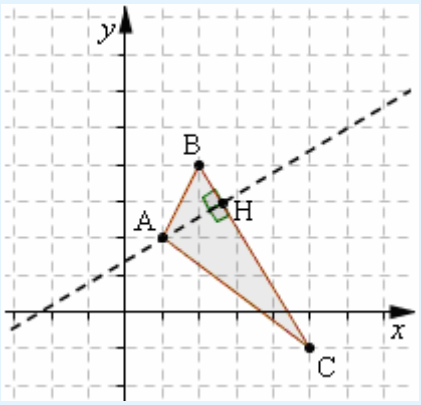
♥ **l'equazione associata a una data curva nel piano cartesiano è quell'uguaglianza contenente *x* e *y* che è verificata dalla coppia $(x,\,y)$ delle coordinate di tutti i punti della curva, e di essi soltanto.**

## B) Scrivere l'equazione della RETTA PASSANTE PER UN PUNTO ASSEGNATO E AVENTE UN DATO COEFFICIENTE ANGOLARE

Anche qui sarebbe possibile stabilire un'apposita formula (pag. 448). Ma possiamo pure farne a meno …

*Scrivi l'equazione della retta su cui giace l'altezza* AH *del triangolo* ABC, *con* $A(1,\,2);\ B(2,\,4);\ C(5,\,-1)$.

Ricordiamo che due rette sono perpendicolari se e solo se hanno coefficienti angolari fra loro antireciproci; allora basterà ricavare il coefficiente angolare della retta BC, poi scrivere l'equazione della retta passante per A e avente coefficiente angolare antireciproco di quello prima determinato.




Per trovare il coefficiente angolare di BC è possibile

1) determinare l'equazione di BC
(retta per due punti dati: vedi esercizio precedente;
puoi provarci, e otterresti $BC:\ y = -\frac{5}{3}x + \frac{22}{3}$)

2) oppure (più comodo!) utilizzare la formula $m = \Delta y / \Delta x$:
$$m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-4}{5-2} = -\frac{5}{3}$$

Da $m_{BC} = -\frac{5}{3}$ si ricava poi $m_{AH} = \frac{3}{5}$ (antireciproco di $-\frac{5}{3}$) da cui $AH:\ y = \frac{3}{5}x + q$

dove si potrà determinare $q$ ponendo la condizione di appartenenza del punto $A(1,\,2)$: $2 = \frac{3}{5}\cdot 1 + q;\ q = \frac{7}{5}$.

L'equazione richiesta è perciò $AH:\ y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$. Puoi constatare come $m$, $q$ siano coerenti con la figura!

## C) FORMA ESPLICITA E FORMA IMPLICITA PER L'EQUAZIONE DI UNA RETTA

Abbiamo già rilevato che un'equazione della forma

$$y = mx + q$$

non è in grado di rappresentare *qualsiasi* retta, perché restano *escluse* le rette verticali.

Invece un'equazione della forma

$$ax + by + c = 0$$

può rappresentare davvero *tutte* le rette, quelle verticali *comprese* (esse si ottengono nel caso $b = 0$).

Quando tutti i termini si trovano a primo membro:

$$ax + by + c = 0$$

si dice che l'equazione della retta è in FORMA IMPLICITA.

La forma

$$y = mx + q$$

è invece detta FORMA ESPLICITA.

Il passaggio dalla forma implicita a quella esplicita, possibile solo per le rette non verticali, si effettua con semplici passaggi algebrici, finalizzati a isolare $y$ a primo membro, come nei due esempi della colonna qui a fianco.

♪ $3x + 4y - 5 = 0$

$4y = -3x + 5; \quad y = \dfrac{-3x+5}{4}$ *opp.* $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}$

♫ $2x - y + 7 = 0; \quad -y = -2x - 7; \quad y = 2x + 7$

Di norma la forma *esplicita* è più comoda, in quanto

- viene utilizzata nel disegnare la retta
- consente di osservare direttamente il coefficiente angolare e l'ordinata all'origine.

Inoltre c'è da dire che, per una data retta, i due parametri $m$ e $q$ della forma *esplicita* sono determinati in modo unico, mentre i 3 parametri $a$, $b$, $c$ della forma *implicita* non sono determinati univocamente, ma solo "A MENO DI UNA COSTANTE DI PROPORZIONALITÀ".

Ad esempio, le seguenti equazioni:

$3x - 2y + 1 = 0$ $\qquad$ $6x - 4y + 2 = 0$

$-9x + 6y - 3 = 0$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}y + \dfrac{1}{6} = 0$

...

rappresentano tutte LA STESSA RETTA.

---

ALTRI ESEMPI

- **Portare l'equazione $\boxed{8x - 2y - 1 = 0}$ in forma esplicita**

  Si tratta di isolare $y$ a primo membro:

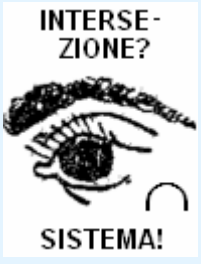
  $8x - 2y - 1 = 0; \quad -2y = -8x + 1; \quad 2y = 8x - 1; \quad y = \dfrac{8x-1}{2}; \quad \boxed{y = 4x - \dfrac{1}{2}}$

- **Viceversa: portare l'equazione $\boxed{y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{12}}$ in forma implicita**

  Porteremo tutto a 1° membro, in modo che il 2° m. sia 0; sarà bene mandare pure via i denominatori:

  $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{12}; \quad 12y = -9x + 1$ (*abbiamo moltiplicato per* 12); $\quad \boxed{9x + 12y - 1 = 0}$

## D) Per TROVARE LE COORDINATE DEL PUNTO DI INTERSEZIONE fra due rette di equazioni note basta prendere tali equazioni e porle a SISTEMA.




Infatti il punto di intersezione fra due rette è quello che appartiene *sia all'una che all'altra*. Ora, un punto appartiene sia alla prima che alla seconda retta se e solo se le sue coordinate verificano tanto l'equazione della prima, quanto l'equazione della seconda, ossia il *sistema* formato da tali due equazioni.

Se, ad esempio, in relazione all'esercizio con figura della pagina precedente, venissero richieste le coordinate di H, basterebbe impostare il sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{7}{5} \quad \text{(AH)} \\ y = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{22}{3} \quad \text{(BC)} \end{cases}$$

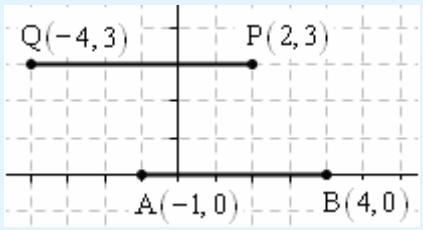
e risolverlo. Si troverebbe $\begin{cases} x = \dfrac{89}{34} \\ y = \dfrac{101}{34} \end{cases}$ ossia $\mathrm{H}\left(\dfrac{89}{34}, \dfrac{101}{34}\right)$.

## E) DISTANZA FRA DUE PUNTI NEL PIANO CARTESIANO

**Se i due punti hanno UGUAL ORDINATA (segmento orizzontale): si fa il valore assoluto della differenza delle ascisse**

$$\boxed{d = |x_2 - x_1|}$$

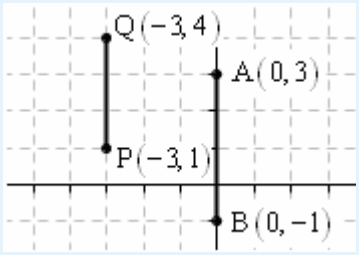
Ad esempio, in figura: $AB = |4-(-1)| = 5$, $PQ = |-4-2| = |-6| = 6$




**Se i due punti hanno UGUALE ASCISSA (segmento verticale): si fa il valore assoluto della differenza delle ordinate**

$$\boxed{d = |y_2 - y_1|}$$

Ad esempio, in figura: $AB = |-1-3| = |-4| = 4$, $PQ = |4-1| = |3| = 3$




**CASO GENERALE:**

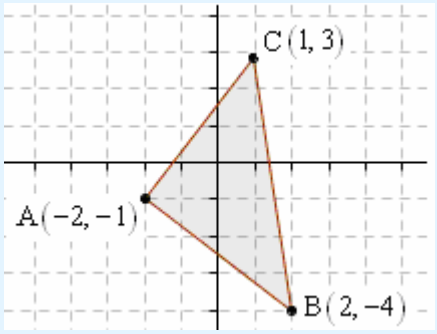
$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

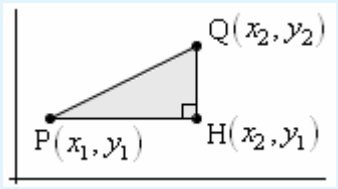
Ad es., i lati del triangolo ABC nella figura qui a fianco misurano:

$$AB = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-4-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(1-2)^2 + (3-(-4))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 7,...$$

$$CA = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$




La formula relativa al caso generale è "figlia" del Teorema di Pitagora (pag. 214), come mostra il triangolo PHQ della figura qui a sinistra, nel quale

$$PH = |x_2 - x_1|, \quad HQ = |y_2 - y_1|$$

$$PQ = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

OSSERVAZIONI

1) **In tutte e tre le formule È INDIFFERENTE L'ORDINE nel quale vengono presi i due punti**
2) **LA FORMULA RELATIVA AL "CASO GENERALE" È APPLICABILE, VOLENDO, ANCHE AI CASI IN CUI I DUE PUNTI ABBIANO UGUAL ASCISSA O UGUAL ORDINATA (sebbene, evidentemente, nella fattispecie siano più comode le due formule "specifiche")**.

## F) COORDINATE DEL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

Dati due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, il punto medio M del segmento AB ha coordinate

$$\boxed{x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}}; \quad \boxed{y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

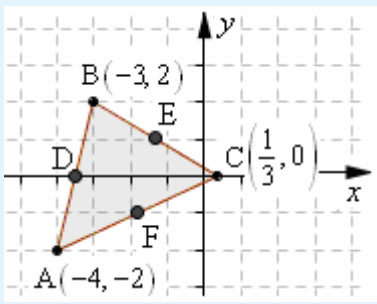
**L'ascissa del punto medio di un segmento è la media delle ascisse degli estremi, la sua ordinata è la media delle ordinate.**

Ad esempio, i punti medi dei lati del triangolo ABC, con $A(-4,-2)$; $B(-3,2)$; $C\left(\frac{1}{3},0\right)$, sono:

$$D\left(\frac{-4-3}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$$

$$E\left(\frac{-3+\frac{1}{3}}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = \left(-\frac{4}{3}, 1\right)$$

$$F\left(\frac{-4+\frac{1}{3}}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = \left(-\frac{11}{6}, -1\right)$$



## ESERCIZIETTI PER PRENDER CONFIDENZA

1) Scrivi l'equazione della retta passante per i 2 punti: a) (–1, 7) e (4, 2) b) (0, 5) e (1, 8)

2) Determina il punto di $\cap$ fra le rette $r$, $s$: a) $r: x+3y=0$; $s: y=x-4$ b) $r: y=-2x-6$; $s: 4x+2y-1=0$

3) Riconosci se il punto P appartiene alla retta $r$: a) P(–2,0); $r: y=-257x-514$ b) P(2,–5); $r: x-y-7=0$

4) Porta le equazioni seguenti in forma esplicita: a) $5x-4y+2=0$ b) $3x+3y+1=0$

5) Porta le equazioni seguenti in forma implicita: a) $y=7x+41$ b) $y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}=0$

6) Scrivi l'equaz. della retta $r$ che passa per P ed è $\parallel$ a $s$: a) P(–1,3); $s: x+y=0$ b) P(–2,–5); $s: y=3x-4$

7) Scrivi l'equaz. della retta $r$ che passa per P ed è $\perp$ a $s$: a) P(–1,3); $s: x+y=0$ b) P(–2,–5); $s: y=3x-4$

8) Trova la lunghezza del segmento di estremi P, Q: a) P(3, –8); Q(–4, 16) b) P(0, 10); Q(21, –10)

Da www.mathworksheets4kids.com

9) Find the midpoint of the following line segments with the given endpoints:

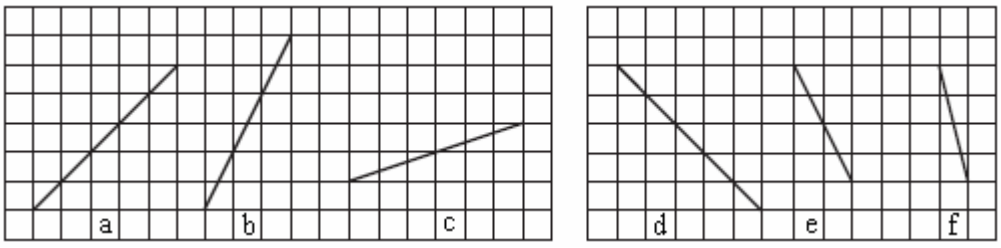
| Endpoint | Endpoint | Midpoint |
|---|---|---|
| (2, 5) | (8, 7) | |
| (4, –6) | (6, 8) | |
| (9, –4) | (–5, –4) | |
| (–3, –5) | (3, 5) | |

10) Find the missing end point of the following line segments whose midpoint and one of the endpoints is given:

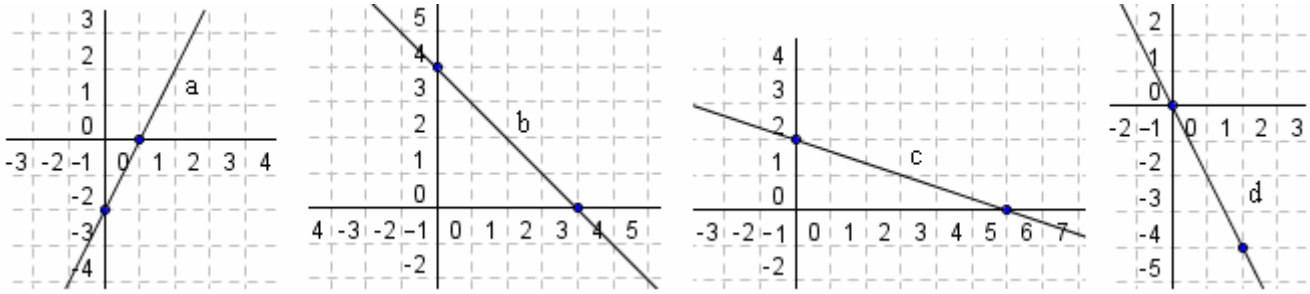
| Endpoint | Midpoint | Missing endpoint |
|---|---|---|
| (2, 5) | (3, 4) | |
| (–4, 8) | (0, 8) | |
| (6, – 2) | (4.5, – 2.5) | |

Da www.cimt.plymouth.ac.uk

11) Determine the gradient of each of the following lines: [*gradient = slope = coefficiente angolare*]




12) Scrivi le equazioni delle rette raffigurate:




## RISPOSTE e INDICAZIONI

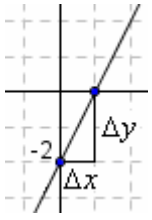
1) a) $y=6-x$ b) $y=3x+5$ 2) a) (3, –1) b) Sono parallele! 3) a) Sì b) Sì 4) a) $y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$ b) $y=-x-\frac{1}{3}$

5) a) $7x-y+41=0$ b) $2x+12y-3=0$ 6) a) $y=-x+2$ b) $y=3x+1$ 7) a) $y=x+4$ b) $y=-\frac{1}{3}x-\frac{17}{3}$

8) a) $PQ=25$ b) $PQ=29$ 9) (5,6); (5, 1); (2, –4); (0, 0) 10) $\frac{2+x}{2}=3, \frac{5+y}{2}=4 \ldots$ (4, 3); (4, 8); (3, –3)

11) In questi casi va applicata la fondamentale formula $\Delta y/\Delta x=m$. a) 1 b) 2 c) 1/3 d) –1 e) –2 f) –4

12) Qui si può applicare il procedimento per trovare l'equazione di una retta noti due punti, oppure osservare che è sempre nota l'intersezione con l'asse delle $y$ quindi dell'equazione cercata $y=mx+q$ si conosce subito $q$, ed $m$ è facilmente ricavabile calcolando il rapporto fra $\Delta y$ (spostamento verticale quando si passa da un punto ad un altro) e $\Delta x$ (spostamento orizzontale). La figura qui a fianco si riferisce al caso a).




$q=-2$

$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{+2}{+1}=+2$

Le risposte sono: a) $y=2x-2$ b) $y=-x+4$ c) $y=-\frac{1}{3}x+2$ d) $y=-2x$

13)

Nella figura a fianco, disegna le rette con le seguenti caratteristiche e accanto a ciascuna scrivi la rispettiva equazione:

a) passante per A e parallela all'asse $x$

b) passante per A e parallela all'asse $y$

c) passante per A e per l'origine

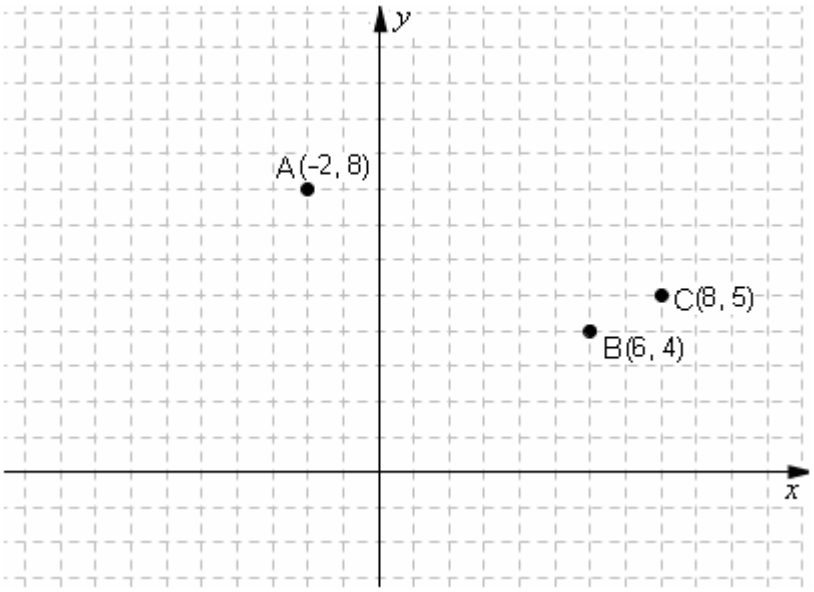
d) passante per A e per B

e) passante per A e parallela alla bisettrice del 1° e 3° quadrante

f) passante per A e parallela alla bisettrice del 2° e 4° quadrante

g) passante per A e parallela alla retta BC

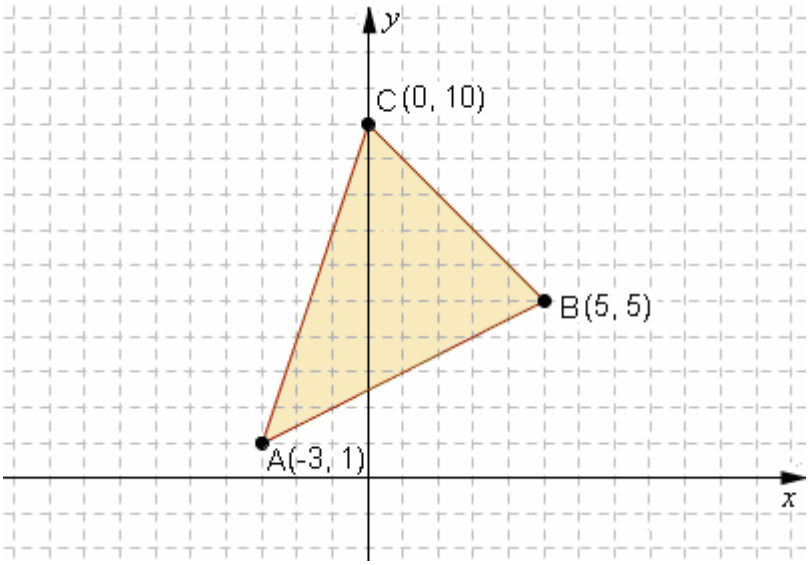
h) passante per A e perpendicolare alla retta BC




14)

In figura compare il triangolo ABC, di vertici $A(-3,1)$, $B(5,5)$, $C(0,10)$. Scrivi le equazioni delle due altezze che partono dai vertici B e C, e delle due mediane che partono dagli stessi vertici. Disegna le quattro rette in questione, e determina le coordinate dell'ortocentro (punto di incontro delle altezze) e del baricentro (punto di incontro delle mediane). Scrivi anche l'equazione della terza mediana, e verifica che anch'essa passa per il punto di incontro delle altre due.

[Troverai Ortocentro $(2, 6)$
Baricentro $(2/3, 16/3)$ ]




15)

La figura riporta il quadrilatero di vertici $O(0, 0)$, $A(3, 4)$, $B(-3, 8)$, $C(-6, 4)$.

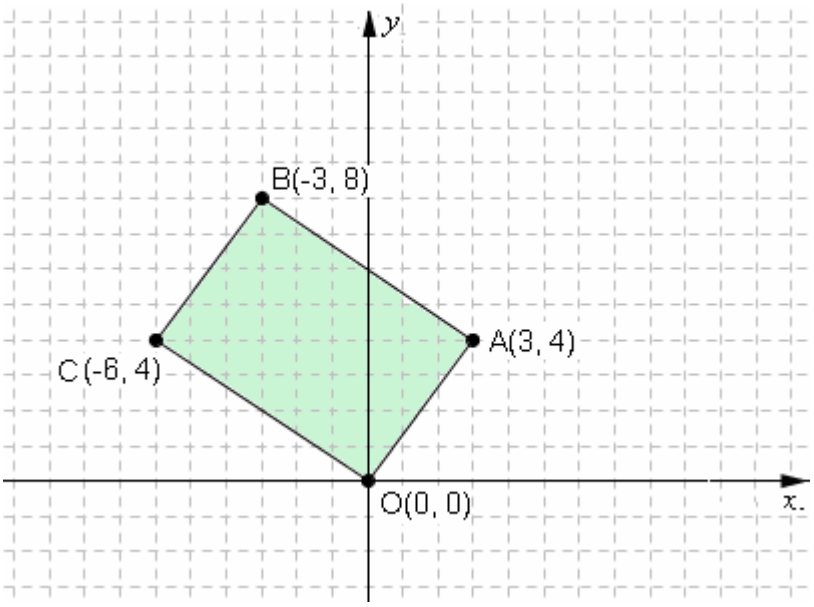
Verifica che:

a) ha i lati opposti paralleli

b) ha i lati opposti uguali

c) ha le diagonali disuguali, ma che si tagliano scambievolmente per metà nel punto $(-3/2, 4)$

Verifica infine col calcolo che le intersezioni della retta BC con gli assi sono i punti $(-9, 0)$ e $(0, 12)$



**FACCIAMO INSIEME QUALCHE ESERCIZIO PIU' IMPEGNATIVO**

- **SEGUI CON ATTENZIONE I VARI RAGIONAMENTI ESPOSTI**
- **COMPLETA I CALCOLI**
- **E RIEMPI I PUNTINI**

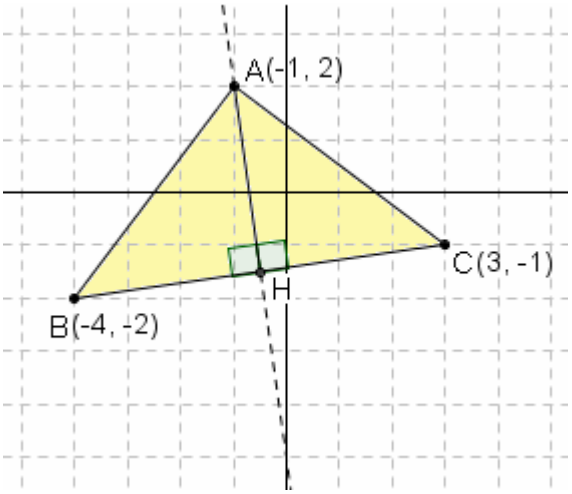
**1)** I tre punti $A(-1, 2)$, $B(-4, -2)$, $C(3, -1)$ sono vertici di un triangolo.

I) Verifica che ABC è isoscele e trovane il perimetro

II) Determina le coordinate del punto H, piede dell'altezza AH

III) Calcola l'area di ABC

IV) Il triangolo ABC è rettangolo?




I) Calcoliamo innanzitutto le misure dei tre lati di ABC, così potremo controllare se è isoscele e avere i dati per determinarne il perimetro.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4+1)^2 + (-2-2)^2} = \ldots$

$BC = \ldots \qquad = \sqrt{50} \approx 7{,}1$

$AC = \ldots$

Bene, allora abbiamo verificato che il nostro triangolo ABC è isoscele in quanto AB = AC.
Avremo poi $2p(ABC) = \quad \ldots \quad = 10 + \sqrt{50} \approx 17{,}1$

II) Per determinare le coordinate di H abbiamo a disposizione due modi:

- ❑ il primo è molto più svelto,
- ❑ il secondo è più generale perché sarebbe applicabile anche se il triangolo non fosse isoscele.

1° modo. E' noto che in un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche mediana, quindi H sarà il punto medio di BC. E allora

$$H = \left( \frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) = \left( \quad \ldots \quad , \frac{-2-1}{2} \right) = ( \ \ldots \ , \ \ldots \ )$$

Controlliamo subito se le due coordinate trovate possono andare d'accordo col disegno! E in caso affermativo, segniamole in matita a fianco di H.

2° modo. Se ABC non fosse stato isoscele con base BC, non avremmo potuto determinare le coordinate di H attraverso le formule per il punto medio di un segmento.
Come sarebbe stato il procedimento, allora?

- Si trova l'equazione della retta su cui giace l'altezza AH (brevemente: della retta AH)
- poi si scrive pure l'equazione della retta BC
- e infine si determina l'intersezione di tali due rette, facendo il sistema fra le loro equazioni.

Iniziamo col trovare l'equazione della retta AH.
Cosa conosciamo di questa retta?
Sappiamo che è una retta non verticale,
passante per $A(-1, 2)$ e perpendicolare alla retta BC, con $B(-4, -2)$, $C(3, -1)$.
Ma allora l'equazione della retta AH sarà della forma $y = mx + q$,
col coefficiente angolare $m$ uguale all'antireciproco del coefficiente angolare della retta BC
(ricordi? Due rette sono perpendicolari se e solo se i loro coefficienti angolari sono uno l'antireciproco dell'altro; e "antireciproco" significa "l'opposto del reciproco":
ad esempio, l'antireciproco di 5 è $-\frac{1}{5}$, mentre l'antireciproco di $-\frac{3}{8}$ è $+\frac{8}{3}$).

Il coefficiente angolare di BC si può determinare in due modi:
uno più lungo (ricavando l'equazione di BC),
e uno molto più svelto, ossia con la nota formula: $m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{1}{7}$.

Ma allora sarà $m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} = -7$, che "va d'accordo" col disegno
perché in esso vediamo che AH è una retta in discesa piuttosto ripida.

Perciò avremo $AH: y = -7x + q$ dove dobbiamo solo determinare il valore di $q$.
A tale scopo, porremo la condizione di appartenenza, a tale retta, del punto $A(-1, 2)$:
$A(-1, 2) \in AH \;\rightarrow\; 2 = -7 \cdot (-1) + q$
da cui, risolvendo rispetto a $q$ che in questo momento fa da incognita, $q = \ldots$.

Dopo aver determinato l'equazione di AH
che è risultata essere $AH: y = -7x - 5$,
abbiamo ora bisogno dell'equazione della retta BC.

- Potremmo, a tale scopo, partire dall'equazione $y = mx + q$ di una generica retta non verticale, e trovare $m$ e $q$ ponendo le due condizioni di appartenenza
  - del punto $B(-4, -2)$: $-2 = -4m + q$
  - e del punto $C(3, -1)$: …

  per poi farne il sistema: $\begin{cases} -2 = -4m + q \\ \ldots \end{cases}$ da cui $\begin{cases} m = \ldots \\ q = \ldots \end{cases}$

- Oppure potremmo sfruttare il fatto che il coeff. ang. di BC lo avevamo già trovato in precedenza (valeva 1/7)

  quindi già si sapeva che l'equazione di BC era della forma $y = \frac{1}{7}x + q$; ma per determinare il valore di $q$ è possibile porre la condizione di appartenenza di B o di C, indifferentemente: ad esempio, la condizione di appartenenza di B porta a $-2 = -\frac{4}{7} + q$ da cui $q = \ldots$

♥ *Comunque, per scrivere l'equazione della retta passante per due punti di coordinate note oppure della retta passante per un punto di coordinate note e avente un determinato coefficiente angolare esistono due apposite e comode* ***FORMULE****, alle quali volutamente abbiamo scelto di rinunciare per ora: le introdurremo più avanti.*

Bene! Ora che abbiamo stabilito le due equazioni di AH e di BC, ossia $AH: y = -7x - 5$, $BC: \ldots$ basterà farne il sistema e risolverlo, per trovare le coordinate di H:

punto H $\begin{cases} y = -7x - 5 \\ \ldots \end{cases}$ …

III) Per trovare l'area di ABC (a parte il fatto che si tratta di un triangolo isoscele del quale si conoscono le misure dei tre lati, quindi potremmo benissimo ignorare il fatto che sia inserito in un riferimento cartesiano e determinare la misura dell'altezza AH con Pitagora, ecc.) possiamo calcolare la lunghezza del segmento AH utilizzando la nota formula:

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \ldots = \sqrt{\frac{50}{4}} \overset{\text{NOTA 1}}{=} \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$$

E a questo punto,

$$S(ABC) = \frac{base \cdot altezza}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{\sqrt{50} \cdot \frac{\sqrt{50}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}}{2} \cdot \frac{1}{2} \overset{\text{NOTA 2}}{=} \frac{50}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$$

NOTA 1:
Quando sotto radice c'è una somma o una sottrazione, la radice NON può essere "spezzata" (sarebbe errore gravissimo! ☹ ), si può invece spezzare quando c'è un prodotto o un quoziente:
$\sqrt{9+4} \neq \sqrt{9} + \sqrt{4}$, $\sqrt{9-4} \neq \sqrt{9} - \sqrt{4}$
$\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$

NOTA 2 Cos'è $\sqrt{50}$? E' quel numero che, se viene elevato alla seconda, dà come risultato 50; e allora, se lo moltiplico per sé stesso, operazione che equivale a elevarlo al quadrato, ottengo appunto 50!!! $\rightarrow$ $\sqrt{50} \cdot \sqrt{50} = 50$

IV) Dalla figura, è chiaro che i lati che eventualmente possono formare un angolo retto sono AB e AC. Se andiamo a calcolare i coefficienti angolari delle due rette AB e AC avremo:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \ldots \qquad m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \ldots$$

e vediamo quindi che sono antireciproci uno dell'altro.
Pertanto tali due rette sono perpendicolari e dunque il triangolo ABC è rettangolo.
Oppure: avevamo già calcolato le misure dei lati di ABC, ottenendo $AB = 5$, $AC = 5$, $BC = \sqrt{50}$.

Andiamo allora a controllare se vale la relazione $5^2 + 5^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2$: …

Come si vede la risposta è affermativa, quindi,
per l'inverso del teorema di Pitagora, il triangolo ABC è rettangolo.

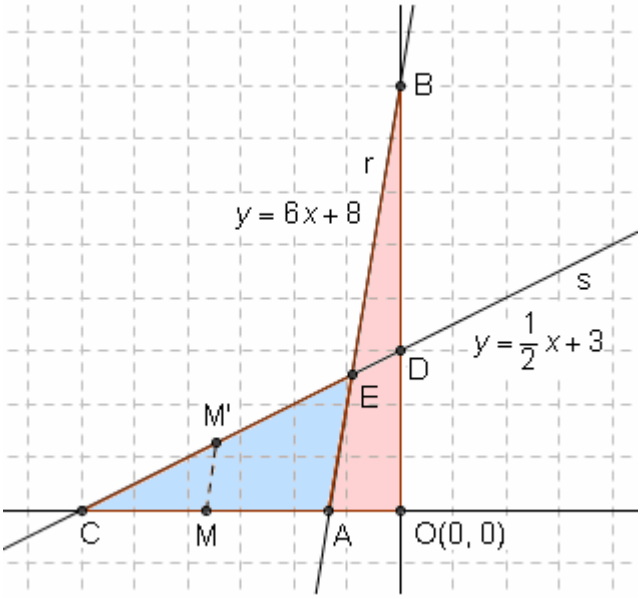
**2)** Le due rette

$r: y = 6x + 8$; $s: y = \frac{1}{2}x + 3$

intersecano gli assi cartesiani nei punti A e B (retta *r*), C e D (retta *s*) e si tagliano nel punto E.

I) E' maggiore la superficie del triangolo AOB o quella di CAE?

II) Verifica che, detto M il punto medio di CA e M' il punto medio di CE, la congiungente MM' è parallela ad AE




I)

Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti A, B, C, D, E.

A è l'intersezione della retta $r: y = 6x + 8$ con l'asse delle *x*, che è l'insieme dei punti del piano cartesiano aventi ordinata 0, e ha perciò equazione $y = 0$.

Quindi A si determina risolvendo il sistema $\begin{cases} y = 6x + 8 \\ y = 0 \end{cases}$ o anche, semplicemente,

tenendo conto che la sua $y$ vale 0 e ponendo $y = 0$ nell'equazione $y = 6x + 8$ per trovare anche la $x$.

Dunque $0 = 6x + 8$ da cui $x = \ldots$

Di conseguenza le coordinate di A sono: $\mathrm{A}(\ \ldots\ , 0)$

Analogamente si procede per trovare le coordinate di C, intersezione con l'asse $x$ della retta $s: y = \frac{1}{2}x + 3$.

Si trova $\mathrm{C}(\ \ldots\ , 0)$.

Le coordinate di B e D sono immediate da determinare.

B, ad esempio, è l'intersezione della retta $r: y = 6x + 8$ con l'asse delle *y*, che è l'insieme dei punti del piano cartesiano aventi ascissa 0, e ha perciò equazione $x = 0$.

Perciò B si determina risolvendo il sistema $\begin{cases} y = 6x + 8 \\ x = 0 \end{cases}$ o anche, in modo estremamente semplice,

tenendo conto che la sua $x$ vale 0 e ponendo $x = 0$ nell'equazione $y = 6x + 8$ per trovare anche la $y$.

In alternativa, B è l'intersezione della retta $r: y = 6x + 8$ con l'asse delle *y* quindi la *y* di B coincide con l'ordinata all'origine *q* di quella retta, che vale …

In definitiva risulta $\mathrm{B}(0, \ \ldots\ )$, $\mathrm{D}(0, \ \ldots\ )$.

Il punto E poi, essendo il punto di intersezione fra le due rette $r: y = 6x + 8$, $s: y = \frac{1}{2}x + 3$,

si trova risolvendo il … delle equazioni delle due rette.

$$\begin{cases} \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

Si trovano così, per E, coordinate frazionarie: $\mathrm{E}(\ \ldots\ ,\ \ldots\ )$

Area di CAE:

si può ottenere col calcolo $S_{\mathrm{CAE}} = \frac{\mathrm{CA} \cdot y_{\mathrm{E}}}{2}$,

essendo $\mathrm{CA} = |x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{C}}| = \ldots$

Verifica che così facendo si trova $S_{\mathrm{CAE}} = \frac{196}{33}$.

Per quanto riguarda AOB, è $S_{\mathrm{AOB}} = \frac{\mathrm{AO} \cdot \mathrm{OB}}{2} = \ldots$

Confrontando i valori frazionari di $S_{\mathrm{CAE}}$ e $S_{\mathrm{AOB}}$, si vede che è maggiore la superficie di …

II)

M è il punto medio del segmento CA, con $C(-6,\,0)$ e $A\left(-\frac{4}{3},\,0\right)$.

Dunque $M\left(\frac{-6-\frac{4}{3}}{2},\,\frac{0+0}{2}\right)=(\ \ldots\ ,\ \ldots\ )$. Allo stesso modo, si ottiene $M'(\ \ldots\ ,\ \ldots\ )$

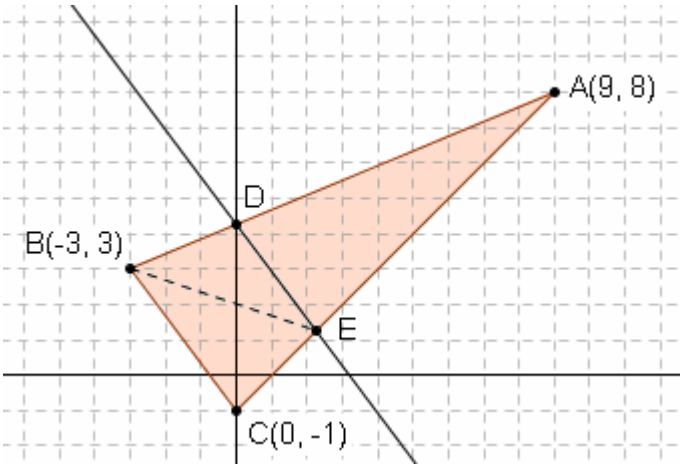
Determiniamo il coefficiente angolare della retta $MM'$ applicando la formula $m_{MM'}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\ldots$

e vediamo che tale coefficiente angolare coincide con quello della retta $AE:\ y=6x+8\ \rightarrow\ m_{AE}=\ldots$

Perciò resta verificato che le due rette sono parallele.

Fra l'altro, questo è in accordo con un teorema generale della Geometria, che afferma:
"in ogni triangolo, la congiungente i punti medi di due lati è *sempre* parallela al terzo lato (e uguale, come lunghezza, alla metà di questo)".

**3)** I punti $A(9,\,8)$; $B(-3,\,3)$; $C(0,\,-1)$ sono vertici di un triangolo.
Per il punto di intersezione D del lato AB con l'asse delle ordinate si traccia la parallela al lato BC, che taglia il lato AC in E.
Determina le misure delle diagonali del trapezio BCED.
Qual è la diagonale più lunga?




Occorre determinare innanzitutto le coordinate del punto D, intersecando la retta AB con l'asse $y$.
Retta AB: $y=mx+q$ dove $m$ e $q$ si trovano ponendo le condizioni di appartenenza di A e di B.

$\begin{matrix}A(9,\,8)\\B(-3,\,3)\end{matrix}\begin{cases}8=9m+q\\ \ldots\end{cases}$ da cui $\begin{cases}m=\ldots\\q=\ldots\end{cases}$ e di conseguenza l'equazione di AB è $y=\ \ldots\ +\frac{17}{4}$

Ora le coordinate di D, punto di ascissa 0 della retta AB, saranno $D(0,\ \ldots\ )$.

La retta DE, essendo parallela a BC, avrà coefficiente angolare uguale a quello di BC. Ma è $m_{BC}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\ldots$

per cui l'equazione della retta DE, tenuto conto che la sua ordinata all'origine vale … , sarà $y=\ldots$
Per determinare le coordinate di E bisogna intersecare tale retta con la retta AC.
L'equazione di quest'ultima si può scrivere considerando la generica equazione $y=mx+q$
e determinando i valori di $m$ e $q$ che interessano tramite le condizioni di appartenenza di A e di C:

$\begin{matrix}A(9,\,8)\\C(0,-1)\end{matrix}\begin{cases}8=9m+q\\ \ldots\end{cases}$ da cui, dopo aver risolto il sistema, $AC:\ y=\ldots$

oppure tenendo conto del fatto che per la retta AC l'ordinata all'origine vale …

e determinando $m_{AC}$ con la formula $m_{AC}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\ldots$ : si ha subito che l'equazione di AC è $y=\ldots$

A questo punto, con un sistema, si determinano le coordinate di E:

$\begin{cases}\ \ldots\\y=x-1\end{cases}$ da cui $E\left(\frac{9}{4},\,\frac{5}{4}\right)$

Infine, $DC=|y_C-y_D|$ perché il segmento DC ha per estremi due punti con la stessa ascissa:

$DC=|y_C-y_D|=\ldots$

mentre

$BE=\sqrt{\ \ldots\ }=\ \ldots\ =\sqrt{\frac{490}{16}}=\frac{\sqrt{490}}{4}\approx\frac{22{,}136}{4}=5{,}534$

Fra le due diagonali BE e DC, è quindi leggermente più lunga …

## PER FINIRE, DUE FORMULE IMPORTANTI E *MOLTO* COMODE

Intenzionalmente, abbiamo rimandato fin qui la presentazione di un paio di formule che rendono assai più rapido il procedimento risolutivo di parecchi problemi.
La prima è la formula per l'equazione della **retta passante per due punti di coordinate note**.
Essa nei testi viene solitamente ricavata impostando una opportuna proporzione, e scritta sotto la forma

♥ $\boxed{\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}}$ **FORMULA PER L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI DATI**

essendo $(x_1,y_1)$ e $(x_2,y_2)$ i due punti in questione.
Osserviamo subito che questa formula NON vale qualora i due punti individuino una retta parallela a uno degli assi cartesiani, e vediamo un paio di esempi di applicazione.
Se fosse richiesto di determinare l'equazione della retta passante per i due punti $A(-8,1)$ e $B(2,-4)$,

... procedendo, come abbiamo sempre fatto fin qui, *senza formule*, si tratterebbe di considerare la generica equazione $y=mx+q$ per porre le due condizioni di appartenenza

$$\begin{matrix}(-8,1)\\(2,-4)\end{matrix}\begin{cases}1=-8m+q\\-4=2m+q\end{cases}$$

e risolvere il sistema trovando così $m$ e $q$:

$$\begin{cases}m=-\dfrac{1}{2}\\q=-3\end{cases}\rightarrow \textit{la retta è } y=-\frac{1}{2}x-3$$

… mentre *con la formula* si ottiene direttamente

$$\frac{y-1}{-4-1}=\frac{x+8}{2+8}$$

Si fanno poi i calcoli, si porta l'equazione in forma esplicita oppure implicita, ed è fatta.

$$\frac{y-1}{-5}=\frac{x+8}{10};\ -(y-1)=\frac{x+8}{2};$$
$$-2y+2=x+8;\ -x-2y-6=0$$
$$\textit{da cui } x+2y+6=0 \textit{ oppure } y=-\frac{1}{2}x-3$$

Se invece i due punti assegnati fossero ad esempio $(2,5)$ e $(9,5)$, la formula non sarebbe applicabile perché si otterrebbe uno 0 a denominatore: $\dfrac{y-5}{5-5}=\dfrac{x-2}{9-2}$; tuttavia, in casi come questo (due punti con uguale ordinata oppure uguale ascissa), dato che le retta è orizzontale oppure verticale la sua equazione si potrà scrivere *immediatamente* senza scomodare formule (nel nostro caso, è $y=5$).

Un'altra formula che può risultare parecchio utile è quella per la **retta passante per un punto dato, e avente coefficiente angolare assegnato**:

♥ $\boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$ **FORMULA PER L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER IL PUNTO $P_0(x_0,y_0)$ E AVENTE COEFFICIENTE ANGOLARE *m***

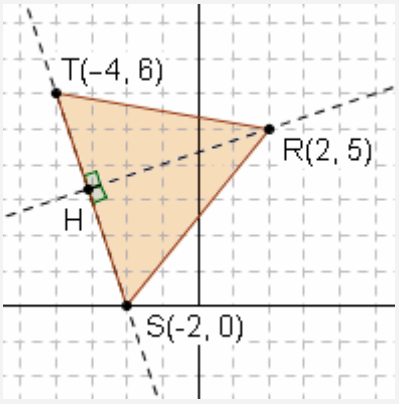
Indipendentemente da come sia stata ricavata, osserviamo che questa semplice formula "funziona", perché

a) l'equazione scritta rappresenta certamente una retta (per il fatto che si tratta di un'equazione di 1° grado nelle due variabili $x$, $y$);
b) tale retta ha coeff. ang. $m$ (se si portasse in forma esplicita, il moltiplicatore di $x$ risulterebbe essere $m$)
c) tale retta infine passa certamente per $P_0(x_0,y_0)$ in quanto sostituendo $x_0$, $y_0$ al posto di $x$ e $y$ rispettivamente, si ottiene un'uguaglianza vera.

Ad esempio, la retta che passa per il punto $(4,-12)$ e ha coefficiente angolare $m=5$ è semplicemente $y+12=5(x-4)$ ossia $y+12=5x-20$; $y=5x-32$.

*NEGLI ESERCIZI PROPOSTI ALLE PAGINE SEGUENTI potrai, volendo, rendere più veloci le risoluzioni attraverso le due belle formule presentate in questo riquadro. Per fare un esempio:*

Il triangolo RST ha per vertici $R(2,5)$; $S(-2,0)$; $T(-4,6)$.
Scrivi l'equazione della retta ST e determina le coordinate della proiezione H del punto R su questa retta.




Equazione della retta passante per i due punti S, T:

$\boxed{\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}}$; $\dfrac{y-0}{6-0}=\dfrac{x+2}{-4+2}$; ... $y=-3x-6$

Equazione della retta che passa per R e ha coefficiente angolare $1/3$ (antireciproco di $-3$): $\boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$; $y-5=\frac{1}{3}(x-2)$; ... $y=\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$.

Facendo il sistema fra questa retta e la retta ST, si ottiene $H\left(-\frac{31}{10},\frac{33}{10}\right)$

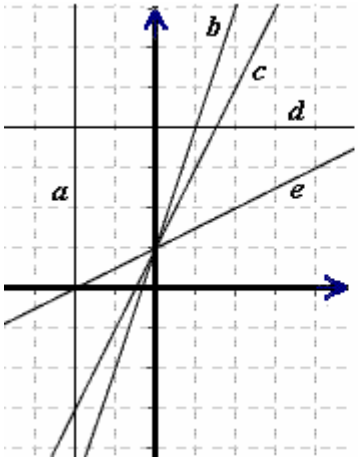
## 7. ESERCIZI (risposte alle pagg. 452, 453)

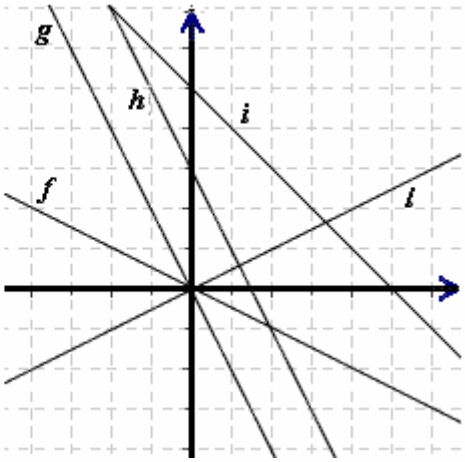
### DISEGNARE, RICONOSCERE

1) **Disegna** le seguenti rette:
a) $y = x+3$ b) $y = x$ c) $y = x-3$ d) $y = 3$ e) $x = 3$
f) $y = -4x+2$ g) $y = -4x$ h) $y = 4x$ i) $y = \frac{1}{4}x$ j) $y = -\frac{1}{4}x-3$

2) **Abbina** a ciascuna fra le seguenti equazioni la corrispondente retta fra quelle raffigurate:

i) $y = \frac{1}{2}x$ ii) $y = \frac{1}{2}x+1$
iii) $x = -2$ iv) $y = -2x$
v) $y = -\frac{1}{2}x$ vi) $y = 4$
vii) $y = -2x+3$ viii) $y = 5-x$
ix) $y = 3x+1$ x) $y = 2x+1$




**IDEE E FORMULE**







Distanza fra due punti:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$d = |x_2-x_1|$ stessa ordinata

$d = |y_2-y_1|$ stessa ascissa

Punto medio di un segmento:

$$x_M = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Due rette sono PARALLELE se e solo se hanno coefficienti angolari uguali;
due rette sono PERPENDICOLARI se e solo se hanno coefficienti angolari antireciproci.

Proprietà fondamentale del coeff. angolare:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Formula per l'equazione della retta passante per due punti dati:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Formula per l'equazione della retta passante per $(x_0,\ y_0)$ e avente coefficiente angolare $m$:

$$y-y_0 = m(x-x_0)$$

### COEFFICIENTE ANGOLARE, PARALLELISMO, PERPENDICOLARITA'

3) Determina (formula $m = \Delta y/\Delta x$) il coefficiente angolare della retta passante per ciascuna coppia di punti:

i) $A(1,2)$ $B(4,3)$ ii) $C(4,5)$ $D(7,2)$ iii) $E(1,-1)$ $F(3,5)$ iv) $G(3,2)$ $H(3,-2)$
v) $I(0,3)$ $L(-1,1)$ vi) $M(7,7)$ $N(-5,7)$ vii) $O(0,0)$ $P\left(\frac{1}{2},-2\right)$ viii) $Q\left(1,\frac{1}{3}\right)$ $R\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$

4) Data la retta $y = -\frac{2}{3}x$, riconosci quali fra le seguenti rette sono ad essa I) parallele II) perpendicolari

a) $y = \frac{2}{3}x+1$ b) $y = \frac{3}{2}x-1$ c) $y = 1-\frac{2}{3}x$ d) $4x+6y+30 = 0$ e) $3x+2y+6 = 0$

5) Stabilisci quale coeff. angolare hanno tutte le rette parallele alla retta che passa per la coppia di punti:
a) $A(1,-3);\ B(3,2)$ b) $C(1/8,\ 1/4);\ D(1/2,\ -1/2)$ c) $E(5,\ 4);\ F(5,\ -2)$

6) Stabilisci quale coefficiente angolare hanno tutte le rette perpendicolari alla retta che passa per ciascuna delle tre coppie di punti a), b), c) dell'esercizio precedente

### RETTA PER DUE PUNTI

7) Scrivi l'equazione della retta AB, con:

a) $A(0,4);\ B(-6,1)$ b) $A(-3,4);\ B(2,-1)$ c) $A(-3,-6);\ B(4,1)$ d) $A\left(1,\frac{1}{2}\right);\ B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$
e) $A(3,5);\ B(1,-1)$ f) $A(-1,-4);\ B(-3,2)$ g) $A\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right);\ B\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{4}\right)$ h) $A(1,3);\ B(1,-1)$

## RETTA PER UN PUNTO DATO, CON DATO COEFFICIENTE ANGOLARE

8) Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto $P(2,3)$ ed è parallela alla retta

a) $y=2x+1$ b) $y=x$ c) $y=-4x-5$ d) $y=7-x$ e) $y=-\frac{1}{2}x$

f) $3x-y+1=0$ g) $4x+3y+2=0$ h) AB, con $A(1,2);\ B(2,7)$ i) $y=1$ j) Asse $y$

9) Riprendi l'esercizio precedente, sostituendo "perpendicolare" a "parallela"

10) Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto $P(-3,0)$ ed è parallela alla retta

a) $y=-2x-4$ b) $y=-x$ c) $y=\frac{5}{7}x$ d) $x=0$ e) Asse $x$

f) AB, con $A(-3,1);\ B(0,4)$ g) CD, con $C(-1,-5);\ D(-2,4)$ h) EF, con $E(0,1);\ F(0,-1)$

11) Riprendi l'esercizio precedente, sostituendo "perpendicolare" a "parallela"

12) Scrivi le equazioni delle tre altezze ( = delle rette su cui giacciono le altezze) di ABC, nei seguenti casi:

a) A(2,1); B(5,3); C(7,2)
b) A(−5,−2); B(−3,4); C(0,1)
c) A ≡ O(0,0); B(0,5); C(−4,1)
d) $A\left(2,\frac{1}{2}\right);\ B\left(4,-\frac{1}{2}\right);\ C(1,-1)$

Sarà forse ovvio, ma è davvero IMPORTANTISSIMO fare la **figura** con precisione e **controllare se i risultati trovati sono in accordo con essa!**

## SU FORMA ESPLICITA E IMPLICITA

13) Porta le seguenti equazioni in forma esplicita:

a) $x+y-1=0$ b) $3x-y+4=0$ c) $x+4y-6=0$ d) $2x+3y=0$ e) $x-5y-10=0$

14) Porta le seguenti equazioni in forma implicita:

a) $y=-3x+8$ b) $y=x+2$ c) $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}$ d) $y=\frac{x-7}{2}$ e) $y=-\frac{4}{3}x$

## SU APPARTENENZA E INTERSEZIONE

15) Per ciascuna delle rette indicate qui a fianco, determina

i) il punto di ascissa −3 (basterà sostituire −3 al posto di $x$ e ricavare $y$!)
ii) il punto di ordinata 4 (basterà sostituire 4 al posto di $y$ e ricavare $x$!)
iii) il punto comune con l'asse $y$
iv) il punto comune con l'asse $x$

a) $y=4x-3$
b) $y=-\frac{5}{6}x+2$
c) $3x-5y+6=0$
d) $y=-4$

16) Trova le coordinate del punto in cui si tagliano le rette a fianco indicate

a) $r: y=12x+1,\ r': y=13x-1$
b) $r: 3x-5y+2=0,\ r': 7x+5y-4=0$
c) $r: y=-\frac{x}{3},\ r': x+y=1$

17) Trova le coordinate dei vertici del triangolo individuato dalle rette seguenti:

a) $r: y=-x,\ \ s: 3x-y-2=0,\ \ t: 2x-2y+1=0$ b) $r: x=0,\ \ s: y-2=0,\ \ t: y=5x-1$

## SULLA DISTANZA FRA DUE PUNTI

18) Calcola le distanze fra le seguenti coppie di punti:

a) $A(0,2);\ B(6,10)$ b) $A(-8,3);\ B(7,-5)$ c) $A(0,-3);\ B(0,-7)$

d) $A(2,-1);\ B\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ e) $A(10,-1);\ B(6,2)$ f) $A(3,42);\ B(12,2)$ g) $A\left(-\frac{1}{6},-2\right);\ B\left(\frac{3}{2},2\right)$

19) Determina il perimetro del triangolo di vertici a) A(1,−4); B(13,−9); C(1,0) b) D(−7,3); E(7,3); F(2,−9)

20) Trova il perimetro di PQR, con $P(-4,2);\ Q(-1,-2);\ R(5,6)$ (il risultato conterrà una radice)

21) Il triangolo di vertici $D(-3,3);\ E(0,-1);\ F(-7,0)$ è isoscele: dimostralo, e calcola la sua base

Nel seguito si parlerà, a volte, di **parallelogrammi**, eventualmente "particolari" (rettangolo, quadrato).
Questo argomento è trattato alle pagine 312 … 316 del volume: vai a dare un'occhiata!

22) Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-2,6);\ B(10,1);\ C(7,-3);\ D(-5,2)$ è un parallelogrammo, utilizzando: a) i coefficienti angolari b) la formula per la distanza fra due punti

23) Verifica che il triangolo di vertici $A(-2,-1);\ B(10,-10);\ C(22,6)$ è rettangolo
a) coi coefficienti angolari b) utilizzando *esclusivamente* la formula per la distanza fra due punti.

24) Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-2,2);\ B\left(0,\frac{7}{2}\right);\ C\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right);\ D\left(-\frac{1}{2},0\right)$ è un quadrato

a) col metodo che ti pare b) utilizzando *esclusivamente* la formula per la distanza fra due punti

## SUL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

25) Calcola le coordinate del punto medio del segmento AB, essendo

a) $A(3,5);\ B(-1,9)$ b) $A(-4,0);\ B(-3,0)$ c) $A(-2,-4);\ B(0,2)$

d) $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right);\ B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$ e) $A\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{3}\right);\ B\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ f) $A(k,-3);\ B(1,-3)$

g) $A(a+b,\ a-b);\ B(a-b,\ b)$ h) $A(3,6;\ 0,4);\ B(1,4;\ -0,5)$

26) Calcola le coordinate dei punti medi I, L, M, N dei lati del quadrilatero ABCD, essendo $A(-3,1);\ B(1,-5);\ C(5,7);\ D(1,7)$. Il quadrilatero che ha per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero qualsiasi è sempre un parallelogrammo: verificalo in questo caso particolare, constatando che i lati opposti di ILMN sono a due a due paralleli come direzione, e uguali come lunghezza.

27) M è il punto medio di PQ, essendo $P(0,1);\ Q(-4,3)$. Che coordinate ha N, punto medio di PM?

28) Nell'esercizio 22 si è verificato che ABCD, con $A(-2,6);\ B(10,1);\ C(7,-3);\ D(-5,2)$, è un parallelogrammo; ma allora le sue diagonali dovrebbero tagliarsi scambievolmente per metà, vale a dire i loro punti medi dovrebbero coincidere. Verificalo.

29) Se $M(1,-1)$ è il punto medio del segmento AB e $A(-4,3)$, quali sono le coordinate di B?

30) Se $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{4}\right)$ è il punto medio del segmento AB e $A\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$, quali sono le coordinate di B?

31) Trova le coordinate del punto R, simmetrico di $T(-4,2)$ rispetto a $S(-1,-3)$

32) Trova il quarto vertice del parallelogrammo che ha tre vertici in $A\left(-3,\frac{13}{2}\right);\ B(-2,4);\ C(3,2)$

## VARI

33) E' dato il triangolo ABC, con $A(-1,0);\ B(3,-3);\ C(-4,-6)$. Scrivi le equazioni delle mediane relative ai lati AB e AC ( = delle *rette* su cui giacciono tali mediane), poi determina il loro punto di intersezione.

34) Dopo aver dimostrato che ABCD, con $A(-5,-2);\ B(5,-3);\ C(6,2);\ D(-4,3)$, è un parallelogrammo, congiungi il vertice A col punto medio M del lato DC e il vertice C con il punto medio N nel lato AB e verifica che i due segmenti AM e CN dividono la diagonale DB in tre parti uguali $DE = EF = FB$.

35) Verifica algebricamente che i tre punti $A(2,5);\ B(4,1);\ C(5,-1)$ sono allineati.

36) Verifica, utilizzando esclusivamente i coeff. angolari, che il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo.

a) $A(-4,1);\ B(0,-2);\ C(3,0);\ D(-1,3)$ b) $A(-1,-1);\ B\left(3,-\frac{8}{3}\right);\ C\left(3,\frac{4}{3}\right);\ D(-1,3)$

37) Ripeti la verifica richiesta all'es. precedente utilizzando, invece, la formula per la distanza fra due punti.

38) Verifica, utilizzando esclusivamente i coefficienti angolari, che il triangolo a) ABC b) DEF è rettangolo.

a) $A(-10,-8);\ B(2,8);\ C(14,-1)$ b) $D(-1,0);\ E(4,-12);\ F(8,\ 15/4)$

39) Ripeti la stessa verifica richiesta all'esercizio precedente utilizzando, invece, la relazione pitagorica.

40) Considera il triangolo di vertici $A(-8,-3);\ B(0,12);\ C(0,3)$ e verifica (nei tre possibili casi) che la congiungente i punti medi di due lati è sempre parallela al lato rimanente, e uguale alla sua metà

41) Determina il baricentro ( = punto di incontro delle mediane) e l'ortocentro (delle altezze):
a) di OAB, con $O(0,0);\ A(5,0);\ B(1,6)$ b) di DEF, con $D(1,2);\ E(-5,-6);\ F(-3,0)$

42) Disegna i punti $A(6,-8);\ B(12,5)$ e determina l'area del triangolo OAB assumendo OA come base.

43) Determina l'area del triangolo che ha per vertici a) $(-2,-3);\ (0,6);\ (6,3)$ b) $(-9,5);\ (-6,-3);\ (-1,-3)$

44) Quanto misurano area e perimetro del triangolo che la retta $2x-3y+6=0$ forma con gli assi cartesiani?

45) Determina le coordinate del punto di incontro degli assi di due dei lati del triangolo che ha per vertici i punti $(-7,-3);\ (-5,5);\ (4,5)$. Verifica che anche l'asse del lato rimanente passa per quel punto.
[L'asse di un segmento è la perpendicolare a quel segmento condotta per il suo punto medio].

46) I vertici del triangolo ABC sono: $A(-7,5);\ B(-6,-2);\ C(2,2)$. Scrivi le equazioni:
dell'altezza e della mediana relative al lato BC; dell'asse di BC; della parallela a BC passante per A.
Ora BC, l'altezza relativa a BC, l'asse di BC e la parallela a BC per A determinano un rettangolo: trovane l'area e determina la misura delle sue diagonali, constatando che sono uguali.

47) Gli assi dei tre lati di un triangolo passano sempre per uno stesso punto, che ha ugual distanza dai tre vertici del triangolo: verificalo nel caso particolare del triangolo di vertici $A(-1,-5);\ B(8,-2);\ C(0,2)$.
Quanto vale in questo caso la distanza comune?

**RISPOSTE**

2) i) *l* ii) *e* iii) *a* iv) *g* v) *f* vi) *d* vii) *h* viii) *i* ix) *b* x) *c*

3) i) 1/3 ii) –1 iii) 3 iv) *non esiste/ è infinito* v) 2 vi) 0 vii) $-4$ viii) 1/3

4a) *né* || *né* ⊥ 4b) ⊥ 4c) || 4d) || 4e) *né* || *né* ⊥

5a) $m=\frac{5}{2}$ 5b) $m=-2$ 5c) $m=$"*non esistente*", "*non definito*", "*infinito*" (*retta verticale*)

6a) $m=-\frac{2}{5}$ 6b) $m=\frac{1}{2}$ 6c) $m=0$

7) a) $y=\frac{1}{2}x+4$ b) $y=1-x$ c) $y=x-3$ d) $y=\frac{3}{8}x+\frac{1}{8}$
e) $y=3x-4$ f) $y=-3x-7$ g) $y=-x-\frac{5}{4}$ h) $x=1$

8) a) $y=2x-1$ b) $y=x+1$ c) $y=-4x+11$ d) $y=-x+5$ e) $y=-\frac{1}{2}x+4$
f) $y=3x-3$ g) $y=-\frac{4}{3}x+\frac{17}{3}$ h) $y=5x-7$ i) $y=3$ j) $x=2$

9) a) $y=-\frac{1}{2}x+4$ b) $y=-x+5$ c) $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$ d) $y=x+1$ e) $y=2x-1$
f) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$ g) $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$ h) $y=-\frac{1}{5}x+\frac{17}{5}$ i) $x=2$ j) $y=3$

10) a) $y=-2x-6$ b) $y=-x-3$ c) $y=\frac{5}{7}x+\frac{15}{7}$ d) $x=-3$ e) $y=0$
f) $y=x+3$ g) $y=-9x-27$ h) $x=-3$

11) a) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ b) $y=x+3$ c) $y=-\frac{7}{5}x-\frac{21}{5}$ d) $y=0$ e) $x=-3$
f) $y=-x-3$ g) $y=\frac{1}{9}x+\frac{1}{3}$ h) $y=0$

12) a) $y=2x-3$; $y=-5x+28$; $y=-\frac{3}{2}x+\frac{25}{2}$ b) $y=x+3$; $y=-\frac{5}{3}x-1$; $y=-\frac{1}{3}x+1$
c) $y=-x$; $y=4x+5$; $y=1$ d) $y=-6x+\frac{25}{2}$; $y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{6}$; $y=2x-3$

13) a) $y=-x+1$ b) $y=3x+4$ c) $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$ d) $y=-\frac{2}{3}x$ e) $y=\frac{1}{5}x-2$

14) a) $3x+y-8=0$ b) $\begin{matrix}-x+y-2=0\\ \text{o } x-y+2=0\end{matrix}$ c) $\begin{matrix}-5x+15y+3=0\\ \text{o } 5x-15y-3=0\end{matrix}$ d) $\begin{matrix}-x+2y+7=0\\ x-2y-7=0\end{matrix}$ e) $4x+3y=0$

15) a) i) $(-3,-15)$ ii) $\left(\frac{7}{4},4\right)$ iii) $(0,-3)$ iv) $\left(\frac{3}{4},0\right)$ b) i) $\left(-3,\frac{9}{2}\right)$ ii) $\left(-\frac{12}{5},4\right)$ iii) $(0,2)$ iv) $\left(\frac{12}{5},0\right)$
c) i) $\left(-3,-\frac{3}{5}\right)$ ii) $\left(\frac{14}{3},4\right)$ iii) $\left(0,\frac{6}{5}\right)$ iv) $(-2,0)$ d) i) $(-3,-4)$ ii) *non esiste* iii) $(0,-4)$ iv) *non esiste*

16) a) $(2,25)$ b) $\left(\frac{1}{5},\frac{13}{25}\right)$ c) $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

17) a) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$; $\left(\frac{5}{4},\frac{7}{4}\right)$ b) $(0,2)$; $(0,-1)$; $\left(\frac{3}{5},2\right)$

18) a) 10 b) 17 c) 4 d) 5/2 e) 5 f) 41 g) 13/3

19) a) 32 b) 42 20) $15+\sqrt{97}$

21) In effetti, è $DE=DF=5$. base $=EF=\sqrt{50}\approx 7{,}07$

22) a) Due lati opposti giacciono su rette di coeff. ang. $-5/12$, gli altri due su rette di coeff. ang. 4/3
b) Occorrerà controllare che i lati opposti siano a due a due uguali. Si trova $AB=DC=13$; $AD=CB=5$.

23) b) Basta verificare che la somma dei quadrati di due lati uguaglia il quadrato del lato rimanente: si potrà così concludere che il triangolo è rettangolo in virtù dell'inverso del Teorema di Pitagora (pag. 214).

24) b) Si deve verificare che i quattro lati sono uguali, e pure le diagonali sono uguali!

Si trova $AB = BC = CD = DA = \frac{5}{2}$, $AC = BD = \sqrt{\frac{50}{4}} = \sqrt{12,5} \approx 3,5$

25) a) $(1,7)$ b) $\left(-\frac{7}{2},0\right)$ c) $(-1,-1)$ d) $\left(\frac{3}{8},\frac{4}{15}\right)$ e) $\left(-\frac{1}{8},-\frac{2}{3}\right)$ f) $\left(\frac{k+1}{2},-3\right)$ g) $\left(a,\frac{a}{2}\right)$ h) $(2,5;-0,05)$

26) $(-1,-2)$; $(3,1)$; $(3,7)$; $(-1,4)$; due lati opposti di ILMN misurano 5 e gli altri due 6

27) $N\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ 28) In effetti, sia AC che BD hanno per punto medio $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ 29) $B(6,-5)$ 30) $B\left(\frac{7}{6},-1\right)$

31) $R(2,-8)$ 32) $D\left(2,\frac{9}{2}\right)$ 33) Il punto di intersezione delle mediane è $G\left(-\frac{2}{3},-3\right)$ 34) E(−1,1); F(2,−1)

35) Puoi scrivere l'equazione della retta che passa per 2 di questi punti e verificare che anche il 3° punto le appartiene.

36) a) $m_{AB} = -\frac{3}{4} = m_{DC}$ perciò $AB \parallel DC$; $m_{AD} = \frac{2}{3} = m_{BC}$ perciò $AD \parallel BC$

b) $m_{AB} = -\frac{5}{12} = m_{DC}$ perciò $AB \parallel DC$; $m_{AD} = \infty = m_{BC}$ perciò $AD \parallel BC$ (entrambe verticali)

37) a) $AB = 5 = DC$; $AD = \sqrt{13} = BC$ e un quadrilatero coi lati opposti a due a due uguali è un parallelogrammo.

b) $AB = \frac{13}{3} = DC$; $AD = 4 = BC$

38) a) $m_{AB} = \frac{4}{3}$ e $m_{BC} = -\frac{3}{4}$ perciò $AB \perp BC \left(A\hat{B}C = 90°\right)$ b) $m_{DE} = -\frac{12}{5}$ e $m_{DF} = \frac{5}{12}$ perciò $DE \perp DF \left(E\hat{D}F = 90°\right)$

39) a) $AB = 20$, $BC = 15$, $AC = 25$ quindi $AB^2 + BC^2 = 400 + 225 = 625 = AC^2$ da cui $A\hat{B}C = 90°$

b) $DE = 13$, $DF = \frac{39}{4}$, $EF = \frac{65}{4}$ quindi $DE^2 + DF^2 = 169 + \frac{1521}{16} = \frac{4225}{16} = EF^2$ da cui $E\hat{D}F = 90°$

40) Ad esempio, i punti medi di AB e BC hanno coordinate $\left(-4,\frac{9}{2}\right)$ e $\left(0,\frac{15}{2}\right)$

e la loro congiungente ha coefficiente angolare, come retta, $\frac{3}{4}$, e misura, come segmento, 5.

Ora, AC ha coefficiente angolare, come retta, ancora $\frac{3}{4}$ e misura, come segmento, 10 cioè $5 \cdot 2$.

A te le altre verifiche.

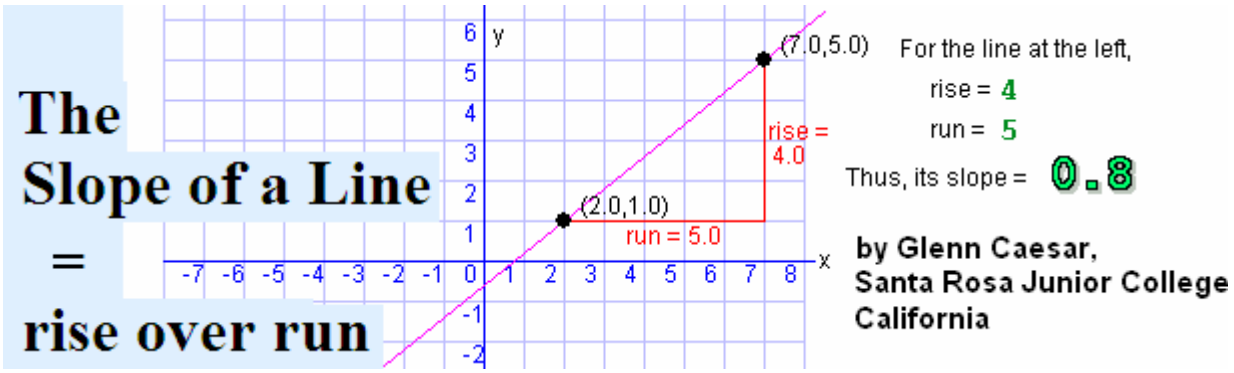
41) a) ortocentro: $\left(1,\frac{2}{3}\right)$; baricentro: $(2,2)$ b) ortocentro: $(-11,6)$; baricentro: $\left(-\frac{7}{3},-\frac{4}{3}\right)$

42) $S(OAB) = 63$ 43) a) $S = 30$ b) $S = 20$ 44) $S = 3$, $2p = 5 + \sqrt{13}$ 45) $(-1/2, -3/8)$

46) $y = -2x - 9$; $y = -x - 2$; $y = -2x - 4$; $y = \frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$;

il rettangolo ha area uguale a 15 e le sue diagonali misurano entrambe $\sqrt{50}$

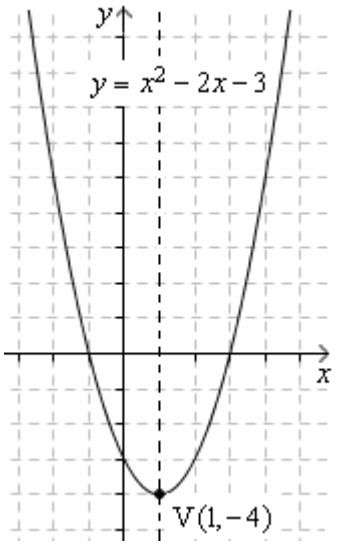
47) Scrivi le equazioni degli assi dei tre lati, trova il punto di intersezione di due qualsiasi di tali assi e verifica che questo punto appartiene pure all'asse restante. La distanza comune vale 5.



# 8. FUNZIONI QUADRATICHE: PARABOLE

Parliamo ora delle funzioni **"di 2° grado", o "quadratiche",** la cui equazione è della forma $y = ax^2 + bx + c$

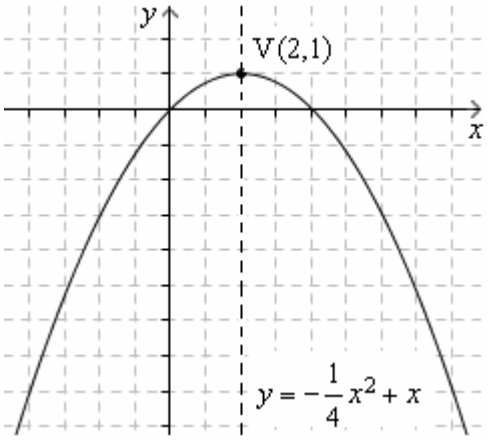
| $x$ | $y = x^2 - 2x - 3$ |
|---|---|
| –3 | 12 |
| –2 | 5 |
| –1 | 0 |
| 0 | –3 |
| $\frac{1}{2}$ | $-\frac{15}{4} = -4 + \frac{1}{4}$ |
| 1 | – 4 |
| $\frac{3}{2}$ | $-\frac{15}{4} = -4 + \frac{1}{4}$ |
| 2 | –3 |
| 3 | 0 |
| 4 | 5 |
| 5 | 12 |




*Disegnando questa curva per punti, ci si rende conto che essa presenta una simmetria "assiale", cioè una simmetria rispetto a una retta (tratteggiata nella figura). La presenza di un asse di simmetria consente di tracciare il grafico con più facilità: calcolate le coordinate di un punto, dopo averlo disegnato possiamo immediatamente disegnare anche un altro punto, quello che è simmetrico del primo rispetto all'asse.*

*Abbiamo indicato con V ("V" di "vertice") il punto di ordinata minima del grafico.*

| $x$ | $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$ |
|---|---|
| –2 | –3 |
| –1 | –1,25 |
| 0 | 0 |
| 1 | 0,75 |
| 2 | 1 |
| 3 | 0,75 |
| 4 | 0 |
| 5 | –1,25 |
| 6 | –3 |




*Questa seconda curva è "capovolta" rispetto alla precedente; inoltre la sua "curvatura" è meno accentuata. Entrambe le circostanze sono legate al coefficiente del termine di 2° grado nelle rispettive equazioni, come è spiegato più avanti.*

*Il vertice in questo caso è il punto di ordinata massima.*

**Una funzione di 2° grado $y = ax^2 + bx + c$ ha come grafico una "parabola".**

♥ Il **segno del coefficiente $a$** determina l'orientamento della "**concavità**" ovvero della "parte cava":
- **$a > 0$: concavità rivolta verso l'alto** ∪
- **$a < 0$: concavità rivolta verso il basso** ∩

♥ Il **valore assoluto di $a$** si dice "**apertura**" perché è in relazione col fatto che la **curvatura** della parabola
- sia più "dolce" (valori di $|a|$ piccoli)
- o sia più accentuata (valori di $|a|$ grandi)

Si dimostra che l'**ascissa del** "**vertice**" (che possiamo provvisoriamente descrivere come il punto della parabola avente ordinata minima oppure massima, o anche come l'intersezione della parabola col proprio asse di simmetria) è calcolabile tramite la formula

♥ $x_V = -\frac{b}{2a}$.

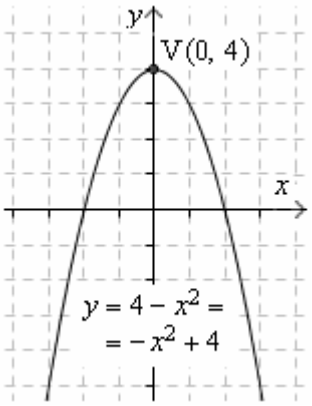
**Trovata con questo calcolo l'ascissa del vertice, la rispettiva ordinata si potrà determinare facilmente: basterà semplicemente sostituire, nell'equazione della parabola, al posto di $x$ il valore trovato.**

Ad esempio, nel caso della parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$,

il calcolo fornisce: $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$ da cui successivamente $y_V = x_V{}^2 - 2x_V - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

♥ L'*individuazione del vertice* è *la prima cosa* che conviene fare, quando si vuole disegnare una parabola, come d'altronde il tracciamento dell'**asse di simmetria**, che è poi la retta verticale passante per il vertice, ossia la retta formata dai punti di ascissa $x = -\frac{b}{2a}$ (brevemente: la retta di equazione $x = -\frac{b}{2a}$).

| $x$ | $y = 4 - x^2$ |
|---|---|
| –3 | –5 |
| –2 | 0 |
| –1 | 3 |
| $-\frac{1}{2}$ | $4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$ |
| 0 | 4 |
| 1/2 | 15/4 |
| 1 | 3 |
| 2 | 0 |
| 3 | –5 |




Un ultimo esempio.

$\boldsymbol{y = 4 - x^2}$ si può riscrivere come $y = -x^2 + 4$.

E' dunque $b = 0$, quindi anche $x_V = -\frac{b}{2a} = 0$.

Ma se il vertice ha ascissa 0, esso si troverà sull'asse delle *y*, che sarà perciò l'asse di simmetria per la curva.

D'altronde, che la curva fosse simmetrica rispetto all'asse *y* lo si poteva capire pure dal fatto che,
non essendoci il termine contenente *x*
ma solo il termine con $x^2$ e il termine noto,
dando a *x* due valori opposti
si ottiene sempre lo stesso valore di *y*!

## 9. FUNZIONI DELLA PROPORZIONALITA' INVERSA: IPERBOLI

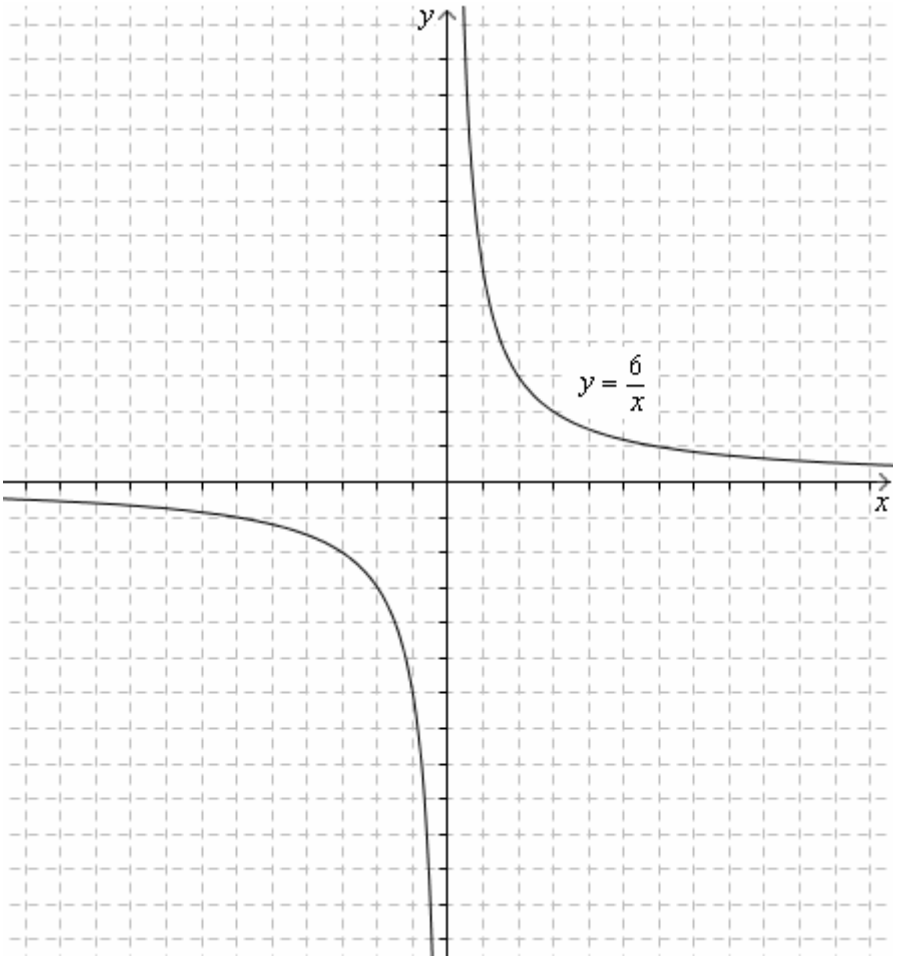
Una funzione della forma $\boldsymbol{y = k / x}$, con *k* costante, è detta "**funzione della proporzionalità inversa**", perché **le due variabili in gioco, *x* e *y*, sono inversamente proporzionali**:
**se *x* raddoppia, *y* si dimezza; se *x* triplica, *y* si riduce alla terza parte; ecc. ecc.**

*Tracciamo ad esempio il grafico della funzione* $y = 6/x$.

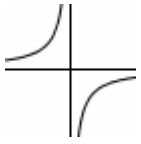
**Otterremo un'armoniosa curva in due rami, della quale una caratteristica che balza subito in evidenza è la simmetria "centrale", dove il centro di simmetria è l'origine del riferimento cartesiano.**

*Si potrebbe dimostrare che si tratta di una "**iperbole**".*

| $x$ | $\boldsymbol{y = \frac{6}{x}}$ |
|---|---|
| –1000 | –0,006 |
| –12 | –0,5 |
| –6 | –1 |
| –5 | –1,2 |
| –4 | –1,5 |
| –3 | –2 |
| –2 | –3 |
| –1 | –6 |
| –0,5 | –12 |
| –0,1 | –60 |
| –0,001 | –6000 |
| 0,001 | 6000 |
| 0,1 | 60 |
| 0,5 | 12 |
| 1 | 6 |
| 2 | 3 |
| 3 | 2 |
| 4 | 1,5 |
| 5 | 1,2 |
| 6 | 1 |
| 12 | 0,5 |
| 1000 | 0,006 |
| 1000000 | 0,000006 |




In questo esempio è $k>0$ e la curva sta nel 1° e 3° quadrante; se invece fosse $k<0$, come nei casi $y = -\frac{2}{x} = \frac{-2}{x}$ oppure $y = -\frac{7}{4x} = \frac{-\frac{7}{4}}{x}$, la curva andrebbe ad occupare il 2° e 4° quadrante:



- Quando *x* diventa *grande grande* ($x = 1000, x = 1000000, \ldots$), *y* diventa *piccola piccola*, "si schiaccia a zero"
- Quando *x* si avvicina a 0 da destra, ossia "per valori positivi", la *y* corrispondente tende a $+\infty$
- Quando *x* si avvicina a 0 da sinistra, ossia "per valori negativi", la *y* corrispondente tende a $-\infty$
- Quando *x* tende a $-\infty$, la *y* corrispondente tende a 0 dal basso, per valori negativi

Le **definizioni** rigorose di "**parabola**" e "**iperbole**" sono riportate in un bellissimo capitolo del Volume 2.

**ESERCIZI** Traccia i grafici di: a) $y = x^2 + 4x$ b) $y = x^2 - x - 6$ c) $y = -x^2$ d) $y = 3x^2 - 9$ e) $y = \frac{1}{10}x^2$ f) $y = \frac{4}{x}$ g) $y = -\frac{2}{x}$ h) $y = \frac{1}{x}$

## 10. RISOLUZIONE GRAFICA DI UN'EQUAZIONE (o di un semplice sistema)

**Per risolvere graficamente un'equazione** $\boxed{f(x)=g(x)}$

si rappresentano, in uno stesso riferimento cartesiano, le due funzioni $y=f(x)$; $y=g(x)$
e si vanno a ricercare quei valori di $x$ per i quali la $y$ corrispondente è la medesima.

In altre parole,

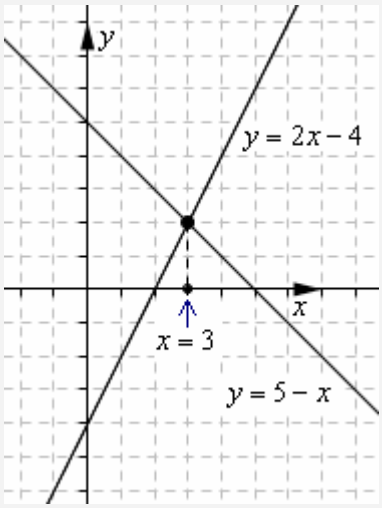
- ♥ **si vanno a individuare i punti di intersezione fra le due curve $y=f(x)$, $y=g(x)$, e si prendono le ASCISSE di questi punti. Tali ascisse sono le soluzioni dell'equazione data.**

Di norma, la risoluzione grafica consente di determinare le soluzioni soltanto **in modo approssimato**.

$\boxed{2x-4=5-x}$

La retta in salita
è il grafico della funzione
$y=2x-4$
mentre quella in discesa
è il grafico della funzione
$y=5-x$.
Per quale valore di $x$
Le due $y$ sono uguali?
Per $x=3$.
Infatti con $x=3$ si ha,
sia per il 1° che il 2° membro,
$y=2$.

La soluzione di questa equazione
è dunque $\boldsymbol{x=3}$,
come la "classica" risoluzione algebrica
potrebbe immediatamente confermare.

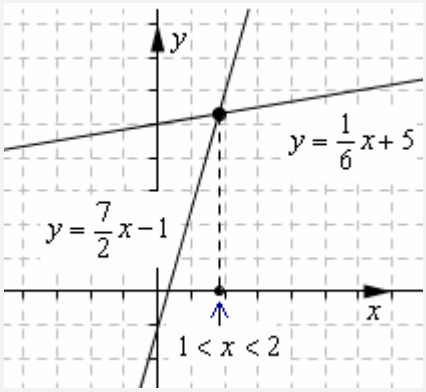



| $x$ | 1° membro $y$ | | 2° membro $y$ |
|---|---|---|---|
| –2 | –8 | | 7 |
| –1 | –6 | | 6 |
| 0 | –4 | | 5 |
| 1 | –2 | | 4 |
| 2 | 0 | | 3 |
| **3** | **2** | = | **2** |
| 4 | 4 | | 1 |
| 5 | 6 | | 0 |
| 6 | 8 | | –1 |
| 7 | 10 | | –2 |

$\boxed{\frac{1}{6}x+5=\frac{7}{2}x-1}$

Se tracciamo i grafici delle due rette
vediamo che si intersecano
nel 1° quadrante,
in un punto la cui ascissa è
leggermente inferiore a 2.

Possiamo dunque dire che
la soluzione di questa equazione
è un valore compreso fra 1 e 2:
$1<x<2$



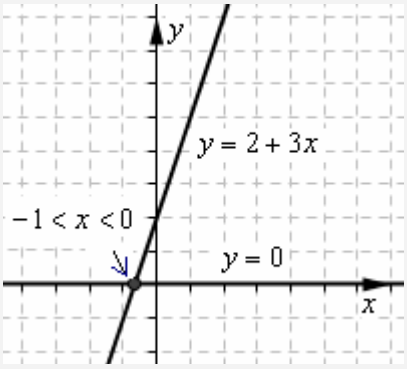

La risoluzione algebrica
in effetti ci dà:

$$\frac{1}{6}x+5=\frac{7}{2}x-1$$
$$x+30=21x-6$$
$$-20x=-36$$
$$x=\frac{36}{20}=\frac{9}{5}=1,8$$

$\boxed{2+3x=0}$

La funzione a 1° membro
$y=2+3x$
ha come grafico
una retta in salita.

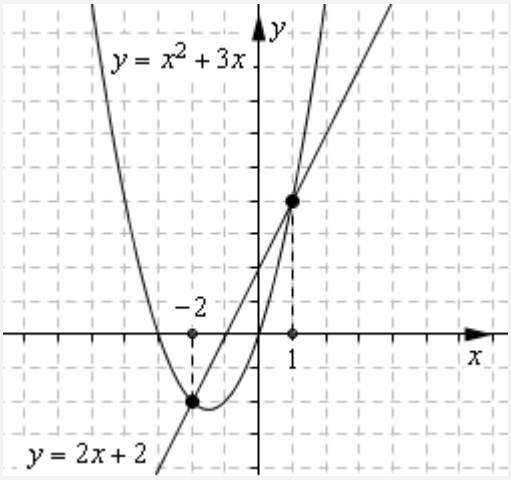
La funzione $y=0$
(2° membro)
ha come grafico
una retta orizzontale,
che coincide
con l'asse delle ascisse.



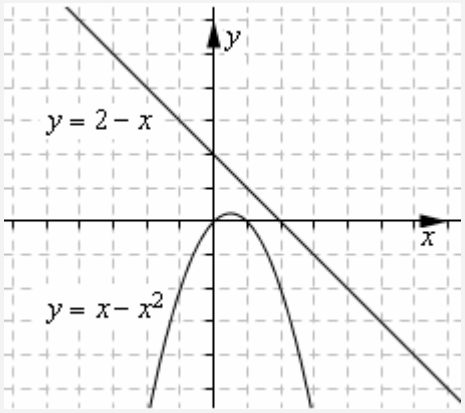

La soluzione è
l'ascissa del punto
in cui i due grafici
si tagliano;
vediamo che di tratta
di un valore compreso
fra –1 e 0: $-1<x<0$.

La risoluzione algebrica
ci fornisce

$$x=-\frac{2}{3}$$




$\boxed{x^2 + 3x = 2x + 2}$ : le soluzioni sono $x = -2,\ x = 1$




$\boxed{x - x^2 = 2 - x}$

Le due curve non si intersecano:
l'equazione è IMPOSSIBILE.

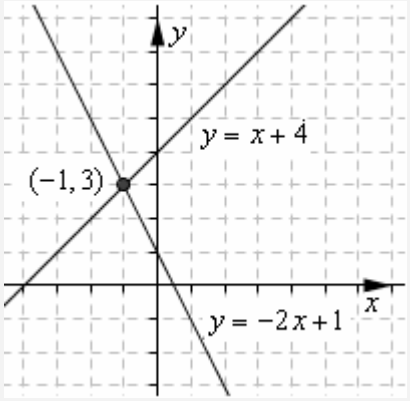
Questa figura risolve il SISTEMA IN DUE INCOGNITE

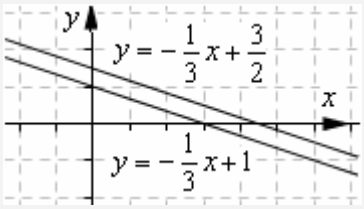
$\boxed{\begin{cases} x - y = -4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}}$

Lo si scrive nella forma

$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

e si tracciano i grafici delle due rette. La soluzione del sistema è la coppia $(x, y)$ delle coordinate del punto di intersezione.




Il sistema

$\boxed{\begin{cases} 2x + 6y - 9 = 0 \\ x + 3y - 3 = 0 \end{cases}}$ ossia $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$

è IMPOSSIBILE (le rette sono parallele).

## ESERCIZI

1) Risolvi graficamente le seguenti equazioni,
poi controlla la correttezza delle tue conclusioni risolvendo anche algebricamente:

a) $x - 1 = 2x + 3$ b) $-x + 5 = 2x - 1$ c) $4x - 5 = -3x - 2$ d) $\frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{3}x - 1$

e) $4x + 5 = 3 - 5x$ f) $\frac{3}{8}x + 1 = 2$ g) $-\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} = x$ h) $-2x + 7 = -4x$ i) $3x = 3x + 2$

2) Risolvi graficamente le seguenti equazioni (cosa puoi notare?):

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ b) $x^2 - 4x = -3$ c) $x^2 = 4x - 3$ d) $-x^2 = 3 - 4x$ e) $4x = x^2 + 3$

3) Risolvi graficamente le seguenti equazioni.

a) $x^2 + 2x - 4 = 4x - 1$ b) $2x^2 - 1 = x$ c) $x^2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x$ d) $x^2 = (x-1)^2$ e) $\frac{x^2}{2} = 3 - x^2$

4) Risolvi graficamente le seguenti equazioni.

a) $\frac{4}{x} = x + 3$ b) $\frac{1}{4}x^2 + 1 = \frac{6}{x}$ c) $-\frac{6}{x} = -x + 2$ d) $2x = x^2 + 4$ e) $x + 2 = -\frac{1}{x}$

5) Risolvi graficamente, poi anche algebricamente, i seguenti sistemi di 1° grado in 2 incognite.

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ y = -x - 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y - 12 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = 3x \\ x + y = 0 \end{cases}$

## RISPOSTE

1) Controllo tramite risoluzione algebrica 2) Le 5 equazioni sono tutte equivalenti. Soluzioni: $x = 1,\ x = 3$

3) a) $x_1 = -1,\ x_2 = 3$ b) $x_1 = 1,\ -1 < x_2 < 0$ c) $x_1 = -1,\ 1 < x_2 < 2$ d) $0 < x < 1$ e) $-2 < x_1 < -1,\ 1 < x_2 < 2$

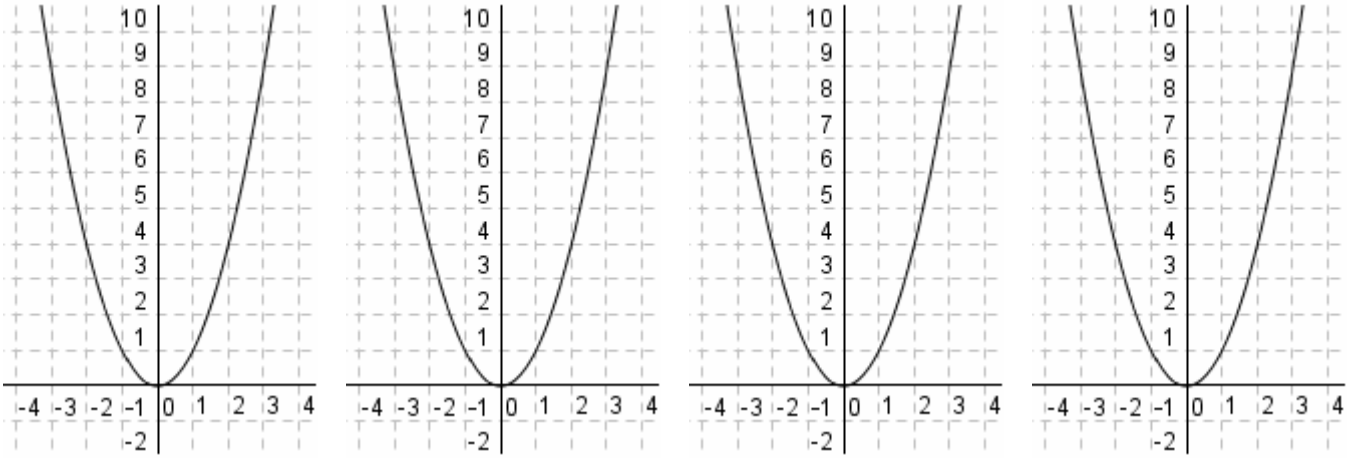
4) a) $x_1 = 1,\ x_2 = -4$ b) $2 < x < 3$ c) $-2 < x_1 < -1,\ 3 < x_2 < 4$ d) Impossibile e) $x = -1$ 5) Controllo algebricamente

**Altri ESERCIZI sulle risoluzioni grafiche**

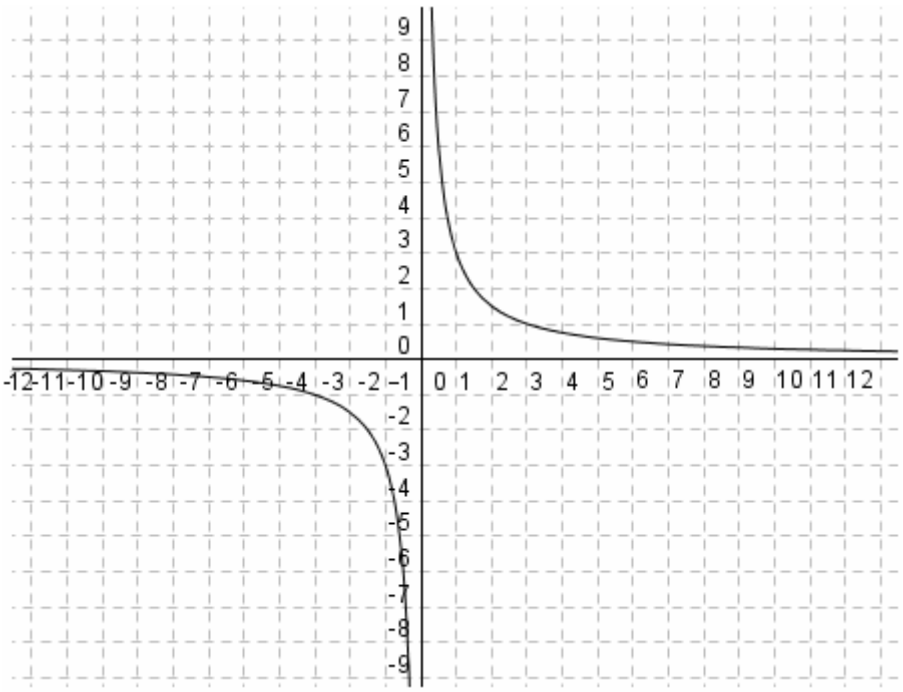
1) Non offenderti se trovi la domanda banale:
per stabilire se il valore $x=-5$ è soluzione dell'equazione $2x^2+7x-15=0$ occorre risolvere l'equazione?

2) I grafici della figura sottostante rappresentano tutti la funzione $y=x^2$. Utilizzali per risolvere graficamente le quattro equazioni proposte; verificherai che le loro soluzioni sono tutte intere.
Per ogni soluzione trovata, controlla che sia esatta sostituendola nell'equazione considerata.

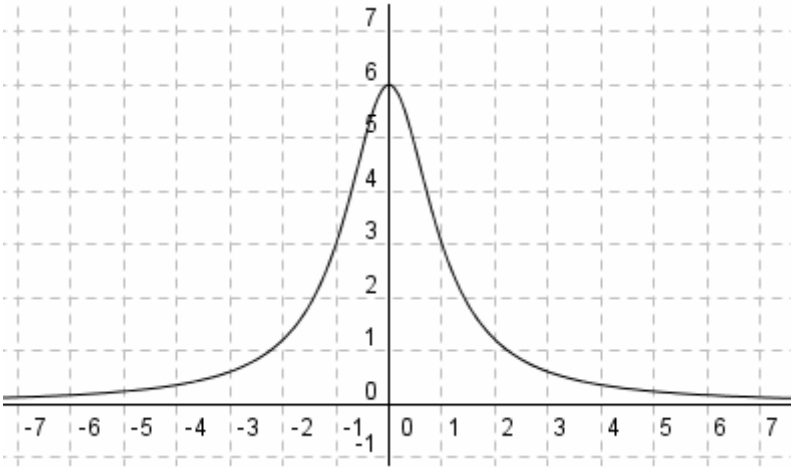
a) $x^2=2x$ b) $x^2=2-x$ c) $x^2=(x+2)^2$ d) $x^2=8-x^2$



3) In figura
è rappresentato
il grafico della funzione
$y=\frac{3}{x}$.
Servitene
per risolvere graficamente
l'equazione
$\frac{3}{x}=7-2x$
Vedrai che fra le soluzioni,
una è intera;
sostituiscila nell'equazione,
per controllare
che si ottiene
un'uguaglianza vera.



4) Nella figura
è rappresentato
il grafico della funzione
$y=\frac{6}{1+x^2}$.
Servitene
per risolvere graficamente
l'equazione
$\frac{6}{1+x^2}=x+4$.



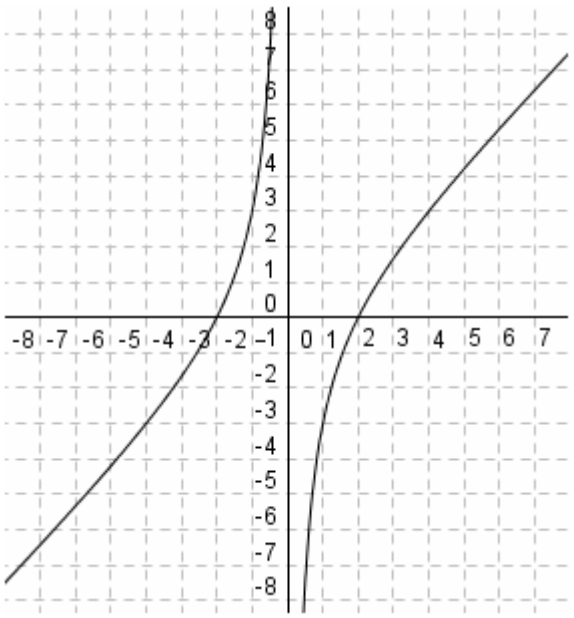
5) Nella figura a fianco è rappresentato il grafico della funzione

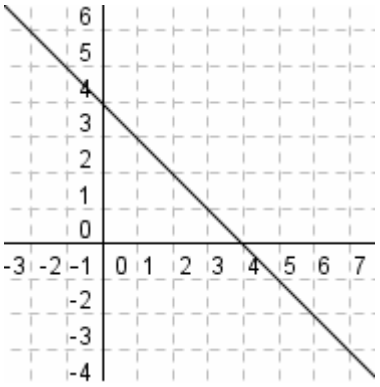
$$y=\frac{x^2-4}{x}.$$

- Qual è il dominio di tale funzione?
- Verifica che l'equazione

$$\frac{x^2-4}{x}=1+\frac{1}{2}x$$

ha due soluzioni intere. Sostituiscile nell'equazione per verificarne la correttezza.





6) Il grafico riporta la retta $y=4-x$.
Utilizzalo per risolvere graficamente il sistema

$$\begin{cases} y=4-x \\ x-5y+5=0 \end{cases}$$

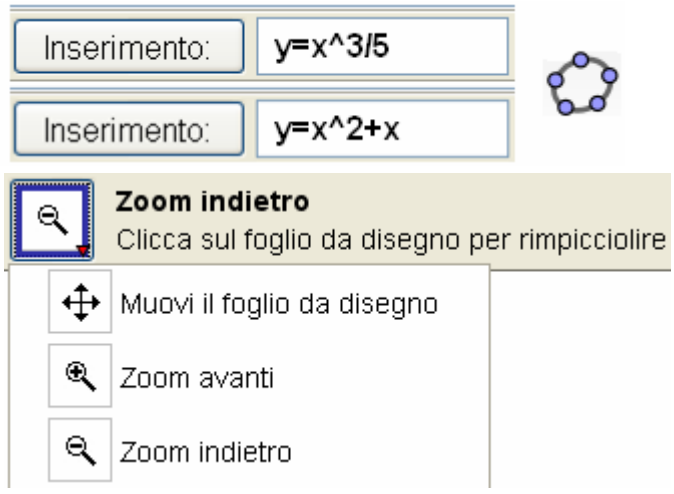
7) Nella figura qui a destra è rappresentato il grafico della funzione

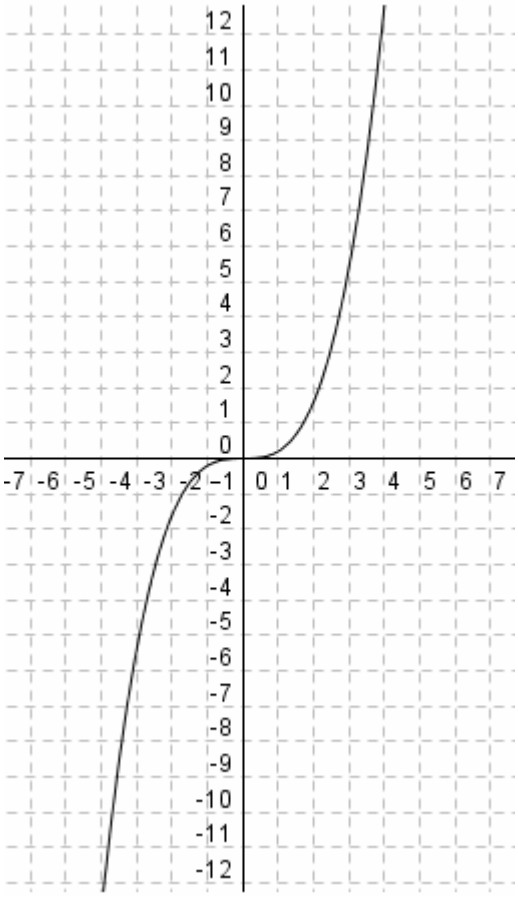
$$y=\frac{x^3}{5}.$$

- Servitene per risolvere graficamente l'equazione

$$\frac{x^3}{5}=x^2+x.$$

- Secondo te, oltre alle soluzioni che la figura può evidenziare, ce n'è anche un'altra?
- Controlla poi la risposta a quest'ultima domanda facendo la figura con GeoGebra e "zoomandola".



**RISPOSTE**

1) Nel modo più assoluto, NO! Basta sostituire quel valore al posto di $x$ nell'equazione, per controllare se l'uguaglianza così ottenuta è vera o falsa. Nel nostro caso, si vede che è vera, quindi $-5$ è soluzione.

2) a) $x=0,\ x=2$ b) $x=-2,\ x=1$ c) $x=-1$ d) $x=-2,\ x=2$

3) $0<x_1<1,\ x_2=3$ 4) $-4<x_1<-3,\ x_2=-1,\ 0<x_3<1$ 5) Il dominio è $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$. $x_1=-2,\ x_2=4$

6) Si trova una soluzione $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$, con $2<a<3,\ 1<b<2$. Risolvendo algebricamente si ottiene $\begin{cases} x=5/2 \\ y=3/2 \end{cases}$.

7) $-1<x_1<0,\ x_2=0$; senz'altro c'è poi una terza soluzione positiva! Infatti, al crescere di $x$, la quantità $y=\frac{x^3}{5}$ a un certo punto comincia a crescere più rapidamente della quantità $y=x^2+x$.

## CONFRONTARE COSTI E OPPORTUNITA'

A) Il **Circolo Anziani** del paese sta organizzando per i suoi iscritti una **gita al mare**. Il viaggio potrà essere effettuato in **autobus** oppure in **treno**: del tutto improponibile l'idea di una carovana di auto. Se si sceglie l'autobus, occorrerà pagare alla compagnia di trasporti un costo fisso di 240 € più 4 € per ogni viaggiatore (ovviamente, il totale della spesa verrà poi suddiviso a carico dei partecipanti); nel caso del treno, invece, ogni persona spenderebbe 10 euro.
*Quale sarà la scelta economicamente più vantaggiosa*?

… Si capisce che la risposta dipende dal numero di persone che andranno in gita!

Ragioniamo, allora. La soluzione "autobus" ha un costo totale *c*, in euro, dato dalla formula
$c = 240 + 4x$
dove *x* è il numero dei partecipanti. Per quanto riguarda la soluzione "treno" la formula è invece
$c = 10x$

Facciamo un grafico che illustri la situazione:
*x*, numero dei partecipanti, è la nostra variabile indipendente;
*c*, costo totale in euro, fa da variabile dipendente (insomma, *c* è la nostra "*y*").

Cerchiamo di capire, ancora prima di tracciarli, che "forma" avranno i grafici delle due funzioni

I) $c = 240 + 4x$
II) $c = 10x$

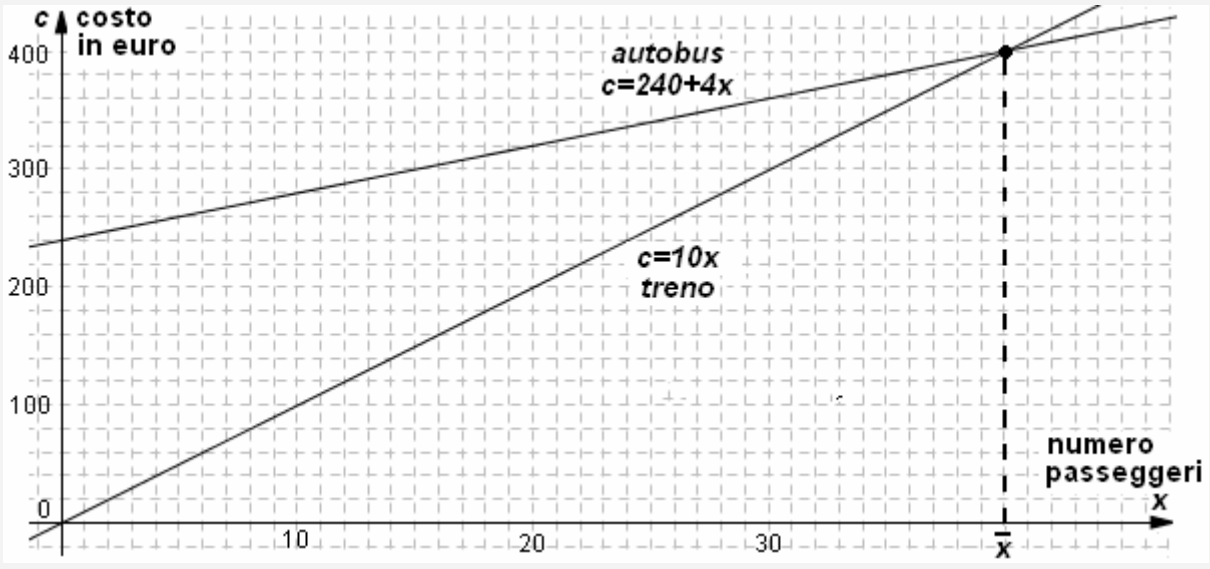
Si tratta di funzioni *di* 1° *grado* (sappiamo che esse vengon dette "*lineari*"), nel senso che a 2° membro *x* compare a 1° grado (= con esponente 1 sottinteso, non quindi al quadrato, o sotto radice, o a denominatore …) perciò il grafico in entrambi i casi sarà una *retta*.

Che caratteristiche avrà, nei due casi, questa retta?

Beh, per quanto riguarda la funzione I), ossia $c = 240 + 4x$, che possiamo pure riscrivere come
$c = 4x + 240$,
il moltiplicatore di *x* (che viene chiamato, come sappiamo, "coefficiente angolare") è 4,
e il termine noto ( = "ordinata all'origine", ossia ordinata che si ha quando l'ascissa vale 0) è 240.
Avremo quindi una retta in salita (salita perché il coeff. ang. è $> 0$ ) che passerà per il punto $(0, 240)$.

Nel caso della funzione II), ossia $c = 10x$, il coeff. angolare è più grande perché vale 10 e non più 4: bene, vuol dire che questa retta presenta una salita più ripida della precedente.
In compenso questa retta "si trova inizialmente più in basso",
perché l'ordinata all'origine è 0 da cui il passaggio per (0, 0) ossia per l'origine.

Ultima osservazione, prima di tracciare il grafico:
ci aspettiamo ordinate molto alte per cui non è per niente logico utilizzare un sistema di riferimento cartesiano "monometrico", cioè con una stessa unità di misura tanto in orizzontale che in verticale.
1 quadretto per indicare 20 € in verticale (e 1 quadretto per indicare 1 passeggero in orizzontale) sembra una scelta saggia. E allora, via col grafico!



Dall'osservazione del grafico emerge ciò che d'altronde si poteva già intuire …
La scelta del treno è economicamente conveniente se le persone sono poche;
oltre un certo numero $\bar{x}$ (leggi: "$x$ segnato") di persone, la retta $c = 240 + 4x$ passa al di sotto della retta $c = 10x$, quindi oltre un certo numero di persone il costo totale, dato dal valore di $c$ che corrisponde al numero $x$ di persone considerato, sarà più basso, sarà minore, per il viaggio in autobus.

Quanto vale $\bar{x}$? Potremmo metterci a contare il numero di quadretti che separano, in orizzontale, l'origine dal punto in cui le due rette si tagliano … e d'altra parte …

♥ **… il punto di intersezione delle due rette ha un'ascissa che si può determinare domandandosi per quale valore di *x* l'ordinata *y* su entrambe le rette è la medesima**, cioè impostando l'equazione

$$240 + 4x = 10x; \quad -6x = -240; \quad x = 40$$

Il problema è risolto: per 40 partecipanti, si spende la stessa cifra sia viaggiando in autobus che in treno, per meno di 40 conviene il treno, per più di 40 l'autobus.

**ESERCIZI (risposte a pag. 466)**

1) L'idraulico Giuseppe Tubi, per le riparazioni, si fa pagare 20 euro per la chiamata, più 30 euro per ogni ora di lavoro. Il suo concorrente Luigi Valvola, invece, richiede 30 euro per la chiamata, ma 26 euro all'ora soltanto per il lavoro.



Attraverso un grafico che porti in ascissa le ore di lavoro, e in ordinata la spesa, confronta le due tariffazioni e stabilisci
   a) quali sono le equazioni delle due rette presenti nel grafico
   b) per quante ore si spende la medesima cifra sia con Tubi che con Valvola
   c) quant'è la spesa in questo caso
   d) per quante ore di intervento si risparmia chiamando Valvola.

2) I tassisti di uno scalo aeroportuale hanno cambiato regolamento.
Se prima una corsa aveva un costo fisso di 5 euro, più 80 centesimi al kilometro, ora il costo fisso è stato ridotto a 3 €, ma in compenso ogni km percorso costa 20 centesimi più di prima. Fino a quanti km la nuova tariffazione è più conveniente? Traccia un grafico comparativo, che porti in ascissa i km di una corsa e in ordinata il rispettivo costo "prima" e "dopo" la modifica regolamentare.

3) Un'azienda necessita di un prestito (per 1 anno) e deve valutare le seguenti due proposte.
   - Banca A: costi assicurativi 1200 euro; interessi da pagare, il 4,5% sulla somma prestata
   - Banca B: 800 euro di costi assicurativi, interesse del 5% sulla somma prestata.

Ora, se sia più conveniente il piano A o il piano B, dipende dalla quantità di denaro richiesta …
Sapresti fare un'analisi comparativa con l'aiuto di un grafico?

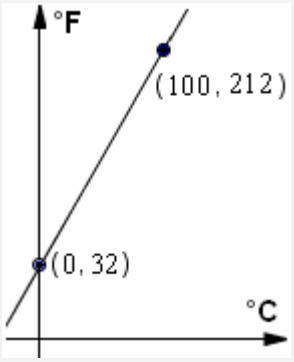
## COSTRUIRE E INVERTIRE FORMULE

B) Per misurare le **temperature**, in alternativa alla scala **Celsius**, è tuttora utilizzata (specie negli USA) un'altra scala detta **Fahrenheit**. La tabella qui a fianco illustra la connessione fra le due scale. →

Si domanda: qual è la **FORMULA** che fa passare da C a F?

| | °C | °F |
|---|---|---|
| Congelamento dell'acqua | 0 | 32 |
| Ebollizione dell'acqua | 100 | 212 |

Si può cercare di determinarla con metodi vari, fra i quali il seguente.
Se noi immaginiamo di rappresentare la relazione fra il valore in gradi Celsius e quello in gradi Fahrenheit di una stessa temperatura, potremmo disporre in ascissa i valori C e in ordinata quelli di F (figura).




**Ora, il grafico che otterremmo sarebbe senz'altro rettilineo**, perché **a incrementi uguali della temperatura misurata nella scala C devono evidentemente corrispondere incrementi uguali del valore in gradi F, e questo è compatibile soltanto con una forma rettilinea del grafico.**

Insomma, la relazione fra C e F dev'essere "lineare", ossia del tipo

$$F = mC + q.$$

Ma quanto valgono $m$ e $q$?
Ponendo le condizioni di appartenenza dei punti $(0, 32)$ e $(100, 212)$

otteniamo $\begin{cases} 32 = m \cdot 0 + q \\ 212 = m \cdot 100 + q \end{cases}$ da cui $m = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}$, $q = 32$. La formula cercata è dunque $\boxed{F = \frac{9}{5}C + 32}$.

… E se volessimo passare invece da F a C?

Basterà invertire la formula, ad esempio procedendo così: $F = \frac{9}{5}C + 32 \rightarrow \frac{9}{5}C = F - 32 \rightarrow \boxed{C = \frac{5}{9}(F - 32)}$

**ESERCIZI (risposte a pag. 466)**

4) Affittare un'auto per 1 giorno ha un costo dato da un importo fisso + una cifra per ogni km percorso. Se lunedì ho pagato 39 euro facendo 36 km e martedì 41,5 euro per 46 km, quant'è la tariffa fissa? E qual è la legge lineare che lega i km fatti al costo del noleggio?

5) Calogero, emigrato in un paese del Nord Europa, si è abituato a viaggiare preferibilmente in treno, data anche la puntualità e la pulizia dei trasporti ferroviari locali, nonché l'educazione degli utenti, cortesi e non chiassosi. In quanto alle tariffe, il nostro connazionale osserva che, a quanto pare, dovrebbero essere determinate partendo da una quota fissa a cui viene addizionata una parte proporzionale al numero di km del tragitto. La tabella a fianco mostra qualche esempio di tariffazione. In effetti, la congettura di Calogero è corretta. Quanto vale la tariffa fissa? Qual è la formula che dà il costo *c* del biglietto a partire dal numero *n* di km?

| km | costo in euro |
|---|---|
| 35 | 5,8 |
| 50 | 7 |
| 90 | 10,2 |
| 115 | 12,2 |
| 402 | 35,16 |

*Da "Algebra and Trigonometry", di Keedy-Bittinger-Smith-Orfan:*

6) The cost of a taxi ride for 2 miles in Eastridge is \$ 1.75. For 3 miles the cost is \$ 2.00.
   a) Fit a linear function to the data points
   b) Use the function to find the cost of a 7-mile ride.




7) The value of a copying machine is \$ 5200 when it is purchased. After 2 years its value is \$ 4225. Find its value after 8 years (assuming a linear function fits the situation).

8) Si può formulare, a partire dalla lunghezza di un osso, una stima precisa dell'altezza di un individuo. Ad es. si osserva che, per un maschio europeo, vale con ottima approssimazione la relazione *lineare*:

| Lunghezza L in cm della tibia | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Altezza H in cm dell'individuo | 169,05 | 171,47 | 173,89 | 176,31 | 178,73 | 181,15 | 183,57 |

   a) Si chiede di determinare la formula $H = f(L)$.
   b) Sapendo che per una *femmina africana* la relazione è $H = 2{,}45 \cdot L + 72{,}56$ stabilire qual è la lunghezza della tibia di una donna africana alta 170 cm.

9) Una vasca contiene 1000 litri d'acqua. Ma viene praticato in essa un foro dal quale fuoriescono 0,4 litri ogni secondo. Scrivi la formula che esprime il numero di litri presenti nella vasca dopo *t* secondi dall'apertura del foro. Inverti la formula, risolvendola rispetto a *t*. Quanti litri conterrà la vasca dopo un quarto d'ora? Quanti secondi devono passare affinché il contenuto della vasca dimezzi?

10) A quanti gradi Fahrenheit corrispondono 30 gradi Celsius? A quanti gradi C corrispondono 30 gradi F? Qual è quella temperatura che è espressa dallo stesso numero, sia che la si misuri in gradi Celsius che in gradi Fahrenheit?

11) In gergo bancario, si chiama "montante" la somma del capitale iniziale più l'interesse fino a quel momento maturato. Se indichiamo con:
$M$ il montante, $C$ il capitale iniziale, $i$ la percentuale di interesse, $t$ il tempo in frazioni di anno, la formula che lega queste quantità è
$$M = C(1 + i \cdot t)$$
Ad esempio, un capitale di 20000 euro ($C = 20000$), all'interesse del 5% ($i = 0{,}05$), depositato per 45 giorni ($t = 45/365$), produce un montante di euro 20123,29 ($M = 20123{,}29$).
   a) Risolvi la formula $M = C(1 + i \cdot t)$ rispetto a: $C$; $t$.
   b) Se il montante è di euro 11827,5 dopo 9 mesi di investimento e l'interesse è del 5%, qual era il capitale iniziale? (Supponiamo qui 1 mese = 1/12 di anno)
   c) Se in 3 mesi un capitale di 15000 € frutta un interesse di 67,5 euro, quant'è il tasso di interesse?

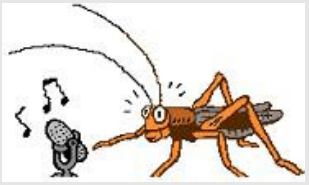
Da www.analyzemath.com:

12) The cost of producing *x* tools by a company is given by $C(x) = 1200x + 5500$ (in \$)
   a) What is the cost of 100 tools?
   b) What is the cost of 101 tools?
   c) Find the difference between the cost of 101 and 100 tools.
   d) Find the slope of the graph of C (*slope = pendenza, coefficiente angolare*)
   e) Interpret the slope.

## RICONOSCERE SE UN FENOMENO E' LINEARE

C) (spunto preso da "Algebra and Trigonometry", di Keedy-Bittinger-Smith-Orfan)

Si sa che i **grilli** friniscono più rapidamente quando la **temperatura** è più alta ("Crickets are known to chirp faster when the temperature is higher").



Ecco alcuni conteggi effettuati a temperature differenti:

| Temperatura in °C | 6 | 8 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| N° di "chirps" al minuto | 11 | 29 | 47 | 75 | 107 |

Si domanda:

a) La relazione temperatura-numero di "**chirp**" al minuto è "lineare"?

b) In quanti °C possiamo stimare la temperatura se osserviamo che i grilli friniscono 120 volte al minuto?

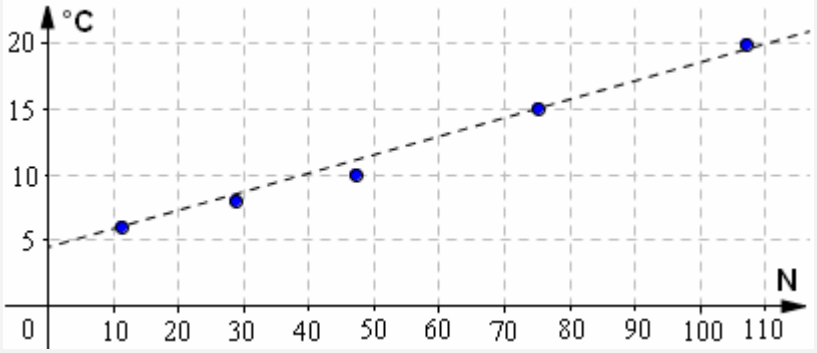
Se facciamo un grafico, vediamo che in effetti i punti sono, pressappoco, allineati.

La retta che passa per il 1° e il 4° dei 5 punti sembra approssimare abbastanza bene la relazione di N con °C.

Tale retta, che passa per (11, 6) e (75, 15), ha equazione (verificalo!)

$$y = \frac{9}{64}x + \frac{285}{64} \quad \left(°C = \frac{9}{64}N + \frac{285}{64}\right)$$

che per $N = 120$ ci dà circa 21,3 °C.




NOTA. - E' chiaro che la parte b) ha un senso perché il valore $N = 120$ è vicino a quegli altri; una richiesta simile per $N = 300$, ad esempio, avrebbe avuto ben poco significato, coi dati a disposizione.

**ESERCIZI (risposte a pag. 466)**

[*Per tracciare i grafici, potrebbe essere comodo servirsi di un foglio elettronico …*]

13) Una barra di ferro che a 20 °C misurava metri 1,5 si è allungata, col riscaldamento, come illustrato dalla tabella seguente.

| Temperatura T in °C | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Lunghezza L della barra in m | 1,5 | 1,500018 | 1,500036 | 1,500054 | 1,500072 | 1,500090 |

a) La dipendenza della lunghezza dalla temperatura è lineare?
Evidentemente, non è indispensabile fare un grafico, per rispondere …
… Cosa basta calcolare?

b) Trova la lunghezza che la barra avrebbe a 28 °C e a 18 °C (supposto che la legge che lega T a L non muti).

14) Record mondiali di salto in alto dal 1960 al 1993.
Domanda: la relazione anno-record può considerarsi lineare?

| 1960 | 1963 | 1970 | 1976 | 1980 | 1985 | 1989 | 1993 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 222 cm | 228 | 229 | 232 | 236 | 241 | 244 | 245 |

15) La velocità del suono nell'aria dipende dalla temperatura di questa.
La seguente tabella riassume i risultati di alcune misurazioni:

| Temperatura T in °C | –10 | –5 | 0 | +5 | +10 | +15 | +20 | +25 | +30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Velocità V del suono in m/s | 325,4 | 328,5 | 331,5 | 334,5 | 337,5 | 340,5 | 343,4 | 346,3 | 349,2 |

Domanda:
in base a questi dati, la dipendenza della velocità dalla temperatura si può considerare lineare?

16) Misurando lunghezza e larghezza alcune di foglie staccate da una medesima pianta, si sono raccolti i dati seguenti:

| Lunghezza (cm) | 0,9 | 1,2 | 1,6 | 2,1 | 2,5 | 2,9 | 3,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Larghezza (cm) | 0,2 | 0,4 | 0,7 | 1,1 | 1,5 | 2,1 | 3,2 |

La relazione fra lunghezza e larghezza è lineare?

## MOTI UNIFORMI

D) Un **ascensore** è in fase di **discesa**, a **velocità costante**, in un alto grattacielo.
Se all'istante 0 si trova all'altezza di 75 m dal piano terra e all'istante 8 secondi all'altezza 63 m, determina la legge del moto ossia la formula che mette in relazione l'altezza $h$ col tempo $t$.

Allora … quando la velocità è costante, in tempi uguali vengono percorsi spazi uguali …
e se raddoppia il tempo di percorrenza, raddoppia anche lo spazio percorso …
Insomma, la differenza dei tempi segnati dal cronometro
è proporzionale alla differenza degli spazi percorsi in questi tempi: $s_2 - s_1 = k(t_2 - t_1)$.

La costante di proporzionalità $k$ fra tempi e spazi è dunque tale che $k = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

e non è altro che la velocità $v$ del moto (spazio percorso/tempo impiegato a percorrerlo).

Indichiamo con $s_0$ la posizione iniziale, quella che si ha all'istante $t_0$ in cui
pensiamo di far scattare il cronometro, e con $s$ la posizione al generico istante $t$:
allora la relazione $s_2 - s_1 = v(t_2 - t_1)$ diventa $s - s_0 = v(t - t_0)$ quindi $s = s_0 + v(t - t_0)$.

Perciò un moto uniforme ( = a velocità costante) è sempre esprimibile tramite una legge della forma $s = s_0 + v(t - t_0)$, con $s_0$ posizione all'istante iniziale $t_0$, $s$ la posizione al generico istante $t$.
Si tratta di una relazione lineare ( = di 1° grado), il cui grafico in un sistema di riferimento $(t, s)$ è una retta.

Se poi supponiamo $t_0 = 0$ ( = facciamo scattare il cronometro all'istante in cui il movimento ha inizio, o almeno ha inizio la sua osservazione), la relazione diventa $s = s_0 + vt$, che è poi la forma più utilizzata.
Osserviamo che nella retta $s = s_0 + vt$, la velocità $v$ fa da coefficiente angolare.

**Un moto uniforme ( = a velocità costante) ha equazione della forma $s = s_0 + vt$**
**dove $v$ (coefficiente angolare) è la velocità costante, $s_0$ è la posizione all'istante $t = 0$.**
**I moti a velocità costante hanno quindi un'equazione "lineare" $y = ax + b$,**
**il cui grafico è una retta che ha come coefficiente angolare la velocità del moto.**

E ritorniamo ora al nostro bravo ascensore.
La legge del moto richiesta sarà della forma $s = s_0 + vt$, dove restano da determinare i valori di $v$ e di $s_0$.
$s_0$ è subito determinato perché sappiamo che è la posizione dell'oggetto che si muove, all'istante $t = 0$,
e nel nostro caso il testo del problema ci dice che è $s_0 = 75$.
$v$ può essere determinata facendo il calcolo $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{63 - 75}{8 - 0} = \dfrac{-12}{8} = -1{,}5$ da cui: $s = 75 - 1{,}5t$
Anche: $s = s_0 + vt$ con $s_0 = 75$, quindi $s = 75 + vt$; ma con $t = 8$ è $s = 63$, quindi $63 = 75 + 8v \rightarrow v = -1{,}5$

**ESERCIZI (risposte a pag. 466-467)**



17) Si va al mare con tutta la famiglia, a velocità costante, senza soste.
Dopo 45' siamo al km 75 della lunga strada statale, dopo 80' siamo al km 124.
E all'inizio del viaggio, in quale posizione ci trovavamo sulla statale?

18) Una formica si muove lungo una *number line* a velocità costante.
Se dopo 7 secondi si trova in corrispondenza del punto di ascissa 0,6 e dopo 11 sec. sull'ascissa 7,8 determina la legge del moto ( = la relazione che lega l'ascissa $x$ al tempo $t$), e la velocità dello stesso.
Dove si trovava la formichina all'istante 0? A che istante avviene l'attraversamento dell'origine?

19) Un podista si allena lungo una strada rettilinea; dopo 3' dalla partenza ha percorso 780 m.
La tabella ne mostra la distanza, dal punto di partenza, al variare del tempo.

| min | metri |
|---|---|
| 3 | 780 |
| 4 | 1050 |
| 5 | 1300 |
| 6 | 1560 |
| 7 | 1820 |
| 8 | 2080 |
| 9 | 2350 |
| 10 | 2610 |

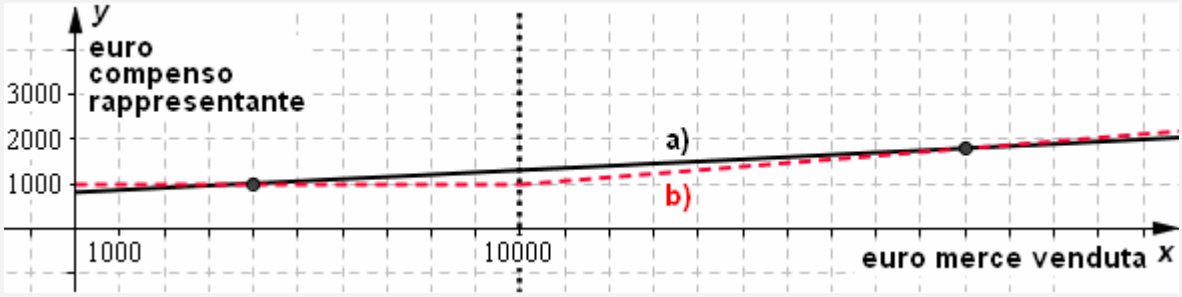
a) Il moto può considerarsi uniforme?
b) Se ti domando a che distanza si presume si possa trovare l'atleta, dal punto di partenza, quando il cronometro segnerà 18 minuti, sapresti indicare due modi diversi per trovare la risposta corretta?
c) A quale quantità corrisponde il coeff. angolare della retta che, approssimativamente, costituisce il diagramma tempo - spazio in un riferimento cartesiano?

20) Aldo e Bruno giocano alle Olimpiadi, e la prossima gara sarà sui 100 metri piani.
Ora Aldo, essendo velocissimo, nella sfida con Bruno gli concede un doppio vantaggio:
Bruno partirà 5 metri avanti, e 1 secondo prima.
Sapendo che Aldo è in grado di sviluppare una velocità media di 8 metri al secondo, e Bruno di 7 m/s, traccia un diagramma che dia le posizioni dei due istante per istante, scrivi le equazioni tempo-spazio dei due moti, e stabilisci chi, in base ai dati forniti, dovrebbe vincere la gara.

## FUNZIONI LINEARI DEFINITE "A TRATTI" O "PER INTERVALLI"

E) Una ditta offre a un **rappresentante** di commercio **due possibilità di remunerazione mensile**:
a) un fisso di 800 euro, più il 5% sui ricavi delle vendite;
b) un fisso di 1000 euro, più l'8% sulle sole vendite a partire da 10000 euro in su.

Traccia un **diagramma** a partire dal quale egli possa scegliere **quale proposta gli conviene di più**, in base all'ammontare delle vendite che egli ipotizza di poter mediamente realizzare.




Sia in ascissa che in ordinata, 1 quadretto rappresenta 1000 euro.
In ascissa, si tratta di "euro $x$ di merce venduta", in ordinata, di "euro $y$ guadagnati dal rappresentante".

La linea continua rappresenta la proposta a): $y = 800 + \frac{5}{100}x$;

la tratteggiata rappresenta la b): $y = 1000$ *per* $0 \le x \le 10000$, $y = 1000 + \frac{8}{100}(x - 10000)$ *per* $x \ge 10000$

Si può osservare che la proposta a) è economicamente più vantaggiosa, per il rappresentante, se egli ritiene di poter "piazzare" di norma, ogni mese, da 4000 a 20000 euro di merce.
Se invece il nostro rappresentante pensa di essere in grado, quasi sempre, di vendere in un mese più di 20000 € di merce, diventa per lui più conveniente la proposta b).

**ESERCIZI (risposte a pag. 467)**

21) (*di "riscaldamento"*)

Traccia il grafico della funzione": $y = f(x) = \begin{cases} x+1 & se \;\; 0 \le x < 2 \\ 3 & se \;\; 2 < x \le 4 \\ x-1 & se \;\; 4 \le x < 5 \\ 24-4x & se \;\; 5 \le x \le 6 \end{cases}$ e risolvi l'equazione $f(x) = 2$

22) Una stamperia realizza dei biglietti da visita su cartoncino, ad un prezzo che dipende dal numero $x$ di biglietti che si desiderano richiedere, secondo la formula seguente, dove $p$ è espresso in euro:

$$p = \begin{cases} 10 + 0{,}05x \;\; con \; x \le 200 \\ 20 + 0{,}04(x - 200) \;\; con \; 200 < x < 500 \\ 32 + 0{,}03(x - 500) \;\; con \; x \ge 500 \end{cases}$$

a) Traccia il grafico di questa funzione
b) Determina quanti biglietti si possono stampare spendendo 50 euro

23) Una casa per le vacanze può essere affittata a 40 euro al giorno, oppure, in alternativa, a 50 euro per ciascuno dei primi 10 giorni e 35 euro per ciascuno dei giorni successivi al decimo.

Le espressioni algebriche delle due offerte sono: (1) $p = 40x$; (2) $p = \begin{cases} 50x \;\; con \; x \le 10 \\ \ldots + 35 \cdot (\ldots) \;\; con \; x > 10 \end{cases}$

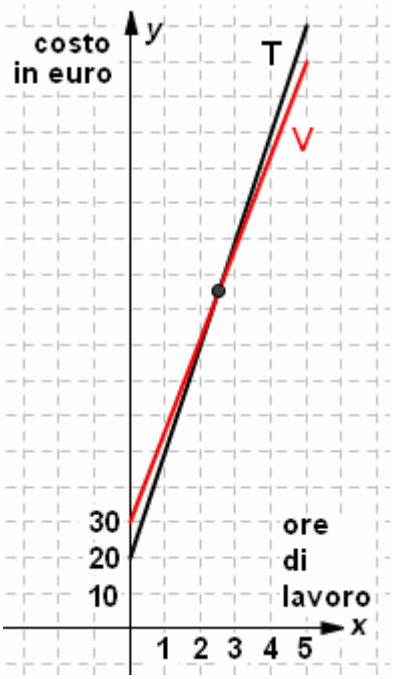
a) Riempi i puntini
b) rappresenta graficamente le due offerte
c) stabilisci oltre quanti giorni conviene optare per la seconda.

24) In una nazione, la tassa sugli impianti balneari nelle spiagge ha subito una modifica. Fino all'anno scorso, la legge prevedeva che si pagasse il 30% su guadagni fino a 15000 euro, e il 40% sulla parte di guadagno eccedente; la nuova normativa stabilisce invece di pagare il 35% indipendentemente dal guadagno. Come al solito, queste riforme favoriscono sempre i gestori più fortunati!!! Perché? Rappresenta graficamente e confronta analiticamente il vecchio regime ed il nuovo; scrivi anche l'espressione algebrica della tassa $y$ in funzione del guadagno $x$, col vecchio regolamento e con l'attuale.



**RISPOSTE**

1)




In orizzontale: 1 quadretto = 1 ora
In verticale: 1 quadretto = 10 euro

a) Le equazioni delle due rette sono:

T $y = 20 + 30x$
V $y = 30 + 26x$

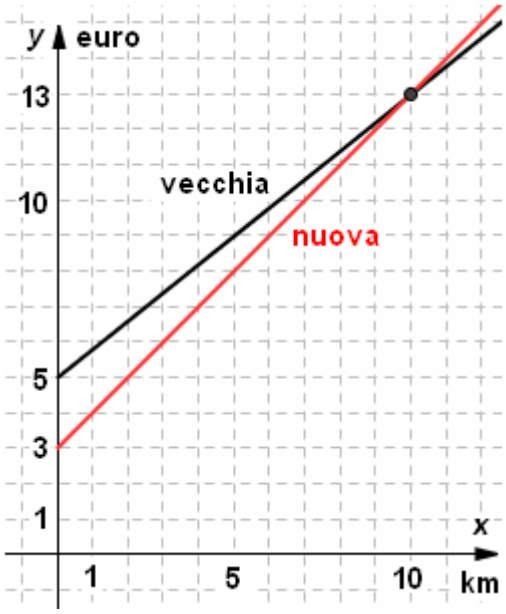
($x$ numero delle ore dell'intervento, $y$ costo in euro)

b) L'equazione $20 + 30x = 30 + 26x$ ha come soluzione $x = 2{,}5$.
Quindi si spende la stessa cifra se la riparazione richiede 2 ore e ½.

c) In questo caso, la spesa è di
$[20 + 30x]_{x=2{,}5} = [30 + 26x]_{x=2{,}5} = 95$ euro

d) Con Valvola si risparmia se la durata dell'intervento è superiore alle 2 h e ½; in questo caso, infatti, la retta che rappresenta il costo dell'intervento di Valvola passa al di sotto dell'altra, quella che descrive il costo relativo a Tubi, quindi l'ordinata $y$ (cifra da pagare) diventa minore per Valvola rispetto a Tubi.

2)




Le due rette hanno equazioni:
$y = 5 + 0{,}80x$, $y = 3 + x$
L'equazione $5 + 0{,}80x = 3 + x$
ha per soluzione $x = 10$.
La nuova tariffazione è più conveniente al di sotto dei 10 km.

3) Le equazioni delle due rette sono
$y = 1200 + \frac{4{,}5}{100}x$ e $y = 800 + \frac{5}{100}x$.
Il piano A è più conveniente se la somma finanziata è superiore a 80000 euro.

4) Legge "lineare" vuol dire legge della forma
$y = mx + q$ o $y = ax + b$
dove in questo caso i coefficienti (supponiamo di indicarli con $a$, $b$) sono da determinare.
Sappiamo che con $x = 36$ (36 km) si ha $y = 39$ (39 €) e con $x = 46$ si ha $y = 41{,}5$ e perciò varranno simultaneamente le due uguaglianze $\begin{cases} a \cdot 36 + b = 39 \\ a \cdot 46 + b = 41{,}5 \end{cases}$
Risolvendo il sistema si trova $a = 0{,}25$ e $b = 30$.
La tariffa fissa è perciò di 30 euro.
La legge lineare è $y = 0{,}25x + 30$ ossia
*costo noleggio* $= 30$ *euro* $+ 0{,}25$ *euro* $\cdot$ *n° km*

5) Tariffa fissa = 3 euro. Formula: $c = 0{,}08n + 3$
6) a) $c = 0.25m + 1.25$ b) \$ 3.00 7) \$ 1300
8) a) $H = 2{,}42 \cdot L + 81{,}93$ b) *circa* 39,8 cm
9) $n = 1000 - 0{,}4t$. $t = (1000 - n)/0{,}4$. 640. 1250.
10) 86 °F. −1,111... °C. $-40$°C $\leftrightarrow -40$°F
11) $C = M/(1+it)$. $t = (M - C)/(Ci)$. 11400 €. L'1,8%.
12) a) 125500 \$ b) 126700 \$ c) 1200 \$ d) 1200 e) Il coeff. angolare, o "pendenza", o "slope", è uguale a $\Delta y / \Delta x$ ed equivale anche all'incremento della $y$ che si ha quando la $x$ aumenta di 1 unità
13a) Sì, per lo meno nell'ambito dei valori di temperatura considerati. Essendo gli incrementi di T tutti uguali, basterà controllare che siano uguali anche tutti gli incrementi di L. E in effetti, è sempre $\Delta L = 0{,}000018$.
13b) L = 1,500144; L = 1,499964
14) No
15) Sì, si può considerare con buona approssimazione lineare, almeno nel campo dei valori di T considerati.
16) Non si direbbe lineare. Sembra piuttosto che, crescendo, la foglia tenda ad essere meno "slanciata".
17) Al km 12 18) $x = 1{,}8t - 12$. $v = 1{,}8$. Con $t = 0$ è $x = -12$. Si ha $x = 0$ per $t = 6 + 2/3$.
19a) Se andiamo a tracciare, a matita o con un foglio elettronico, il diagramma tempo-spazio corrispondente, vediamo che i punti si trovano pressappoco sulla stessa retta (pressappoco, perché c'è qualche irregolarità). Il moto si può considerare approssimativamente uniforme (cioè, a velocità costante), perché in tempi uguali gli spazi percorsi sono approssimativamente uguali.

19b) A questa domanda si può rispondere perlomeno in due modi.
La tabella sottostante mostra i metri percorsi dal minuto 3 al minuto 4, dal 4 al 5, ecc.

| dal 3 al 4 | dal 4 al 5 | dal 5 al 6 | dal 6 al 7 | dal 7 all'8 | dall'8 al 9 | dal 9 al 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 270 | 250 | 260 | 260 | 260 | 270 | 260 |

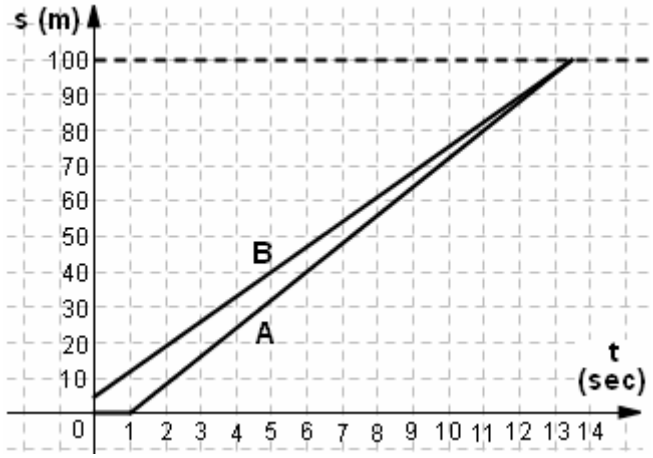
Vediamo che ogni minuto vengono percorsi circa 260 metri,
quindi ci possiamo aspettare che dal minuto 10 al minuto 18 vengano percorsi $\approx 260 \cdot 8 = 2080$ m.
Allo scoccare del minuto 18 sul cronometro, la distanza totale percorsa dovrebbe aggirarsi intorno a metri $2610 + 2080 = 4690$.
Per rispondere potremmo anche tracciare il diagramma del moto,
ad es. con un foglio elettronico, poi immaginare di prolungare la nostra "pseudo-retta" fino all'ascissa 18.
In questo modo avremmo una valutazione approssimativa dell'ordinata corrispondente.

Oppure … potremmo fare di meglio.

La nostra "quasi-retta" passa per l'origine, quindi ha equazione della orma $y = mx$.
Una buona valutazione della sua inclinazione *m* si avrà facendo il rapporto fra l'ordinata
e l'ascissa del punto noto più lontano dall'origine, ossia quello di coordinate (10, 2610).
E' perciò $m = 2610/10 = 261$, e se dobbiamo scegliere un'equazione per la nostra "quasi-retta",
è logico che tale scelta cada sul'equazione $s = 261t$. E con $t = 18$ si ottiene $s = 261 \cdot 18 = 4698$

19c) Ricordando anche la nota relazione $m = \Delta y / \Delta x = \Delta s / \Delta t$, possiamo dire che il coefficiente angolare in questione rappresenta la velocità, approssimativamente costante, del moto.

20)




Il tempo, in orizzontale, parte
dall'istante $t = 0$ in cui scatta Bruno;
Aldo comincerà la sua corsa all'istante $t = 1$.
Da grafico non si capisce bene chi,
coi dati del problema, è destinato a vincere:
dobbiamo ricorrere al calcolo.
Moto di Aldo: $s = 8(t-1)$, a partire dall'istante 1.
Moto di Bruno: $s = 7t + 5$
Poniamo $s = 100$ e avremo:
per Aldo, $t = 108/8 = 13{,}5$;
per Bruno, $t = 95/7 = 13{,}57...$
Coi dati forniti dal problema, vince Aldo.
E' chiaro che il problemino è "addomesticato":
sembra quasi che i due possano portarsi
alla velocità massima *istantaneamente* … ☺

21)



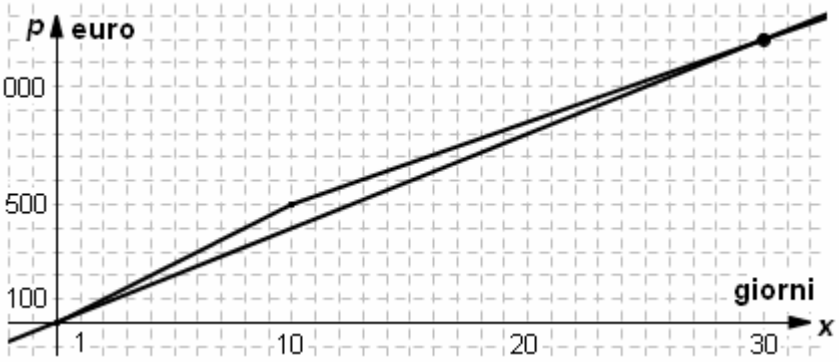

$f(x) = 2$
Si vede dal grafico
che l'ordinata 2
viene assunta
nel 1° intervallo e nel 4°
$x + 1 = 2 \rightarrow x = 1$
$24 - 4x = 2 \rightarrow x = 11/2$

22)
I tre segmentini "si tengono per mano":
il 2° estremo del 1° è il 1° estremo del 2°,
e il 2° estremo del 2° è il 1° estremo del 3°.
Si capisce che occorre far riferimento
all'espressione valida per $x \geq 500$: quindi
$50 = 32 + 0{,}03(x - 500)$ da cui $x = 1100$.

23) Prima offerta:
$p = 40x$
Seconda offerta:

$$p = \begin{cases} 50x \ \ con\ x \leq 10 \\ 50 \cdot 10 + 35 \cdot (x-10) \ \ con\ x > 10 \end{cases}$$

La seconda offerta
è conveniente
oltre i 30 giorni di affitto.




24) Vecchia normativa: $y = \begin{cases} 0{,}30x \ \ con\ x \leq 15000 \\ 0{,}30 \cdot 15000 + 0{,}40(x - 15000) \ \ con\ x > 15000 \end{cases}$

Nuova normativa: $y = 0{,}35x$.

Oltre i 30000 euro, è favorevole la nuova normativa, che quindi fa risparmiare chi guadagna di più,
come è "classico" in questo mondo dove i privilegiati, nel distribuire ingiustizia, la spacciano per "legalità".

# RELAZIONI E FUNZIONI

## 1. PRODOTTO CARTESIANO DI DUE INSIEMI

Si dice "**prodotto cartesiano**" di due insiemi A e B,
l'insieme $A \times B$ (leggi: "A cartesiano B") formato da tutte le **coppie ordinate**
aventi come *primo elemento* un elemento di A, e come *secondo elemento* un elemento di B.

In simboli: $A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$

**ESEMPIO**

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{s, t\}$,
allora $A \times B = \{(1, s); (1, t); (2, s); (2, t); (3, s); (3, t)\}$

| | $s$ | $t$ |
|---|---|---|
| 1 | (1, $s$) | (1, $t$) |
| 2 | (2, $s$) | (2, $t$) |
| 3 | (3, $s$) | (3, $t$) |

**IM-POR-TAN-TE**

**Le GRAFFE indicano "INSIEME",**
es. $B = \{s, t\}$ (NON CONTA L'ORDINE);
**le TONDE indicano invece "COPPIA ORDINATA"**,
es. $(1, s)$ (PRIMA 1 e POI $s$)

**ALTRI ESEMPI**

- Detto S l'insieme delle *squadre* di calcio di un dato campionato nel quale ogni squadra incontra tutte le altre e si ha un girone di *andata* + un girone di *ritorno*, l'insieme P di tutte le *partite* del campionato coincide sostanzialmente con
  $S \times S$, PRIVATO PERO' delle coppie del tipo $(x, x)$,
  voglio dire: tolte le coppie in cui il primo elemento coincida col secondo
  (una squadra non gioca contro sé stessa).
- Detto F l'insieme delle alunne di una classe femminile, se si devono eleggere una *miss* e una *rappresentante di classe*, e le due cariche sono *compatibili*, l'insieme dei possibili esiti di questa elezione è $F \times F$.
- Ancora: ogni punto del piano cartesiano è individuato dalla coppia ordinata delle sue coordinate. Ciò stabilisce una corrispondenza biunivoca fra il piano cartesiano, visto come l'insieme dei suoi punti, e l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i cui elementi sono le *coppie ordinate* di numeri reali.

## 2. RELAZIONI

Nel linguaggio di tutti i giorni, la parola RELAZIONE è usata in contesti molto diversi.
Tuttavia, il suo significato è sempre quello di "legame, collegamento".
Esempi:

a) " La parsimonia di quell'uomo è in RELAZIONE con la sua povertà "
b) " C'è una RELAZIONE fra il giardiniere e la padrona di casa "
c) " La camorra napoletana è in RELAZIONE con la malavita cinese "

In Matematica, la parola "relazione" è particolarmente importante
quando viene impiegata per indicare un "**COLLEGAMENTO FRA DUE INSIEMI**".

**ESEMPIO 1**

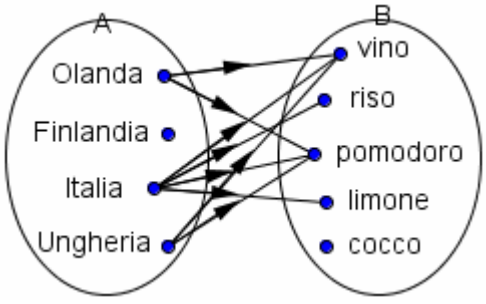
Consideriamo i due insiemi seguenti:

A = {Olanda, Finlandia, Italia, Ungheria}
B = {vino, riso, pomodoro, limone, cocco}

Il primo è un insieme di nazioni europee,
il secondo è un insieme di beni dell'agricoltura.

Esiste una RELAZIONE fra i due insiemi,
nel senso che alcune fra le nazioni di A
sono produttrici di alcuni fra i prodotti di B.

Tale relazione è illustrata
dal diagramma riportato qui a fianco.

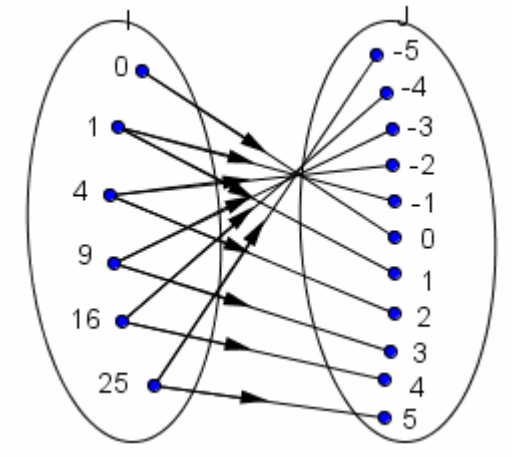


**ESEMPIO 2**

$I = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$

$J = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Fra i due insiemi I, J
esiste una RELAZIONE,
in quanto gli elementi di I
sono i quadrati degli elementi di J:
vedi la figura qui a fianco
per una rappresentazione
di questa relazione fra I e J.

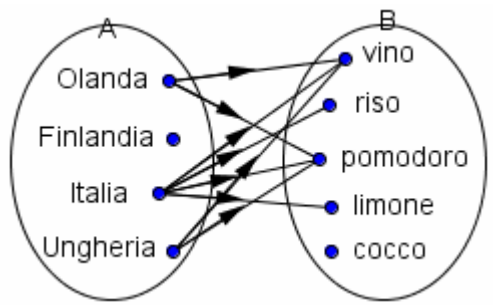



Collegare gli elementi di due insiemi, stabilire fra di essi una corrispondenza, un legame,
e saper riconoscere le proprietà di questo legame, è di estrema importanza in Matematica.
Per questo,

**i matematici hanno riservato estrema attenzione al concetto di "relazione"**
**intesa come "collegamento tra due insiemi",**
**stabilendo alcune definizioni ed un preciso gergo tecnico,**
**al giorno d'oggi indispensabili per chiunque intenda occuparsi di questioni matematico-logiche.**

Riprendiamo il primo dei due esempi dai quali eravamo partiti.

Fra l'insieme
A = {Olanda, Finlandia, Italia, Ungheria}
e l'insieme
B = {vino, riso, pomodoro, limone, cocco}
abbiamo considerato la relazione definita dal **predicato**
" ... è nazione produttrice di ... " ,
ed illustrata dal **diagramma a frecce** qui a fianco:




In definitiva, tale relazione stabilisce un INSIEME DI COPPIE, sottoinsieme di $A \times B$:

{ (Olanda, vino); (Olanda, pomodoro);
(Italia, vino); (Italia, riso); (Italia, pomodoro); (Italia, limone);
(Ungheria, vino); (Ungheria, pomodoro) }

Questa osservazione ci porta a formulare la definizione generale seguente:

**Si dice RELAZIONE fra due insiemi A, B**
**un legame fra gli elementi di A e gli elementi di B,**
**che è espresso da un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ .**

Detta R una relazione,
per indicare che a (elemento dell'insieme A) è in relazione con b (elemento dell'insieme B)
si usa, indifferentemente, una delle due scritture

- **a R b** ("notazione infissa")
- **R(a, b)** ("notazione prefissa")

**ESEMPI**

1) Andando a riprendere la relazione
R = " ... è nazione produttrice di ..."
fra gli insiemi A, B precedentemente considerati,
possiamo scrivere:
   - Italia R pomodoro
   - R (Italia, pomodoro)

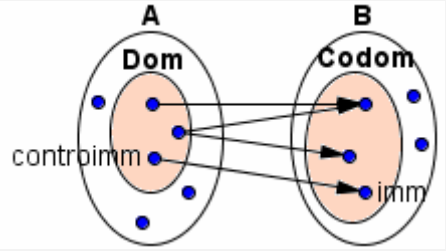
2) Con riferimento alla relazione
Q = "... è quadrato di ..."
(relazione fra I, J dell'esempio 2), abbiamo:
9 Q 3  9 Q −3  Q(16, 4)  $\overline{Q}$(1, 0)
(la soprallineatura ha il significato di *negazione*)

**Data una relazione R** fra un insieme A ed un insieme B
(si preferisce dire, anche per mettere in risalto l'ordine: "**di**" **un insieme A** "**verso**" **un insieme B**),

- **A** si dice "**INSIEME DI PARTENZA**" e **B** si dice "**INSIEME DI ARRIVO**";
- **il sottoinsieme di A costituito da quegli elementi di A, che sono in relazione R con almeno un elemento di B, si dice "DOMINIO" di R** (in pratica, il *dominio* di una relazione R di A verso B è **il sottoinsieme di A formato dagli elementi da cui parte almeno una freccia**);
- **invece, si dice "CODOMINIO" di R il sottoinsieme di B costituito da quegli elementi di B ai quali arriva almeno una freccia**.
- **Se a R b, allora b si dice "IMMAGINE" di a, mentre a si dice "CONTROIMMAGINE" di b.**

Dunque

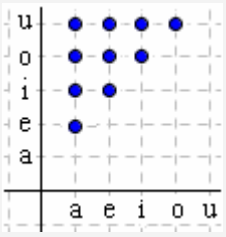
- **il DOMINIO di R è l'insieme degli elementi dell'insieme di partenza A, che hanno almeno una immagine;**
- **e il CODOMINIO di R è l'insieme degli elementi dell'insieme di arrivo B, che hanno almeno una controimmagine.**




Nel nostro Esempio 1 (nazioni e prodotti dell'agricoltura), il dominio della relazione è D = {Olanda, Italia, Ungheria}; il codominio è C = {vino, riso, pomodoro, limone}.
L' Ungheria ha due "immagini": il vino e il pomodoro. L'unica "controimmagine" del riso è l'Italia.

Ecco un modo efficace di rappresentare una relazione. →
In un riferimento cartesiano, si elencano sull'asse orizzontale gli elementi dell'insieme di partenza X, e su quello verticale gli elementi dell'insieme di arrivo Y; nel caso sia $x$ R $y$, si evidenzia poi con un tondino il punto di intersezione fra la retta verticale per $x$ e la retta orizzontale per $y$.
Nella fattispecie, la relazione indicata in figura è:
"la vocale $x$ precede la vocale $y$ in ordine alfabetico".
In questo esempio gli insiemi di partenza e di arrivo coincidono: la relazione si dice "interna ad un insieme" (vedi par. successivo).

Rappresentazione cartesiana



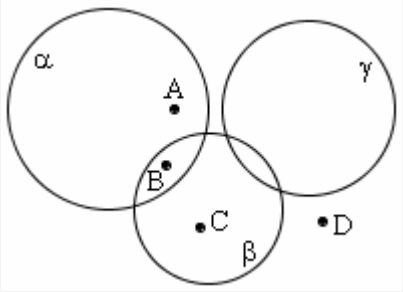

Alternativa: tabella a doppia entrata

| 1 \ 2 | a | e | i | o | u |
|---|---|---|---|---|---|
| a | | ● | ● | ● | ● |
| e | | | ● | ● | ● |
| i | | | | ● | ● |
| o | | | | | ● |
| u | | | | | |

**ESERCIZI** (risposte alla pagina successiva)

1) Dati i due insiemi X = {2, 3, 4, 5, 6} e Y = {7, 8, 9, 10, 11} e la seguente relazione di X verso Y:
R = "... è divisore di ..."
   a) disegna il diagramma a frecce e anche il diagramma cartesiano della relazione; determina dominio e codominio di questa;
   b) fra le seguenti affermazioni, distingui le vere dalle false:
   I) 2 R 7 II) R(2, 8) III) R(8,2) IV) 3 non ha immagini V) 11 non ha controimmagini

2) La figura qui riportata mostra quattro punti A, B, C, D e tre circonferenze $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.
Posto X = {A, B, C, D}, Y = {$\alpha$, $\beta$, $\gamma$},
scrivi gli elementi del sottoinsieme di $X \times Y$ che esprime la relazione: "il punto $x$ è interno alla circonferenza $y$".
Determina dominio e codominio della relazione.
Rappresentazione cartesiana e col diagramma a frecce.




3) Sempre con riferimento alla figura qui a destra,
scrivi gli elementi del sottoinsieme di $Y \times Y$ che esprime la relazione: " la circonferenza $y$ interseca in due punti la circonferenza $y'$ ".
Determina dominio e codominio della relazione.
Rappresentazione cartesiana e col diagramma a frecce.

4) L = {33,34,35}, N = {36,37,38,39}. Scrivi gli elementi del sottoinsieme di $L \times N$ che esprime la relazione: "Il prodotto di $x \in L$ per $y \in N$ è un multiplo di 3" e rappresenta la relazione sia con un diagramma a frecce, che con un riferimento cartesiano. Determina infine dominio e codominio della relazione.

5) Se ti chiedono quante sono le possibili relazioni di A in B (cioè: aventi come insieme di partenza A e come insieme di arrivo B) nel caso A abbia 3 elementi e B ne abbia 5, tu cosa rispondi?
[*Una relazione coincide sostanzialmente con un sottoinsieme del prodotto cartesiano* $A \times B$;
*ma se* A *ha* 3 *elementi e* B 5, *allora* $A \times B$ *ha … elementi, quindi i suoi sottoinsiemi sono in numero di …*]

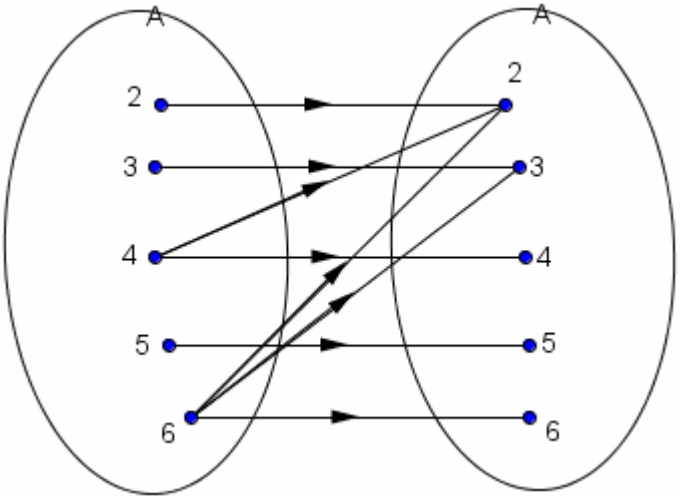
## RELAZIONI INTERNE AD UN INSIEME

Se insieme di partenza e insieme di arrivo coincidono, si parlerà di "relazione **interna** ad un insieme".

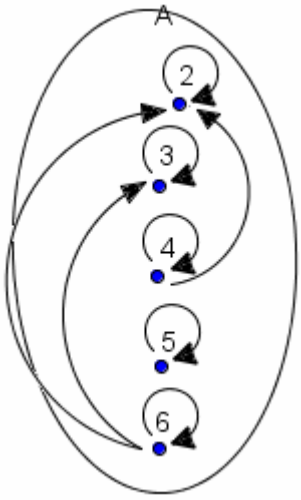
**Quando vogliamo rappresentare una relazione interna ad un insieme, possiamo procedere in 2 modi.**

Illustriamoli con riferimento all'insieme $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
e alla relazione, ad esso interna, R = " … è multiplo di … "

**1° modo: rappresentiamo A due volte**




**2° modo: rappresentiamo A una volta sola**




Un simbolo di "auto-corrispondenza"



si chiama anche "*buccola*" (da una parola in disuso che significava "boccolo, ricciolo" o anche "orecchino")

### ESERCIZI

1) Considerato l'insieme $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
traccia un diagramma a frecce,
con A rappresentato una sola volta,
per raffigurare la relazione R, interna ad A,
così definita:

$$x \text{ R } y \Leftrightarrow |x - y| = 3$$

(il simbolo $\Leftrightarrow$ è quello di "biimplicazione logica":
"se … allora … e viceversa,
per qualsiasi valore delle lettere coinvolte")

2) Nell'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ rappresenta, sia con un diagramma a frecce che cartesianamente, le relazioni seguenti:

a) $x$ R $y \Leftrightarrow$ *x è divisibile per y*
b) $x$ R $y \Leftrightarrow$ *x è divisore di y*
c) $x$ R $y \Leftrightarrow$ *x ha più divisori di y*
d) $x$ R $y \Leftrightarrow$ *x + y è pari*

### RISPOSTE agli esercizi della pagina precedente

1) a) Dominio = {2, 3, 4, 5}, Codominio = {8, 9, 10} b) I) F II) V III) F IV) F V) V

2) $(A, \alpha); (B, \alpha); (B, \beta); (C, \beta)$. Dominio $= \{A, B, C\}$; Codominio $= \{\alpha, \beta\}$

3) $(\alpha, \beta); (\beta, \alpha); (\beta, \gamma); (\gamma, \beta)$. Dominio $= \{\alpha, \beta, \gamma\} = Y$; Codominio $= \{\alpha, \beta, \gamma\} = Y$

4) $(33, 36); (33, 37); (33, 38); (33, 39); (34, 36); (34, 39); (35, 36); (35, 39)$
Dominio $= \{33,34,35\} = L$, codominio $= \{36,37,38,39\} = N$

5) 32768

### RISPOSTE agli esercizi di questa pagina

1) $(2,5); (3,6); (5,2); (6,3)$

2) a) $(6,6); (6,3); (6,2); (6,1); (5,5); (5,1); (4,4); (4,2); (4,1); (3,3); (3,1); (2,2); (2,1); (1,1)$
b) $(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,2); (2,4); (2,6); (3,3); (3,6); (4,4); (5,5); (6,6)$
c) $(6,5); (6,4); (6,3); (6,2); (6,1); (5,1); (4,5); (4,3); (4,2); (4,1); (3,1); (2,1)$
d) $(1,1); (1,3); (1,5); (2,2); (2,4); (2,6); (3,1); (3,3); (3,5); (4,2); (4,4); (4,6); (5,1); (5,3); (5,5); (6,2); (6,4); (6,6)$

## 3. PREDICATI

**Si dice "predicato" un'affermazione che si fa riguardo a uno, due o più "argomenti", che possono essere oggetti concreti, oggetti astratti, persone**.

Esempi:

- ... è femmina (predicato monoargomentale)
- ... è padre di ... (predicato biargomentale)
- ... e ... sono primi fra loro (predicato biargomentale)
- … * … = … + … (predicato a quattro argomenti)

- **Un predicato monoargomentale definisce un sottoinsieme** (di un dato "insieme ambiente", o "insieme universo");
- **un predicato biargomentale definisce una relazione** (fra due dati insiemi, presi in un certo ordine).

## 4. PROPRIETA' DI UNA RELAZIONE INTERNA AD UN INSIEME

Una relazione R in un insieme A
(importante: **stiamo parlando di una relazione INTERNA ad un insieme; insomma, stiamo supponendo che l'insieme di partenza coincida con l'insieme di arrivo**)
*può* godere delle proprietà seguenti:

**RIFLESSIVA**, **quando ogni elemento di A è in relazione R con sé stesso**: $\boxed{\forall x \in \mathrm{A},\ x\,\mathrm{R}\,x}$

Esempi:

- ... è divisore di ... (nell'insieme $\mathbb{N}^*$ dei numeri naturali non nulli)
- $x\,\mathrm{R}\,y \Leftrightarrow |x| = |y|$ (in $\mathbb{Z}$, oppure in $\mathbb{Q}$, oppure in $\mathbb{R}$)

**ANTIRIFLESSIVA**, **quando nessun elemento di A è in relazione R con sé stesso**:

$\boxed{\nexists x \in \mathrm{A} /\ x\,\mathrm{R}\,x}$ oppure $\boxed{\forall x \in \mathrm{A},\ x \not\mathrm{R}\, x}$

Esempio:

- ... è perpendicolare a ... (nell'insieme delle rette di un piano)

**SIMMETRICA**, **quando, qualunque siano gli elementi *x, y* dell'insieme A, ogni volta che *x* R *y*, è anche *y* R *x***:

$$\boxed{\forall x,\ y \in \mathrm{A},\ \ x\,\mathrm{R}\,y \Rightarrow y\,\mathrm{R}\,x}$$

Esempi:

- ... è perpendicolare a ... (nell'insieme delle rette di un piano)
- ... ha lo stesso padre di ... (in un insieme di persone)

**ANTISIMMETRICA**, **quando, nel caso si abbia *x* R *y* e *y* R *x*, ne consegue che *x* = *y***:

$$\boxed{\forall x, \forall y,\quad x\,\mathrm{R}\,y \wedge y\,\mathrm{R}\,x \Rightarrow x = y}$$

Osserviamo che una relazione è considerata antisimmetrica pure nel caso in cui l'impossibilità di trovare un controesempio che dimostri la falsità della proposizione nel riquadro, è dovuta al fatto che non risulta *mai* contemporaneamente $x\,\mathrm{R}\,y$ e $y\,\mathrm{R}\,x$; in altre parole, quando $x\,\mathrm{R}\,y \Rightarrow y \not\mathrm{R}\, x$.
In definitiva: le relazioni antisimmetriche sono tutte e sole quelle il cui diagramma a frecce, con l'insieme rappresentato una sola volta, può portare o non portare buccole, ma comunque non porta *nessuna "freccia a due punte"*.

Esempi:

- ... $\leq$ ... (in un qualsivoglia insieme numerico fissato, ad esempio $\mathbb{Z}$)
- ... è figlio di ... (in un insieme di persone)

**TRANSITIVA**, **quando, ogni volta che *x* R *y* e *y* R *z*, si ha pure *x* R *z***:

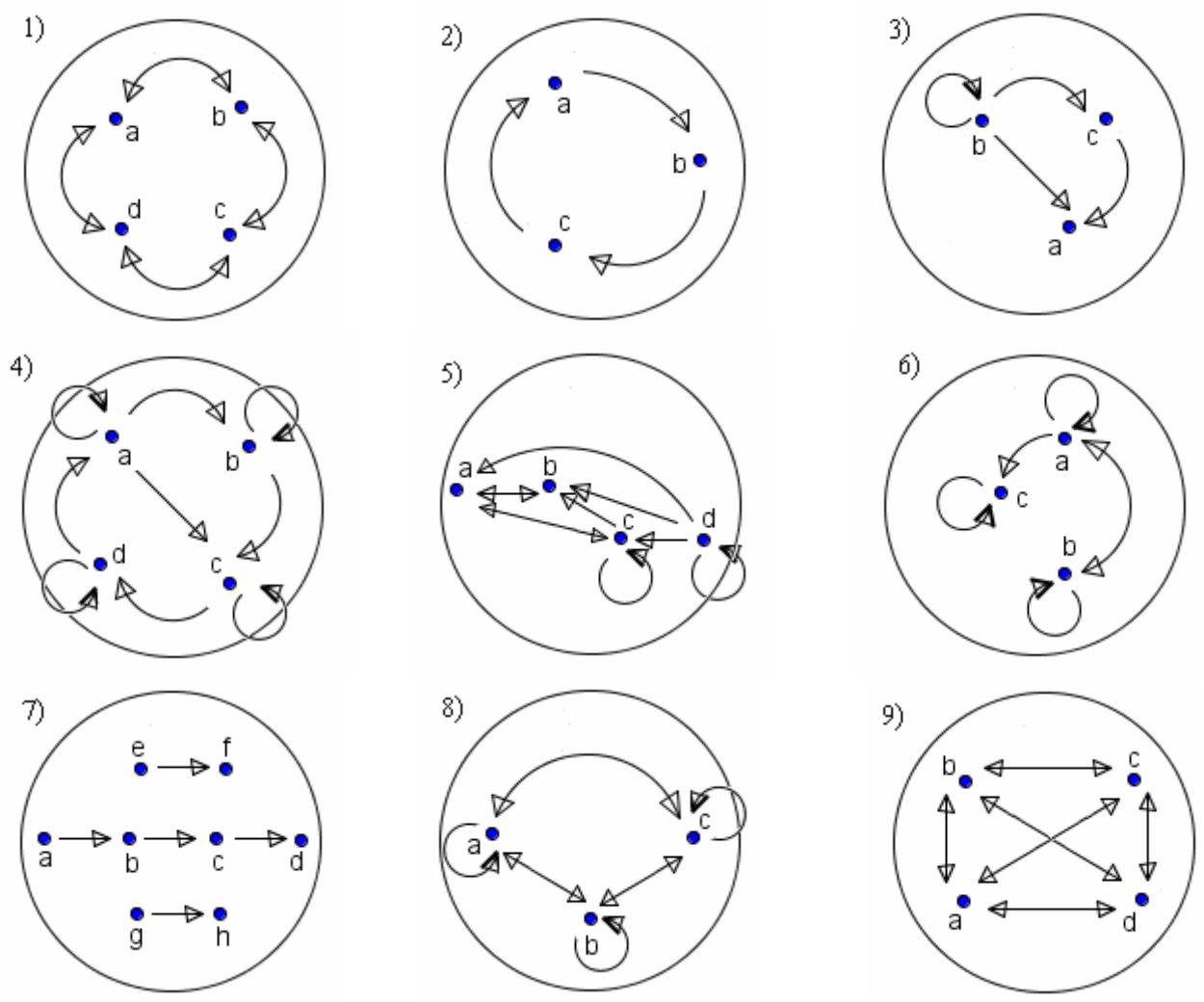
$$\boxed{\forall x, \forall y, \forall z\ \ x\,\mathrm{R}\,y \wedge y\,\mathrm{R}\,z \Rightarrow x\,\mathrm{R}\,z}$$

Esempio

- ... pesa di più rispetto a ... (in un insieme di persone)

**ESERCIZI** (risposte alla fine del capitolo, pag. 484)

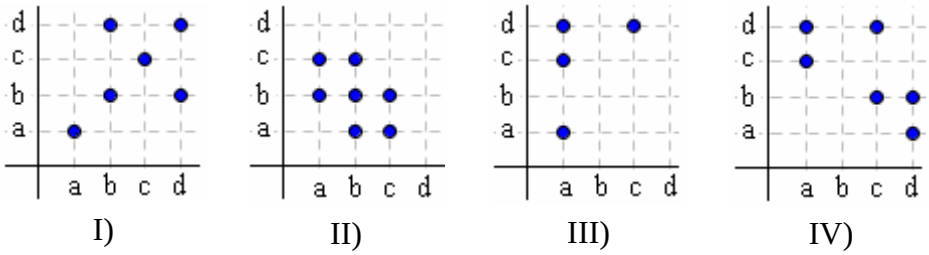
*Considera le relazioni rappresentate in figura ed elenca per ciascuna le proprietà di cui gode.*




*Considera le relazioni seguenti ed elenca per ciascuna le proprietà di cui gode.*

10) ... è divisore di ... (in $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$)
11) ... è primo con ... (in $\mathbb{N} - \{0,1\}$) [Due interi sono detti "primi fra loro" quando il loro M.C.D. è 1].
12) ... $<$ ... (in un qualsivoglia insieme numerico fissato)
13) ... $\leq$ ... (in un qualsivoglia insieme numerico fissato)
14) ... $=$ ... (in un qualsivoglia insieme numerico fissato)
15) ... è nato nello stesso anno di ... (in un determinato insieme di persone)
16) ... è perpendicolare a ... (nell'insieme delle rette di un piano)
17) ... ha almeno un punto in comune con ... (nell'insieme delle rette di un piano)
18) $x$ R $y$ se e solo se esiste un numero naturale $n$ tale che $x^n = y$ (in $\mathbb{N}^*$)
19) $x$ R $y$ se e solo se $x + y$ è intero (in $\mathbb{Q}$)
20) … ama … in $\{a,b,c\}$ qualora: a ami b e viceversa, b ami c non ricambiato, a e c non si amino
21) … confina con … nell'insieme degli Stati europei.

22) Le relazioni I), II), III), IV) qui raffigurate, di quali proprietà godono?



## 5. RELAZIONI DI EQUIVALENZA

**Una relazione R interna ad un insieme A si dice DI EQUIVALENZA**
**se gode delle tre proprietà: RIFLESSIVA, SIMMETRICA e TRANSITIVA**.

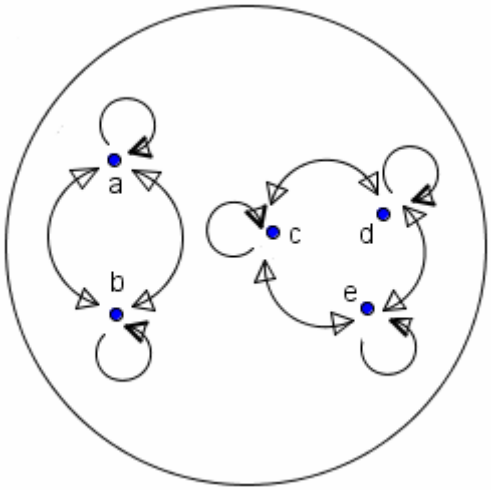
ESEMPI

- **... è nato nello stesso anno di ...** (in un dato insieme di persone)
- **... è parallela a ...** nell'insieme delle rette di un piano,
  se intendiamo che ogni retta possa considerarsi parallela a sé stessa,
  ossia se adottiamo la definizione (definizione "estesa" di parallelismo):
  "date due rette complanari *r* ed *s*, *r* si dice parallela ad *s*
  se *r* ed *s* non hanno nessun punto comune, *oppure* ne hanno infiniti"

La relazione rappresentata dal diagramma a frecce qui a destra è:

1) *riflessiva* (ogni elemento ha una "buccola",
   è in relazione con sé stesso),
2) *simmetrica* (ogni freccia ha la punta in ambo i versi)
3) e *transitiva* (se c'è una freccia da *x* verso *y*,
   e un'altra da *y* verso *z*,
   c'è sempre anche la freccia da *x* verso *z*)

quindi è una *relazione di equivalenza*.




Anticipando quanto vedremo nel prossimo paragrafo,
si hanno qui due "*classi di equivalenza*",
che sono:
{a, b} e {c, d, e}

## 6. CLASSI DI EQUIVALENZA E DEFINIZIONE DI UN CONCETTO MATEMATICO PER ASTRAZIONE

**Sia A un insieme in cui sia definita una relazione R di equivalenza:**
**allora A risulta suddiviso in tanti sottoinsiemi a due a due disgiunti,**
**ciascuno costituito da elementi tutti equivalenti fra loro.**
**Tali sottoinsiemi di A si dicono "classi di equivalenza".**

Ad esempio, la relazione "... è parallela a ..."
suddivide l'insieme delle rette di un piano in infiniti sottoinsiemi,
ciascuno dei quali è formato da tutte e sole le rette che sono parallele ad una retta assegnata.
In questo esempio, possiamo dire che ogni classe di equivalenza
definisce, individua, rappresenta, una ben determinata "direzione".

**Il concetto di "direzione" può anzi essere pensato proprio come**
**"quell'entità astratta che è comune a tutte e sole le rette di una data classe di equivalenza"**
(ossia: **a tutte e sole le rette che sono parallele ad una retta data**).

Si capisce quindi come
**il concetto di "ripartizione di un insieme in classi di equivalenza" costituisca, in Matematica,**
**uno strumento utile per formulare definizioni di concetti "PER ASTRAZIONE"**.

**ESERCIZI** **(risposte a pag. 484)**

1) Considera, nell'insieme dei poligoni in un piano fissato, la relazione
   $x$ R $y \Leftrightarrow$ *x ha lo stesso numero di lati di y*
   e verifica che si tratta di una relazione di equivalenza. Quali sono le classi di equivalenza?

2) Considera la relazione
   $x$ R $y \Leftrightarrow$ *la differenza fra il numero indicato con x e il numero indicato con y è* 0
   nell'insieme di simboli $\left\{0,\overline{3};\ 0,\overline{5};\ 0{,}5;\ \frac{1}{2};\ \frac{5}{9};\ \frac{1}{3};\ 3^{-1}\right\}$,
   e verifica che si tratta di una relazione di equivalenza.
   Disegna un diagramma di Venn che raffiguri l'insieme universo,
   ed evidenzia le sue classi di equivalenza.

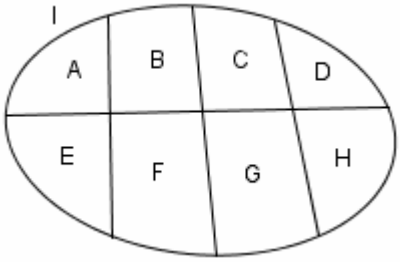
## 7. INSIEME QUOZIENTE

**Sia R una relazione di equivalenza definita su di un insieme A.**
**L'insieme delle classi di equivalenza determinate in A da R**
**viene detto "insieme quoziente" ed indicato col simbolo A/R.**

## 8. PARTIZIONE DI UN INSIEME

**Una famiglia di sottoinsiemi di un dato insieme I viene chiamata una "partizione" di I se:**

a. **nessuno fra gli insiemi della famiglia è vuoto**
b. **gli insiemi della famiglia sono a due a due disgiunti ( = a intersezione vuota)**
c. **l'unione di tutti gli insiemi della famiglia è l'intero insieme I ( = la famiglia "ricopre" I).**




Una partizione
di un insieme I
in 8 sottoinsiemi

Se su di un certo insieme I è **data una relazione di equivalenza**,
**prese due qualsiasi classi di equivalenza distinte, esse sono disgiunte**:
infatti, se per assurdo avessero un elemento in comune, coinciderebbero!

**Inoltre, nessuna classe di equivalenza è vuota,**
**e l'unione di tutte le classi di equivalenza dà l'insieme I**.

**Le classi di equivalenza generate da una relazione di equivalenza R costituiscono pertanto una "partizione" di I** (in altre parole: l'insieme quoziente I/R è una "partizione" di I).

ESEMPIO: la quaterna di insiemi
$F_1$ = { femmine minorenni della tua città }, $M_1$ = { maschi minorenni della tua città },
$F_2$ = { femmine maggiorenni della tua città }, $M_2$ = { maschi maggiorenni della tua città },
è una partizione dell'insieme C avente per elementi gli abitanti della tua città.

**ESERCIZI**

3) Considera l'insieme universo costituito dagli studenti della tua classe, e in esso la relazione
$x$ R $y \Leftrightarrow$ *x è nato nello stesso mese di y*
Disegna un diagramma di Venn che raffiguri l'insieme universo,
e la sua *partizione* in *classi di equivalenza*.

4) Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, i cui elementi sono le coppie di numeri naturali,
il secondo dei quali non nullo, considera la seguente relazione:
$(a, b)$ R $(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ .
Dimostra che è di equivalenza. *Correzione* ⇨

NOTA - Confrontiamo le due frasi seguenti:

1) "Si dice DIREZIONE quell'entità astratta, quel *quid*,
che è comune a tutte e sole le rette parallele ad una retta data"

2) "Si dice DIREZIONE l'insieme di tutte e sole le rette parallele ad una retta data"

Quale fra le due definizioni 1), 2) ti sembra più corretta?

Scommetterei che hai optato per la 1), e sono perfettamente d'accordo con la tua scelta.

Contro le aspettative, invece, in Matematica superiore prevale l'uso di esprimere
una definizione "per astrazione" nella forma "brutale" che è esemplificata dalla 2).

Vediamola così:

- dal punto di vista "operativo", la sola definizione che si rivela "efficace" è la 2);
- dal punto di vista "filosofico, concettuale", è evidente che "vince" la 1).

Noi comunque, ogniqualvolta su di un libro di testo troviamo una definizione come la 2),
possiamo benissimo pensare (tanto, nella pratica, non cambierà proprio nulla)
che si tratti di un'abbreviazione della 1).

## 9. RELAZIONI D'ORDINE

**Si dice che una relazione R interna ad un insieme A è una relazione D'ORDINE se gode delle proprietà ANTISIMMETRICA e TRANSITIVA (come la relazione $<$ o la relazione $\leq$ in un insieme numerico).**

Una relazione d'ordine R in un insieme A si dice poi

- di **ORDINE STRETTO se è anche ANTIRIFLESSIVA**
  ( = *nessun* elemento è in relazione con sé stesso)
- di **ORDINE LARGO se è anche RIFLESSIVA**
  ( = *ogni* elemento è in relazione con sé stesso)

Un esempio classico di ordine *stretto* è dato dalla relazione $<$,
mentre un esempio classico di ordine *largo* è dato da $\leq$.

Anzi!

- **Per ricordare meglio sotto quali condizioni una relazione viene detta "di ordine stretto", converrà proprio pensare alla relazione $<$, che è il "prototipo" dell'ordine stretto**:
  essa è appunto caratterizzata dalle proprietà antisimmetrica, transitiva e antiriflessiva.
- **E per ricordare meglio sotto quali condizioni una relazione viene detta "di ordine largo", converrà proprio pensare alla relazione $\leq$, che è il "prototipo" dell'ordine largo**:
  essa è appunto caratterizzata dalle proprietà antisimmetrica, transitiva e riflessiva.

Altri esempi:

- nell'insieme dei cittadini di un dato Comune, la relazione: … è discendente di … è di ordine stretto
- nell'insieme delle persone in una "coda", la relazione: … non sta dietro a … è di ordine largo.

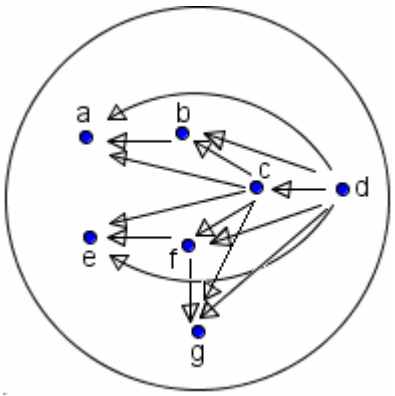
- **Si dice che una relazione d'ordine (largo o stretto) in un insieme A è un ORDINE TOTALE quando, presi due elementi distinti *x*, *y* di A, essi sono sempre "confrontabili", sono sempre "in relazione", nel senso che o risulta *x* R *y*, oppure *y* R *x*; in questo caso, si dice che A è un insieme "totalmente ordinato" dalla relazione considerata.**
- **In caso contrario**, cioè se la relazione d'ordine è tale che NON TUTTE le coppie di elementi distinti di A sono "confrontabili", **si parla di ORDINE PARZIALE e di insieme "parzialmente ordinato".**

Esempi:

- Consideriamo l'insieme N* e in esso la relazione R definita dal predicato: ... è divisore di ...
  E' facile riconoscere che R è un "ordine largo, parziale".
- Sia dato un insieme E.
  Consideriamo P(E), ossia: l' "insieme delle parti di E", l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di E.
  Ad esempio, se E = { a, b, c }, allora P(E) = { {}, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a, b, c} }.
  In P(E), la relazione di inclusione $\subseteq$ è di ordine largo, parziale
  mentre la relazione di "inclusione stretta" $\subset$ è di ordine stretto, parziale.

La relazione in figura, essendo antisimmetrica e transitiva, è di **ordine**.

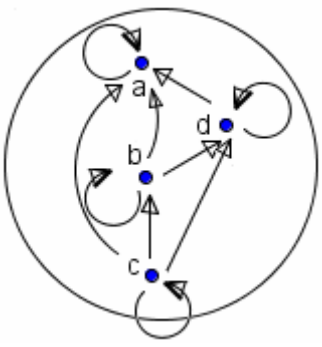
Essendo pure antiriflessiva, è di ordine **stretto**.




Non tutti gli elementi sono "confrontabili" (ad esempio e, g non lo sono), quindi l'ordine è **parziale**.
E' come se la relazione stabilisse delle "**gerarchie**" fra gli elementi dell'insieme.

La relazione rappresentata qui a destra, essendo antisimmetrica e transitiva, è di **ordine**.

Essendo pure riflessiva, è di ordine **largo**.




Tutti gli elementi sono "confrontabili", quindi l'ordine è **totale**.

Viene stabilita una "**lista di precedenze**", una "**coda**": **c-b-d-a**.

Se valgono perlomeno le proprietà **riflessiva** e **transitiva** si parla di relazione di **PREORDINE**.
Un preordine può essere
- "totale" se, presi due qualsivoglia elementi, essi risultano sempre "confrontabili";
- "parziale" se ciò non avviene.

**ESERCIZI SULLE RELAZIONI DI EQUIVALENZA E DI ORDINE** (risposte a pag. 484)

Fra le seguenti relazioni, alcune sono di equivalenza, altre di ordine, altre né di equivalenza né di ordine.
**Stabilisci, per ciascuna relazione, se è di equivalenza o di ordine**
(specificando, in quest'ultimo caso, se *stretto* o *largo*, *parziale* o *totale*).
Riconosci anche le eventuali relazioni di "**preordine**".

1) ... è divisore di ... (in $\mathbb{N}^*$)
2) ... è congruente a ... (nell'insieme dei segmenti nello spazio) [NOTA]
   NOTA: due figure si dicono "congruenti" quando è possibile, con un movimento "rigido" ( = non deformante) sovrapporre una di esse all'altra, in modo che combacino perfettamente. Anziché dire "congruenti" si può anche dire semplicemente "uguali": noi, nel presente testo, abbiamo fatto quasi sempre questa scelta.
3) ... ha almeno un punto in comune con ... (nell'insieme delle rette di un piano)
4) ... $x$ R $y$ se e solo se esiste un numero naturale $n$ tale che $x^n = y$ (in $\mathbb{N}^*$)
5) … può ricevere ordini da … (nell'insieme dei militari di una caserma)
6) … sa dove abita … (nell'insieme degli studenti di una data scuola superiore)
7) … ha vinto più campionati del mondo di calcio di … (nell'insieme delle nazioni)
8) … ha vinto almeno tanti campionati del mondo di calcio quanto …
9) … gioca attualmente nella stessa squadra di … (nell'insieme dei giocatori di un campionato nazionale)
10) … ha giocato almeno una volta nella stessa squadra di …
11) $a$ è in relazione R con $b$ se e solo se la cifra delle unità di $a$ è minore rispetto alla cifra delle unità di $b$ (nell'insieme nei numeri naturali con 2 cifre)
12) La somma delle cifre di $x$ è maggiore della somma delle cifre di $y$ (nell'insieme nei numeri naturali con 2 cifre)
13) La somma delle cifre di $x$ non è inferiore alla somma delle cifre di $y$ (nell'insieme nei numeri naturali con 2 cifre)
14) $a$ R $b$ se e solo se $a$ è parallela a $b$, o in alternativa $a$ è perpendicolare a $b$ (nell'insieme delle rette di un piano fissato)
15) $a$ R $b$ se e solo se la differenza fra $a$ e $b$ (s'intende: presa in valore assoluto) è divisibile per 5 (in $\mathbb{N}$)
16) "$x$ R $y$ se e solo se i nomi di battesimo di $x$ e di $y$ non hanno nessuna lettera in comune" (in un insieme fissato di persone)
17) "$x$ R $y$ se e solo se il giudizio di $x$ al termine delle scuole medie è stato più alto del giudizio di $y$" (nell'insieme degli alunni di una scuola superiore)
18) "$x$ R $y$ se e solo se l'area di $x$ è inferiore all'area di $y$" (nell'insieme delle superfici su di un piano).
19) "$x$ R $y$ se e solo se esiste un numero naturale $n$ tale che $y = x+n$" (nell'insieme dei numeri reali positivi)

Dal sito
www.perma-bound.com




*Louisiana State Standards for Mathematics: Grade* 5
…
In problem-solving investigations, students demonstrate an understanding of patterns ( = *modelli*), relations, and functions
…

## 10. RIPASSO DEL CONCETTO DI FUNZIONE

Abbiamo già parlato di "funzioni" (alle pagine 430-431, che ti invito a rileggere) stabilendo la seguente

> Definizione - **Si ha una funzione quando si hanno due grandezze variabili, legate fra loro in modo che ad ogni valore di una di esse (variabile indipendente) corrisponde UNO E UN SOLO valore dell'altra (variabile dipendente).**
>
> *Di norma (non sempre!) la variabile indipendente si indica con la lettera x, e la dipendente con y. Inoltre, come avevamo già precisato a pagina 431, alla fin fine non è poi indispensabile che proprio "ad ogni … " corrisponda un valore; è invece essenziale che quando il valore esiste, esso sia UNICO. Di questo fatto riparleremo anche nelle pagine che seguono.*

Avevamo fatto a proposito diversi esempi, fra i quali quello riguardante il *volume della sfera*:

esso si ottiene applicando la formula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,

ed evidentemente, siccome ad ogni valore del raggio corrisponde uno e un solo valore del volume, siamo in presenza di una funzione, nella quale il raggio ( r ) è la var. ind. e il volume ( V ) è la var. dip.

Se indichiamo la nostra funzione col simbolo f , scriveremo $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = f(r)$

La scrittura $V = f(r)$ si legge " V uguale f di r " e significa: "ho una funzione, che ho indicato col simbolo f , nella quale la var. ind. è stata indicata col simbolo r e la var. dip. col simbolo V ".

$$\underset{\text{var. dip.}}{V} = \underset{\substack{\text{nome della} \\ \text{funzione}}}{f} \left( \underset{\text{var. ind.}}{r} \right)$$

E il volume di una sfera di raggio 3 metri è: $f(3) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi \approx 113{,}1\ m^3$ .

## 11. UNA "FUNZIONE" NON E' ALTRO CHE UN CASO PARTICOLARE DI RELAZIONE (è una relazione fra due insiemi, tale che ad ogni elemento dell'insieme di partenza corrisponde UNO ED UN SOLO elemento dell'insieme di arrivo)

E' giunto ora il momento di GENERALIZZARE il concetto di funzione.

Abbiamo parlato finora di funzione come di legame fra due grandezze variabili, tale che ecc. ecc., e poi nel fare gli esempi ci siamo soffermati sulle MISURE di queste grandezze (misure espresse, ovviamente, da numeri), cosicché ci siamo abituati a concepire una funzione come una "macchinetta" che, preso un *numero* ( = un elemento dell'insieme $\mathbb{R}$ ), fa passare da questo ad un altro *numero* ( = ad un altro elemento di $\mathbb{R}$ ).

Una funzione, comunque, è una CORRISPONDENZA, una RELAZIONE: ad ogni numero ne fa corrispondere un altro; anzi, per la precisione, ad ogni numero fa corrispondere UNO ED UN SOLO altro numero.

Ora, se noi *lasciamo cadere la restrizione* che una funzione possa operare soltanto su numeri, e invece ammettiamo che nella "macchinetta" possano entrare, e da essa uscire, oggetti di natura QUALSIASI, perverremo alla seguente definizione più generale di funzione:

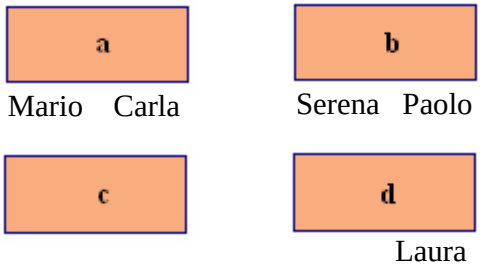
**Definizione** (**definizione GENERALE di** "**funzione**"):

**si dice "FUNZIONE", o "APPLICAZIONE", una relazione di un insieme A verso un insieme B, tale che ad ogni elemento di A corrisponde UNO ED UN SOLO elemento di B ( = tale che ogni elemento di A ha una e una sola immagine).**

Con riferimento ai diagrammi a frecce, le funzioni sono quelle relazioni tali che da ogni elemento dell'insieme di partenza A parte **una e una sola** freccia.

ESEMPIO

1) In un'aula scolastica, ci sono alcuni banchi, che indicheremo con a, b, c, d. La piantina qui a fianco illustra la disposizione degli alunni su questi banchi, nel corso di una certa ora di lezione (corso di recupero):

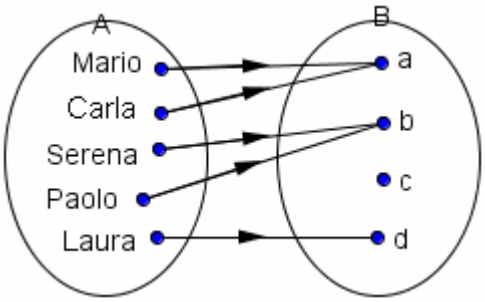


Ad ogni alunno corrisponde un banco (uno e un solo banco).

In questa situazione, possiamo pensare
ad una corrispondenza, una relazione, un legame,
dall'insieme di partenza A degli alunni
A = {Mario, Carla, Serena, Paolo, Laura}

all'insieme di arrivo B dei banchi: B = {a, b, c, d}.

Il diagramma a frecce della relazione mostra che
da ogni elemento dell'insieme A
parte UNA E UNA SOLA freccia.




Questa relazione di A verso B è, dunque, una FUNZIONE,
per indicare la quale si impiega generalmente, anche se non sempre,
una lettera dell'alfabeto, di norma minuscola: noi qui sceglieremo il simbolo *f*.

Sono in uso le seguenti scritture:

$f : A \to B$ (la funzione $f$ ha come insieme di partenza A e come insieme di arrivo B)

$f : Mario \to a$ (la funzione $f$ associa all'alunno Mario il banco a, l'immagine di Mario è a)

$a = f(Mario)$ ("a uguale a $f$ di Mario": a è l'immagine, attraverso la funzione $f$, di Mario)

Se decidiamo di usare la lettera *x* per indicare un generico alunno (" l'alunno *x* ")
e la lettera *y* per indicare un generico banco (" il banco *y* "),
la *x* giocherà il ruolo di "variabile indipendente", la *y* sarà invece la "variabile dipendente".
Insomma:
*x* può valere "Mario", oppure "Carla", ecc.;
per ogni valore di *x*, ci interessa andare a vedere qual è il corrispondente valore di *y*,
e, ad esempio, se $x$ = Serena, allora $y$ = b.
Il valore di *y* DIPENDE dal valore che abbiamo attribuito a *x*.

$f : x \to y$ ("$f$ *fa passare da* $x$ *a* $y$")

$y = f(x)$ (*leggi* : "*y uguale f di x*", *con lo stesso significato della scrittura precedente*)

$\boxed{y}$ = $\boxed{f}$ $\left(\boxed{x}\right)$

nome della var. dip. — nome della funzione — nome della var. ind.

ALTRI ESEMPI

2) Sia P = {parole della lingua italiana}

Ad ogni parola della lingua italiana, possiamo associare il numero delle lettere di cui è composta.
Abbiamo così una corrispondenza fra l'insieme P e l'insieme $\mathbb{N}^*$.
Questa corrispondenza è, ovviamente, una FUNZIONE,
perché ad ogni parola corrisponde uno ed un solo numero naturale non nullo.

Detta *h* questa funzione, avremo:

$h : P \to \mathbb{N}^*$

e, ad esempio,

$h : "arancia" \to 7$

o, con notazione più frequentemente utilizzata,

$h("arancia") = 7$

ecc. ecc.

Detta $p$ una generica parola italiana, e indicato con *n* il numero naturale corrispondente,
potremo scrivere $h : p \to n$ o anche $n = h(p)$

La scrittura $h : p \to n$, o la sua equivalente (più usata) $n = h(p)$, significa dunque:
ho una funzione, che ho chiamato *h*, che opera sulla variabile indipendente $p$
e ad ogni valore di $p$ fa corrispondere uno e un solo valore della variabile dipendente *n*.

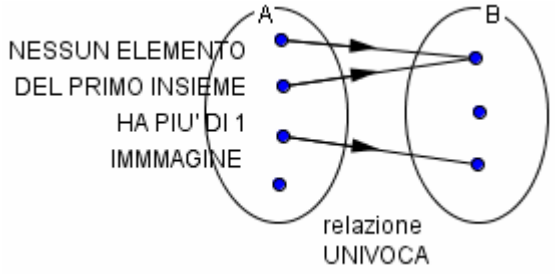
3) Sia I l'insieme delle circonferenze di un piano, J l'insieme dei punti di quel piano.
La corrispondenza $g$ che ad ogni circonferenza associa il rispettivo centro è, ovviamente, una funzione:

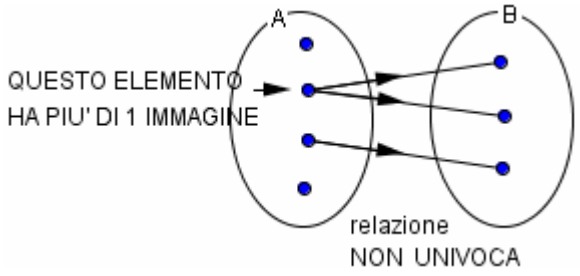
$g : I \to J$

## 12. TERMINOLOGIA SULLE RELAZIONI E SULLE FUNZIONI

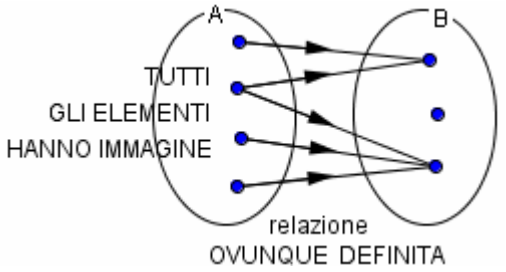
Sinonimo di "relazione" è "**corrispondenza**".

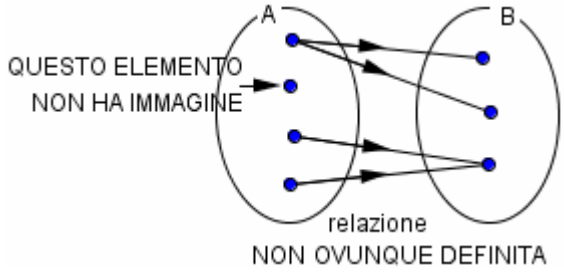
- **Una relazione di A in B si dice "UNIVOCA"** (alcuni testi dicono: "funzionale")
  **se ad un elemento di A non corrisponde mai più di un elemento di B**; ossia:
  - se da ogni elemento di A parte al massimo una freccia
  - se ogni elemento di A ha al massimo una immagine
  - se non c'è nessun elemento di A da cui parta più di una freccia
  - se non c'è nessun elemento di A che abbia più di una immagine.




- **Una relazione di A in B si dice "OVUNQUE DEFINITA"**
  **se ad ogni elemento di A corrisponde almeno un elemento di B**; ovvero
  - se da ogni elemento di A parte almeno una freccia
  - se ogni elemento di A ha almeno una immagine
  - se il dominio della relazione coincide con l'insieme di partenza A.




**Possiamo perciò riformulare la definizione di "funzione" come segue:**
**Definizione - Si dice "FUNZIONE" (o "applicazione") una RELAZIONE che sia UNIVOCA e (ma vedi la PRECISAZIONE IMPORTANTE qui sotto) OVUNQUE DEFINITA**

PRECISAZIONE IMPORTANTE

C' è da chiarire subito una questione che potrebbe essere fonte di parecchi equivoci.
Consideriamo, ad esempio, la relazione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ seguente:
ad ogni numero reale $x$ facciamo corrispondere il suo reciproco $1/x$.
In base a quanto abbiamo detto, si dovrebbe affermare che questa relazione non è una funzione, perché, sebbene sia univoca, NON è ovunque definita: infatti, lo 0 non ha reciproco.
In casi come questo, invece, di solito si fa così: si *restringe l'insieme di partenza*, fino a farlo coincidere con il dominio, e si dice che si ha una funzione. … La cosa è un po' strana …
… D'altra parte, certe usanze si sono ormai consolidate storicamente, e a questo punto bisogna accettarle.
La corrispondenza che associa al numero $x$ il numero $1/x$ sarà allora considerata una funzione, di dominio $\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$.
In definitiva, riassumendo:

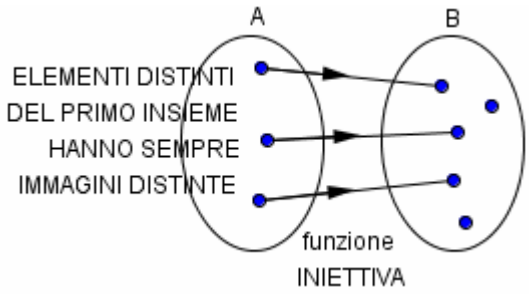
**… nella pratica, UNA RELAZIONE UNIVOCA, ANCHE SE NON È OVUNQUE DEFINITA, VIENE UGUALMENTE CONSIDERATA UNA FUNZIONE; infatti, si finisce sempre per RESTRINGERE L'INSIEME DI PARTENZA, FACENDOLO COINCIDERE CON IL DOMINIO.**

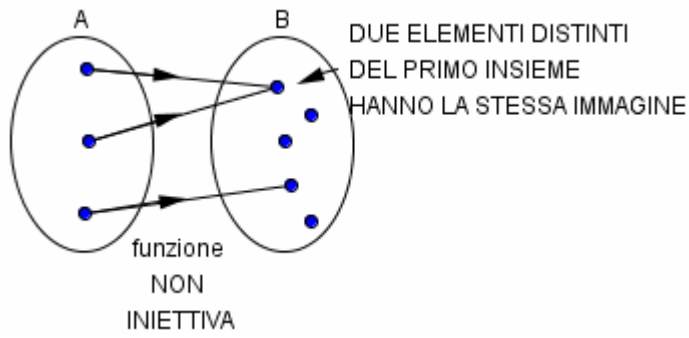
- Altro esempio:
  prendiamo come insieme di partenza $\mathbb{N}$, come insieme di arrivo ancora $\mathbb{N}$.
  La relazione che associa ad un numero naturale $n$ il numero $n-7$
  ha come dominio l'insieme dei numeri naturali maggiori o uguali a 7
  (perché se fosse $n<7$, il numero $n-7$ NON apparterrebbe all'insieme di arrivo $\mathbb{N}$).
  Spontaneamente, restringiamo subito l'insieme di partenza, facendolo coincidere con il dominio.
  Abbiamo dunque una funzione: $f:\mathrm{A}\to\mathbb{N}$, dove $\mathrm{A}=\{n\in\mathbb{N}/n\geq 7\}$

- Un esempio ancora: $y = g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.
  Questa corrispondenza associa uno ed un solo numero reale
  ad ogni numero reale che non sia né $+1$ né $-1$.
  Diciamo che è una funzione il cui dominio è $\mathbb{R} - \{+1, -1\}$

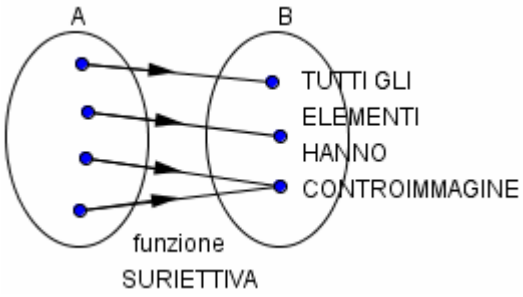
Riguardo ad una funzione ci si può poi domandare se essa è, o non è, "iniettiva" o "suriettiva".
Questi due nuovi termini possono in realtà essere riferiti ad una relazione di natura qualsiasi,
ma sono di solito utilizzati più che altro con le funzioni.

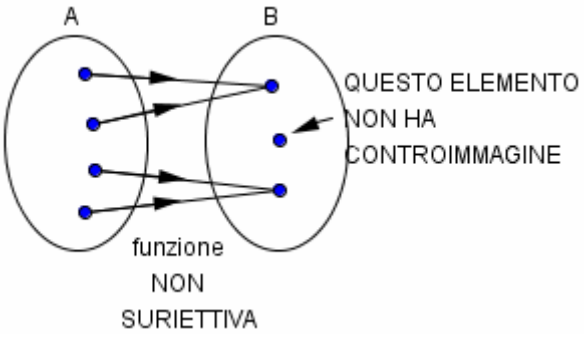
- **Una funzione di A in B si dice "INIETTIVA"**
  **se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B**; ossia
  - se ogni elemento di B ha al massimo una controimmagine
  - se non c'è nessun elemento di B che abbia più di una controimmagine
  - se non c'è nessun elemento di B a cui arrivi più di una freccia
  - se $\forall a_1, a_2 \in \mathrm{A},\ a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
  - se $\forall a_1, a_2 \in \mathrm{A},\ f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$




- **Una funzione di A in B si dice "SURIETTIVA"**
  **se ogni elemento di B ha almeno una controimmagine**; ossia,
  - se ad ogni elemento di B arriva almeno una freccia
  - se il codominio della relazione coincide con l'insieme di arrivo B
  - se $\forall b \in \mathrm{B},\ \exists a \in \mathrm{A}$ *tale che* $b = f(a)$




**A VOLTE SI DICE "FUNZIONE" AL POSTO DI DIRE "VARIABILE DIPENDENTE"**

Nell'uso comune, capita che la parola "funzione" venga adoperata quando a stretto rigore bisognerebbe invece dire "variabile dipendente". Ad es., può darsi che un testo, di fronte alla funzione $y = f(x) = x^2 + 3$, scriva: "qual è il valore di questa *funzione* per $x = 5$ ?"
oppure "questa *funzione* tocca il suo valore minimo quando $x = 0$, e tale valore minimo della funzione è 3".

In entrambi questi casi, l'uso della parola "funzione" è un pochettino improprio, perché ci si sta riferendo NON al "*legame*" fra la *x* e la *y*, BENSI' al *valore della y*,
quindi non tanto alla *funzione* quanto alla *variabile dipendente*.

Tuttavia, **è entrata nella prassi comune questa abitudine, di dire sbrigativamente "funzione" anche in casi nei quali per la precisione occorrerebbe in realtà dire "variabile dipendente". Tieni dunque conto di questa questione terminologica.**

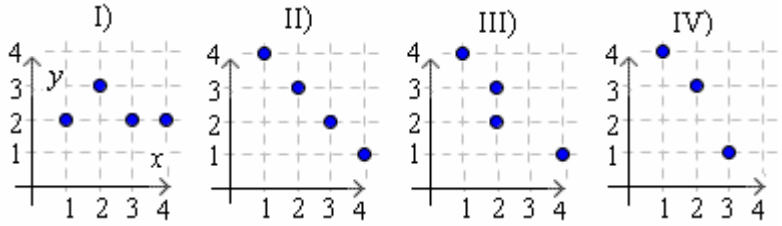
**ESERCIZI (risposte a pag. 484)**

1) Preso $\mathbb{N}^*$ come insieme di partenza, e l'insieme degli allievi di una data classe di Liceo come insieme di arrivo, stabilisci se la relazione che ad un elemento di $\mathbb{N}^*$ fa corrispondere lo studente contraddistinto sul registro da quel numero d'ordine, è una funzione, e in caso affermativo se è iniettiva e se è suriettiva.

2) Preso l'insieme degli allievi di una data classe di Liceo come insieme di partenza, e preso $\mathbb{N}^*$ come insieme di arrivo, stabilisci se la relazione che ad uno studente fa corrispondere il suo numero d'ordine sul registro è una funzione, e in caso affermativo se è iniettiva e se è suriettiva.

3) La relazione che ad ogni regione italiana fa corrispondere l'altezza in metri della montagna più elevata in quella regione, è una funzione?

4) Fra le relazioni qui accanto rappresentate stabilisci quali sono funzioni.
Se si tratta di una funzione, stabilisci anche se è iniettiva o suriettiva, se si prende come insieme sia di partenza che di arrivo $I = \{1, 2, 3, 4\}$




5) Se ti chiedono quante sono le possibili funzioni di A in B ( = aventi per dominio tutto A e per codominio B) nel caso particolare in cui A abbia 3 elementi e B ne abbia 5, tu cosa rispondi?
(*Indicazione: pensa di ordinare gli elementi di* A: 1° *elemento*, 2°, 3°. *Scelgo quale elemento di B far corrispondere al* 1°: *ho … possibilità; per ciascuna di queste possibilità, mi si apre un ventaglio di … possibilità per la scelta dell'elemento di B da abbinare al* 2° *elemento di A; dopodiché …*)

6) Nel caso A contenga 3 elementi e B ne contenga 5, quante sono
I) le funzioni *iniettive* di A in B? II) le funzioni *suriettive* di A in B?

## 13. RELAZIONE INVERSA DI UNA RELAZIONE DATA; CORRISPONDENZE BIUNIVOCHE

Se R è una relazione di A in B, si dice "**relazione inversa**" della R
quella che inverte il verso di tutte le frecce, e scambia fra loro i due insiemi di partenza e di arrivo:
insomma, la relazione $R^{-1}$ di B in A definita nel modo seguente:

$b\ R^{-1}\ a \overset{def.}{\Leftrightarrow} a\ R\ b \quad (a \in A,\ b \in B)$

NOTA: $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ si legge: "se e solo se, per definizione"

**L'inversa di una funzione, in generale, non è una funzione, ma soltanto una relazione. Se invece, data una funzione $f$, l'inversa di $f$ è anch'essa una funzione, allora si dice che $f$ è "invertibile".**

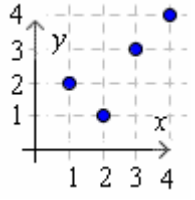
E' chiaro che una funzione, per essere invertibile, deve imprescindibilmente essere **iniettiva**.
Infatti, se $f$ non è iniettiva, la relazione inversa di $f$ non è univoca e quindi non è una funzione.
Si potrebbe a questo punto ritenere che $f$, per essere invertibile, debba anche essere suriettiva,
perché in caso contrario, la relazione inversa non sarebbe "ovunque definita";
tuttavia, sappiamo che pure una relazione che non sia ovunque definita può, nel caso sia univoca,
essere considerata una funzione, perché a tale scopo basta restringere opportunamente l'insieme di partenza della relazione stessa (vedi "PRECISAZIONE IMPORTANTE" a pagina 480).

Quindi **il requisito indispensabile affinché una funzione $f: A \to B$ sia invertibile, è che essa sia iniettiva.**

Se **una funzione $f: A \to B$** (supponiamo qui che l'insieme di partenza A sia il vero e proprio dominio) è **sia iniettiva che suriettiva**, allora diremo che è una
**CORRISPONDENZA BIUNIVOCA, o BIIEZIONE**, fra i due insiemi A e B.
Perciò

**una relazione è una corrispondenza biunivoca (o biiezione) quando ad OGNI elemento dell'insieme di partenza A corrisponde UNO E UN SOLO elemento dell'insieme di arrivo B, E VICEVERSA,
come accade con l'insieme A delle asole e l'insieme B dei bottoni di una stessa camicia.**

7) La funzione qui a fianco rappresentata, dell'insieme $I = \{1, 2, 3, 4\}$ in sé, è invertibile?




8) Stabilisci quali fra le seguenti funzioni di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sono corrispondenze biunivoche:
a) $n \to n^2$ b) $n \to 2n$ c) $n \to n+2$

9) Stabilisci quali fra le seguenti funzioni di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ sono corrispondenze biunivoche:
a) $x \to x^2$ b) $x \to 2x$ c) $x \to x+2$

# 14. FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE

Una funzione si dice "**reale di variabile reale**"
se tanto il suo insieme di partenza quanto il suo insieme di arrivo sono l'insieme $\mathbb{R}$.

Osserviamo che il *primo* aggettivo "*reale*" (quello riferito al sostantivo "*funzione*")
ha il ruolo di affermare che l'insieme di *arrivo* è $\mathbb{R}$ (qui ritorna la questione, di cui ci siamo già occupati,
per cui a volte si dice "funzione" per significare "variabile dipendente"), mentre il *secondo*
aggettivo "*reale*" (quello riferito al sostantivo "*variabile*", che sta qui per "variabile indipendente")
è impiegato per dire che l'insieme di *partenza* è $\mathbb{R}$.

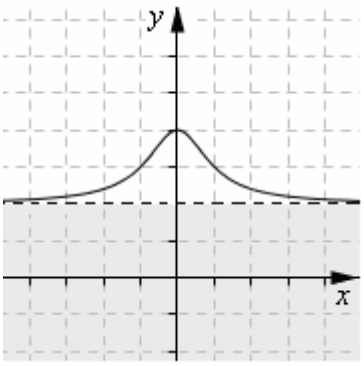
**ALTRE QUESTIONI SULLE FUNZIONI**
**(inversione, composizione, … )**
**sono trattate nel capitolo**
**"Grafici e risoluzioni grafiche"**
**del VOLUME 2.**

**ESERCIZI** (le risposte sono alla pagina successiva)

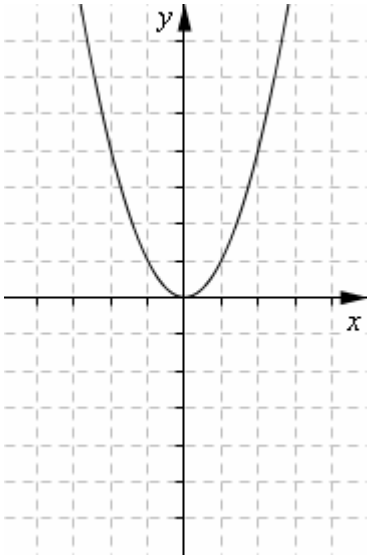
Considera le funzioni 1) … 7) e per ciascuna di esse stabilisci

a) qual è il dominio
b) se è iniettiva
c) se è (considerando come insieme di arrivo $\mathbb{R}$) suriettiva

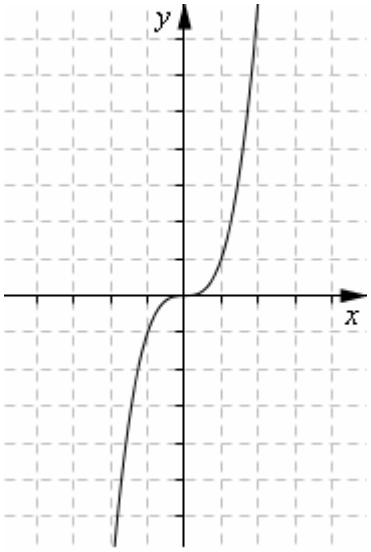
1) $y = f(x)$



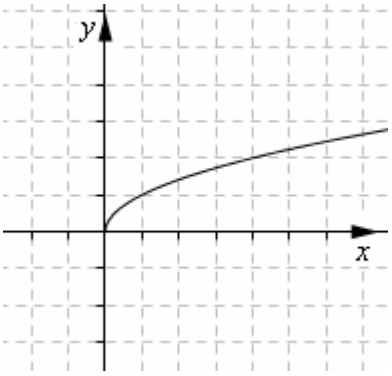

2) $y = x^2$



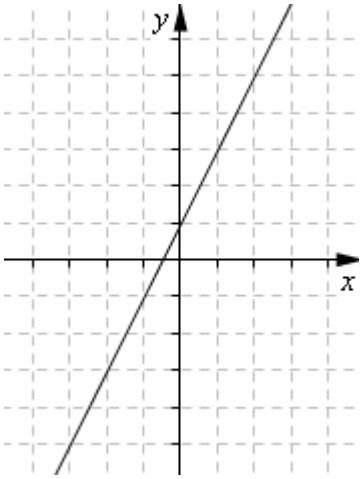

3) $y = x^3$



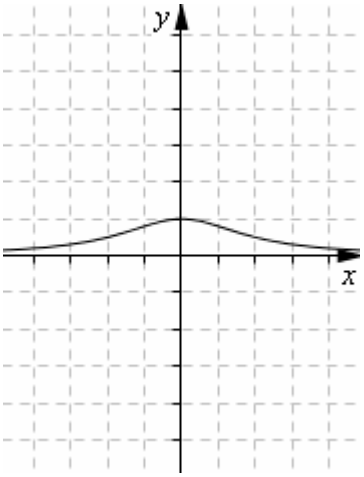

4) $y = \sqrt{x}$



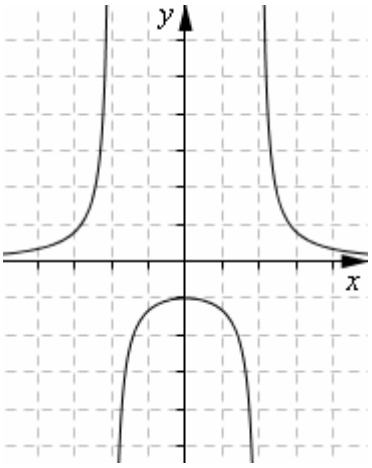

5) $y = 2x + 1$




6) $y = \dfrac{4}{x^2 + 4}$

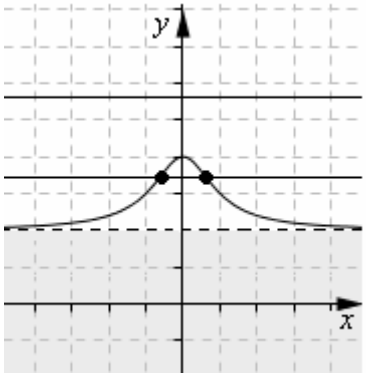



7) $y = \dfrac{4}{x^2 - 4}$



## RISPOSTE AGLI ESERCIZI della pagina precedente

1) $y = f(x)$




a) Determinare il dominio di questa funzione è problematico in quanto non ne viene data l'espressione analitica (= l'espressione matematica, l'espressione con la formula). Il grafico sembra portare a supporre che il dominio sia tutto $\mathbb{R}$ … Tuttavia, la figura si limita ai soli valori di $x$ compresi fra –5 (circa) e +5.

b) La funzione **NON è iniettiva**. Infatti *esiste almeno una retta orizzontale che interseca il grafico più di una volta*, e ciò significa che esiste più di un valore di $x$ al quale corrisponde lo stesso valore di $y$.

c) La funzione **NON è nemmeno suriettiva** (considerando $\mathbb{R}$ come insieme di arrivo). Infatti *esiste almeno una retta orizzontale che non interseca mai il grafico,* e ciò significa che esiste almeno un valore di $y$ che non corrisponde a nessun valore di $x$.

2) $y = x^2$
   a) tutto $\mathbb{R}$
   b) non è iniettiva
   c) non è suriettiva

3) $y = x^3$
   a) tutto $\mathbb{R}$
   b) è iniettiva
   c) è suriettiva

4) $y = \sqrt{x}$
   a) $[0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / \ x \geq 0\}$
   b) è iniettiva
   c) non è suriettiva

5) $y = 2x + 1$
   a) tutto $\mathbb{R}$
   b) è iniettiva
   c) è suriettiva

6) $y = \dfrac{4}{x^2 + 4}$
   a) tutto $\mathbb{R}$
   b) non è iniettiva
   c) non è suriettiva

7) $y = \dfrac{4}{x^2 - 4}$
   a) $\mathbb{R} - \{-2, +2\} = \{x \in \mathbb{R} / \ x \neq \pm 2\}$
   b) non è iniettiva
   c) non è suriettiva

## RISPOSTE AGLI ESERCIZI di pag. 473

1) antirifl., simm. 2) antirifl., antisimm. 3) antisimm., trans. 4) rifl., antisimm. 5) trans.
6) rifl. 7) antirifl., antisimm. 8) rifl., simm., trans. 9) antirifl., simm., trans.
10) rifl., antisimm., trans. 11) antirifl., simm. 12) antirifl., antisimm., trans.
13) rifl., antisimm., trans. 14) rifl., simm., trans. 15) rifl., simm., trans. 16) antirifl., simm.
17) rifl., simm. 18) rifl., antisimm., trans. 19) simm. 20) antirifl. 21) antirifl., simm.
22) I: rifl., simm., trans. II: simm. III: antisimm., trans. IV) antirifl.

## RISPOSTE AGLI ESERCIZI di pag. 474

1) Le classi di equivalenza sono:
l'insieme dei triangoli di quel piano; l'insieme dei quadrilateri di quel piano; ecc.

2) 3 classi di equivalenza: $\left\{0,\overline{3};\ \frac{1}{3};\ 3^{-1}\right\}, \left\{0,5;\ \frac{1}{2}\right\}, \left\{0,\overline{5};\ \frac{5}{9}\right\}$

## RISPOSTE AGLI ESERCIZI di pag. 477

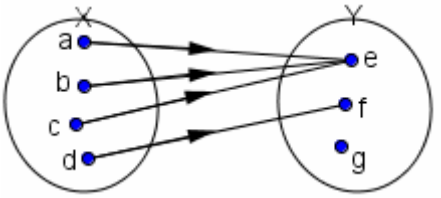
1) ordine largo, parziale 2) equivalenza 3) niente di speciale (non è transitiva) 4) ordine largo, parziale
5) ordine stretto (è vero che in un certo senso ciascun militare obbedisce anche a sé stesso, ma …), parziale
6) niente di speciale, in generale 7) ordine stretto, parziale 8) preordine totale 9) equivalenza
10) niente di speciale (non è transitiva) 11) ordine stretto, parziale 12) ordine stretto, parziale
13) preordine totale 14) equivalenza 15) equivalenza 16) niente di speciale (non è transitiva)
17) ordine stretto, parziale 18) ordine stretto, parziale 19) ordine largo, parziale

## RISPOSTE AGLI ESERCIZI di pag. 482

1) Sì. Chiaramente, il dominio è solo l'insieme degli interi che vanno da 1 al numero di alunni di quella classe. E' iniettiva e suriettiva.
2) Sì. E' iniettiva, non è suriettiva
3) Sì
4) I). E' una funzione; non è iniettiva, né suriettiva II) E' una funzione, è iniettiva ed è suriettiva
III) Non è una funzione IV) E' una funzione, di dominio {1, 2, 3} , iniettiva ma non suriettiva
5) 125 6) I) 60 II) 0 7) Sì, perché è biiettiva 8) nessuna 9) solo c)

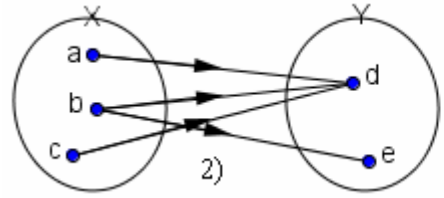
## 15. ESERCIZI SULL'INTERO CAPITOLO (risposte in fondo)

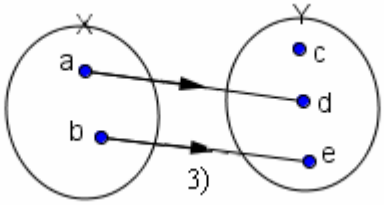
1) Considera la relazione rappresentata dal diagramma a frecce.

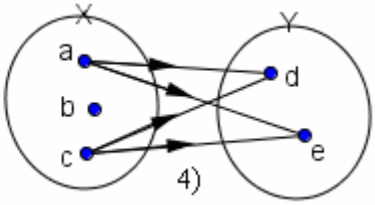



a) E' univoca? …
b) E' ovunque definita? …
c) E' iniettiva? …
d) E' suriettiva? …
e) Dominio = …
f) Codominio = …

*Stesse domande* a), b), c), d), e), f) dell'esercizio 1) per le tre relazioni qui sotto rappresentate.




5) Considera la relazione, fra l'insieme $X = \mathbb{N} - \{0, 1\}$ e sé stesso
(si usa dire: *dell'*insieme X *in* sé stesso), definita nel modo seguente: $m\ \mathrm{R}\ n \Leftrightarrow$ *m è un divisore di n*
a) E' univoca? … b) E' ovunque definita? … c) E' iniettiva? … d) E' suriettiva? …
e) Dominio = … f) Codominio = …

6) Considera la funz. $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ così definita: $f(x) = x \bmod 4 =$ *resto della divisione intera* $x : 4$
a) Allora si avrà: $f(9) =$ … $f(8) =$ … $f(18) =$ … $f(4) =$ … $f(2) =$ …
b) $f$ è iniettiva? … c) $f$ è suriettiva? … d) Dominio? … e) Codominio? …

7) Considera la seguente funzione:
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $f(k)$ = il più grande numero naturale che non supera $\sqrt{k}$
a) Allora si avrà: $f(20) =$ …. $f(9) =$ …. $f(3) =$ ….
b) Quali sono le controimmagini del numero 5? … c) E' iniettiva? … E' suriettiva? …

8) Considerata l'applicazione che ad ogni segmento di un piano $\pi$ associa il suo punto medio, indicane il dominio e il codominio e specifica se è iniettiva e se è suriettiva.

9) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x|$ a) Questa funzione è iniettiva? … b) E' suriettiva? …

10) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
a) Qui come insieme di partenza è proposto $\mathbb{R}$, ma qual è il dominio? …
b) Come devo modificare l'insieme di arrivo se voglio che la funzione risulti suriettiva? …

11) Qual è il dominio delle seguenti funzioni reali di variabile reale? a) $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-5}$ b) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-5}}$

12) Qual è il dominio e quale il codominio della funzione, reale di variabile reale, $y = \dfrac{1}{x^2+1}$?

13) Stabilisci quali sono il dominio D e il codominio C delle seguenti funzioni reali di variabile reale:
a) $y = 3x - 2$ b) $y = x^2$ c) $y = x^2 - x$ d) $y = -x^2 + 6x - 5$ e) $y = |x| - 1$ f) $y = \dfrac{1}{2x}$

**RISPOSTE**

1) a) sì b) sì c) no d) no e) {a, b, c, d}=X f) {e, f} 2) a) no b) sì c) no d) sì e) {a, b, c}=X f) {d, e}=Y
3) a) sì b) sì c) sì d) no e) {a, b}=X f) {d, e} 4) a) no b) no c) no d) sì e) {a, c} f) {d, e}=Y
5) a) no b) sì c) no d) sì e) X f) X 6) a) 1 0 2 0 2 b) no c) no d) $\mathbb{N}^*$ e) {0, 1, 2, 3}
7) a) 4 3 1 b) 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 c) no sì
8) Il dominio è l'insieme dei segmenti che giacciono su $\pi$, il codominio è l'insieme dei punti di $\pi$ ossia $\pi$ stesso; non è iniettiva, è invece suriettiva 9) a) no b) no
10) a) Il dominio è $\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$
b) Devo prendere come insieme di arrivo l'insieme dei soli reali >0, ossia l'intervallo $(0, +\infty)$
11) a) $[2, +\infty) - \{5\}$ b) $(-\infty, 2] \cup (5, +\infty)$ 12) Il dominio è tutto $\mathbb{R}$, il codominio è l'intervallo $(0, 1]$
13) a) $D = \mathbb{R},\ C = \mathbb{R}$ b) $D = \mathbb{R},\ C = [0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ c) $D = \mathbb{R},\ C = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right) = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq -\frac{1}{4}\right\}$
d) $D = \mathbb{R},\ C = (-\infty, 4] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 4\}$ e) $D = \mathbb{R},\ C = [-1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$ f) $D = C = \mathbb{R} - \{0\}$

# PRIMO INCONTRO COI VETTORI

## 1. DEFINIZIONE DI VETTORE

Un **segmento** si dice "**orientato**" quando è specificato quale dei due estremi sia da considerarsi come il "**primo estremo**" e quale come il "**secondo estremo**"; o, il che è lo stesso, quando è specificato quale sia il "**verso di percorrenza**" del segmento stesso.

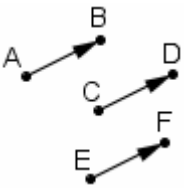



Ma quand'è che un segmento va pensato "*orientato*" e quando "*non*"?
… Beh, lo si capisce dal contesto; oppure, viene dichiarato in modo esplicito.
In "Chi ha paura della matematica?" l'uso del simbolo $\overline{AB}$ indica tipicamente un segmento *non* orientato, mentre una scrittura tipo AB può denotare sia un segmento orientato che un segmento non orientato.

Un **SEGMENTO ORIENTATO** è caratterizzato da
1) un "**MODULO**" (in Fisica si dice a volte: "intensità"), che è poi la misura numerica della sua lunghezza
2) una "**DIREZIONE**", che è quella della retta su cui il segmento giace
3) e un "**VERSO**", il suo verso di percorrenza.

**Due segmenti orientati si dicono "EQUIPOLLENTI" se hanno:**
- **stesso modulo**
- **stessa direzione**
- e **stesso verso**.

*Ecco tre segmenti orientati fra loro equipollenti …*




L'equipollenza è una relazione di equivalenza ( = riflessiva, simmetrica, transitiva) nell'insieme dei segmenti.

Si dice "**VETTORE**" l'**entità astratta che rappresenta ciò che hanno in comune tutti i segmenti orientati equipollenti ad uno dato.**

*… ed ecco il vettore* $\mathbf{v}$ *ad essi associato*



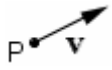

Si può scrivere $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

Se due o più segmenti orientati sono equipollenti fra loro, sono dunque "*rappresentanti*" di uno stesso vettore.

Il **MODULO** del vettore $\mathbf{v}$ si può indicare con v (senza il grassetto), oppure con $|\mathbf{v}|$.

Un "**vettore applicato**" è quell'entità costituita da un punto più un vettore che si immagina "partire" dal punto stesso (figura qui a fianco).

*Qui il vettore* $\mathbf{v}$ *è stato APPLICATO nel punto P*




Alcuni testi, **per contrassegnare i vettori**, non utilizzano il grassetto ma il corsivo; altri scrivono una freccia in alto, altri ancora una sottolineatura.
**Noi useremo il grassetto, la freccia quando il vettore viene indicato tramite uno dei segmenti orientati che lo definiscono, e per il "vettore nullo" il grassetto con freccia.**

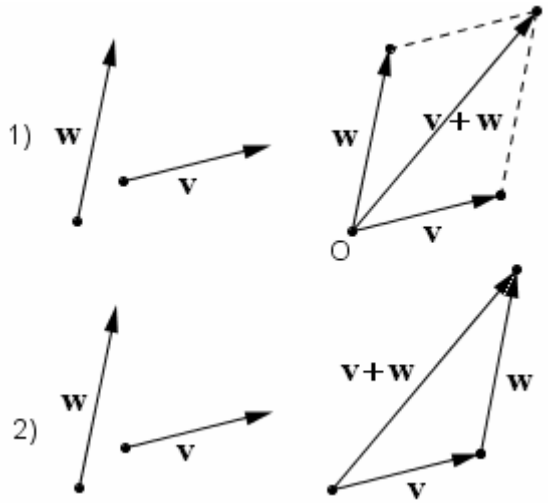
Simbologie in uso:
$\mathbf{v}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{v}$, $\underline{\mathbf{v}}$, …

## 2. SOMMA E DIFFERENZA DI DUE VETTORI; VETTORI COMPONENTI

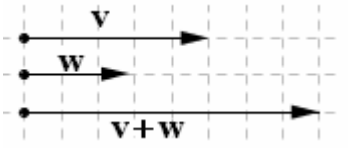
Si dice "**SOMMA**" di due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ il vettore ottenibile in uno qualsiasi dei seguenti due modi alternativi 1) o 2), fra loro equivalenti:

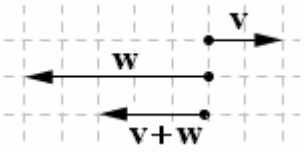
1) ("REGOLA DEL PARALLELOGRAMMO")
applicando $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ in uno stesso punto O
e prendendo il vettore avente come rappresentante
il segmento orientato che parte da O
e termina nel vertice opposto del **parallelogrammo**
che ha come lati consecutivi O$\mathbf{v}$, O$\mathbf{w}$

2) **applicando** $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ "**consecutivamente**",
come illustrato in figura,
e prendendo il vettore avente come rappresentante
il segmento orientato che parte dal primo estremo
del segmento che rappresenta $\mathbf{v}$
e termina nel secondo estremo
del segmento che rappresenta $\mathbf{w}$ .

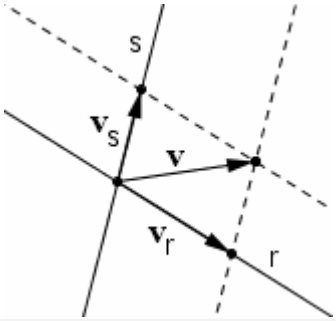


Nelle figure seguenti diamo due esempi di somma fra due vettori che hanno la stessa direzione.
Meglio il metodo 2), in questo caso.
Comunque, in teoria resta valido anche il metodo 1), purché si pensi a un parallelogrammo "degenere".

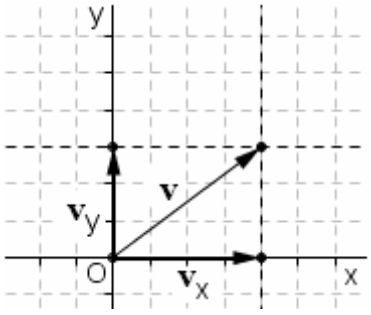



Sovente è richiesto di determinare i "**vettori componenti**" di un vettore dato lungo due certe direzioni.
Si tratta dei due vettori, aventi *quelle* direzioni, la cui somma sia uguale al vettore assegnato.
Essi si possono ricavare tracciando opportune parallele, come negli esempi che seguono:

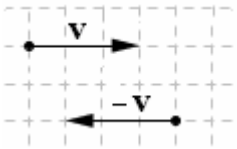



Ecco i due vettori componenti $\mathbf{v}_r$, $\mathbf{v}_s$ di un vettore $\mathbf{v}$,
lungo le direzioni delle due rette r ed s …




… ed ecco i vettori componenti di un vettore
lungo le direzioni degli assi
di un sistema di riferimento cartesiano.

Due **vettori** si dicono "**OPPOSTI**" se differiscono solo per il verso.
Il vettore opposto di un vettore $\mathbf{v}$ è indicato col simbolo $-\mathbf{v}$.



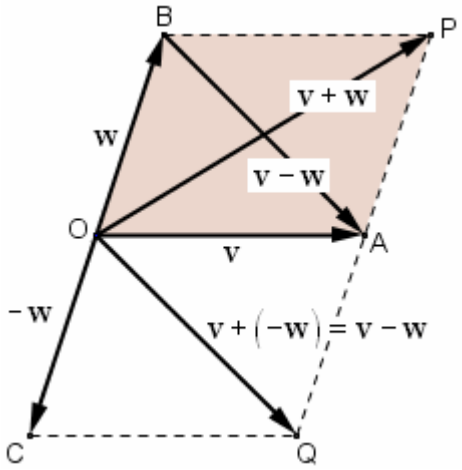

La somma di due vettori opposti è il **VETTORE NULLO** $\vec{\mathbf{0}}$,
*(per meglio rimarcarne la natura,*
*in modo che non si confonda col numero zero,*
*per indicarlo metteremo sempre la freccia)*,
che ha

- **modulo nullo**
- **direzione e verso *indeterminati*.**

Si dice "**DIFFERENZA**" di due vettori,
la somma del primo con l'opposto del secondo.

$$\mathbf{v}-\mathbf{w}=\mathbf{v}+(-\mathbf{w})$$

Abbiamo visto che per *sommare* due vettori si può considerare
un certo parallelogrammo e una certa sua diagonale;
bene, la *differenza* fra gli stessi vettori
sarà rappresentata dall'*altra* diagonale,
come mostra la figura, nella quale

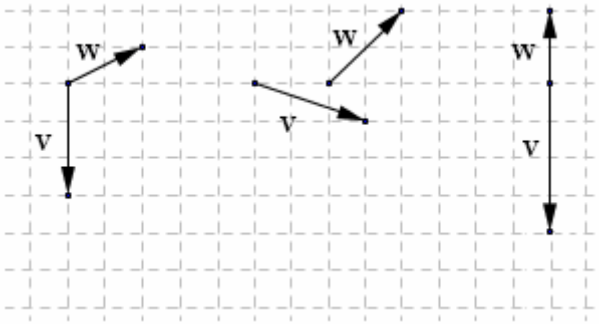



$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{v} \quad \overrightarrow{OB}=\mathbf{w} \quad \overrightarrow{OC}=-\mathbf{w}$$

$$\overrightarrow{OP}=\mathbf{v}+\mathbf{w} \qquad \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OQ}=\mathbf{v}+(-\mathbf{w})=\mathbf{v}-\mathbf{w}$$

**ESERCIZI** (risposte a pagina 489)

1) Esegui prima la somma $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ e poi la differenza $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ delle coppie di vettori in figura.




2) Il modulo della somma di due vettori è uguale alla somma dei loro moduli?

3) La differenza di due vettori è quel vettore che sommato col secondo permetterebbe di riottenere il primo?

4) La somma di due vettori gode della proprietà commutativa?

5) Si può effettuare la sottrazione $\vec{\mathbf{0}}-\mathbf{v}$ ?

## 3. GRANDEZZE SCALARI E GRANDEZZE VETTORIALI

Una **GRANDEZZA** si dice "**VETTORIALE**" quando per rappresentarla occorre un **vettore**.

- ESEMPI: una forza, o una velocità, o uno spostamento.

Una **GRANDEZZA** si dice invece "**SCALARE**" se per rappresentarla basta un semplice **numero**, e non serve (o non ha senso) un vettore.

- ESEMPI: una temperatura, una massa, una distanza, un intervallo di tempo.

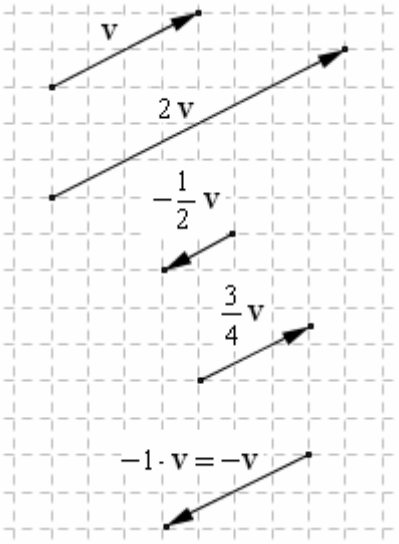
E il *sostantivo* "*scalare*" è impiegato quando si vuole indicare un *numero*, in contrapposizione a "vettore".

## 4. PRODOTTO DI UN VETTORE PER UNO SCALARE

Si dice
"**PRODOTTO DI UN VETTORE $\mathbf{v}$ PER UNO SCALARE $\alpha$**"
il vettore che ha:

- modulo uguale al valore assoluto di $\alpha$ per il modulo di $\mathbf{v}$
- stessa direzione di $\mathbf{v}$
- stesso verso di $\mathbf{v}$, se $\alpha > 0$, verso opposto a quello di $\mathbf{v}$ se $\alpha < 0$

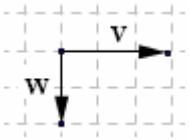
Se poi $\alpha = 0$, oppure $\mathbf{v} = \vec{\mathbf{0}}$,
il risultato dell'operazione $\alpha\mathbf{v}$ è il vettore nullo $\vec{\mathbf{0}}$.




**ESERCIZIO** (risposte a pagina 489)

6) Considera i due vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ in figura, ed esegui le seguenti operazioni:

*a*) $2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ *b*) $3\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ *c*) $\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{w}$ *d*) $\frac{2}{3}(-3\mathbf{v} + \mathbf{w})$




Per questo esercizio, gioverà tener presente che, ad esempio, l'operazione $3\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ può essere interpretata come somma $3\mathbf{v} + (-2\mathbf{w})$

**PROPRIETA' della somma di vettori e del prodotto di un vettore per uno scalare**

Si può osservare, e dimostrare, che qualunque siano i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e i numeri reali $\alpha$, $\beta$, si ha sempre

$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ (*commutativa*)

$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (*associativa*)

$(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$

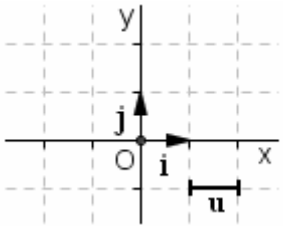
$(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ (*distributiva rispetto alla somma di scalari*)

$\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$ (*distributiva rispetto alla somma di vettori*)

## 5. VERSORI; VERSORI DEGLI ASSI CARTESIANI; COMPONENTI CARTESIANE

Si dice **VERSORE** un **vettore che abbia MODULO UGUALE A 1.**

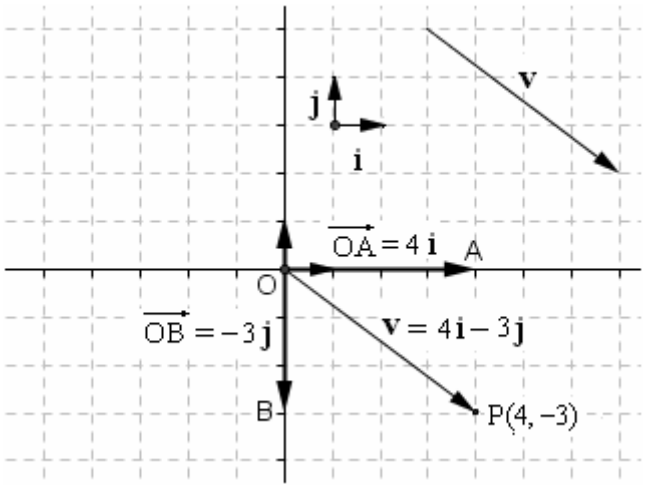
In un riferimento cartesiano ortogonale sul piano, i "versori degli assi" sono i due vettori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ rappresentati nella figura qui a fianco.



Quando un vettore $\mathbf{v}$
è rappresentato come *combinazione lineare*
dei **VERSORI DEGLI ASSI CARTESIANI**

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$$

i due numeri reali relativi $v_x$ e $v_y$ sono chiamati
"le **COMPONENTI CARTESIANE**" di $\mathbf{v}$.



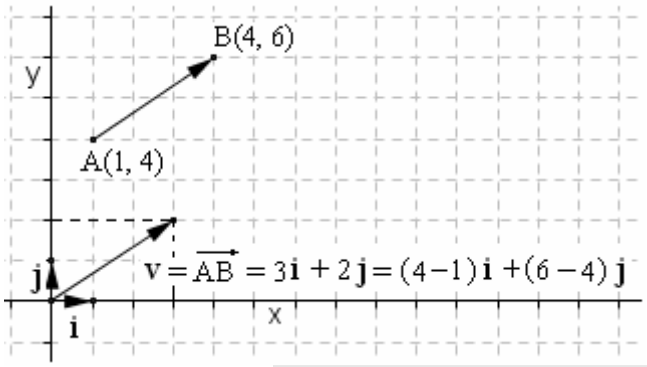

Si vede facilmente che
**le componenti cartesiane di un vettore $\mathbf{v}$**
**coincidono con le coordinate cartesiane**
**del punto che sta all'estremità del vettore stesso,**
**qualora questo venga applicato nell'origine.**

Supponiamo poi di avere un vettore,
rappresentato da un segmento orientato AB
i cui estremi abbiano coordinate

$$A(x_1, y_1) \text{ e } B(x_2, y_2).$$

Allora il vettore $\overrightarrow{AB}$
potrà essere scritto come

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$




Il bello è che le operazioni di somma fra vettori
e di prodotto di un vettore per uno scalare
potranno essere facilmente ricondotte ad *operazioni sulle componenti*.

Infatti, se $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$, e se $\alpha$ è uno scalare, avremo:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a + c)\mathbf{i} + (b + d)\mathbf{j} \qquad \alpha\mathbf{v} = \alpha a\,\mathbf{i} + \alpha b\,\mathbf{j}$$

Il **modulo** del vettore $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ è poi dato dalla formula

$$\boxed{v = |\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Ad esempio, se
$\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$; $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j}$
sarà:

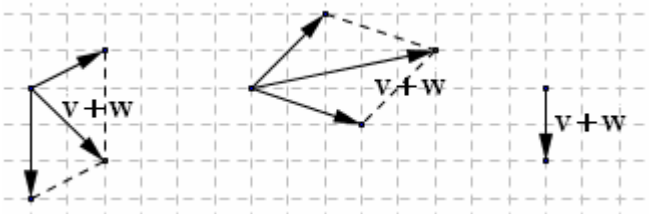
$\mathbf{v} + \mathbf{w} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

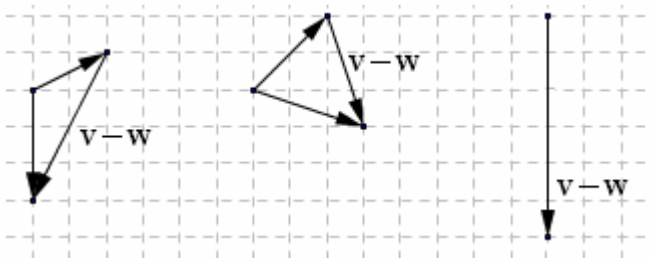
$3\mathbf{v} = -12\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$

$|\mathbf{v}| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

**RISPOSTE** agli esercizi delle pagg. 487, 488

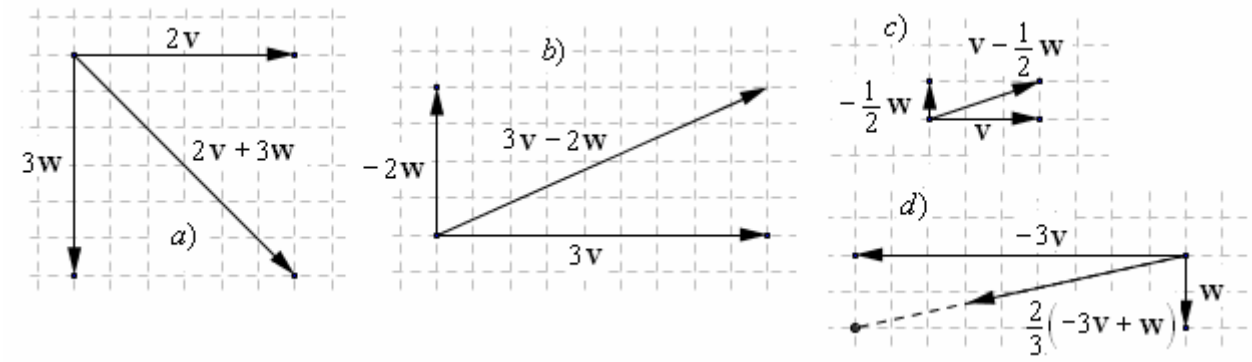
1)




2) In generale, no! Ciò avviene soltanto nel caso i due vettori abbiano ugual direzione e ugual verso
3) Sì: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}$ se e solo se $\mathbf{c} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$ 4) Sì 5) Sì, e il risultato è il vettore $-\mathbf{v}$

6)



## 6. PRODOTTO SCALARE DI DUE VETTORI

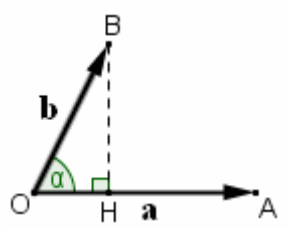
NON deve essere confuso col prodotto di un vettore per uno scalare sopra presentato, che è tutt'altra cosa.

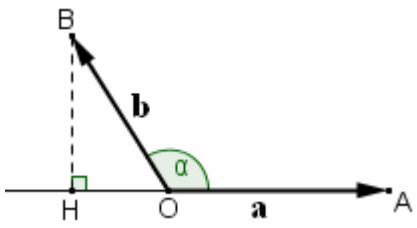
Il prodotto scalare di due vettori è un'operazione che ha per *termini due vettori*, e per *risultato uno scalare*.

Dati due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, si dice "prodotto scalare" fra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, e si indica col simbolo $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ (leggi: $\mathbf{a}$ scalare $\mathbf{b}$) lo scalare ( = il numero) ottenibile nel modo seguente:

si moltiplica il modulo di $\mathbf{a}$ per la misura con segno del segmento
che si ottiene applicando $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ nello stesso punto e proiettando $\mathbf{b}$ su $\mathbf{a}$;
misura "con segno" nel senso che si prende

- segno positivo (+) se tale proiezione è parzialmente sovrapposta ad $\mathbf{a}$,
- segno negativo (–) se tale proiezione sta sul prolungamento di $\mathbf{a}$ dalla parte del punto di applicazione.




$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a\cdot(+OH) = +a\cdot OH$ $\qquad$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a\cdot(-OH) = -a\cdot OH$

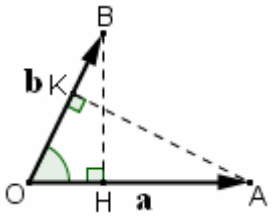
In Fisica, il "lavoro" è definito come il prodotto di uno spostamento per la proiezione (con segno) della forza lungo la direzione dello spostamento. Quindi il "lavoro" W si presta ottimamente a essere definito tramite l'operazione di prodotto scalare:
$W = \mathbf{s}\cdot\mathbf{F} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$
(più sotto metteremo in rilievo che il prodotto scalare è *commutativo*)

Il prodotto scalare di due vettori è quindi

- $> 0$ se l'*angolo* $\alpha$ che i due vettori formano è *acuto*,
- $< 0$ se l'*angolo* $\alpha$ che i due vettori formano è *ottuso*
- $= 0$ se i due vettori sono *perpendicolari* $(\alpha = 90°)$

Si potrebbe dimostrare che il valore del prodotto scalare non cambia se scambiamo il ruolo dei due vettori; ossia, se anziché moltiplicare il modulo di $\mathbf{a}$ per la proiezione con segno di $\mathbf{b}$ su $\mathbf{a}$ noi moltiplichiamo invece il modulo di $\mathbf{b}$ per la proiezione con segno di $\mathbf{a}$ su $\mathbf{b}$.

Perciò il prodotto scalare è un'operazione *commutativa*: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$




$a\cdot OH = b\cdot OK$
come si può facilmente dimostrare pensando che i due triangoli OAK e OBH sono simili, quindi vale la proporzione
OA:OB = OK:OH
da cui appunto
$OA\cdot OH = OB\cdot OK$

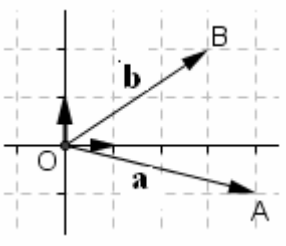
Si potrebbe pure dimostrare (vedi pag. 495, secondo riquadro) che se in un rif. cartesiano ortogonale si ha

$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$

$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$

allora sarà

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = a_x b_x + a_y b_y}$$




La figura mostra i due vettori

$\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$

$\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

Bene, il loro prodotto scalare è

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 4\cdot 3 + (-1)\cdot 2 = 12 - 2 = 10$

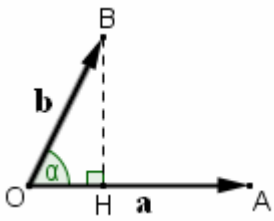
Infine (figura a fianco) la Goniometria insegna che, detto $\alpha$ l'angolo formato dai due vettori, risulta (segno compreso!)

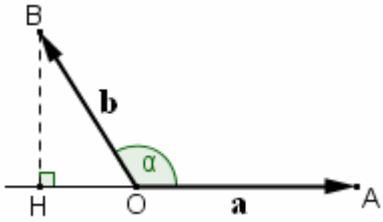
$OH = b\cdot\cos\alpha$

per cui si ha

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\alpha$

(il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto dei loro moduli, moltiplicato per il "*coseno*" (*cos*) dell'angolo che i due vettori formano).




In entrambi i casi, si ha, compreso il segno,
$OH = b\cdot\cos\alpha$.

Per il "*coseno*" di un angolo, vedi Trigonometria sul Vol. 2

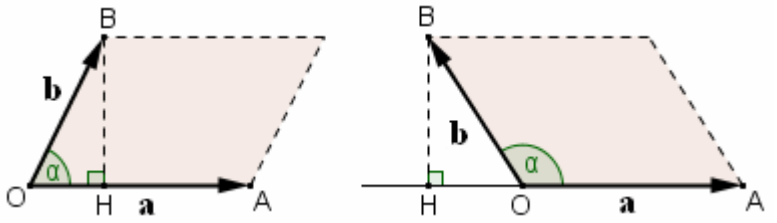
## 7. PRODOTTO VETTORIALE (O PRODOTTO "ESTERNO")

Il prodotto "scalare" coinvolgeva la proiezione (con segno) di uno dei due vettori nella direzione dell'altro; il prodotto "vettoriale", o "esterno", chiama invece in causa la proiezione di uno dei due vettori nella direzione *perpendicolare* all'altro vettore.

A differenza del prodotto scalare, che dava come risultato uno scalare, il prodotto vettoriale (o "esterno") di due vettori dà come *risultato ancora un vettore*. Vediamo.

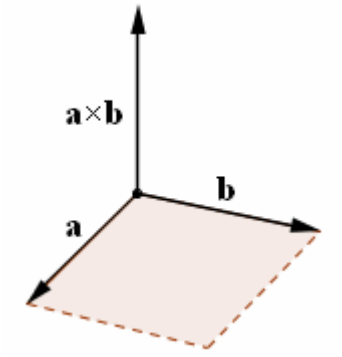
Dati due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, si dice "prodotto vettoriale" fra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, e si indica col simbolo $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (si legge: "$\mathbf{a}$ vettoriale $\mathbf{b}$" o "$\mathbf{a}$ vettore $\mathbf{b}$"; alcuni lo scrivono come $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$), il vettore seguente:

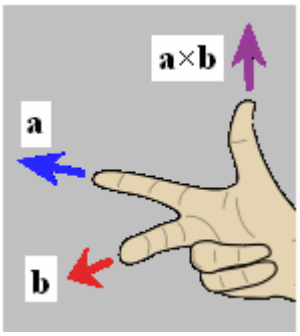
- ha come **modulo** il prodotto del modulo di $\mathbf{a}$ per la proiezione BH (senza segno) del vettore $\mathbf{b}$ nella direzione perpendicolare ad $\mathbf{a}$; si osserva che tale prodotto equivale all'area del parallelogramma individuato dai due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, e che il prodotto vettoriale è *nullo* qualora i due vettori abbiano la *stessa direzione*




$a \cdot BH = area\ \ parallelogrammo$

- ha **direzione** perpendicolare a quella del *piano* individuato da $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$;
- ha un **verso** ottenibile con la cosiddetta "**regola della mano destra**", illustrata dalla figura qui sotto.




Al prodotto vettoriale è stata assegnata per definizione direzione perpendicolare al piano individuato da $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in maniera che, procedendo a ritroso, dalla direzione di $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ sia possibile risalire al piano che contiene i due vettori; il verso convenzionale dato dalla "right hand rule", infine, permette, a partire dalla conoscenza di $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, di ricostruire la posizione spaziale di $\mathbf{a}$ rispetto a $\mathbf{b}$.

In Fisica, incontriamo ad esempio il prodotto vettoriale nella definizione di "momento di una forza".

E' facile rendersi conto che scambiando l'ordine dei due vettori, il modulo del loro prodotto vettoriale rimane invariato mentre cambia il suo verso.

Perciò il prodotto vettoriale è un'operazione *anticommutativa*: $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$

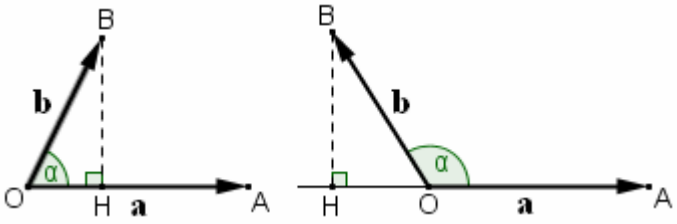
Dalla Goniometria si sa che (figura a fianco) detto $\alpha$ l'angolo formato dai due vettori, risulta (segno compreso!)

$$BH = b \cdot sen\,\alpha$$

per cui si ha

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\,sen\,\alpha$$

(il *modulo* del prodotto vettoriale di due vettori è uguale al prodotto dei loro moduli, moltiplicato per il "*seno*" (*sen*) dell'angolo che i due vettori formano).




In entrambi i casi, si ha, compreso il segno,

$$BH = b \cdot sen\,\alpha\ .$$

Per il "*seno*" di un angolo, vedi Trigonometria sul Vol. 2

## 8. PRODOTTO "MISTO"

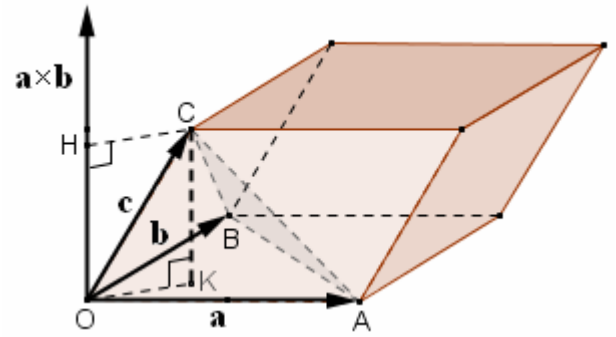
Dati tre vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, il loro "prodotto misto" è il risultato dell'operazione

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\,.$$

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ dà come risultato un vettore, perpendicolare al piano individuato da $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$;
tale vettore, moltiplicato scalarmente per $\mathbf{c}$, dà infine come risultato uno *scalare*.

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ è dunque uno *scalare*, positivo, negativo o nullo.

La figura qui sotto mostra che il *valore assoluto* di tale scalare equivale
al volume del *parallelepipedo* individuato dai tre vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$,
oppure, il che è lo stesso, a 6 volte il volume del *tetraedro* individuato dagli stessi vettori.




$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} =$$
$$= |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cdot \mathrm{OH} =$$
$$= \textit{area base}\cdot \mathrm{KC} =$$
$$= \textit{volume parallelepipedo}$$

In quanto al *segno* di $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$, esso sarà *positivo* se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ formano, nell'ordine,
una *terna* tale che i tre vettori possano essere immaginati
rispettivamente come l'indice $(\mathbf{a})$, il medio $(\mathbf{b})$ e il pollice $(\mathbf{c})$ di una mano destra;
*negativo in caso contrario*.

Ritornando al *valore assoluto* di un prodotto misto, questo non dipende

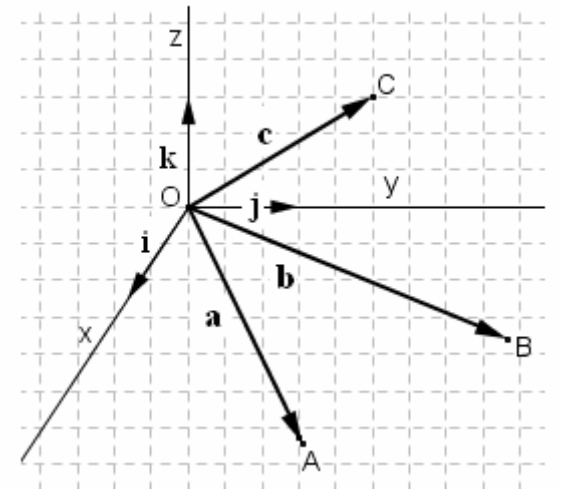
- né dall'ordine con cui vengono presi i 3 vettori,
- e nemmeno dall'ordine in cui vengono effettuate le operazioni di prodotto scalare e prodotto vettoriale.

Il prodotto misto di tre vettori è uguale a 0
se e solo se
i tre vettori sono *complanari*.
Proprio per questo, nella geometria in tre dimensioni,
il prodotto misto viene utilizzato per fare il
"*test di complanarità*",
approfittando anche del fatto che,
come si potrebbe dimostrare, dette

$$a_x,\ a_y,\ a_z$$

le componenti di $\mathbf{a}$ rispetto alla terna dei versori degli assi
di un riferimento cartesiano ortogonale nello spazio
(approfondimenti al paragrafo successivo),
e analogamente per $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$,
si ha la comoda espressione seguente,
che fa uso di un *determinante* del 3° ordine:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$




$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

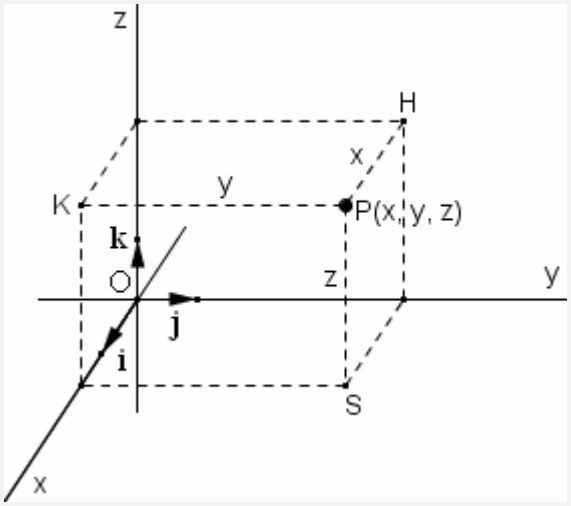
Ad esempio, se $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, è $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \ldots = +13$

## 9. RIFERIMENTI CARTESIANI NELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE

Abbiamo menzionato per un attimo, parlando di "prodotto misto", i riferimenti cartesiani in 3 dimensioni.

Nello spazio tridimensionale è possibile fissare un riferimento cartesiano
scegliendo un punto O che faccia da "origine" comune per tre "number lines",
le quali in genere vengono prese ortogonali ( = perpendicolari) a due a due,
e tali che i rispettivi versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ formino una terna per cui $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$
(terna "*levogira*": un osservatore posto con i piedi in O e con la testa rivolta nel verso di $\mathbf{k}$
vede che il vettore $\mathbf{i}$, per sovrapporsi al vettore $\mathbf{j}$ tramite una rotazione <180°,
deve ruotare in verso *antiorario*).

Gli assi aventi le direzioni di $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vengono detti rispettivamente
"asse delle ascisse", "asse delle ordinate" e "asse delle quote",
e associati (di norma) ai simboli *x*, *y*, *z*.
Ogni punto dello spazio tridimensionale sarà individuato da una terna di coordinate (*x*, *y*, *z*)
dette, rispettivamente, la sua "ascissa", la sua "ordinata" e la sua "quota".

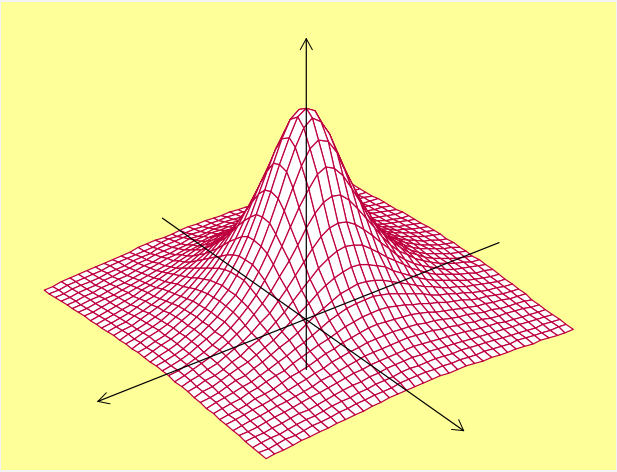



Per un punto P(*x*, *y*, *z*):

- l'ascissa *x* è la distanza (con segno) dal piano *yz*,
- l'ordinata *y* è la distanza (con segno) dal piano *xz*
- e la quota *z* è la distanza (con segno) dal piano *xy*.

In un sistema O*xyz* siffatto:

- la formula per la distanza fra due punti $P_1$ e $P_2$ è $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- un'equazione di 1° grado nelle tre variabili *x*, *y*, *z* ( $ax + by + cz + d = 0$ ) individua un *piano*
  (ad esempio, i tre piani coordinati *xy*, *xz*, *yz* hanno rispettivamente equazioni: $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ )
- un'equazione della forma $z = f(x, y)$, che esprime una funzione in due variabili
  ( = 2 variabili indipendenti *x*, *y* e, ovviamente, *z* come variabile dipendente) individua una *superficie*.



Ecco, ad esempio,
nell'immagine qui a fianco,
un abbozzo del grafico
della funzione di 2 variabili

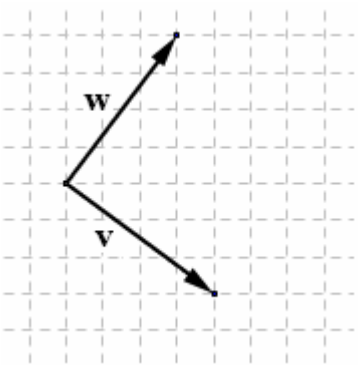
$$z = f(x, y) = \frac{4}{x^2 + y^2 + 1}$$

La figura è stata tracciata
utilizzando il *freeware*
**Winplot** di **Richard Parris**
rparris@exeter.edu
http://math.exeter.edu/rparris

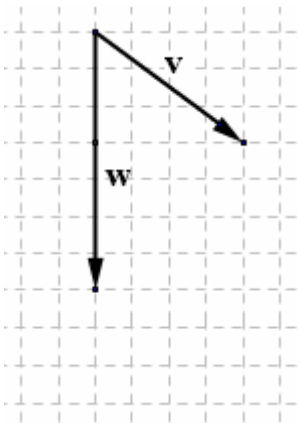
## 10. ESERCIZI

1) Con riferimento alle figure seguenti, disegna $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ e calcola $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ e il modulo di $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$.
Il lato di ciascun quadretto misura 1.

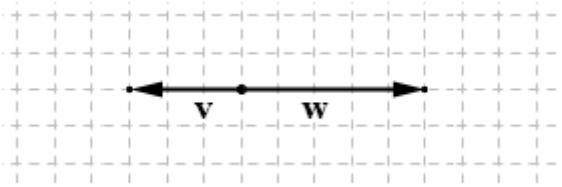
a)



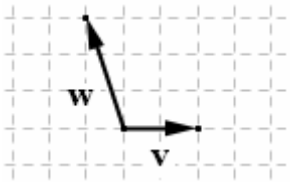

b)




c)




d)




2) Su di un piano cartesiano, $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono i versori dell'asse *x* e dell'asse *y* rispettivamente.
Sono dati i vettori $\mathbf{a}=-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$; $\mathbf{b}=\mathbf{i}-4\mathbf{j}$. Determina il valore

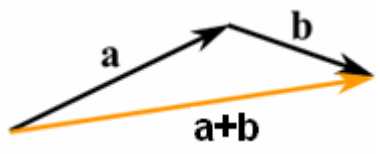
a) di $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ b) di $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ c) di $-\mathbf{a}$ d) di $2\mathbf{a}$ e) di $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ f) del modulo di $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ g) di $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$

3) Stessi quesiti dell'esercizio 2) per $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$; $\mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$

4) Stessi quesiti dell'esercizio 2) per $\mathbf{a}=12\mathbf{i}-5\mathbf{j}$; $\mathbf{b}=-\mathbf{i}$

5) Da www.mathsisfun.com:

*You can add two vectors by simply joining them head-to-tail: … And it doesn't matter which order you add them, you get the same result.*







Se si considera un triangolo ABC e i tre vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, sommandoli si otterrà sempre …

6) I vettori $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}$; $\mathbf{b}=10\mathbf{i}-6\mathbf{j}$ sono fra loro ortogonali ( = perpendicolari).
Come lo si può dimostrare?

7) Se $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}$; $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}$,

a che condizione devono soddisfare i 4 coefficienti affinché $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ siano paralleli?

8) Il modulo del vettore $\mathbf{v}=a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j}$ si può calcolare facendo $v=\sqrt{a^2+b^2}$. Dimostra questa formula.

9) E' vero che, qualunque sia il vettore $\mathbf{v}$, si ha sempre $|\mathbf{v}|=\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$?

10) Scrivi l'espressione che fornisce il versore avente la stessa direzione e verso del vettore $\mathbf{a}=7\mathbf{i}-24\mathbf{j}$

11) Dimostra che i tre vettori $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ sono complanari.

12) Riconosci quali fra le seguenti sono terne di vettori complanari:
a) $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$ b) $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=-2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ c) $\mathbf{a}=-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

13) Quanto misura il volume del tetraedro individuato dai tre vettori seguenti?
a) $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$ b) $\mathbf{a}=6\mathbf{i}$, $\mathbf{b}=\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

14) Se $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ è una terna ortonormale levogira, allora
a) $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\ldots$ b) $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=\ldots$ c) $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=\ldots$ d) $(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\cdot\mathbf{k}=\ldots$

15) Se A, B sono due punti di un piano, qual è il luogo dei punti P del piano per i quali $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$?

16) Verifica con ragionamenti ed esempi la validità delle proprietà illustrate nello specchietto che segue.

**PROPRIETA' DELLE OPERAZIONI DI PRODOTTO SCALARE, ESTERNO, MISTO**

**Prodotto SCALARE**

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (*commutativa*)

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ (*distributiva*)

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}$ (*distr. gen.*)

$(\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(\alpha\mathbf{b})=\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

**Prodotto ESTERNO**

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ (*anticommutativa*)

$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ (*distributiva*)

$(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\alpha\mathbf{b})=\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

*mentre NON vale la proprietà associativa*

**Prodotto MISTO:** $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$; $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$; $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}$

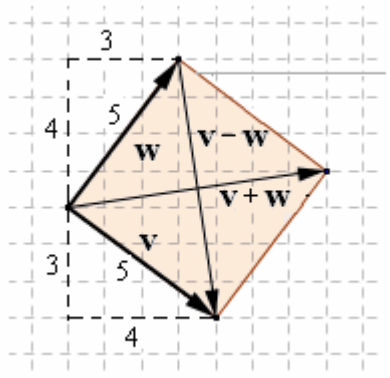
Le proprietà del prodotto scalare ci consentono di dimostrare che, se $\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}}$ sono i versori di un riferimento cartesiano ortogonale, allora vale una formula notevole ed elegante.

*Essendo* $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1$ *e* (*poiché* $\mathbf{i}\perp\mathbf{j}$) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=0$, *si avrà* $\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j})\cdot(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j})=$

$=a_xb_x\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+a_xb_y\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+a_yb_x\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+a_yb_y\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=a_xb_x\cdot1+a_xb_y\cdot0+a_yb_x\cdot0+a_yb_y\cdot1=\boxed{a_xb_x+a_yb_y}$

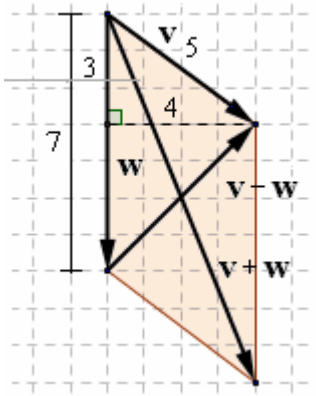
**RISPOSTE**

1a)



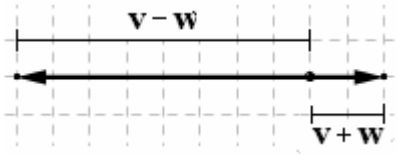

$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0$; $|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|=25$

1b)



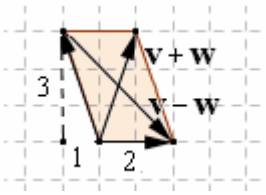

$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}=21$; $|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|=28$

1c)




$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=-15$; $|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|=0$

1d)




$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=-2$; $|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|=6$

2) a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ b) $\mathbf{a}-\mathbf{b}=-4\mathbf{i}+6\mathbf{j}$ c) $-\mathbf{a}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ d) $2\mathbf{a}=-6\mathbf{i}+4\mathbf{i}$ e) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-11$
f) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=10$ (basterà fare un disegno coi vettori applicati nell'origine …) g) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=13$

3) a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=2\mathbf{i}$ b) $\mathbf{a}-\mathbf{b}=2\mathbf{j}$ c) $-\mathbf{a}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}$ d) $2\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ e) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ f) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=2$ g) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=2$

4) a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=11\mathbf{i}-5\mathbf{j}$ b) $\mathbf{a}-\mathbf{b}=13\mathbf{i}-5\mathbf{j}$ c) $-\mathbf{a}=-12\mathbf{i}+5\mathbf{j}$ d) $2\mathbf{a}=24\mathbf{i}-10\mathbf{j}$ e) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-12$
f) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=5$ g) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=169$

5) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{\mathbf{0}}$

6) Ad esempio, calcolandone il prodotto scalare e verificando che è nullo: $3\cdot10+5\cdot(-6)=0$; oppure disegnando, e verificando che i coefficienti angolari delle due direzioni sono fra loro antireciproci.

7) Le due coppie $(a_x,a_y)$ e $(b_x,b_y)$ devono essere proporzionali:
una di esse deve potersi ottenere moltiplicando l'altra per un opportuno fattore.

8) Basta applicare il vettore nell'origine O. La punta della freccia sarà il punto P di coordinate $(a,b)$.
Ma calcolando la distanza OP si trova proprio l'espressione in questione.

9) Sì 10) Il modulo del vettore $\mathbf{a}$ è 25. Allora il vettore $\frac{1}{25}(7\mathbf{i}-24\mathbf{j})$ è il versore richiesto.

11) Basta calcolare il valore del prodotto misto attraverso un opportuno determinante del 3° ordine:
lo si troverà uguale a 0. Anche: si può notare che risulta $\mathbf{c}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, da cui la complanarità.

12) a) No b) Sì c) Sì 13) a) 1/3 b) 1 14) a) $\mathbf{i}$ b) $-\mathbf{i}$ c) 0 d) 1

15) E' la retta di quel piano perpendicolare ad AB e passante per A.

# VELOCITA'

- **Un'automobile A, sul lungo rettilineo di un'autostrada, percorre 210 km in 2 ore;
  un'altra automobile B percorre 153 km in 1 ora e mezza;
  una terza automobile C fa 26 km e ci mette 15' .
  Quale delle tre automobili è andata più veloce?**

Risponderemo andando a calcolare **quanti km sono stati percorsi da ciascuna automobile nell'unità di tempo** (possiamo prendere come unità di tempo comune **ad esempio 1 ora**), ossia **dividendo il numero di km percorsi per il numero di ore impiegate a percorrerli**.
**Ciò che otterremo da questo calcolo sarà la "velocità" dell'automobile.**

Dunque:

Velocità automobile $A = \frac{210\ \text{km}}{2\ \text{h}} = \frac{210}{2}\frac{\text{km}}{\text{h}} = 105\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 105\ \text{km/h} = 105\ \text{"km all'ora"}$ (cioè, km per ogni ora di viaggio)

Velocità $B = \frac{153\ \text{km}}{1{,}5\ \text{h}} = \frac{153}{1{,}5}\ \text{km/h} = 102\ \text{km/h}$

Velocità $C = \frac{26\ \text{km}}{0{,}25\ \text{h}} = \frac{26}{0{,}25}\ \text{km/h} = 104\ \text{km/h}$ $\quad (15' = \frac{15}{60}\text{h} = \frac{1}{4}\text{h} = 0{,}25\text{h})$

L'automobile più veloce è quindi stata la A.
Evidentemente, abbiamo confrontato le tre velocità "complessive",
ossia le tre **velocità "medie"**.
Non abbiamo analizzato cosa è accaduto *durante* i tre percorsi.
Può darsi ad esempio che, fra il km 20 e il km 30,
la macchina A abbia dovuto rallentare per problemi di traffico
e abbia poi "recuperato" nei km rimanenti;
ma nei nostri calcoli questo non compare.

Ricapitoliamo.

$\boxed{v = \frac{s}{t}}$ o meglio $\boxed{v_m = \frac{s}{t}}$ $\quad \boxed{\text{velocità media} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato a percorrerlo}}}$

**Se siamo interessati alla rapidità di movimento di un'automobile** (ad es., per fissare le idee, della A) **"in un certo istante"**, ad esempio dopo esattamente 10' dalla partenza, cosa faremo?
**Considereremo un intervallo di tempo molto piccolo, contenente al suo interno l'istante in questione** (che so: l'intervallo dal minuto "10" al minuto "10 +1 secondo")
e andremo a calcolare la velocità media in *quell'*intervallino di tempo.
Questa viene chiamata "velocità istantanea" nell'istante in esame.

Rifletti, comunque:
considerando UN SINGOLO istante, l'automobile è "ferma", come in una fotografia;
si dice "velocità IN UN ISTANTE" per intendere la
VELOCITA' MEDIA IN UN INTERVALLINO DI TEMPO MOLTO PICCOLO,
CHE CONTENGA L'ISTANTE CONSIDERATO.

velocità istantanea nell'istante t $\quad \boxed{v_i = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$ $\quad (t_1 \le t \le t_2,\ t_1 \ne t_2;\ \ t_1 \text{ molto vicino a } t_2)$

$s_1$ = spazio percorso dall'istante 0 all'istante $t_1$
$s_2$ = spazio percorso dall'istante 0 all'istante $t_2$
quindi $s_2 - s_1 = \Delta s$ = spazio percorso nell'intervallino di tempo da $t_1$ a $t_2$

NOTA Il simbolo $\Delta$ (*delta*) è sovente utilizzato, in matematica, per indicare "differenza".
Ad esempio, fra uno studente e un professore che abbiano rispettivamente 15 anni e 47 anni, c'è una differenza di età $\Delta e = e_p - e_s = 47 - 15 = 32$ (si legge *delta e*)

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{velocità istantanea in un certo istante fissato t =} \\ = \dfrac{\text{spazio percorso in un piccolo intervallo di tempo contenente l'istante t considerato}}{\text{intervallo di tempo}}\end{array}}$$

- La seguente tabella riporta i metri percorsi da un centometrista, dopo *tot* secondi dal "via".
  Quale è stata, in metri al secondo, la velocità media del centometrista?
  Quale la velocità media nei primi 5 secondi? E negli ultimi 10 metri?
  Quale la velocità istantanea dopo 3 secondi dalla partenza? E nel tagliare il traguardo?

| 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 5,5 | 6 | 6,5 | 7 | 7,5 | 8 | 8,5 | 9 | 9,5 | 9,97 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4,6 | 9,4 | 14,4 | 19,4 | 24,4 | 29,4 | 34,45 | 39,5 | 44,55 | 49,6 | 54,65 | 59,7 | 64,75 | 69,8 | 74,85 | 79,9 | 84,95 | 90 | 95,1 | 100 |

VELOCITA' MEDIA : $v_m = \frac{s}{t}$

Complessivamente : $v_m = \frac{s}{t} = \frac{100\,m}{9,97\,s} \approx 10,03\ m/s$

Nei primi 5 secondi : $v_m = \frac{s}{t} = \frac{49,6\,m}{5\,s} = 9,92\ m/s$

Negli ultimi 10 metri : $v_m = \frac{s}{t} = \frac{10\,m}{(9,97-9)\,s} \approx 10,31\ m/s$

VELOCITA' ISTANTANEA : $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

All'istante $t = 3$, la possiamo approssimativamente valutare

facendo: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{34,45-29,4}{3,5-3}\ m/s = \frac{5,05}{0,5}\ m/s = 10,1\ m/s$

oppure facendo: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{29,4-24,4}{3-2,5}\ m/s = \frac{5}{0,5}\ m/s = 10\ m/s$

oppure ancora facendo: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{34,45-24,4}{3,5-2,5}\ m/s = \frac{10,05}{1}\ m/s = 10,05\ m/s$

Possiamo osservare che la velocità istantanea è determinabile solo "approssimativamente":
il suo valore dipende infatti dal particolare intervallino di tempo considerato,
e quest'ultimo può essere scelto in modi diversi: basta che sia "piccolo, molto piccolo".
Questa ambiguità viene sciolta, almeno da un punto di vista teorico,
ad un livello più avanzato della matematica, attraverso i concetti di "limite" e di "derivata".

Per la *velocità istantanea nel tagliare il traguardo*, possiamo approssimarla in

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{100-95,1}{9,97-9,5}\ m/s = \frac{4,9}{0,47}\ m/s \approx 10,43\ m/s$

Certo, se avessimo a disposizione una tabella più dettagliata
(ad esempio, che desse gli spazi percorsi a intervalli di 0,1 s anziché di 0,5 s)
le nostre valutazioni della velocità istantanea potrebbero essere più precise.

In definitiva, **tenendo comunque conto che**
**la velocità media è riferita a un intervallo di tempo qualsiasi,**
**mentre la velocità istantanea si riferisce a**
**"un intervallo di tempo molto piccolo, nell'intorno dell'istante considerato**",
si hanno una **formula principale** e due **formule inverse**; eccole:

$$\boxed{v = \frac{s}{t}} \qquad \boxed{s = vt} \qquad \boxed{t = \frac{s}{v}}$$

- a) Un motorino si muove per 35 km alla velocità media di 50 km/h. Quanto tempo ci mette?
  b) La velocità istantanea di una bicicletta è di 12 km/h se rilevata dopo 10' dalla partenza, di 10 km/h a 20' dalla partenza, di 15 km/h dopo 30' dalla partenza. Il movimento dura complessivamente 40'. Quanti km sono stati percorsi?
  c) La velocità istantanea di una bicicletta si mantiene a 12 km/h per 40'. Spazio percorso = ?

RISPOSTE: a) $t = \frac{s}{v} = \frac{35\ km}{50\ km/h} = \frac{35}{50}h = \frac{7}{10}h = \frac{7}{10}\cdot 60' = 42'$

b) Dati insufficienti. La conoscenza della velocità istantanea permette di avere un'approssimazione dello spazio percorso in un piccolo intervallo di tempo in prossimità dell'istante considerato, nulla più

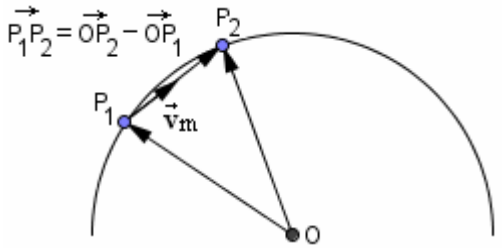
c) Se la velocità istantanea è costante (**moto** "**uniforme**"), allora coincide con la velocità media sull'intervallo complessivo. Nel nostro caso, perciò, Spazio percorso = km $(12 \cdot 40/60)$ = km 8

**Se il moto non è rettilineo, c'è qualche complicazione ulteriore.**
**Le formule precedenti continuano a valere se per "s" si intende la lunghezza della curva percorsa**; ad esempio, se la traiettoria del moto ha la forma di una semicirconferenza di raggio 5 km, e il tempo totale di percorrenza è di $8'$, avremo

$$s = 5\,\text{km} \cdot \pi = \text{km}\ 5\pi \approx \text{km}\ 15,7$$

$$v_m \approx \frac{\text{km}\ 15,7}{8'} \approx 1,96\ \text{km al minuto}$$

**Tuttavia, in caso di traiettoria non rettilinea, sovente la velocità viene intesa come un VETTORE** ( = quantità caratterizzata da un modulo, una direzione, un verso). Vediamo un esempio.



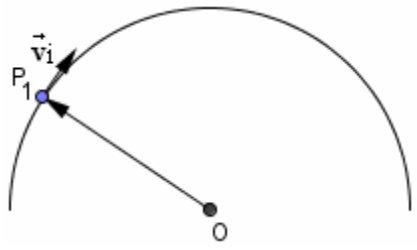

Supponiamo che in un certo istante $t_1$ un punto mobile si trovi in una data posizione $P_1$, e in un certo istante successivo $t_2$ lo stesso punto si trovi in una determinata posizione $P_2$.
Allora possiamo definire come *velocità vettoriale media* del punto nell'intervallo di tempo che va da $t_1$ a $t_2$, il vettore

$$\vec{\mathbf{v}}_m = \frac{\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}}{t_2 - t_1}$$

dove $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ sono i due "vettori posizione", essendo O un punto fissato *qualsiasi* (prova a cambiare la posizione di O e ti renderai conto che il vettore a numeratore della frazione non cambia).

Il vettore $\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$ coincide col vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$, e dividendo $\overrightarrow{P_1P_2}$ per il numero $t_2 - t_1$ si ottiene ancora un vettore con la stessa direzione e lo stesso verso di $\overrightarrow{P_1P_2}$.
Dunque il vettore velocità media $\vec{\mathbf{v}}_m$ ha la stessa direzione e verso di $\overrightarrow{P_1P_2}$, per cui, nel caso i due istanti $t_1$ e $t_2$ siano molto ravvicinati, la sua direzione si avvicinerà a quella di una retta tangente alla traiettoria.

Ora, il *vettore velocità istantanea* $\vec{\mathbf{v}}_i$ è pensato come "ciò che il vettore velocità media $\vec{\mathbf{v}}_m$ tende a diventare quando la differenza $t_2 - t_1$ si fa piccola piccola piccola", perciò risulta essere proprio *tangente*, come direzione, *alla traiettoria*.




**Ma ritorniamo al moto rettilineo e presentiamo ALCUNI ESEMPI DI PROBLEMI**.

1) a) Se un'automobile procede a 75 km/h, in 2 minuti e ½ che distanza in metri coprirà?
   b) Se una bici ci mette 3 secondi per percorrere 10 metri, qual è la sua velocità in km all'ora?
   c) Supponendo che un calcio di rigore venga tirato portando la palla a una velocità media di 120 km/h, quanto ci metterà a portarsi dal dischetto alla linea di porta distante 11 metri?

Questi tre problemi sono della tipologia più semplice:
delle tre quantità spazio, tempo, velocità, due sono note ed è richiesta la terza.

Basterà applicare una delle tre formule $\boxed{\mathbf{v = \frac{s}{t}}}$ $\boxed{\mathbf{s = vt}}$ $\boxed{\mathbf{t = \frac{s}{v}}}$,

stando comunque **attenti alla coerenza fra le unità di misura!**

a) Qui abbiamo $v = 75\ \text{km/h}$, $t = 2{,}5\ \text{min}$ ed è richiesto $s$ (in metri).
A nostra scelta, potremo trasformare la velocità in metri al minuto, oppure il tempo in ore …

Nel 1° modo, avremo $v = 75\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 75 \cdot \frac{1000\ \text{m}}{60\ \text{min}} = 1250\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$ da cui $s = vt = 1250\,\frac{\text{m}}{\text{min}} \cdot 2{,}5\ \text{min} = 3125\ \text{m}$

e nel 2° modo $t = 2{,}5\ \text{min} = 2{,}5 \cdot \frac{1}{60}\ \text{h} = \frac{2{,}5}{60}\ \text{h}$ da cui $s = vt = 75\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{2{,}5}{60}\ \text{h} = 3{,}125\ \text{km} = 3125\ \text{m}$

b) $t = 3\ \text{sec}$, $s = 10\ \text{m}$ quindi $v = \frac{10\ \text{m}}{3\ \text{sec}} = \frac{10 \cdot \frac{1}{1000}\text{km}}{3 \cdot \frac{1}{3600}\text{h}} = \frac{\frac{1}{100}\text{km}}{\frac{1}{1200}\text{h}} = \frac{1200}{100}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

c) $v = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $s = 11\ \text{m}$; $t = ?$

$s = 11\ \text{m} = 0{,}011\ \text{km}$ e allora $t = \frac{s}{v} = \frac{0{,}011\ \text{km}}{120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{0{,}011}{120}\ \text{h} = \frac{0{,}011}{120} \cdot 3600\ \text{sec} = 0{,}33\ \text{sec}$

oppure $s = 11\ \text{m}$, $v = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 120\,\frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{sec}} = \frac{100}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ dunque $t = \frac{s}{v} = \frac{11\text{m}}{\frac{100}{3}\frac{\text{m}}{\text{sec}}} = \frac{33}{100}\ \text{sec} = 0{,}33\ \text{sec}$

*In situazioni meno elementari, come quelle dei due problemi che seguono, potrà essere opportuno impostare un'equazione, o un sistema.*

2) Stamane ho cominciato il mio allenamento podistico sui 10000 m andando alla velocità costante di 12 km/h, ma poi ho bruscamente accelerato, percorrendo l'ultima parte del tragitto a 15 km/h. Se in totale ci ho messo 49 minuti, per quanto tempo e per quanti km sono andato a 12 km/h?

$t$ = n° minuti 1ª parte (quella in cui sono andato a 12 km/h, quindi a $\frac{12}{60}$ km al minuto)

$49 - t$ = n° minuti 2ª parte (quella in cui sono andato a 15 km/h perciò a $\frac{15}{60}$ km al minuto)

$\frac{12}{60} \cdot t + \frac{15}{60} \cdot (49 - t) = 10$ $\quad \frac{1}{5} \cdot t + \frac{1}{4} \cdot (49 - t) = 10$ $\quad \frac{4t + 5(49 - t)}{\cancel{20}} = \frac{200}{\cancel{20}}$

$4t + 245 - 5t = 200$ $\quad -t = -45$ $\quad \boxed{t = 45}$

Ho perciò corso per i primi 45' alla velocità di $12\ \text{km/h} = 12/60\ \text{km/min}$,

percorrendo $\frac{12}{60}\ \text{km/min} \cdot 45\ \text{min} = 9\ \text{km}$, dopodiché ho fatto l'ultimo km a velocità più elevata.

3) Se la corrente di un fiume scorre a 4 km all'ora, e un canotto a motore ci mette 1 h 57' per percorrere un certo tragitto controcorrente, e solo 45' seguendo la corrente, qual è la velocità del canotto? E quanto è lungo il tratto di fiume percorso?

Detta v la velocità in km/h del canotto, quando questo segue la corrente tale velocità si somma con quella della corrente e diventa $v + 4$, mentre quando il canotto procede in verso opposto diventa $v - 4$. Ora, detta s la lunghezza in km del tratto di fiume (due incognite, dunque: v ed s), avremo

$\frac{s}{v-4} = \frac{117}{60}$ $\left(1\text{h}\ 57' = 60' + 57' = 117';\ \ 117' = \frac{117}{60}\text{h}\right)$; $\quad \frac{s}{v+4} = \frac{45}{60}$ $\left(45' = \frac{45}{60}\text{h}\right)$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{s}{v-4} = \frac{117}{60} \\ \frac{s}{v+4} = \frac{45}{60} \end{cases}$$

(ad esempio, se si dividono membro a membro le due equazioni, si ottiene subito l'equazione con una sola incognita $\frac{v+4}{v-4} = \frac{117}{45}$)

troviamo $v = 9\ (\text{km/h})$, $s = 9{,}75\ (\text{km})$

*PSST … Questo con è l'unico modo di impostare la risoluzione del problema … Tu magari ne troveresti altri …*

Sarà opportuno, prima della rassegna di problemi, ricapitolare le **formule** nonché il **modo in cui una velocità espressa in m/s viene trasformata in km/h, e viceversa**:

$\boxed{\mathbf{v = \frac{s}{t}}}$ $\quad \boxed{\mathbf{s = vt}}$ $\quad \boxed{\mathbf{t = \frac{s}{v}}}$ $\quad \boxed{a\,\mathbf{\frac{km}{h}}} = a \cdot \frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = \boxed{a \cdot \mathbf{\frac{1000}{3600}\,\frac{m}{s}}}$ $\quad \boxed{a\,\mathbf{\frac{m}{s}}} = a \cdot \frac{0{,}001\,\text{km}}{1/3600\,\text{h}} = \boxed{a \cdot \mathbf{\frac{3600}{1000}\,\frac{km}{h}}}$

**ESERCIZI (risposte a pagina 503)**

NOTA - In generale, occorre essere un po' "elastici" riguardo ai testi. Ad esempio, se si parla di un'auto che parte per rincorrerne un'altra ai 100 km all'ora, si deve supporre trascurabile il fatto che comunque l'automobile inseguitrice *non può* passare *istantaneamente* dalla velocità di 0 km/h a quella di 100 km/h!
I valori delle soluzioni sono quelli che si traggono dal calcolo, ma vanno ovviamente presi …
per quel che sono, ossia *valutazioni approssimate* nell'ambito di *problemi dal testo schematizzato*!

1) La luce viaggia a circa 300000 km/s.
Calcola la lunghezza approssimativa di un anno-luce
( = distanza percorsa dalla luce in un anno solare medio, pari a 365 giorni e ¼ di giorno)

2) Dalla linea di fondo campo alla rete di un campo da tennis la distanza è (arrotondando per eccesso) di 12 metri. Un fortissimo servizio può superare la velocità di 240 km/h (anche se bisogna tenere poi conto della resistenza dell'aria che frena la pallina).
Quanto ci mette, un oggetto che viaggia ai 240 km all'ora, a percorrere 12 metri?
[Il problema della davvero eccessiva velocità della pallina nel tennis porterà probabilmente ad adottare palline di diametro maggiore, per rallentarne almeno un poco il moto]

3) Il suono viaggia alla velocità di (approssimativamente) 340 m/s.
Se odo l'eco della mia voce dopo 1 secondo e mezzo dall'istante in cui ho gridato, quanto è distante pressappoco la parete rocciosa che ha generato l'eco?

4) Il primato del mondo di maratona (42,195 km) è (giugno 2012) 2 ore, 3 minuti, 38 secondi; quello dei 10000 metri di 26 minuti e 18 secondi (circa).
Determina le rispettive velocità, in km/h e approssimando a 2 cifre dopo la virgola.
Con la velocità media del record di maratona, in quanto si percorrono 10000 metri?

5) Il limite di velocità sulle autostrade italiane è di 130 km/h, e scende a 110 km/h in certe condizioni.
Con la limitazione a 110 km/h, quanto tempo ci vuole in più per percorrere un tragitto di 180 km?

6) Cedendo a un colpo di sonno un autotrasportatore, che sta procedendo alla velocità di 70 km/h, perde conoscenza per mezzo secondo. Che distanza percorre nel frattempo il camion?

7) Impiego 2 ore a raggiungere una località di villeggiatura, a velocità costante.
Al ritorno, per via della pioggia, devo procedere più lentamente e ci metto 2 ore e 1/2.
Se all'andata ho viaggiato agli 80 km/h, quale è stata la mia velocità al ritorno?

8) Nel 1947, lo sciatore italiano Zeno Colò conquista il record del km lanciato: lo manterrà per 13 anni. Colò aveva percorso il kilometro in 22,64 secondi. 50 anni dopo, nel 1997, Philippe Billy fu in grado di sopravanzare di circa 85 km/h la velocità raggiunta a suo tempo da Colò.
Quanti secondi in meno ci mise?

9) Mi reco in città alla velocità costante di 90 km/h, mettendoci ¾ d'ora.
Se al ritorno modero la velocità ai 75 km/h, quanto ci metto?

10) (dal sito http://hypertextbook.com, Edited by Glenn Elert - Written by his students)
Il bradipo tridattilo è il più lento fra i mammiferi di terra. Il ghepardo invece è il più veloce. Il bradipo si muove sul suolo a una velocità media di 0,23 m/s mentre un ghepardo è capace di raggiungere e mantenere per breve tempo una velocità di 31 m/s. Quanto ci vorrebbe ad un bradipo per percorrere la distanza che un ghepardo è in grado di coprire in 3 secondi?

11) La posizione di un punto mobile su di una *number line* è data dalla formula $x = -0,2t + 3$
(il tempo $t$ è espresso in secondi).
Che distanza viene percorsa dall'istante $t = 1$ all'istante $t = 10$?
In quale istante il punto mobile attraversa l'origine?

12) Con quale velocità si muove, per via della rotazione della Terra intorno al suo asse, un punto che si trovi sulla linea dell'equatore? Calcola la velocità prima in km all'ora poi in metri al secondo.
(La lunghezza dell'equatore è di circa 40075 km)

*I problemi che seguono sono più complicati; per essi può essere opportuna un'equazione o un sistema.*

13) Due automobili partono contemporaneamente dallo stesso punto di un'autostrada, in direzione opposta. La prima viaggia a 100 km/h e l'altra a 110 km/h. Dopo quanti minuti la loro distanza sarà di 49 km?

14) Un camion trasporta la sua merce dalla fabbrica ad un deposito alla velocità media di 90 km/h.
Al ritorno, alleggerito del carico, può viaggiare ai 100 km/h e ci mette 12 minuti in meno.
Quanto dista la fabbrica dal magazzino?

15) Due fidanzati, entrambi appassionati di corsa di resistenza, partono simultaneamente per venirsi incontro sulla distanza dei 10000 metri, e il ragazzo riesce a correre a una velocità di 2 km/h in più della ragazza. Se il meritato “smack” avviene dopo 18 minuti e 45 secondi, quali sono le due velocità?

16) Se i tempi di percorrenza di due automobilisti che coprono lo stesso tratto di strada viaggiando rispettivamente ai 90 km/h e ai 100 km/h differiscono di 18', quanto è lungo il tragitto?

17) Un aereo viaggia 7 volte più veloce di un’auto, e in 2 ore e ½ percorre 1800 km in più. Trova le velocità.

18) Due paesi A e B distano 81 km. Un automobilista C ci mette 54' a viaggiare a velocità costante da A a B. Un altro automobilista D, più prudente, viaggia da B ad A pure a velocità costante, ma mettendoci 67' 30". Se sono partiti entrambi alle 15:45, a che ora si sono incrociati?

19) Due automobili partono dallo stesso punto di un’autostrada, ma le loro direzioni sono opposte. La prima viaggia a 90 km/h e la seconda si mette in movimento con ½ ora di ritardo, a una velocità *x*. Se dopo ¾ d’ora dalla partenza della seconda automobile, la loro distanza è di 195 km, determinare *x*.

20) Una motocicletta parte da un casello autostradale viaggiando alla velocità costante di 90 km/h. Qualche tempo dopo dallo stesso casello parte una volante della polizia che, alla velocità di 115 km/h, impiega 18' a raggiungerla. Quanto tempo è passato dalla partenza della moto a quella della volante?

21) Se un nuotatore va nella stessa direzione della corrente di un fiume riesce a percorrere 8 km in 2 ore, mentre controcorrente lo stesso tratto gli richiede 4 ore.
Quale sarebbe la velocità del nuotatore in assenza di corrente?

22) Un treno passeggeri A e un treno merci B partono simultaneamente per una località che dista 55 km. Se A viaggia a velocità doppia rispetto a B e arriva con ½ ora di anticipo, quali sono le due velocità?

23) Da http://gmatclub.com
Two cyclists start at the same time from opposite ends of a course that is 45 miles long.
One cyclist is riding at 14 mph and the second cyclist is riding at 16 mph. (*mph = miles per hour*)
How long after they begin will they meet?

24) Un TIR parte alle 11:20 da un casello autostradale e procede alla velocità costante di 75 km/h. Un’automobile che parte dallo stesso casello alle 12:05, viaggiando anch’essa a velocità costante, raggiunge il TIR alle 13:20. Qual è la velocità dell’automobile?

*Trovati su Internet* (compaiono nella bella e raccomandabile raccolta di esercizi su www.fisicalive.altervista.org, cui si accede cliccando su Materiali Studenti/ 1 Liceo/ Esercizi sul moto rettilineo uniforme, vedi ⇨, ma sono riportati anche su altri siti, per cui è arduo risalire al bravissimo autore)

25) Un fulmine cade a 1 km di distanza. La luce e il suono viaggiano di moto rettilineo uniforme alle velocità rispettivamente di 300 000 km/s e 340 m/s (valori approssimati).
Quanto tempo passa prima di vedere il lampo? E prima di sentire il tuono?

26) Con la vostra auto partite da casa e percorrete una strada rettilinea per 5,2 km alla velocità di 43 km/h quando improvvisamente restate senza benzina. A piedi raggiungete il distributore più vicino, distante 1,2 km, camminando per 27 min. Determinare la velocità media sul percorso completo.

27) Due amici escono di casa alla stessa ora e si dirigono verso lo stesso cinema.
Il primo abita a 1,6 km dal luogo dell’appuntamento e va a piedi con una velocità di circa 6 km/h.
Il secondo abita a 8,3 km e usa il motorino con una velocità media di 50 km/h.
Quale dei due amici arriva prima al cinema? Quanto tempo deve aspettare prima che arrivi l’altro?
Quale velocità avrebbe dovuto avere colui che è arrivato per secondo per giungere insieme all’amico?

28) In un cartone animato un gatto scocca una freccia per colpire un topo mentre questi si affretta verso la sua tana che si trova a 5 m di distanza. Il topo corre alla velocità di 20 km/h e la freccia a 30 km/h. Inizialmente gatto e topo distano 10 metri. Calcola il tempo che impiega il topo a raggiungere la tana. Calcola anche la distanza percorsa dalla freccia nello stesso intervallo di tempo.
Riesce a mettersi in salvo il topo?

*Risolvi i due problemi seguenti per conto tuo; poi va’ a vedere il riquadro alla pagina successiva.*

29a) Un atleta corre per 10 minuti alla velocità di 20 km/h, e per altri 10 minuti alla velocità di 12 km/h. Qual è la sua velocità media complessiva?

29b) La mia morosa abita a 10 km da me. Se vado a trovarla in bici, procedendo alla velocità costante di 20 km all’ora, poi ritorno a casa mia con lei che mi accompagna, e la velocità scende a 12 km/h, quale è stata la mia velocità media complessiva?

*Se ho percorso in auto un totale di 100 km, la prima metà andando ai 100 km/h e la metà successiva, dopo aver visto un brutto incidente, agli 80 km/h soltanto, quale è stata la mia velocità media*?

Rispondere che è stata la media aritmetica delle due velocità, quindi $\frac{100+80}{2}=90$ km/h, sarebbe SBAGLIATO!

Calcoliamo infatti, coi dati a disposizione, il tempo totale e lo spazio totale.

La prima metà del percorso ha richiesto un tempo, in ore, uguale a $\frac{s}{v}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}=0,5$ (mezz'ora, dunque),

mentre la seconda metà ha richiesto un numero di ore dato da $\frac{s}{v}=\frac{50}{80}=0,625$ (0,625 ore, o anche: 37,5 minuti)

Il tempo totale per coprire il tragitto di 100 km è stato perciò di ore $0,5+0,625=1,125$ $(1\text{h } 7'\ 30'')$.

Ma se una distanza di 100 km viene percorsa in ore 1,125 allora la velocità media è di km/h $\frac{100}{1,125}\approx$ km/h $88,9$

Quindi in questo caso per calcolare la "velocità media" NON si deve fare la "media aritmetica delle due velocità"!
Si deve invece procedere

- ❑ direttamente col ragionamento e col calcolo, come abbiamo fatto noi;
- ❑ oppure calcolando la cosiddetta *media armonica* delle velocità, che è data da $\boxed{\frac{1}{\frac{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\ldots+\frac{1}{v_n}}{n}}}$

Si dimostra che, se una **distanza fissata *d* è suddivisa in *n* tratti tutti uguali fra loro ( = di lunghezza *d/n*)**
e questi tratti vengono percorsi, rispettivamente, alle velocità $v_1, v_2, \ldots, v_n$, allora la **velocità media**

- non dipende dalla distanza $d$
- ed è data dalla **MEDIA ARMONICA** delle velocità.

Invece, nei casi in cui si ha **un tempo di viaggio fissato *t* suddiviso in *n* intervalli di ugual durata *t/n***,
e in questi $n$ intervalli uguali di tempo si procede alle velocità $v_1, v_2, \ldots, v_n$ rispettivamente, la **velocità media**

- non dipende dal tempo $t$
- ed è data dalla **MEDIA ARITMETICA** delle velocità $\boxed{\frac{v_1+v_2+\ldots+v_n}{n}}$

30) a) Un atleta corre 4 giri di pista alla velocità di 18 km/h, poi altri 4 giri alla velocità di 14 km/h.
Qual è la sua velocità media complessiva?
b) Un atleta corre per 4 minuti alla velocità di 18 km/h, poi per altri 4 minuti alla velocità di 14 km/h.
Qual è la sua velocità media complessiva?

31) Al ritorno dal lavoro, per i 3/5 del tempo viaggio alla velocità costante di 70 km/h, per via del traffico intenso. Tuttavia, riesco poi a tenere la velocità costante di 90 km/h nell'ultimo tratto.
Qual è stata la mia velocità media sull'intero tragitto?

32) Al ritorno dal lavoro, percorro i 3/5 del tragitto alla velocità costante di 70 km/h, per via del traffico intenso. Tuttavia, riesco poi a tenere la velocità costante di 90 km/h nell'ultimo tratto.
Qual è stata la mia velocità media sull'intero tragitto?

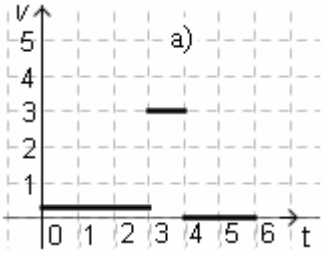
33) Se un tale ha coperto la terza parte di un percorso di 105 km a 60 km/h, e la parte rimanente a 40 km/h, quale è stata la sua velocità media complessiva?
Generalizzazione. Se un tale ha coperto la terza parte di un dato percorso a $v_1$ km/h,
e la parte rimanente a $v_2$ km/h, ricava l'espressione che dà la sua velocità media complessiva.

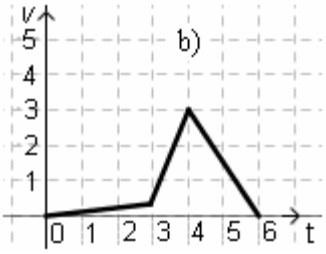
34) Da www.batesville.k12.in.us
Susie has planned a trip to a city 60 miles away.
She wishes to have an average speed of 60 miles/hour for the trip.
Due to a traffic jam, however, she only has an average speed of 30 miles/hour for the first 30 miles.
How fast does she need to go for the remaining 30 miles
so that her average speed is 60 miles/hour for the whole trip?

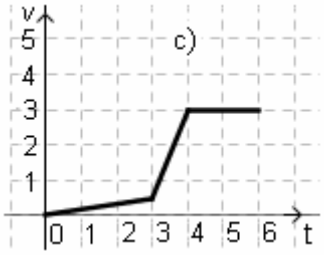
35) www.educationupdate.com (dal bell'articolo *The Most Misunderstood Average*, di A. Posamentier)
On Monday a plane makes a *round trip flight* (un *volo andata e ritorno*) New York City - Washington with an average speed of 300 miles per hour. The next day, Tuesday, there is a wind of constant speed (50 miles per hour) and direction (blowing from NYC to Washington). With the same *speed setting* ( = *impostazione della velocità*) as on Monday, this same plane makes the same round trip on Tuesday.
Will the Tuesday trip require more time, less time or the same time as the Monday trip?

36) Il diagramma qui a fianco →
si riferisce al moto di un punto
(tempo espresso in secondi, spazio in metri).
Invece i diagrammi sottostanti
hanno in ascissa un tempo (in secondi),
e in ordinata una velocità (in metri al secondo).
Quale dei tre è relativo al moto
rappresentato nel diagramma iniziale?

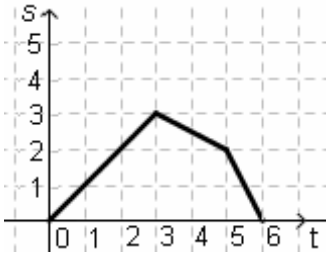


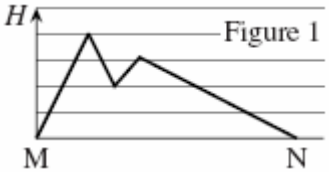



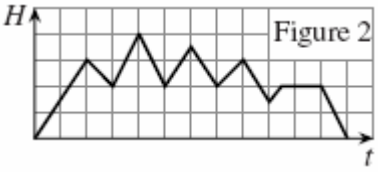




37) Il diagramma qui a destra si riferisce al moto di un punto
(tempo espresso in secondi, spazio in metri). →
Descrivi il moto, determinando la sua velocità nei tre tratti.




38) (*Kangourou 2004*)
Marco fa una passeggiata in montagna.
Il profilo del suo percorso, dal punto M
al punto N, è in fig. 1. Essendo distratto,
gli capita di lasciar cadere qualche
oggetto, che poi torna indietro a cercare.
Il grafico della sua altitudine *H*,
in funzione del tempo *t*, è dato in fig. 2.
Quante volte è tornato indietro?
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5




**ESERCIZI DI RISERVA**: molto belli quelli del già segnalato sito
www.fisicalive.altervista.org del prof. Federico Andreoletti: ⇨

**RISPOSTE**

1) Circa km $9{,}5\cdot10^{12}$ 2) 18 centesimi di secondo 3) $\approx 250$ m 4) 20,48 km/h; 22,81 km/h; in 29'18" circa
5) $\approx 15$ minuti 6) $\approx 10$ m 7) 64 km/h 8) 7,9 secondi in meno circa 9) 54 minuti
10) $\approx$ 6' 44" 11) 1,8 (in verso negativo); all'istante $t=15$ 12) Circa 1670 km/h, ovvero circa 464 m/s
13) $100t+110t=49$, col tempo $t$ espresso in ore; 14 minuti 14) $90t=100(t-1/5)$ con $t$ espresso in ore; 180 km
15) 18' 45" = 18,75' = h $\frac{18{,}75}{60}$ = h $\frac{5}{16}$; $\frac{5}{16}(v+2)+\frac{5}{16}v=10$; 15 km/h e 17 km/h 16) $\frac{s}{90}-\frac{s}{100}=\frac{18}{60}$; 270 km
17) Velocità auto = $v=120$ (km/h), velocità aereo = $7v=840$ km/h
18) Alle 16:15 19) $x=110$ km/h 20) 5 minuti 21) $\begin{cases} v_N+v_F=8/2 \\ v_N-v_F=8/4 \end{cases}$; 3 km all'ora
22) A viaggia a 110 km/h, B a 55 km/h 23) 1½ h 24) 120 km/h
25) 3+1/3 milionesimi di secondo; poco meno di 3 secondi 26) $\approx 11{,}2$ km/h
27) Arriva 6 minuti prima quello col motorino; $\approx 9{,}64$ km/h 28) 0,90 s; 7,5 m; sì
29a) 16 km/h 29b) 15 km/h 30a) 15,75 km/h 30b) 16 km/h 31) 78 km/h
32) Arrotondando per eccesso, 77 km/h 33) 45 km/h; $\frac{3v_1v_2}{v_2+2v_1}$ km/h
34) The average speed for the whole trip *cannot ever be 60 miles/hour!* The equation $\frac{1}{\frac{\frac{1}{30}+\frac{1}{x}}{2}}=60$ is impossible
35) We can use the harmonic mean formula to find the average speed for the "windy trip".
The harmonic mean is ((2)(350)(250)) / (250 + 350) = 291.667, which is *slower* than the no-wind trip.
36) a) 37) Le velocità valgono: 1; $-1/2$; $-2$ 38) c)



# PROBLEMI VARI E "CREATIVI"



www.matematicasenzafrontiere.it

**MATEMATICA SENZA FRONTIERE** ogni anno propone una **gara nazionale alla quale concorrono intere classi** (è l'edizione italiana di Mathématiques Sans Frontières, una competizione che, nata in Francia, negli anni si è poi diffusa a parecchi paesi europei e non).

Un'intera classe (Seconda o Terza, per quanto riguarda le scuole superiori) ha 1 ora e ½ di tempo per risolvere **10 quesiti (le Seconde) o 13 quesiti (le Terze), di cui 1 in lingua straniera,** al quale è richiesto di dare la risposta pure in lingua straniera.

Andando sul sito e cliccando su "Prove" oppure su "Data Base Prove" e poi "Archivio", puoi scaricare i testi delle gare degli anni passati.

"**Senior**" si riferisce alla scuola superiore, "Junior" invece è la versione per Scuola Media inferiore.
"**Prova d'accoglienza**" indica una simulazione, che precede la competizione vera e propria.

http://olimpiadi.dm.unibo.it/

Su questo sito, se clicchi su "Archivio Downloads", puoi trovare testi e soluzioni delle gare chiamate "**OLIMPIADI MATEMATICHE**" o "**GIOCHI DI ARCHIMEDE**".

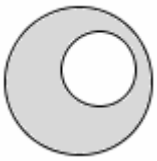
- "**Archimede**" indica le prove di Istituto, che si svolgono nelle singole scuole
- "**Febbraio**" indica le prove ancora più difficili assegnate alla fase provinciale
- "**Cesenatico**" indica le prove davvero difficilissime della gara nazionale

Riportiamo qui i testi di qualcuno dei Giochi degli anni passati.
Ovviamente, puoi trovare le *soluzioni* (complete di breve spiegazione) *sul sito*.

**TESTO DEI "GIOCHI DI ARCHIMEDE" 2000 (clicca qui ⇨ per le risposte)**

1) Al mercato delle pulci un venditore vende per 80 Euro uno scaffaletto che aveva acquistato per 70 Euro. Poi ci ripensa, riacquista lo scaffaletto per 90 Euro e lo rivende per 100 Euro. Quanto ha guadagnato alla fine?
(A) Nulla (B) 10 Euro (C) 20 Euro (D) ha perso 10 Euro (E) nessuna delle precedenti

2) Nella figura a fianco il raggio del cerchio esterno è il doppio di quello del cerchio interno. Quanto vale il rapporto fra l'area della regione ombreggiata e quella della regione bianca all'interno?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) dipende dalla posizione del cerchio
(E) nessuna delle precedenti

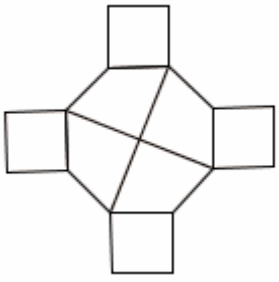


3) Qual è la media aritmetica dei numeri 1, 2, 3, … , 1999, 2000?
(A) 999 (B) 999,5 (C) 1000 (D) 1000,5 (E) 1001

4) Quanto vale 6a se $3a - 2 = 2b - 1$?
(A) $4b + 1$ (B) $4b + 2$ (C) $4b + 3$ (D) $4b + 4$
(E) nessuna delle precedenti

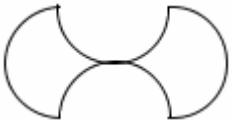
5) Se aumentiamo la lunghezza della base di un rettangolo del 30% e quella dell'altezza del 50%, l'area aumenta del
(A) 195% (B) 115% (C) 150% (D) 95% (E) 80%

6) Quanti assi di simmetria possiede la figura a lato?
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) nessuna delle precedenti



7) Ogni mese un grossista spedisce a un negoziante 24 litri, 32 litri e 40 litri di tre varietà diverse di vino utilizzando il minimo numero possibile di recipienti tutti uguali e completamente riempiti, ovviamente senza mescolare qualità diverse di vino nello stesso recipiente.
Quanti recipienti riceverà quel negoziante in un anno?
(A) 36 (B) 72 (C) 144 (D) 288 (E) i dati sono insufficienti

8) Quanto vale l'area della regione delimitata dalle quattro semicirconferenze di diametro 10 cm mostrate in figura?
(A) $100\,\text{cm}^2$ (B) $10\pi\sqrt{2}\,\text{cm}^2$ (C) $50\pi\,\text{cm}^2$
(D) $100\pi\,\text{cm}^2$ (E) $25\pi\,\text{cm}^2$



9) Emanuele soffre d'insonnia. Un giorno alle 11:11 precise egli afferma: "*Non dormo da 53 ore e 53 minuti*". A che ora si è svegliato l'ultima volta?
(A) 5:04 (B) 5:18 (C) 5:58 (D) 6:04 (E) 6:18

10) Il lato dell'esagono più piccolo in figura vale 1 e quello del più grande vale 2. Qual è la somma delle lunghezze di tutti i tratti disegnati?
(A) 18 (B) 24 (C) 30 (D) 36 (E) nessuna delle precedenti



11) Un podista e un ciclista partono insieme dalla città A diretti alla città B distante da A 13 km, con l'accordo di fare la spola fra A e B senza fermarsi mai. Sapendo che ogni ora il podista percorre 9 km mentre il ciclista ne percorre 25, quale distanza separerà i due sportivi dopo 3 ore dall'inizio della competizione?
(A) 1 km (B) 2 km (C) 3 km (D) 4 km (E) 5 km

12) Il deposito della libreria di Tullio è una stanza cubica di lato 5 m e negli ultimi tempi è diventato troppo piccolo per poter contenere tutte le giacenze di magazzino. Perciò Tullio ne ha comprato uno nuovo, sempre di forma cubica, che, sostituito al precedente, gli ha permesso di guadagnare $218\,\text{m}^3$ di spazio. Di quanti metri il lato del nuovo deposito è più lungo di quello vecchio?
(A) 1 m (B) 2 m (C) 3 m (D) 4 m (E) 5 m

13) Il prezzo della mascotte delle olimpiadi di matematica e dato dalla somma del prezzo delle materie prime e del prezzo della lavorazione. L'anno scorso la mascotte costava 10 Euro. Quest'anno il costo delle materie prime è raddoppiato e quindi la mascotte costa 11,80 Euro.
Quanto incide quest'anno il prezzo delle materie prime sul prezzo finale del prodotto?
(A) Meno di 1 Euro (B) tra 1 e 2 Euro (C) tra 2 e 3 euro (D) tra 3 e 4 euro (E) più di 4 euro

14) Un ladro spia Marco mentre chiude la sua valigia con un lucchetto con combinazione di 3 cifre (ciascuna cifra va da 0 a 9). Non ha potuto vedere la combinazione ma è riuscito a capire che due cifre consecutive sono uguali e la terza e diversa.
Qual è il numero massimo di combinazioni che il ladro dovrà provare per aprire la valigia di Marco?
(A) 180 (B) 190 (C) 200 (D) 210 (E) 220

15) Un giardino quadrato di 20 metri di lato viene innaffiato con irrigatori puntiformi. Ciascun irrigatore innaffia tutti i punti che distano da esso al più 10 metri. Qual è il minimo numero di irrigatori necessario per innaffiare tutto il giardino? (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

16) Versando $40\,\text{cm}^3$ di acqua in un recipiente a forma di parallelepipedo rettangolo avente un lato della base lungo 4 cm, il livello del liquido raggiunge 5 cm. Versandone una quantità incognita in un altro recipiente parallelepipedo rettangolo che ha quel lato della base lungo 6 cm e l'altro inalterato, il liquido raggiunge un livello di 15 cm. Quanti $\text{cm}^3$ di acqua sono stati versati la seconda volta?
(A) 180 (B) 80 (C) 40 (D) 20 (E) 80/9

17) Qual è la probabilità che, presi a caso tre vertici distinti di un esagono regolare, essi siano i vertici di un triangolo equilatero? (A) 1/4 (B) 1/8 (C) 1/9 (D) 1/10 (E) 1/20

18) Anna, Barbara, Chiara e Donatella si sono sfidate in una gara di nuoto fino alla boa. All'arrivo non ci sono stati ex-aequo. Al ritorno,
Anna dice: "*Chiara è arrivata prima di Barbara*";
Barbara dice: "*Chiara è arrivata prima di Anna*";
Chiara dice: "*Io sono arrivata seconda*".
Sapendo che una sola di esse ha detto la verità,
(A) si può dire solo chi ha vinto (B) si può dire solo chi è arrivata seconda
(C) si può dire solo chi è arrivata terza (D) si può dire solo chi è arrivata ultima
(E) non si può stabilire la posizione in classifica di nessuna

19) Nella tomba del faraone Tetrankamon è stato ritrovato uno smeraldo, lavorato a forma di tetraedro (piramide a base triangolare), i cui spigoli misurano in millimetri 54, 32, 32, 29, 27, 20. Indicando con A, B, C, D i vertici del tetraedro e sapendo che AB è lungo 54, quanti millimetri e lungo CD?
(A) 32 (B) 29 (C) 27 (D) 20 (E) non si può determinare

20) In una scuola il 60% degli studenti e di sesso maschile, il 90% è minorenne ed il 60% ha i capelli castani. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?
(A) C'è almeno una ragazza maggiorenne (B) C'è almeno una ragazza con i capelli castani
(D) C'è almeno un ragazzo minorenne e castano (D) Non ci sono ragazzi maggiorenni e castani
(E) C'è almeno un ragazzo biondo

**TESTO DEI "GIOCHI DI ARCHIMEDE" 2004 (clicca qui ⇨ per le risposte)**

1) Secondo una recente statistica, ogni italiano mangia in media 30 kg di pasta all'anno. Sapendo che la popolazione italiana è di 57 milioni di abitanti, quante tonnellate di pasta si consumano in Italia ogni anno?
(A) meno di 1000 (B) più di 1000, ma meno di 10 mila (C) più di 10 mila, ma meno di 100 mila
(D) più di 100 mila, ma meno di 1 milione (E) più di 1 milione

2) Luigi ha 4 anni più di Silvio che, a sua volta, ha 3 anni più di Carlo. Se complessivamente hanno 34 anni, quanti anni ha il più grande? (A) 12 (B) 15 (C) 17 (D) 18 (E) 20

3) Tarzan vuole tenere il suo leone in una radura di forma circolare avente raggio 12 metri e con un alto albero nel centro. Per fare in modo che il leone non scappi, lo lega con una catena all'albero centrale, ma al momento di fissarla si accorge che la catena è lunga 13 metri anziché 12. Non potendo in alcuna maniera accorciare la catena, decide di legarla più in alto, in modo che il leone possa raggiungere il limite della radura, senza uscirne. A quanti metri di altezza dal suolo Tarzan lega la catena?
(Si trascurino il diametro dell'albero e, solo per questo esercizio, le dimensioni del leone).
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4) Se $a+1=b-2=c+3=d-4$, qual è il più piccolo dei numeri $a$, $b$, $c$, $d$?
(A) $a$ (B) $b$ (C) $c$ (D) $d$ (E) non si può stabilire in base ai dati del problema.

5) Ad una gara matematica partecipano 1200 candidati. Il 40% di essi riceve una medaglia (d'oro, d'argento o di bronzo). Il numero di medaglie di bronzo è triplo di quello di medaglie d'oro; il numero di medaglie d'argento è doppio di quello di medaglie d'oro. Quante sono le medaglie d'argento?
(A) 120 (B) 144 (C) 160 (D) 180 (E) nessuna delle precedenti.

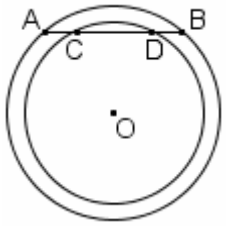
6) Tre amici stanno conversando. Uno di loro dice: "Almeno due di noi sono bugiardi."
Un altro ribatte: "Non è vero!". Quanti sono i bugiardi?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) i dati sono incongruenti (E) non si può determinare in modo univoco.

7) $a$, $b$ e $c$ sono tre numeri naturali. Sappiamo che $a$ è divisibile per 15, $b$ è divisibile per 12 e $c$ per 21. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
(A) $a^2+b^2+c^2$ è divisibile per 18 (B) $a+b+c$ è divisibile per 9 (C) $a+b+c$ è divisibile per 2
(D) $(a+b+c)^2$ è divisibile per 9 (E) $a^2+b^2+c^2$ è divisibile per 15.

8) Sulla lavagna è scritto inizialmente il numero 1. Successivamente, dieci studenti a turno cancellano il numero che trovano sulla lavagna e lo sostituiscono con il suo doppio aumentato di 1.
Qual è il numero che resta sulla lavagna alla fine? (A) 31 (B) $2^{11}+1$ (C) $2^{11}-1$ (D) $3^{10}$ (E) 2005.

9) Marco deve recarsi una volta all'anno, per lavoro, in un lontano Paese dalla dissestata economia, nel quale da un anno all'altro i prezzi raddoppiano. Tuttavia la moneta di quel Paese perde ogni anno il 30% del suo valore rispetto all'Euro. La spesa (in Euro) sostenuta da Marco per il suo soggiorno nel 2004 risulta pertanto
(A) minore di quella del 2002 (B) uguale a quella del 2002 (C) superiore a quella del 2002, ma minore del doppio di essa (D) uguale al doppio della spesa del 2002 (E) uguale al quadruplo della spesa del 2002.

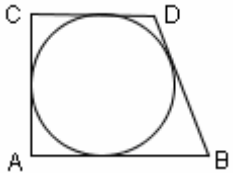
10) Quanto è lunga la corda AB sapendo che AB = 2CD
e che i raggi dei due cerchi concentrici sono 5 metri e 4 metri?
(A) $2\sqrt{2}$ m (2) $2\sqrt{3}$ m (C) $3\sqrt{3}$ m (D) $4\sqrt{3}$ m
(E) dipende dall'inclinazione della corda




11) Quante sono le coppie ordinate di numeri naturali $(x, y)$, $x>0$ e $y>0$, tali che $5<x+y\le 10$?
(Attenzione: si considerano coppie ordinate, quindi, ad esempio, le coppie (3,4) e (4,3) sono distinte tra loro).
(A) 20 (B) 25 (C) 30 (D) 35 (E) nessuna delle precedenti.

12) Michele si prepara all'ultimo compito in classe di matematica dell'anno; lo affronta con tranquillità, sapendo che se prenderà 10 avrà la media del 9, mentre prendendo 5 la media diverrà 8.
Quanti compiti ha già fatto quest'anno Michele?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) i dati non sono sufficienti per dare la risposta.

13) Il trapezio rettangolo ABCD contiene una circonferenza di raggio 1 metro, tangente a tutti i suoi lati.
Sapendo che il lato obliquo BC è lungo 7 metri , trovare l'area del trapezio.
(A) 8 metri quadrati (B) 9 metri quadrati (C) 10 metri quadrati
(D) 11 metri quadrati (E) non si può ricavare dai dati del problema.



14) Venti soffici cuscini quadrati sono impilati uno sopra l'altro. Ogni cuscino pesa 500 g ed ha inizialmente uno spessore di 30 cm. Nella pila, però, lo spessore di ogni cuscino si riduce in ragione di 2 cm per ogni chilo di peso sopra di esso (l cm per ogni mezzo chilo). Quanto è alta la pila di cuscini?
(A) 220 cm (B) 410 cm (C) 490 cm (D) 581 cm (E) mancano dati per poter rispondere.

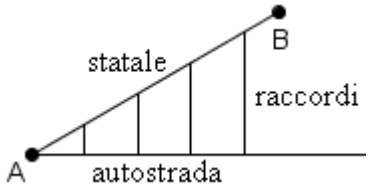
15) Una cassetta di legno, senza coperchio, è fabbricata con tavole spesse 2 cm. Se le dimensioni esterne della base (rettangolare) sono 38 cm e 44 cm e l'altezza esterna è 47 cm, di quanti centimetri cubi è il volume interno della cassetta? (A) 61200 $cm^3$ (B) 63920 $cm^3$ (C) 68040 $cm^3$ (D) 75240 $cm^3$ (E) 78584 $cm^3$

**SE HO UN INSIEME DI 24 ELEMENTI, IN QUANTI MODI POSSO SCEGLIERNE 2?**

Un modo efficace per rispondere a questa domanda è di pensare dapprima che la coppia di elementi che si scelgono sia ordinata, tenendo poi conto solo in un secondo tempo … che invece non lo è.
Dunque: scelgo il primo elemento, e posso fare questa scelta in 24 modi;
per ciascuno dei modi con cui ho scelto il primo elemento, mi si apre un ventaglio di 23 possibilità per la scelta del 2° elemento. Allora per la scelta dei due elementi, nell'ordine, le possibilità sono $24 \cdot 23 = 552$.
Ma in realtà l'ordine di scelta non mi interessa:
insomma, scegliere prima *a* e poi *b*, oppure prima *b* e poi *a*, è esattamente la stessa cosa:
le due coppie ordinate $(a, b)$ e $(b, a)$ vanno pensate come indistingubili,
è come se si "fondessero" in una stessa entità, la coppia non ordinata $\{a, b\}$.
Perciò il numero di coppie ordinate va diviso per 2 e si ottiene che il numero di modi nei quali è possibile scegliere 2 elementi da un insieme che ne contiene 24 è $\frac{24 \cdot 23}{2} = 276$.
In generale, dato un insieme di *n* elementi, posso sceglierne 2 (quando non conta l'ordine in cui li scelgo, ma solo *quali* scelgo) in $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ modi.
Ad esempio, se ho 2 anelli da mettere al dito, fra le 10 dita delle mie mani posso scegliere quelle in cui infilare gli anelli in $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ modi.

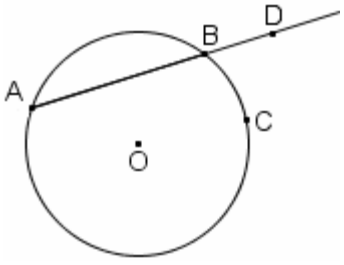
16) Dieci amici decidono di giocare una partita di calcetto, cinque contro cinque. Sapendo che vi sono due terne di fratelli, e che i tre fratelli Ambrosio desiderano giocare tutti nella squadra A mentre i tre fratelli Bianchi desiderano giocare tutti nella squadra B, in quanti differenti modi si possono formare le due squadre?
(A) 3 (B) 6 (C) 15 (D) 24 (E) 30

17) Un automobilista deve andare dalla città A alla città B, distanti tra loro 50 km in linea d'aria, e vuole impiegare il minor tempo possibile. Può percorrere la strada statale che collega direttamente A a B, oppure può percorrere un tratto di autostrada, che passa da A e forma con la statale un angolo di 30 gradi, e prendere uno dei raccordi che partono ortogonalmente dall'autostrada e arrivano sulla statale (vedi figura).




In tutto ci sono 4 raccordi, rispettivamente dopo 10, 20, 30 e 40 km da A.
Sull'autostrada la velocità massima consentita è 130 km all'ora, sulla statale e sui raccordi è 90 km all'ora.
Quale scelta è più conveniente?
(A) percorrere solo la statale (B) percorrere l'autostrada fino al primo raccordo, quest'ultimo e poi la statale
(C) percorrere l'autostrada fino al secondo raccordo, quest'ultimo e poi la statale
(D) percorrere l'autostrada fino al terzo raccordo, quest'ultimo e poi la statale
(E) percorrere l'autostrada fino al quarto raccordo, quest'ultimo e poi la statale.

18) Siano A, B, C tre punti su una circonferenza di centro O. Sia D un punto esterno alla circonferenza, situato sulla retta AB dalla parte di B.
Sapendo che $C\hat{B}D = 72°$, quanto misura l'angolo $A\hat{O}C$ ?
(A) 135° (B) 144° (C) 153° (D) 162° (E) 171°



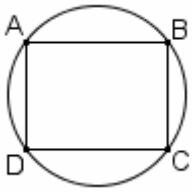

19) Quanti sono i multipli di 5 fra i numeri interi di 4 cifre che si scrivono senza usare altre cifre all'infuori di 0, 1, 2, 3, 4, 5 ?
(È consentito impiegare più volte la stessa cifra; 0 non può essere la cifra iniziale).
(A) 180 (B) 216 (C) 360 (D) 396 (E) 1080.

20) Sia data nel piano una circonferenza di raggio 3. Consideriamo tutti i punti P del piano tali che la circonf. di centro P e raggio 2 interseca in almeno un punto la circonferenza data. Questi punti formano
(A) la circonferenza data (B) una circonferenza più grande di quella data (C) un cerchio
(D) una corona circolare (E) l'unione di due circonferenze concentriche.

**TESTO DEI "GIOCHI DI ARCHIMEDE" 1998 (clicca qui ⇨ per le risposte)**

1) $0{,}3\times0{,}3\times0{,}3$ è uguale a:
(A) 0,9 (B) 0,27 (C ) 0,027 (D) 0,009 (E) 0,0027

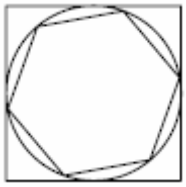
2) ABCD è un rettangolo con AB = 8 cm e BC = 6 cm.
Quanto vale l'area del cerchio circoscritto?
(A) $25\pi$ cm$^2$ (B) 24 cm$^2$ (C) $24\pi$ cm$^2$
(D) $50\pi$ cm$^2$ (E) nessuna delle precedenti




3) Quale fra le seguenti espressioni rappresenta il quadrato del triplo del consecutivo di un numero intero $n$?
(A) $[3(n+1)]^2$ (B) $3n^2+1$ (C) $(3n+1)^2$ (D) $3(n^2+1)$ (E) $3(n+1)^2$

4) In una classe ci sono 30 alunni. La maestra li divide in 5 squadre di 6 alunni e organizza una gara a squadre. Alla fine della gara distribuisce caramelle a tutti gli alunni, facendo in modo che ogni componente dell'unica squadra vincitrice riceva il doppio di caramelle rispetto agli alunni delle rimanenti squadre.
Sapendo che in tutto la maestra distribuisce 540 caramelle, quante caramelle riceve ogni vincitore?
(A) 15 (B) 18 (C) 27 (D) 30 (E) 36

5) Si consideri un quadrato di lato unitario;
inscriviamo al suo interno una circonferenza
e, all'interno di questa, un esagono regolare.
Quanto misura il lato dell'esagono?
(A) ½ (B) $\sqrt{3}/2$ (C) $\sqrt{3}/3$ (D) $4(\sqrt{2}-2)/7$ (E) $\pi/6$



6) La produzione vinicola italiana rappresenta il 25% di quella mondiale ed il 38% di quella europea.
Quale percentuale della produzione mondiale è rappresentata dalla produzione europea?
(A) Meno del 50% (B) fra il 50% e il 60% (C) fra il 60% e il 70%
(D) più del 70% (E) non si può determinare

7) La città del mistero dista 500 km da Topolinia e 1200 km da Paperopoli.
Qual è il minimo valore possibile per la distanza tra Topolinia e Paperopoli?
(A) 500 km (B) 700 km (C) 1200 km (D) 1300 km (E) 1700 km

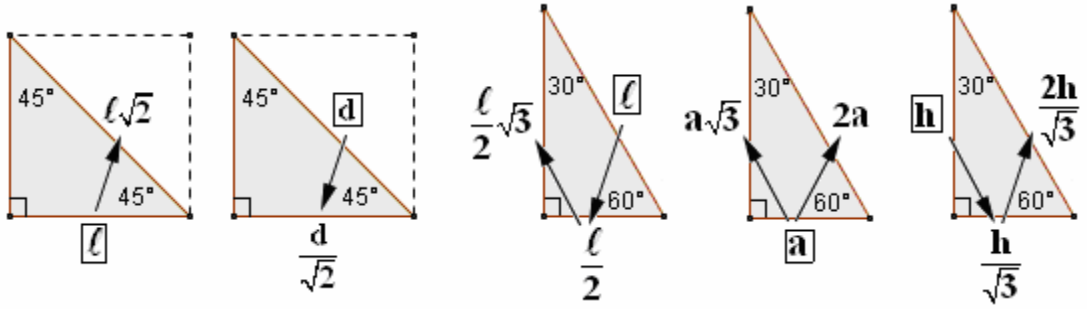
8) Se i numeri $0{,}3$; $0{,}\overline{3}$; $(0{,}\overline{3})^2$; $\dfrac{1}{0{,}3}$; $\dfrac{1}{0{,}\overline{3}}$ vengono messi in ordine crescente, il terzo numero è:

(A) $0{,}3$ (B) $0{,}\overline{3}$ (C) $(0{,}\overline{3})^2$ (D) $\dfrac{1}{0{,}3}$ (E) $\dfrac{1}{0{,}\overline{3}}$

9) Qual è il più piccolo intero di tre cifre divisibile per 3 e per 13?
(A) 102 (B) 104 (C) 117 (D) 139 (E) nessuno dei precedenti.

10) I raggi di tre sfere sono proporzionali a 1, 2, 3. Allora si ha che:
(A) il volume della sfera più grande è il triplo del volume della sfera più piccola
(B) la somma dei volumi delle due sfere più piccole è uguale al volume della sfera più grande
(C) il volume della sfera più grande è il triplo della somma dei volumi delle altre due
(D) la superficie della sfera più grande è uguale alla somma delle superfici delle altre due
(E) la superficie della sfera più grande è il triplo della somma delle superfici delle altre due.

Per i quesiti n° 11 e n° 14 può essere utile tener presenti alcune relazioni fra i lati
di un triangolo rettangolo con gli angoli di 90°, 45°, 45° oppure con gli angoli di 90°, 30°, 60°.
Riassumiamo nelle figure sottostanti le formule che valgono in questi contesti.

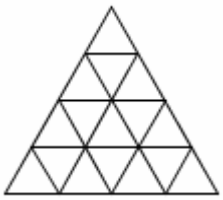


11) Se ordiniamo le cifre seguenti secondo la somma delle lunghezze dei segmenti di cui sono composte, quale cifra occupa la posizione centrale?



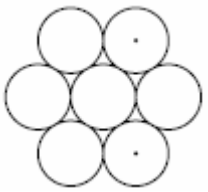
(A) Il 3 (B) il 2 (C) il 4 (D) ce n'è più di una (E) nessuna delle precedenti

12) Quanti triangoli equilateri sono presenti in questa figura?
(A) 16 (B) 20 (C) 25 (D) 26 (E) 27



13) In una classe di 20 persone, 15 giocano a calcio, 14 a basket, 13 a pallavolo.
Quanti sono, al minimo, coloro che praticano tutti e tre gli sport?
(A) 0 (B) 2 (C) 7 (D) 9 (E) 13

14) Sette cerchi di raggio unitario sono disposti come nella figura a fianco.
La distanza fra i due centri indicati con un punto è
(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) 3 (D) $2\sqrt{3}$ (E) nessuna delle precedenti.



15) Quale dei seguenti numeri termina con il maggior numero di zeri?
(A) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$ (B) $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$ (C) $2^5 \cdot 5^3 \cdot 3^2$ (D) $4^5 \cdot 5^6 \cdot 6^4$ (E) $4^6 \cdot 6^5 \cdot 5^4$

16) Platone amava particolarmente il dodecaedro regolare, che è un poliedro le cui facce sono 12 pentagoni regolari uguali. Quanti spigoli e quanti vertici ha tale poliedro?
(A) 20 spigoli e 20 vertici (B) 30 spigoli e 20 vertici (C) 20 spigoli e 30 vertici
(D) 30 spigoli e 60 vertici (E) 60 spigoli e 60 vertici.

17) Su un' isola vivono tre categorie di persone: i cavalieri, che dicono sempre la verità, i furfanti, che mentono sempre, ed i paggi che dopo una verità dicono sempre una menzogna e viceversa.
Sull'isola incontro un vecchio, un ragazzo e una ragazza.
Il vecchio afferma: “Io sono paggio”; “Il ragazzo è cavaliere”.
Il ragazzo dice: “Io sono cavaliere”; “La ragazza è paggio”.
La ragazza afferma infine: “Io sono furfante”; “Il vecchio è paggio”.
Si può allora affermare che tra i tre:
(A) c'è esattamente un paggio (B) ci sono esattamente due paggi
(C) ci sono esattamente tre paggi (D) non c'è alcun paggio (E) il numero dei paggi non è sicuro.

18) Un incallito giocatore paga 5000 lire per entrare in una casa da gioco, ove raddoppia i suoi soldi. Uscito, paga 5000 lire per il parcheggio dell'auto, ma – visto che la fortuna gli è propizia – entra in una seconda casa da gioco ad ingresso gratuito, ove nuovamente raddoppia il suo denaro. Dopo aver pagato nuovamente il parcheggio con 6000 lire, si accorge che non gli rimane più nulla nel portafogli.
Quanti soldi aveva inizialmente il giocatore?
(A) 10000 (B) 12000 (C) 15000 (D) i dati sono insufficienti (E) le risposte precedenti sono tutte errate.

19) Sappiamo che $x = 0{,}9...$ e che $1/x = 1{,}1...$
(i puntini indicano che le ulteriori cifre decimali sono state omesse).
Qual è la cifra che viene subito dopo il 9 nello sviluppo decimale di $x$?
(A) 0 (B) 1 (C) 9 (D) non si può determinare univocamente (E) nessuno dei precedenti.

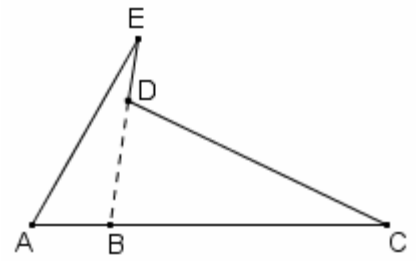
20) Sapendo che tra 200 e 300 (estremi inclusi) ci sono esattamente 13 multipli dell'intero $n$, quanto vale $n$?
(A) $\leq 6$ (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) $\geq 10$

**TESTO DEI "GIOCHI DI ARCHIMEDE" 1996 (clicca qui ⇨ per le risposte)**

1) Un ciclista che viaggia alla velocità costante di 5 m/s quanti chilometri percorre in 3 ore?
(A) 15km (B) 18 km (C) 50 km (D) 54 km (E) nessuna delle precedenti.

2) Se in una città c'è un matematico ogni 320 abitanti, qual è la percentuale di matematici?
(A) 3,2% (B) 0,32% (C) 3,125% (D) 0,3125% (E) nessuna delle precedenti.

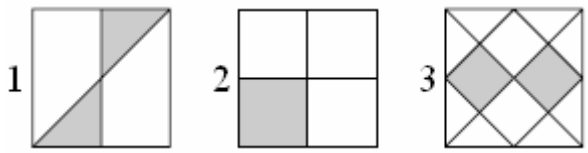
3) Si sa che nella figura a fianco
$C\hat{A}E = 60°,\ A\hat{E}B = 20°,\ A\hat{C}D = 25°.$
I punti E, D, B sono allineati.
Qual è la misura di $B\hat{D}C$ ?
(A) 75° (B) 85° (C) 90° (D) 105°
(E) le informazioni sono insufficienti.




4) Un secchio pieno di sabbia pesa complessivamente 9 kg, riempito per metà di sabbia pesa 5 kg.
Quanto pesa il secchio vuoto?
(A) 0,5 kg (B) 1 kg (C) 2 kg (D) 2,5 kg (E) il peso del secchio non può essere determinato.

5) Per cuocere il pesce sono necessari 15 minuti (fissi) per scaldare il forno, più 12 minuti di cottura per ogni ½ kg di pesce. Michele compra un branzino dal peso di 2,5 kg e vuole che sia cotto esattamente per le ore 20:00. A che ora Michele deve accendere il forno?
(A) 18:00 (B) 18:45 (C) 18:50 (D) 18:57 (E) 19:00

6) I tre quadrati del disegno hanno lo stesso lato. In che rapporto stanno le aree delle tre figure ombreggiate?



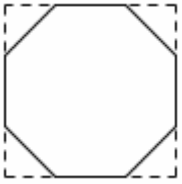

(A) La prima area è maggiore delle altre due
(B) la seconda area è maggiore delle altre due
(C) la terza area è maggiore delle altre due
(D) la prima area è uguale alla seconda, ed entrambe sono maggiori della terza
(E) le tre aree sono uguali.

7) Ieri non ho fatto colazione e sono andato a scuola, mentre l'altro ieri ho fatto colazione e sono andato a scuola. Quale delle frasi seguenti posso pronunciare senza essere bugiardo?
(A) Quando faccio colazione non vado mai a scuola
(B) tutte le volte che vado a scuola non faccio colazione
(C) ogni volta che vado a scuola faccio colazione
(D) talvolta vado a scuola senza fare colazione
(E) quando non faccio colazione non vado mai a scuola.

8) Nel rettangolo ABCD (vertici indicati in senso antiorario), E ed F sono i punti medi dei lati maggiori AD e BC rispettivamente. Sapendo che ABFE è simile a ABCD, quanto vale $AD/AB$ ?
(A) $\frac{7}{5}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) le precedenti risposte sono tutte sbagliate.

9) Uno sprinter molto regolare quando corre i 100 metri impiega 2,4 secondi per i primi 20 metri e corre i restanti 80 m a velocità costante, concludendo la gara in 10 secondi netti.
Se proseguisse per altri 100 m senza modificare la sua velocità che tempo otterrebbe sui 200 m?
(A) 18,8 s (B) 19 s (C) 19,5 s (D) 19,6 s (E) 20 s.

10) Da un quadrato di lato 10 cm si tagliano i quattro angoli in modo da ottenere un ottagono regolare.
Il lato dell'ottagono è lungo
(A) 4 cm (B) $10\cdot(\sqrt{2}-1)$ cm (C) $3\sqrt{2}$ cm (D) 5 cm
(E) le precedenti risposte sono tutte sbagliate.



11) Una partita di angurie del peso iniziale di 500 kg viene stoccata per una settimana in un magazzino. All'inizio la percentuale di acqua contenuta nelle angurie è il 99% del loro peso, alla fine dello stoccaggio, a causa dell'evaporazione, tale percentuale è scesa al 98%. Quanto pesano alla fine le angurie?
(A) 250 kg (B) 400 kg (C) 480 kg (D) 490 kg (E) 495 kg.

12) In un rombo di area 80 $cm^2$ , una diagonale è lunga il doppio dell'altra. Quanto è lungo il lato del rombo?
(A) 8 cm (B) $\sqrt{80}$ cm (C) 10 cm (D) 20 cm (E) non si può determinare

13) Cinque persone non si trovano d'accordo sulla data.
- Carlo dice che oggi è lunedì 16 agosto
- Franco dice che oggi è martedì 16 agosto
- Marco dice che oggi è martedì 17 settembre
- Roberto dice che oggi è lunedì 17 agosto
- Tullio dice che oggi è lunedì 17 settembre.

Uno ha ragione, ma nessuno ha "completamente" torto, nel senso che ciascuno dice correttamente almeno una cosa (o il giorno della settimana, o il giorno del mese, o il mese). Chi ha ragione?
(A) Carlo (B) Franco (C) Marco (D) Roberto (E) Tullio.

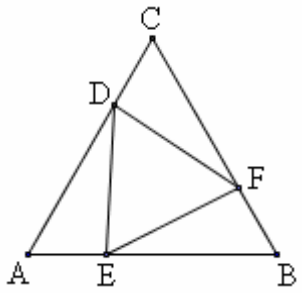
14) Sia $m = 999...99$ il numero formato da 77 cifre tutte uguali a 9 e sia $n = 777...77$ il numero formato da 99 cifre tutte uguali a 7. Il numero delle cifre di $m \cdot n$ è:
(A) 175 (B) 176 (C) 177 (D) 7692 (E) 7693

**DEFINIZIONE CLASSICA DI PROBABILITA'** (dovuta a Laplace, 1812)

Dicesi probabilità di un evento, il rapporto $\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$, qualora tutti i casi possano essere considerati "equipossibili"; cioè, qualora non ci siano casi che tendano a verificarsi "più facilmente" di altri.

15) Quattro squadre di pallacanestro di pari forza disputano un torneo con girone unico all'italiana (ogni squadra incontra ogni altra squadra una sola volta).
Qual è la probabilità che ci sia una squadra che alla fine del torneo ha vinto tutte le sue partite? (le partite di pallacanestro non possono finire con un pareggio).
(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{\pi}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

16) Sia ABC un triangolo equilatero e DEF un altro triangolo equilatero in esso inscritto con AB perpendicolare a ED.
Il rapporto fra le aree di ABC e di DEF è
(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3 (E) $3\sqrt{2}$

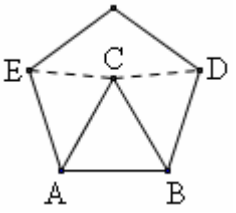



17) Un pallone di cuoio è ottenuto cucendo 20 pezzi di cuoio a forma esagonale e 12 pezzi di cuoio a forma pentagonale. Una cucitura unisce i lati di due pezzi adiacenti. Allora il numero totale delle cuciture è
(A) 90 (B) 172 (C) 176 (D) 180 (E) i dati del problema sono insufficienti.

18) Quanti angoli maggiori di 90° può avere un quadrilatero (non intrecciato)?
(A) Ne ha sempre almeno uno (B) ne ha al più uno (C) ne ha al più due
(D) ne ha al più tre (E) può averne quattro.

19) In una scatola vi sono quattro sacchetti: il primo sacchetto contiene 4 palline bianche e 3 nere, il secondo 2 palline bianche e 4 nere, il terzo 6 palline bianche e 9 nere, il quarto 5 palline bianche e 10 nere.
Si estrae un sacchetto a caso, e da questo, sempre a caso, si estrae una pallina.
Sapendo che è stata estratta una pallina bianca, quale sacchetto è più probabile che sia stato scelto?
(A) Il primo (B) il secondo (C) il terzo (D) il quarto
(E) tutti i sacchetti hanno la stessa probabilità di essere stati estratti.

20) Nel pentagono regolare disegnato a fianco, il triangolo ABC è equilatero.
Quanto vale l'angolo convesso $E\hat{C}D$ ?
(A) 120° (B) 144° (C) 150° (D) 168° (E) 170°



**PROBLEMI TRATTI DAL "PROGETTO POLYMATH"**

Il **Progetto Polymath** ⇨,
patrocinato dal Politecnico di Torino e dall'Istituto Superiore Mario Boella,
è nato per mettere in rilievo **la BELLEZZA DELLA MATEMATICA**, attraverso
"materiali da utilizzare in classe, problemi, giochi, lezioni, aggiornamenti, informazioni e proposte".

Grazie alla cortesia dei responsabili del progetto, e in particolare dell'amico torinese Federico Peiretti,
"Chi ha paura della matematica?" ha avuto una autorizzazione "in via eccezionale"
ad utilizzare 10 fra i bellissimi quesiti riportati.

**Ti consiglio molto calorosamente** di cimentarti con alcuni di questi problemi
(sono centinaia, proposti con **simpatia** e **belle immagini di corredo**).
Vedrai che per la maggior parte presentano una difficoltà non elevata,
gioiosamente superabile a patto di metterci la riflessione e l'impegno necessari.
Ecco qui di seguito i dieci che abbiamo scelto: sul sito però molti sono PIU' SEMPLICI di questi.

Puoi cliccare sulla **freccia** per la **correzione**, tratta dal sito.

**1. Chi mente e chi dice il vero (Gennaio 2002)**
[*Questo enigma è di Lewis Carroll, autore di "Alice nel paese delle meraviglie"*]
"A dice che B mente; B dice che C mente; C dice che A e B mentono".
Ora … *chi* mente e *chi* dice il vero?
*Prerequisiti* ( = *cosa occorre sapere*): *nessuno, oppure … elementarissime nozioni di Logica* ⇨

**45. Al lavoro in bici (Novembre 2002)**
Ogni mattina, un impiegato va al lavoro in bicicletta. Dalla sua abitazione all'ufficio, percorre 4 km alla velocità di 20 km/h, riuscendo ad arrivare appena in tempo per timbrare il cartellino.
Una mattina, per problemi di traffico, riesce a percorrere soltanto 2 km alla velocità di 10 km/h.
Quale velocità media dovrà tenere per i 2 km rimanenti, se vuole arrivare in tempo in ufficio?
*Prerequisiti: sapere cosa significa "velocità media"* ⇨

**59. La distribuzione del grano (Gennaio 2003**; attribuito ad *Alcuino di York*, della corte di Carlo Magno**)**
Cento misure di grano vengono distribuite fra 100 persone in modo che ogni uomo ne riceve 3, ogni donna 2 e ogni bambino mezza. Quanti sono gli uomini, le donne e i bambini?
*Prerequisiti: semplici uguaglianze letterali* ⇨

**65. Fanciulle in fiore (Febbraio 2003)**
Tre amiche, Rosa, Viola e Margherita decidono di comprare dei fiori per le loro mamme, nel giorno della Festa della Mamma. "E' curioso - osserva la ragazza che ha comprato delle rose - abbiam comprato rose, viole e margherite, ma nessuna di noi ha comprato i fiori corrispondenti al proprio nome"
"Hai ragione", dice Viola. Quali sono i fiori comprati da ciascuna delle tre ragazze?
*Prerequisiti: nessuno* ⇨

**110. Ragazze da marito (Dicembre 2003)**
Due ragazze, Donatella e Giulia, vanno per la prima volta a un appuntamento con due ragazzi, Carlo e Andrea. Alle ragazze interessa sapere, per prima cosa, se sono ancora scapoli o se sono già sposati.
Sanno solo che uno dei due, bugiardo incallito, non dice mai la verità, mentre l'altro non mente mai.
Le ragazze chiedono: "Chi di voi è sposato?"
Ed entrambi affermano: "Se vi rispondesse il mio amico, vi direbbe che io sono scapolo".
Al momento della risposta, le ragazze non sanno ancora quale dei due sia il ragazzo che non mente mai e quello che non dice mai la verità.
Sono comunque in grado, dalla loro risposta, di stabilire lo "stato civile" dei due? Chi è sposato?
*Prerequisiti: nessuno* ⇨

**114. Gatti e topi (Dicembre 2003)**
Sei gatti mangiano sei topi in sei minuti. Quanti gatti ci vogliono per mangiare 10 topi in 10 minuti?
*Prerequisiti: nessuno* ⇨

**120. Tre amici al bar (Gennaio 2004)**
Tre amici vanno al bar a prendere l'aperitivo e pagano il conto di 30 euro: 10 euro ciascuno.
La cameriera prende i soldi e li porta alla cassa, dove il proprietario decide di fare uno sconto di 5 euro ai suoi clienti affezionati.
La cameriera si tiene 2 euro di mancia e restituisce 3 euro agli amici: un euro ciascuno.
Poiché ognuno aveva pagato 10 euro e riceve un euro di resto, in pratica paga 9 euro.
In totale i tre amici spendono quindi 27 euro che aggiunti ai 2 euro della cameriera fanno 29 euro.
Dov'è sparito l'euro restante?
*Prerequisiti: nessuno* ⇨

**166. Politici onesti e politici corrotti** (**Novembre 2004**)
Al Congresso di un certo partito sono presenti 100 uomini politici, ognuno dei quali è onesto oppure corrotto. Se sappiamo che almeno uno dei politici presenti è onesto e che presi due qualsiasi degli uomini politici, almeno uno è corrotto, possiamo da ciò dedurre quanti sono gli uomini politici onesti e quanti i corrotti? *Prerequisiti: nessuno* ⇨

**338. La velocità media del cavallo (Marzo 2007)**
Un cavallo percorre metà della sua strada senza carichi alla velocità di 12 km/h.
Un carico rallenta poi la sua velocità per il percorso rimanente, che percorre alla velocità di 4 km/h.
Qual è stata la sua velocità media? *Prerequisiti: sapere cosa significa "velocità media"* ⇨

**429. Mele (Giugno 2008)**
In una cassetta ci sono tre tipi di mele, mescolate fra loro. Noi non vediamo le mele, ma quante ne dobbiamo prendere per essere sicuri di avere almeno due mele dello stesso tipo?
E almeno tre mele dello stesso tipo? *Prerequisiti: nessuno* ⇨

## PROBLEMI TRATTI DAL "LIBER ABACI" DI FIBONACCI (clic sulla **freccia** per la **correzione**)

Leonardo Pisano, detto il Fibonacci (NOTA), pubblicò il Liber Abaci, un trattato di aritmetica e algebra, nel 1202. La traduzione dei testi della piccola selezione di problemi sotto riportata, è molto libera.

1) **Una volpe scappa per sfuggire a un cane** che la insegue.
Entrambi fanno "balzi" di ugual lunghezza, ma mentre la volpe fa 6 balzi, il cane riesce a farne 9.
La distanza iniziale è di 50 balzi. … La volpe è spacciata! Dopo quanti balzi il cane la ghermisce?
*Prerequisiti*: *nessuno*; *volendo, ma non necessariamente, le equazioni* ⇨

2) **Un leone è precipitato in un pozzo** profondo 50 piedi. Nei giorni successivi:
… dal mattino alla sera, riesce faticosamente a risalire di 1/7 di piede,
… ma nel corso della notte, essendo le pareti scivolose, ridiscende poi di 1/9 di piede.
Si domanda dopo quanti giorni il leone riesce a uscire dal pozzo.
(Qui lo stesso buon Fibonacci sbagliò a dare la soluzione!) *Prerequisiti*: *nessuno* ⇨

3) **Giunta al mercato, una contadinella ricontrolla le sue uova**, e si accorge che se le conta a 2 a 2, oppure a 3 a 3, oppure a 4 a 4, o anche a 5 a 5 o a 6 a 6, in tutti questi casi gliene rimane sempre una d'avanzo; se le conta invece a 7 a 7, non ne gliene avanza nessuna.
E' possibile stabilire con quante uova la contadina è andata al mercato?
*Prerequisiti*: *sapere cos'è resto della divisione fra interi* ⇨

NOTA
Il nome dell'Autore è legato alla "**successione di Fibonacci**"
1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 …
in cui **ogni termine, a partire dal terzo, è uguale alla somma dei due che lo precedono**,
e che rappresenta la soluzione del "**problema dei conigli**" studiato, appunto, nel Liber Abaci.

*Una coppia di conigli appena nati, maschio e femmina, viene chiusa in un recinto;*
*ora supponiamo che ogni coppia di conigli:*
*a) inizi a generare esattamente allo scadere del secondo mese di età*
*b) generi una nuova coppia maschio+femmina ogni mese*
*c) e sia immortale.*
*Quante coppie di conigli ci saranno nel recinto all'inizio dell'n-esimo mese, con n* = 1, 2, 3, 4, … ?

La successione di Fibonacci, che sovente viene in realtà fatta convenzionalmente iniziare dalla coppia 0 1:
0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 …
gode di meravigliose e insospettate proprietà;
ad esempio, il rapporto fra un termine e quello che lo precede ha un valore che si avvicina, procedendo "verso destra" nella successione,
al "numero aureo" $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ che esprime il rapporto fra un segmento e la sua "sezione aurea".

A questi argomenti si fa cenno brevemente nel Volume 2 di "Chi ha paura della matematica?"

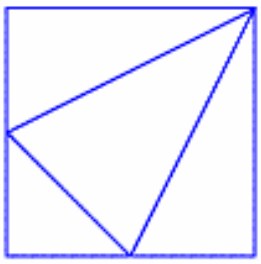
**UN PROBLEMA "CLASSICO"**

Ci sono 9 biglie, tutte identiche fra loro nell'aspetto; una però, differisce dalle altre nel peso (non si sa tuttavia se pesa di più o di meno, rispetto alle rimanenti).
Disponendo di una bilancia a due piatti, sapresti in sole tre pesate individuare la pallina "pazza", e stabilire se è più pesante o più leggera?

**PROBLEMI GENTILISSIMAMENTE CONCESSI** ⇨
**DA NRICH** (specialists in rich mathematics, http://nrich.maths.org/)
**(University of Cambridge**'s Faculty of Education / Centre for Mathematical Sciences).

La **freccia** ⇨ accanto al nome del problema è un link verso la **risposta**;
**per metodi di risoluzione alternativi**, **inviati dagli studenti, davvero interessanti,**
**puoi consultare il sito** digitando il nome del problema nel motore di ricerca interno.

## 1) Fraction Fascination ⇨

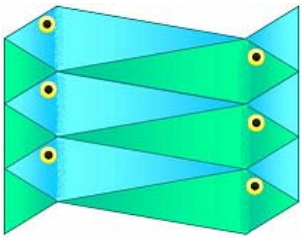


Ho disegnato questa figura
tracciando un segmento
dal vertice in alto a destra di un quadrato
ai punti di mezzo di ciascuno dei due lati opposti.

Che frazione dell'area del quadrato
rappresenta ciascuno
dei quattro triangoli ottenuti?

(Cerca di rispondere senza calcolare alcuna area!)

## 2) Counting Fish ⇨



Voglio farmi un'idea di quanti pesci ci siano in un lago.

Catturo 40 pesci e marco ciascun pesce con un segno
su di una scaglia, così che possa essere
identificato, se nuovamente ripescato.

I pesci sono poi liberati, e una settimana dopo
catturo ancora una volta 40 pesci e li osservo
per vedere quali di questi erano già stati presi prima.

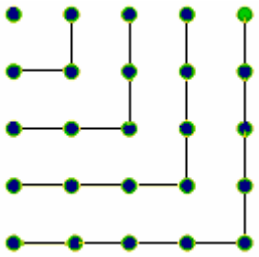
Come mi aiuta tutto ciò a determinare un valore
approssimativo della popolazione di pesci del lago?

## 3) Dozens ⇨

ATTIVITA' (ESERCIZI SULLA DIVISIBILITA')
Prendi quattro carte con sopra le cifre 1, 3, 4 e 5.
Ora, lavorando in gruppo coi compagni,
mettile in ordine con lo scopo di realizzare
un numero divisibile
(non sempre ciò sarà possibile!) per i numeri:
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
Quando il problema è impossibile, vedi se ci
riesci andando a escludere una fra le carte date.
QUESITO
Qual è il più grande numero di 5 cifre
divisibile per 12 costruibile utilizzando
le cifre 1, 3, 4 e 5 ed una quinta cifra-jolly
il cui valore può essere fissato a piacere?

## 4) Odd Squares ⇨

La figura qui a destra
illustra la bella formula
$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$



Ora tu utilizza la stessa figura
per dimostrare che
qualsiasi numero dispari $2n-1$
è sempre esprimibile come
differenza di due quadrati.

Seconda richiesta … questa è più difficile, occorre
fare uso dell'identità $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.
Trova una strategia per determinare tutti i possibili modi
(ce ne sono ben 4) in cui il numero 105 si può scrivere
come differenza fra i quadrati di due interi positivi.

## 5) Multiply the Addition Square ⇨

Considera una tabellina
dell'addizione, per es. da 1 a 10:

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

Ora in essa prendi
un quadrato 3x3 di numeri:

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 2 | 3 | 4 | **5** | **6** | **7** | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 3 | 4 | 5 | **6** | **7** | **8** | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 4 | 5 | 6 | **7** | **8** | **9** | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 7 | **8** | **9** | **10** | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 8 | **9** | **10** | **11** | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 9 | **10** | **11** | **12** | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

Moltiplica le due coppie di
numeri agli angoli opposti,
poi sottrai
i due prodotti ottenuti:

| | | |
|---|---|---|
| **5** | **6** | **7** |
| **6** | **7** | **8** |
| **7** | **8** | **9** |

$7\cdot 7-5\cdot 9=49-45=4$

| | | |
|---|---|---|
| **8** | **9** | **10** |
| **9** | **10** | **11** |
| **10** | **11** | **12** |

$10\cdot 10-8\cdot 12=100-96=4$

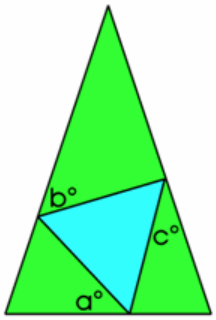
La differenza è SEMPRE
uguale a 4? Perché?

## 6) Burning Down ⇨



Vengono accese due differenti candele.
Bruciano a velocità diverse
e una è più lunga di 3 cm rispetto all'altra.
La più lunga viene accesa alle 5.30 del pomeriggio
e la più corta alle 7.
Alle 9.30 le candele hanno la stessa lunghezza.
La più lunga finisce di consumarsi alle 11.30
e la più corta alle 11.
Quanto era lunga ciascuna candela originariamente?

## 7) Terminology ⇨




In un triangolo isoscele è incastrato ("inscritto")
un triangolo equilatero.
Determina a in funzione di b, c
( = trova un'espressione del tipo a = …
dove nel secondo membro devono comparire b, c).

Cosa si può dire dei triangoli nel caso sia a = b = c?

## 8) Perfectly Square ⇨

(E' richiesto di conoscere la fattorizzazione)

Osserva bene:

$x_1 = 2^2 + 3^2 + 6^2$

$x_2 = 3^2 + 4^2 + 12^2$

$x_3 = 4^2 + 5^2 + 20^2$

Dimostra che $x_n$ è sempre un quadrato perfetto!

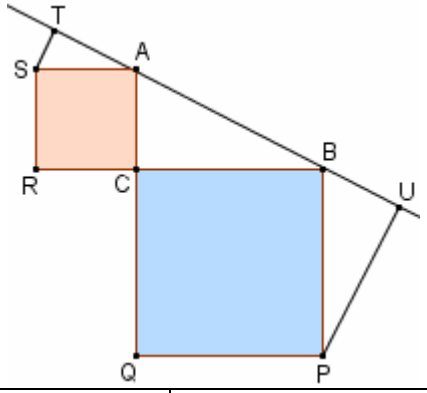
## 9) Phew I'm Factored ⇨

(E' richiesto di conoscere
i numeri in base diversa da dieci,
e la fattorizzazione)

Dimostra che 10201, 11011 e 10101
Sono numeri composti ( = non primi),
qualunque sia la base in cui si suppongono scritti.

## 10) A Sameness Surely ⇨

Il triangolo ABC è rettangolo in C.
ACRS e CBPQ sono quadrati.
ST e PU sono perpendicolari ad AB.
Dimostra che ST+PU=AB.




## 11) Walk and Ride ⇨





Un gruppo di 10 studenti è in partenza per una gita scolastica,
sennonché l'autobus si guasta a 40 miglia dalla scuola.
Una professoressa riporta 5 di essi indietro fino alla scuola
con la sua automobile, viaggiando alla velocità media di 40 miglia all'ora.
Gli altri 5 studenti iniziano a camminare verso la scuola alla velocità
di 4 miglia all'ora. L'insegnante scarica i 5 che aveva accolto nella sua auto,
poi immediatamente ritorna per caricare anche gli altri,
di nuovo procedendo alla velocità di 40 miglia orarie.
Che distanza hanno coperto gli studenti
fino al momento in cui sono raggiunti dall'auto?

## 12) Never Prime ⇨

Se prendiamo
un intero *a*
composto da
due cifre distinte,
e consideriamo poi
l'intero *b*
che si ottiene invertendo
l'ordine di queste due cifre,
la differenza fra *a* e *b*
non potrà mai essere
un numero primo:
dimostralo!

E se le cifre fossero 3 o 4?

Il bellissimo sito http://nrich.maths.org/ ,
nato per arricchire (mathematical eNRICHment) l'esperienza matematica dei visitatori di tutte le età,
mette a disposizione gratuitamente una **ricchissima raccolta di problemi**
(**rintracciabili, con un motore di ricerca interno, per titolo o per argomento trattato**)
e gli studenti di tutto il mondo sono invitati ad inviare per e-mail
la loro soluzione dei problemi nuovi o ancora non risolti.

*"Non so come posso apparire al mondo: ma ai miei occhi mi sembra di essere stato*

*nient'altro che un bambino assorto nei suoi giochi sulla riva del mare*

*e di essermi divertito a trovare qua e là*

*un sassolino più liscio o una conchiglia più graziosa del comune,*

*mentre il grande oceano della verità stava ancora tutto da scoprire davanti a me"*

**Isaac Newton**



Caspar David Friedrich, *"Der Mönch am Meer" (Monaco sulla riva del mare)*, 1809