EQUAZIONI E PROBLEMI

1. ESEMPI DI PROBLEMI A UNA INCOGNITA

❑ PROBLEMA SVOLTO 1

Per prender parte alla "festa del primino" ogni maschio deve pagare un biglietto da 5 euro, ogni femmina un biglietto da 3 euro. Si vendono in totale 90 biglietti, e si osserva che, complessivamente, i maschi hanno pagato 10 euro più delle femmine. Quante ragazze e quanti ragazzi hanno partecipato alla festa?

RISOLUZIONE

$\boxed{\text{Pongo la } x}$:

$x = \textit{numero delle femmine}$

$\boxed{\text{Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di } x}$:

$\textit{numero dei maschi} = 90 - x$
$\textit{cifra complessiva, in euro, pagata dai maschi} = 5(90 - x)$
$\textit{cifra complessiva in euro, pagata dalle femmine} = 3x$

$\boxed{\text{Imposto l'equazione risolvente}}$:

$5(90 - x) = 3x + 10$ (NOTA 1)
$450 - 5x = 3x + 10$
$-5x - 3x = 10 - 450$ (NOTA 2)
$-8x = -440$
$8x = 440$ (NOTA 3)
$x = \dfrac{\cancel{440}^{\,55}}{\cancel{8}}$ (NOTA 4)

da cui: 55 femmine, $90 - 55 = 35$ maschi

♥ Come ribadiremo in seguito, le TRE FASI per la risoluzione di un "problema con la x" sono:

I) porre la x (= decidere cosa indicare con x)
II) esprimere per mezzo di x le varie quantità in gioco
III) impostare l'equazione risolvente

♥ VERIFICA DOPO LA RISOLUZIONE (sempre consigliata!)

Se le femmine sono 55 e i maschi 35, la spesa totale delle femmine è di euro $55 \cdot 3 = 165$ mentre la spesa totale dei maschi è di euro $35 \cdot 5 = 175$

OK, i maschi complessivamente spendono 10 euro più delle femmine!!!

NOTA 1

Questa, che abbiamo scritto, è una "**equazione**".

> **♥ Si dice "EQUAZIONE" un'uguaglianza, contenente un numero sconosciuto, "incognito" (generalmente indicato con x), di fronte alla quale ci si propone di determinare per quali valori di x, ammesso che esistano, l'uguaglianza stessa è verificata.**

Per risolvere un'equazione, prima di tutto si svolgono i calcoli, in modo da eliminare le parentesi e portare ciascuno dei due membri sotto la forma più semplice possibile.
L'obiettivo finale sarà di ottenere, con opportuni passaggi, il valore di x: $x = \ldots$

NOTA 2

Dall'equazione $450 - 5x = 3x + 10$
si passa all'equazione $-5x - 3x = 10 - 450$
con la "REGOLA DEL TRASPORTO":

> **♥ In un'equazione, è possibile trasportare un termine (nel senso di: un addendo di somma algebrica) dall'altra parte del simbolo =, CAMBIANDOLO PERO' DI SEGNO**

Perché mai è possibile ciò? Vediamo.
L'equazione iniziale è $450 - 5x = 3x + 10$
ma noi desideriamo giungere, prima o poi, all'uguaglianza $x = \ldots$
quindi, innanzitutto, vorremmo che tutti i termini contenenti x fossero a primo membro, e tutti i termini "noti" (cioè: conosciuti, non contenenti x) a secondo membro.
Prendiamo ad esempio il termine $3x$: esso sta a secondo membro, ma "non è il posto giusto per lui".
Come toglierlo dal secondo membro?
Beh, toglierlo dal secondo membro significherebbe SOTTRARLO dal secondo membro;
d'altra parte, se in un'uguaglianza noi sottraiamo un numero da uno soltanto dei due membri, l'uguaglianza "si rovina", "la bilancia perde il suo equilibrio".
Invece la bilancia resta in equilibrio se il numero che sottraiamo da uno dei due membri, lo andiamo a sottrarre anche dall'altro!

Perciò:

$450-5x=3x+10$

$450-5x-3x=\cancel{3x}+10\cancel{-3x}$

Cos'abbiamo fatto? Abbiamo sottratto dai due membri uno stesso numero, il numero $3x$.
La bilancia, sottraendo lo stesso peso da entrambi i piatti, resta in equilibrio.
Il termine $3x$ è così scomparso dal secondo membro, ma simultaneamente è apparso al primo membro, cambiato però di segno!!!

Ora abbiamo

$450-5x-3x=10$

ma non siamo ancora soddisfatti!
Infatti c'è il termine noto 450, che "ci dà fastidio": vorremmo che fosse a secondo membro!
Facile: sottraiamo 450 da entrambi i membri e avremo:

$\cancel{450}-5x-3x\cancel{-450}=10-450$

Quindi, il termine 450 è scomparso dal primo membro,
ma in compenso eccolo comparire a secondo membro, cambiato però di segno!

Il discorso fatto giustifica dunque la "**regola del trasporto**".
Rileggiamo cosa dice questa regola:

In un'equazione, è possibile trasportare un termine
(nel senso di: un addendo di somma algebrica)
dall'altra parte del simbolo =,
CAMBIANDOLO PERO' DI SEGNO

Allora, ricapitolando, quando siamo passati
dall'equazione $450-5x=3x+10$ all'equazione $-5x-3x=10-450$,
abbiamo applicato, per due volte, la "regola del trasporto".

NOTA 3

In questo passaggio abbiamo applicato la REGOLA che dice:

♥ **In un'equazione, è possibile cambiare di segno tutti i termini**
(= addendi delle due somme algebriche a primo e a secondo membro)

Infatti, se due numeri sono uguali, anche i rispettivi opposti saranno uguali !!!

NOTA 4

A partire da $8x=440$ ricaviamo $x=\frac{440}{8}$

Questo è perfettamente comprensibile:
se 8 volte un certo numero dà un certo risultato, allora quel numero sarà uguale al risultato, DIVISO 8 (la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione).
Se 8 volte il mio stipendio dà 10000 euro, quant'è il mio stipendio? Ovvio: 10000:8 = 1250 euro.

Oppure, potremmo ragionare così:
noi abbiamo $8x=440$ ma vorremmo avere $x=\ldots$

Insomma, quel moltiplicatore 8, a sinistra di x, ci dà fastidio! Vorremmo sbarazzarcene.
Possiamo ottenere il nostro scopo, mantenendo la bilancia in equilibrio,
se dividiamo per 8 sia il primo che il secondo membro: $\frac{\cancel{8}x}{\cancel{8}}=\frac{440}{8}$.

Di qui la REGOLA:

♥ **"Ciò che moltiplica da una parte del simbolo =, divide dall'altra;**
ciò che divide da una parte, moltiplica dall'altra".

Ad esempio, un "moltiplicato 8" a sinistra dell'=, diventa un "fratto 8" a destra dell'=.

Questa potrebbe essere chiamata, volendo,
la "**REGOLA DEL TRASPORTO PER LA MOLTIPLICAZIONE-DIVISIONE**"
(mentre la precedente era, più precisamente, la "**regola del trasporto per la somma algebrica**").

Prima di passare a considerare altri problemi,
dedichiamo una pagina alla **RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI**,
prendendo in esame un paio di esempi.

$2(3x-1)+4x=9(2x+1)-5$ — *Svolgo i calcoli, per eliminare le parentesi*

$\underline{6x}-2\,\underline{+4x}=18x\,\underline{\underline{+9}}\,\underline{\underline{-5}}$ — *Sottolineo e riduco i termini simili a 1° e 2° membro*

$10x-2=18x+4$ — *Siccome il mio obiettivo finale è di ottenere $x=\dots$, porto tutti i termini con x a 1° membro e tutti i termini senza x (= termini "noti") a 2° membro. Naturalmente, se un termine "salta" dall'altra parte del simbolo =, deve cambiare di segno*

$10x-18x=4+2$ — *Riduco i termini simili*

$-8x=6$ — ♥ *Il coefficiente di x è negativo: non è obbligatorio, ma è conveniente cambiare i segni di entrambi i membri*

$8x=-6$ — *Divido per il coefficiente di x:* $\dfrac{\cancel{8}x}{\cancel{8}}=\dfrac{-6}{8}$

$$x=\frac{-\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{8}_{\,4}}=-\frac{3}{4}$$

Se voglio, faccio ora la verifica sostituendo il valore trovato, $x=-\dfrac{3}{4}$,
nell'equazione iniziale $2(3x-1)+4x=9(2x+1)-5$
per vedere se in effetti così facendo si ottiene un'uguaglianza vera.

$$2\left[3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-1\right]+\cancel{4}\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{4}}\right)=9\left[\cancel{2}\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{4}_{\,2}}\right)+1\right]-5$$

$$2\left[-\frac{9}{4}-1\right]-3=9\left[-\frac{3}{2}+1\right]-5;\quad \cancel{2}\cdot\frac{-9-4}{\cancel{4}_{\,2}}-3=9\cdot\frac{-3+2}{2}-5;\quad -\frac{13}{2}-3=9\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-5;$$

$$-\frac{13}{2}-3=-\frac{9}{2}-5;\quad \frac{-13-6}{2}=\frac{-9-10}{2};\quad -\frac{19}{2}=-\frac{19}{2}\quad \text{OK!!!}$$

$\dfrac{5x+1}{3}-\dfrac{x+5}{6}=4$ — *Faccio il denominatore comune, che dev'essere lo stesso sia a 1° che a 2° membro*

$\dfrac{2(5x+1)-(x+5)}{\cancel{6}}=\dfrac{24}{\cancel{6}}$ — *Mando via i due denominatori uguali (è come moltiplicare per lo stesso numero, il 6, entrambi i membri)*

$\underline{10x}+2\,\underline{-x}-5=24$ — *Svolgo i calcoli, riduco i termini simili*

$9x-3=24$ — *Trasporto (tutti i termini con x al 1° membro, tutti gli altri al 2°) e riduco*

$9x=27$ — *Divido per il coefficiente di x:* $\dfrac{\cancel{9}x}{\cancel{9}}=\dfrac{27}{9}$

$x=\dfrac{\cancel{27}^{\,3}}{\cancel{9}}=3$ — *Ho finito: se voglio, faccio la verifica sostituendo nell'equazione iniziale*

♥ Quando ci sono dei denominatori, conviene innanzitutto liberarsene. IN GENERALE, NON È CONVENIENTE trasportare termini o ridurre termini simili mentre ci sono ancora i denominatori!
Altro esempio:

$$\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}x+2$$
$$\frac{4x-6}{\cancel{12}}=\frac{3x+24}{\cancel{12}}$$
$$4x-3x=24+6;\quad x=30$$

ESERCIZI

Risolvi queste equazioni, commentando ogni passaggio e facendo la verifica ⇨

1) $7x-5=3x-1$ 2) $5x+1=6x-7$
3) $2(x-1)=5(x+2)$ 4) $7x+1=3(x+1)$
5) $3(x+4)+8x=2(x+6)$ 6) $x=10x+15$
7) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{4}x=\dfrac{3}{10}x+\dfrac{1}{3}$ 8) $\dfrac{x}{4}+1=2\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$

SOLUZIONI
1) $x=1$ 2) $x=8$
3) $x=-4$ 4) $x=\dfrac{1}{2}$
5) $x=0$ 6) $x=-\dfrac{5}{3}$
7) $x=-\dfrac{8}{3}$ 8) $x=4$

❑ PROBLEMA SVOLTO 2

La mamma di Andrea è di 3 anni più giovane rispetto al papà.
La differenza fra i quadrati delle due età è 243. Quanti anni hanno i genitori di Andrea?

RISOLUZIONE

$\boxed{\text{Pongo la } x}$:

$x = \textit{età del papà}$

$\boxed{\text{Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di } x}$:

$\textit{età della mamma} = x - 3$

$\boxed{\text{Imposto l'equazione risolvente}}$:

$$x^2 - (x-3)^2 = 243$$

$$x^2 - \left(x^2 - 6x + 9\right) = 243$$

$$\cancel{x^2} \cancel{-x^2} + 6x - 9 = 243$$

$$6x = 243 + 9; \quad 6x = 252; \quad x = \frac{\cancelto{42}{252}}{\cancel{6}}$$

Essendo dunque l'età del *padre* 42 anni,
l'età della *mamma* sarà 42 – 3 = 39 anni.

VERIFICA DOPO LA RISOLUZIONE:

Controlliamo se la differenza dei quadrati delle due età trovate vale proprio 243.

$42^2 - 39^2 = 1764 - 1521 = 243$, OK!!!

OSSERVAZIONE

Evidentemente, avrei anche potuto scegliere di porre $x = \textit{età della mamma}$;
avrei allora avuto $\textit{età del papà} = x + 3$
e l'equazione risolvente sarebbe stata $(x+3)^2 - x^2 = 243$
con la soluzione $x = 39$

❑ PROBLEMA SVOLTO 3

Trovare due interi consecutivi, tali che
la differenza fra il loro prodotto e il quadrato del più piccolo sia uguale al numero più grande.

RISOLUZIONE

$\boxed{\text{Pongo la } x}$:

$x = \textit{numero più piccolo}$

$\boxed{\text{Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di } x}$:

$\textit{numero più grande} = x + 1$

$\boxed{\text{Imposto l'equazione risolvente}}$:

$$x(x+1) - x^2 = x + 1$$

$$\cancel{x^2} + x \cancel{-x^2} = x + 1$$

$$x - x = 1$$

$0 = 1$ L'EQUAZIONE E' QUINDI IMPOSSIBILE, PRIVA DI SOLUZIONI!

Infatti

$x - x = 0$ *o anche* $x - x = 0 \cdot x$, *e l'uguaglianza* $0 \cdot x = 1$ *non è verificata da nessun valore di* x

Risposta:

Non esiste *nessuna coppia di interi consecutivi* che soddisfi alla proprietà richiesta.

❑ PROBLEMA SVOLTO 4

Pierino ha calcolato che con la sua paghetta settimanale potrebbe comprare
- **8 crostate (e in questo caso la spenderebbe tutta),**
- **o in alternativa 13 gelati (e in questo caso avanzerebbe un euro).**

Trovare l'ammontare in euro della paghetta di Pierino,
sapendo che un gelato costa 2 euro in meno rispetto a una crostata.

CONFRONTIAMO, PER QUESTO PROBLEMA, DIVERSE ALTERNATIVE DI RISOLUZIONE.

RISOLUZIONE 1

$\boxed{\text{Pongo la } x}$:

$x = \textit{costo, in euro, di una crostata}$

$\boxed{\text{Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di } x}$:

$\textit{costo, in euro, di un gelato} = x-2$
$\textit{ammontare, in euro, della paghetta di Pierino} = 8x \ \textit{oppure} \ 13(x-2)+1$

$\boxed{\text{Imposto l'equazione risolvente}}$:

$$8x = 13(x-2)+1$$
$$8x = 13x-26+1$$
$$8x-13x = -25$$
$$-5x = -25$$
$$5x = 25$$
$$x = 5$$

Una crostata costa 5 euro, un gelato $5-2=3$ *euro, la paghetta di Pierino è di* $8\cdot 5 = 40$ *euro*

RISOLUZIONE 2

$\boxed{\text{Pongo la } x}$:

$x = \textit{ammontare, in euro, della paghetta di Pierino}$

$\boxed{\text{Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di } x}$:

$\textit{costo, in euro, di una crostata} = \dfrac{x}{8} = \dfrac{1}{8}x$

$\textit{costo, in euro, di un gelato} = \dfrac{1}{8}x-2$

$\boxed{\text{Imposto l'equazione risolvente}}$:

$$13\left(\frac{1}{8}x-2\right)+1 = x\,; \qquad \frac{13}{8}x-26+1 = x\,; \qquad \frac{13}{8}x-25 = x$$

che posso affrontare in vari modi :

così…

$$\frac{13}{8}x-25 = x$$
$$\frac{13}{8}x-x = 25$$
$$\frac{5}{8}x = 25$$
$$x = \frac{25}{\frac{5}{8}} = \cancel{25}^{5}\cdot\frac{8}{\cancel{5}} = 40$$

Porto tutti i termini contenenti x a primo membro, riduco i termini simili, e infine divido per il coefficiente di x, che è, in questo caso, la frazione 5/8

… oppure così …

$$\frac{13}{8}x-25 = x$$
$$\frac{13}{8}x-x = 25$$
$$\frac{5}{8}x = 25$$
$$\frac{\cancel{8}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{8}}x = \cancel{25}^{5}\cdot\frac{8}{\cancel{5}}$$
$$x = 40$$

Come prima; questa volta, ho scelto di effettuare il passaggio finale sbarazzandomi del coeff. di x (5/8) tramite moltiplicazione per il reciproco (che è 8/5)

… o in quest'altra maniera, forse la più comoda:

$$\frac{13}{8}x-25 = x$$
$$\frac{13x-200}{\cancel{8}} = \frac{8x}{\cancel{8}}$$
$$13x-8x = 200$$
$$5x = 200$$
$$x = 40$$

Qui ho scelto di eliminare innanzitutto il denominatore, facendo il denominatore comune uguale sia a 1° che a 2° membro poi mandando via questo denominatore comune tramite moltiplicazione per 8 di entrambi i membri

RISOLUZIONE 3

$\boxed{\text{Pongo la } x}$:

x = ammontare, in euro, della paghetta di Pierino

$\boxed{\text{Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di } x}$:

costo, in euro, di una crostata $= \frac{x}{8} = \frac{1}{8}x$

costo, in euro, di un gelato $= \frac{x-1}{13}$ (NOTA 1)

$\boxed{\text{Imposto l'equazione risolvente}}$:

$$\frac{x-1}{13} = \frac{x}{8} - 2$$
$$\frac{8x-8}{\cancel{104}} = \frac{13x-208}{\cancel{104}}$$
$$8x - 13x = -208 + 8$$
$$-5x = -200$$
$$5x = 200$$
$$x = 40 \quad \text{(OSSERVAZIONE 1)}$$

NOTA 1

Se con la paghetta compro 13 gelati,
mi rimane 1 euro d'avanzo;
quindi, se prendo la paghetta x
e metto da parte 1 euro,
con la cifra restante, che sarà x–1,
potrò comprare esattamente 13 gelati.

Il costo di un singolo gelato è perciò $\frac{x-1}{13}$.

Potevo anche procedere mediante
l'inversione di una formuletta:

$p = 13g + 1$ *(p paghetta, g gelato)*
$13g + 1 = p$ *(scambiando i due membri)*
$13g = p - 1$ *(isolando il termine con g)*
$g = \frac{p-1}{13}$

OSSERVAZIONE 1

Qui abbiamo forse faticato un po' di più;
in effetti, la risoluzione 2)
è preferibile rispetto alla 3), perché
nella 2) l'informazione più complicata
viene utilizzata soltanto alla fine,
per impostare l'equazione risolvente,
e non prima (vedi il paragrafo 2,
"Problemi a una incognita:
indicazioni generali")

ESERCIZI (equazioni con denominatori) ⇨

1) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{4}x$ 2) $\frac{x+1}{4} + \frac{x-2}{3} = \frac{1}{6}$

3) $1 - \frac{x+3}{4} = \frac{1}{2}x$ 4) $\frac{2x-1}{3} = \frac{1}{2}(x-2)$

Sol.: 1) $x = 8/5$ 2) $x = 1$ 3) $x = 1/3$ 4) $x = -4$

❑ PROBLEMA SVOLTO 5

**Trovare tre numeri, sapendo che il primo è i 2/3 del secondo,
il secondo supera di un'unità la metà del terzo,
e la media dei tre numeri è 36.**

RISOLUZIONE

$\boxed{\text{Pongo la } x}$:

x = 3° *numero* (OSSERVAZIONE 2)

$\boxed{\text{Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di } x}$:

$$2°\ numero = \frac{1}{2}x + 1$$
$$1°\ numero = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$\boxed{\text{Imposto l'equazione risolvente}}$:

$$\frac{x + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{3} = 36 \quad \text{(NOTA 2)}$$
$$x + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = 108 \quad \text{(NOTA 3)}$$
$$\frac{6x + 3x + 6 + 2x + 4}{\cancel{6}} = \frac{648}{\cancel{6}}$$
$$11x + 10 = 648 \ \ldots \ x = 58$$

I tre numeri cercati sono :

$\boxed{3°\ n° = 58}$; $\boxed{2°\ n° =}\frac{1}{2} \cdot 58 + 1 = \boxed{30}$; $\boxed{1°\ n° =}\frac{2}{3} \cdot 30 = \boxed{20}$

OSSERVAZIONE 2

E' conveniente porre come x
proprio il 3° numero,
perché con questa scelta è più facile
esprimere le altre quantità in gioco,
ossia i due numeri rimanenti,
per mezzo di x
(vedi il paragrafo 2,
"Problemi a una incognita: indicazioni generali")

NOTA 2

Avremmo anche potuto evitare
le fastidiose linee di frazione sovrapposte:
bastava moltiplicare per 1/3
anziché dividere per 3,
bastava cioè scrivere

$$\left(x + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = 36$$

NOTA 3

Per mandar via la linea di frazione principale
(intendo, per mandar via il lungo "fratto 3")
abbiamo moltiplicato per 3
sia il primo che il secondo membro

2. PROBLEMI A UNA INCOGNITA: INDICAZIONI GENERALI

- Alcuni problemi sono tali che per risolverli bastano **semplicemente dei calcoli**, senza che sia necessario introdurre incognite;
- in altri, è indispensabile (o, almeno, conveniente) **porre un'incognita** (di solito si usa, ma non è affatto obbligatorio, la lettera x);
- in altri problemi ancora, poi, è opportuno **porre più incognite** (che generalmente, ma non obbligatoriamente, si indicheranno con le lettere x, y, z, …)

Nel caso in cui si decida di porre
UNA SOLA INCOGNITA,
il procedimento risolutivo
sarà sostanzialmente costituito da TRE FASI:

I)	**scegliere l'incognita**	*Come* scegliere l'incognita? Non sempre conviene porre come incognita proprio la quantità che è richiesta dal problema. **La scelta dell'incognita deve, sostanzialmente, avvenire già in vista della seconda fase, cioè cercando di scegliere la x in modo che sia poi facile esprimere tutte le altre quantità non note che ci servono, per mezzo della x scelta**.
II)	**esprimere tutte le quantità che sono in gioco nel problema** (a parte, naturalmente, quelle già note) **per mezzo dell'incognita scelta** (o, come si dice in "gergo" matematico, "*in funzione*" dell'incognita)	Per la seconda fase, ossia per esprimere le varie quantità mediante la x, conviene sempre utilizzare, fra le varie **informazioni** che ci dà il testo del problema, quelle **più semplici**. **L'informazione più complicata sarà opportuno lasciarla per ultima: essa ci servirà per la terza fase, cioè per impostare l'equazione risolvente**.
III)	**impostare l'equazione risolvente**	♥ A proposito dell'equazione risolvente: **bisogna sempre impostarla facendo uso di un'informazione che non sia stata già sfruttata nella fase precedente**. Infatti, se, per caso, "ricicliamo" una seconda volta un'informazione già utilizzata, ci troveremo di fronte ad un'equazione "in cui va via tutto" (equazione indeterminata), e da questa non potremo in alcun modo pervenire al valore cercato di x.

Se, invece, si decide di usare più di una incognita,
la tecnica di risoluzione consisterà nello scrivere un "sistema" (vedi capitolo successivo)
formato di norma da un numero di equazioni uguale al numero delle incognite.

♥ Domanda: *QUANDO conviene risolvere con una sola incognita e QUANDO invece con più incognite?*

Diciamo che **la risoluzione con una sola incognita è preferibile qualora sia abbastanza facile esprimere tutte le quantità non note in gioco, mediante una sola di esse.**

Esempi:

- Se il problema parla di "quattro numeri interi consecutivi", sarebbe un'inutile complicazione fare uso di 4 incognite x, y, z, w; si indicheranno invece i numeri in questione con
  $x,\ x+1,\ x+2,\ x+3$
- Se si sa che due numeri da determinare hanno per somma s (essendo s un numero noto), anziché "sprecare" due incognite x, y, basterà indicarli con:
  $x,\ s-x$
- Se è noto che la differenza fra due numeri da trovare è d (essendo d un numero noto), si potrà scrivere:
  x (numero minore), $x+d$ (numero maggiore)
  oppure:
  x (numero maggiore), $x-d$ (numero minore)
- ecc. ecc.

3. IL MONDO DELLE EQUAZIONI E' MOLTO VARIO

EQUAZIONE = "UGUAGLIANZA PROBLEMATICA":
un'equazione è un'uguaglianza, contenente un numero sconosciuto, "incognito" (generalmente indicato con *x*), che ci chiede di determinare per quali valori di *x*, ammesso che esistano, l'uguaglianza stessa è verificata.

Esistono equazioni:

con una e una sola soluzione

$7(x+1)=8x-(3x-5)$
$7x+7=8x-3x+5$
$7x-8x+3x=5-7$
$2x=-2;\quad \boxed{x=-1}$

Altro esempio: $7(x+1)=8x-(3x-7)$
$7x+7=8x-3x+7$
$7x-8x+3x=7-7$
$2x=0;\quad \boxed{x=0}$

impossibili, cioè prive di soluzioni

$7(x+1)=8x-(x-5)$
$7x+7=8x-x+5$
$7x-8x+x=5-7$
$0\cdot x=-2$

Noi cerchiamo dunque un numero *x* che, moltiplicato per 0, dia –2; ma NESSUN numero gode di questa proprietà, quindi questa equazione è IMPOSSIBILE , priva di soluzioni.

In generale, ogni equazione che si possa portare sotto la forma $0\cdot x=b,\ \ con\ b\neq 0$, è IMPOSSIBILE

Nel nostro esempio, noi avremmo anche potuto semplificare al secondo passaggio:

$7(x+1)=8x-(x-5)$
$\cancel{7x}+7=\cancel{8x}\cancel{-x}+5$
$7=5$

ottenendo un'uguaglianza numerica FALSA.

Se, in un'equazione, è possibile semplificare in modo tale che l'equazione stessa si riduca ad **un'uguaglianza *numerica* (= senza più la *x*) FALSA**, allora l'equazione è IMPOSSIBILE, cioè priva di soluzioni.

indeterminate, cioè con infinite soluzioni

$5(x+1)=8x-(3x-5)$
$5x+5=8x-3x+5$
$5x-8x+3x=5-5$
$0\cdot x=0$

Noi cerchiamo dunque un numero *x* che, moltiplicato per 0, dia 0; ma QUALSIASI numero gode di questa proprietà, quindi questa equaz. è INDETERMINATA , ovvero ha infinite soluzioni, perché qualsiasi numero ne è soluzione.

In generale, ogni equazione che si possa portare sotto la forma $0\cdot x=0$ è INDETERMINATA

Nel nostro esempio, noi avremmo anche potuto semplificare al secondo passaggio:

$5(x+1)=8x-(3x-5)$
$\cancel{5x}\cancel{+5}=\cancel{8x}\cancel{-3x}\cancel{+5}$
$0=0$

ottenendo un'uguaglianza numerica VERA.

Se, in un'equazione, è possibile semplificare in modo tale che l'equazione stessa si riduca ad **un'uguaglianza *numerica* (= senza più la *x*) VERA**, allora l'equazione è INDETERMINATA (= ha infinite soluzioni).

dotate di un numero finito, ma maggiore di 1, di soluzioni

$(2x-1)(3x-1)=1$
$6x^2-2x-3x\cancel{+1}=\cancel{1}$
$6x^2-5x=0$
$x(6x-5)=0$
$\boxed{x=0}\ \boxed{oppure}\ 6x-5=0;\ 6x=5;\ \boxed{x=\frac{5}{6}}$

$x^3-4x=0;\quad x(x^2-4)=0\ \ da\ cui$
$\boxed{x=0}\ \boxed{oppure}\ x^2-4=0;\ x^2=4;\ \boxed{x=\pm 2}$

Legge di annullamento del prodotto
Se almeno uno dei fattori è nullo il prodotto vale 0; *e viceversa*: se un prodotto è uguale a 0, allora certamente almeno uno dei fattori è 0.

IDENTITA' ♥ **Un'identità è una UGUAGLIANZA LETTERALE SEMPRE VERIFICATA, per qualunque valore ammissibile dato alle lettere coinvolte**
(vanno tolti, se ce ne sono, i valori che fanno perdere significato a uno o a entrambi i membri)

Esempi: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\quad 2(x+5)=2x+10$ $\quad \frac{2x-6}{x-3}=2$ (verificata per ogni *x*, *tranne che* per $x=3$)

In che cosa, dunque, un'identità differisce da un'equazione indeterminata?
La differenza sta più che altro nell'atteggiamento psicologico con cui si guarda all'uguaglianza.
Se un'uguaglianza letterale è studiata allo scopo di determinare i valori delle lettere per cui è verificata, e alla fine si trova che tali valori sono infiniti, si concluderà che si è di fronte a un'equazione indeterminata.
Se un'uguaglianza viene costruita deliberatamente in modo tale da risultare verificata per qualsiasi valore ammissibile delle lettere in gioco, allora si parlerà di "identità".

4. COSA E’ POSSIBILE FARE IN UN’EQUAZIONE

In un’**UGUAGLIANZA**, è possibile:
- ♪ addizionare, oppure sottrarre, ad entrambi i membri, uno stesso numero
- ♫ moltiplicare, oppure dividere, entrambi i membri, per uno stesso numero diverso da zero

nel senso che, così facendo, se è vera l’uguaglianza di partenza sarà vera anche quella di arrivo, e viceversa.

QUINDI nella risoluzione di un’**EQUAZIONE** si possono applicare (nel senso che portano ad un’equazione equivalente a quella di partenza, ossia con le stesse soluzioni), le regole seguenti:

REGOLA	ESEMPIO	PERCHE’
Se a primo e secondo membro abbiamo due termini (nel senso di: addendi di somma algebrica) **uguali, li possiamo mandar via**	$4x\cancel{+3}=-12x\cancel{+3}$	… perché è come fare: $4x+3=-12x+3$ $4x\cancel{+3}\cancel{-3}=-12x\cancel{+3}\cancel{-3}$
Possiamo trasportare un termine (nel senso di: addendo di somma algebrica) **dall’altra parte del simbolo =, cambiandolo però di segno** **(“REGOLA DEL TRASPORTO” PER LA SOMMA ALGEBRICA)**	$7x-11=3$ $7x=3+11$ $5x=3x+8$ $5x-3x=8$	… perché è come fare: $7x-11=3$ $7x\cancel{-11}\cancel{+11}=3+11$ $5x=3x+8$ $5x-3x=\cancel{3x}+8\cancel{-3x}$
Se tanto il 1° che il 2° membro sono due frazioni con lo stesso denominatore, possiamo mandar via i due denominatori uguali	$\frac{5x+3}{\cancel{4}}=\frac{3x+1}{\cancel{4}}$	… perché è come fare: $\cancel{4}\cdot\frac{5x+3}{\cancel{4}}=\frac{3x+1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4}$
Possiamo semplificare tutti i termini (= addendi delle due somme algebriche a primo e a secondo membro) **per uno stesso numero**	$\cancel{15}^{5}x-\cancel{21}^{7}=\cancel{6}^{2}x+\cancel{33}^{11}$	… perché è come fare: $15x-21=6x+33$ $\frac{15x-21}{3}=\frac{6x+33}{3}$ applicando poi la proprietà distributiva del quoziente rispetto alla somma (algebrica)
Possiamo cambiare di segno tutti i termini (= addendi delle due somme algebriche a primo e a secondo membro)	$-4x-7=8$ $+4x+7=-8$	… perché è come fare: $-4x-7=8$ $(-1)\cdot(-4x-7)=8\cdot(-1)$ $+4x+7=-8$ Anche: se due numeri sono uguali allora sono uguali anche i loro opposti, e viceversa
“Ciò che moltiplica da una parte del simbolo =, divide dall’altra; ciò che divide da una parte, moltiplica dall’altra” Questa viene a volte indicata come la **“REGOLA DEL TRASPORTO PER LA MOLTIPLICAZIONE - DIVISIONE”**	$7x=2$ $x=\frac{2}{7}$ $\boxed{\begin{matrix}ax=b\\ x=\frac{b}{a}\end{matrix}}\ (a\neq0)$ $\frac{x}{4}=3$ $x=3\cdot4$ $\boxed{\begin{matrix}\frac{x}{c}=d\\ x=d\cdot c\end{matrix}}\ (c\neq0)$ $\frac{3}{4}x=2$ $x=2\cdot\frac{4}{3}$	… perché è come fare: $7x=2$ $\frac{\cancel{7}x}{\cancel{7}}=\frac{2}{7}$ $\frac{x}{4}=3$ $\cancel{4}\cdot\frac{x}{\cancel{4}}=3\cdot4$ $\frac{3}{4}x=2$ $\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}x=2\cdot\frac{4}{3}$

5. IL CONCETTO DI "EQUAZIONI EQUIVALENTI"

Riassumendo all'osso:

♥ **in un'equazione noi possiamo fare sul primo membro una determinata operazione, purché però contemporaneamente facciamo la stessa operazione anche sul secondo membro, e purché** … attenzione, è molto importante … **PURCHE' SI POSSA "TORNARE INDIETRO",** vale a dire: **dall'equazione così ottenuta si possa nuovamente ricavare l'equazione iniziale (e questa soltanto).**

ESEMPIO

Dall'equazione

(1) $x^2 = 5x + 4$

io posso passare alla

(2) $x^2 - 5x = 4$

essendo sicuro che la (1) e la (2) saranno equivalenti, cioè avranno le stesse soluzioni (ogni soluzione di (1) è anche soluzione di (2), E VICEVERSA).

Infatti:

A) a partire dall'uguaglianza

(1) $x^2 = 5x + 4$

sottraggo $5x$ da ENTRAMBE le parti e ottengo la (2)

$x^2 - 5x = \cancel{5x} + 4 \cancel{-5x}$

ragionando così:

se due numeri sono uguali, sottraendo da entrambi uno stesso numero si perviene ancora a numeri uguali, perciò, se un dato valore di x è soluzione di (1)*, si è certi che il medesimo valore di x sarà soluz. anche di* (2); *insomma: ogni soluzione di* (1) *è sicuramente anche soluzione di* (2). Dunque: $(1) \Rightarrow (2)$

B) E VICEVERSA,

dalla

(2) $x^2 - 5x = 4$

si può ricavare come conseguenza la (1):

$x^2 \cancel{-5x} \cancel{+5x} = 4 + 5x$

Il simbolo $\Rightarrow$ è quello di "implicazione logica": "se … allora … , qualunque sia il valore di *x* considerato"

se due numeri sono uguali, allora, addizionando a entrambi uno stesso numero, si perviene a numeri uguali, perciò, se un dato valore di x è soluzione di (2)*, si è certi che il medesimo valore di x sarà soluz. anche di* (1); *insomma: ogni soluzione di* (2) *è sicuramente anche soluzione di* (1). Dunque: $(2) \Rightarrow (1)$

CONTROESEMPIO

Se dall'equazione

(1) $x = 2x - 5$

io passo alla

(2) $x^2 = (2x-5)^2$

potrò essere sicuro che ogni soluzione di (1) è anche soluzione di (2)
(*se due numeri sono uguali, allora saranno uguali anche i loro quadrati, perciò, se un dato valore di x è soluzione di* (1)*, si è certi che il medesimo valore di x sarà soluzione anche di* (2));
PERO' NON E' DETTO che valga anche il viceversa, ossia:
NON posso essere sicuro che ogni soluzione di (2) sia anche soluz. di (1), in quanto *se i quadrati di due numeri sono uguali, allora i due numeri in gioco non è detto che siano per forza uguali: potrebbero pure essere opposti!*

Questa volta, dunque, vale l'implicazione $(1) \Rightarrow (2)$ ma NON vale l'implicazione inversa: $\cancel{(2) \Rightarrow (1)}$
per cui l'equazione (1) potrebbe non essere equivalente alla (2);
e in effetti si vede che non lo è, perché, mentre la (1) ammette come unica soluzione $x = 5$,
la (2) invece ammette come soluzioni $x = 5$ e anche $x = 5/3$.

♥ **Due equazioni si dicono "EQUIVALENTI" se hanno le stesse soluzioni, ossia se ogni soluzione della prima è anche soluzione della seconda, E VICEVERSA.**

Le regole esposte alla pagina precedente sono "**PRINCIPI DI EQUIVALENZA**", ossia consentono di passare da un'equazione assegnata ad un'altra, certamente equivalente a quella di partenza; il **criterio generale** per passare da un'equazione ad un'altra, che sia sicuramente equivalente alla prima, è quello esposto nel riquadro in cima a questa pagina, riassumibile nello schema logico:

♥ **(1) è equivalente a (2) quando valgono ENTRAMBE le implicazioni $(1) \Rightarrow (2)$ e $(2) \Rightarrow (1)$ vale a dire, quando vale la DOPPIA IMPLICAZIONE $(1) \Leftrightarrow (2)$**

(l'implicazione $(1) \Rightarrow (2)$, da sola, ci assicura soltanto che ogni soluzione di (1) sarà pure soluzione di (2), ma non ci dice nulla riguardo al viceversa, che potrebbe anche non avvenire)

6. I PRINCIPI DI EQUIVALENZA DELLE EQUAZIONI

Ricordiamo che due equazioni si dicono “equivalenti” fra loro quando hanno le stesse soluzioni;
quando, cioè, ogni soluzione della prima è anche soluzione della seconda, E VICEVERSA.

Ad esempio, le due equazioni $2(x-4)=x$ e $x+1=9$ sono fra loro equivalenti, perché entrambe hanno come unica soluzione $x=8$; due equazioni che siano entrambe impossibili sono equivalenti fra loro; le due equazioni $(x-2)(x-3)=0$ e $x^2+6=5x$ sono equivalenti, perché per entrambe l'insieme delle soluzioni è $S=\{2, 3\}$.
Invece le equazioni $x-2=0$ e $x^2=4$ NON sono equivalenti, in quanto l'insieme delle soluzioni della prima è $S_1=\{2\}$ mentre l'insieme delle soluzioni della seconda è $S_2=\{-2, +2\}$.

1° Principio di Equivalenza delle Equazioni

Data un'equazione $\mathrm{A}(x)=\mathrm{B}(x)$, addizionando o sottraendo ad entrambi i membri uno stesso numero, oppure una stessa espressione contenente *x*, e che esiste per qualsiasi valore di *x*, si ottiene con certezza un'equazione equivalente a quella iniziale.

Dimostriamolo.
Partiamo dall'equazione
(1) $\mathrm{A}(x)=\mathrm{B}(x)$,
e addizioniamo ad entrambi i membri una stessa espressione $\mathrm{C}(x)$ che esiste per qualsiasi valore di x.
Vogliamo dimostrare che la nuova equazione
(2) $\mathrm{A}(x)+\mathrm{C}(x)=\mathrm{B}(x)+\mathrm{C}(x)$
è equivalente alla (1), ossia ha le stesse soluzioni della (1).

Supponiamo dunque che un dato numero α sia soluzione della (1).
Allora quel numero α sarà tale che, sostituendolo al posto di x nella (1), si ottenga un'uguaglianza vera;
sarà dunque vera l'uguaglianza
$\mathrm{A}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)$;
quindi sarà pure vera l'uguaglianza
$\mathrm{A}(\alpha)+\mathrm{C}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)+\mathrm{C}(\alpha)$ (osserviamo che l'ipotesi ci *garantisce* l'esistenza del numero $\mathrm{C}(\alpha)$)
perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà vera anche qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla prima addizionando ad entrambi i suoi membri uno stesso numero.
Ma se è vera l'uguaglianza
$\mathrm{A}(\alpha)+\mathrm{C}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)+\mathrm{C}(\alpha)$
ciò significa che il numero α è soluzione della (2).

Con ciò abbiamo provato che ogni soluzione della (1) è soluzione pure della (2).

Vediamo se vale anche il viceversa.

Supponiamo che un dato numero α sia soluzione della (2).
Allora quel numero α sarà tale che, sostituendolo al posto di x nella (2), si ottenga un'uguaglianza vera;
sarà dunque vera l'uguaglianza
$\mathrm{A}(\alpha)+\mathrm{C}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)+\mathrm{C}(\alpha)$;
quindi sarà pure vera l'uguaglianza
$\mathrm{A}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)$,
perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà anche vera qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla prima sottraendo da entrambi i suoi membri uno stesso numero ($\mathrm{C}(\alpha)$ nel nostro caso).
Ma se è vera l'uguaglianza
$\mathrm{A}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)$
ciò significa che il numero α è soluzione della (1).

Quanto abbiamo visto prova che ogni soluzione della (2) è soluzione pure della (1).

E allora, ricapitolando:
ogni soluzione della (1) è pure soluzione della (2); ogni soluzione della (2) è pure soluzione della (1);
… le due equazioni (1) e (2) hanno le stesse soluzioni, sono equivalenti!

Evidentemente i ragionamenti di cui sopra valgono anche nel caso in cui, anziché addizionare ai due membri una stessa *espressione* $\mathrm{C}(x)$, noi addizioniamo ad essi uno stesso *numero* k.

Per quanto riguarda poi la possibilità di *sottrarre* (anziché addizionare) un numero o un'espressione, la dimostrazione è del tutto analoga e la lasciamo al lettore.

Dal 1° Principio di Equivalenza delle Equazioni dipendono le seguenti REGOLE di cui ci siamo già occupati:

- se a 1° e a 2° membro ci sono due termini (=addendi di somma algebrica) uguali, li possiamo mandar via
- possiamo trasportare un termine dall'altra parte del simbolo “=”, cambiandolo però di segno (“REGOLA DEL TRASPORTO PER LA SOMMA ALGEBRICA”)

2° Principio di Equivalenza delle Equazioni

Data un'equazione $\mathrm{A}(x)=\mathrm{B}(x)$, moltiplicando o dividendo entrambi i membri per uno stesso numero diverso da 0, oppure per una stessa espressione contenente *x*, a patto però che questa espressione esista per qualsiasi valore di *x* e non si annulli per nessun valore di *x*, si ottiene certamente un'equazione equivalente a quella di partenza.

Partiamo dall'equazione (1) $\mathrm{A}(x)=\mathrm{B}(x)$, e moltiplichiamone ambo i membri per un'espressione $\mathrm{C}(x)$, che esista per qualsiasi valore di *x*: $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{C}(x)$ e che non si annulli mai: $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{C}(x) \neq 0$.
Vogliamo dimostrare che la nuova equazione (2) $\mathrm{A}(x)\cdot \mathrm{C}(x)=\mathrm{B}(x)\cdot \mathrm{C}(x)$
è equivalente alla (1), ossia ha le stesse soluzioni della (1).

Supponiamo che un dato numero α sia soluzione della (1). Allora quel numero α sarà tale che, sostituendolo al posto di *x* nella (1), si ottenga un'uguaglianza vera; sarà dunque vera l'uguaglianza $\mathrm{A}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)$; quindi sarà pure vera l'uguaglianza $\mathrm{A}(\alpha)\cdot \mathrm{C}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)\cdot \mathrm{C}(\alpha)$, perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà vera anche qualsiasi uguaglianza ottenibile da essa moltiplicandone entrambi i membri per uno stesso numero. Ma se è vera l'uguaglianza $\mathrm{A}(\alpha)\cdot \mathrm{C}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)\cdot \mathrm{C}(\alpha)$, ciò significa che il numero α è soluzione della (2).

Con ciò abbiamo provato che ogni soluzione della (1) è soluzione pure della (2).

Vediamo se vale anche il viceversa. Supponiamo che un dato numero α sia soluzione della (2).
Allora quel numero α sarà tale che, sostituendolo al posto di *x* nella (2), si ottenga un'uguaglianza vera; sarà dunque vera l'uguaglianza $\mathrm{A}(\alpha)\cdot \mathrm{C}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)\cdot \mathrm{C}(\alpha)$; quindi sarà pure vera l'uguaglianza $\mathrm{A}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)$, perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà anche vera qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla prima dividendone entrambi i membri per uno stesso numero diverso da 0 (qui interviene l'ipotesi $\mathrm{C}(x) \neq 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$).
Ma se è vera l'uguaglianza $\mathrm{A}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)$, ciò significa che il numero α è soluzione della (1).

Quanto abbiamo visto prova che ogni soluzione della (2) è soluzione pure della (1).

Allora, ricapitolando: ogni soluzione della (1) è soluzione della (2); vale anche il viceversa;
… pertanto le due equazioni (1) e (2) hanno le stesse soluzioni, sono equivalenti.

Evidentemente i ragionamenti di cui sopra valgono anche nel caso in cui, anziché moltiplicare i due membri per una stessa *espressione* $\mathrm{C}(x)$ che non si annulla mai, noi li moltiplichiamo per uno stesso *numero* $k \neq 0$.

Per quanto riguarda poi la possibilità di *dividere* (anziché di moltiplicare) per un numero non nullo o per un'espressione sempre esistente e mai nulla, la dimostrazione è del tutto analoga e la lasciamo al lettore.

Dal 2° Principio di Equivalenza delle Equazioni dipendono le seguenti REGOLE di cui ci siamo già occupati:

- se tanto il 1° che il 2° membro sono due frazioni con lo stesso denominatore, possiamo mandar via i due denominatori uguali
- possiamo semplificare tutti i termini per uno stesso numero
- possiamo cambiare di segno tutti i termini (=addendi delle due somme algebriche a 1° e a 2° membro)
- "ciò che moltiplica da una parte dell' "=", divide dall'altra; ciò che divide da una parte, moltiplica dall'altra" ("REGOLA DEL TRASPORTO PER LA MOLTIPLICAZIONE /DIVISIONE")

E' importante tener presente che si può essere certi di pervenire a un'equazione equivalente a quella iniziale solo se l'espressione C(*x*) che entra in gioco
♪ esiste sempre, nel caso del 1° Principio;
♫ esiste sempre e non si annulla mai, nel caso del 2° Principio.

- Consideriamo, come controesempio, la coppia di equazioni $x+1=3$ e $x+1+\frac{1}{x-2}=3+\frac{1}{x-2}$.
  Qui la seconda è ottenibile dalla prima addizionando una stessa espressione ad entrambi i membri; ma si osserva che l'espressione stessa non rispetta la condizione di esistere sempre, per qualsiasi *x* (in effetti, per via del denominatore, non esiste con $x=2$).
  NON siamo quindi certi che le due equazioni siano equivalenti; potrebbero esserlo, ma anche non esserlo.
  E in effetti non lo sono, perché, mentre la prima ha come soluzione $x=2$, la seconda è impossibile.
- Un altro controesempio. Le due equazioni $2x=x+1$ e $2x(x-3)=(x+1)(x-3)$ NON sono equivalenti (la prima ha come unica soluzione $x=1$, la seconda ha una soluzione in più, essendo verificata sia per $x=1$, che per $x=3$). Eppure la 2^a equazione è ottenibile dalla 1^a tramite moltiplicazione per $(x-3)$ …
  … Però l'espressione $(x-3)$ si può annullare, quindi non sono rispettati i requisiti del 2° Principio.

Terminiamo col ricordare (l'avevamo già osservato a pag. 151) che ELEVANDO AL QUADRATO i 2 membri di una equazione NON si è certi di pervenire ad un'equazione equivalente a quella iniziale; infatti l'equazione così ottenuta conserva, sì, tutte le soluzioni dell'equazione data, ma può accadere che ne acquisti in più delle altre "estranee" all'equazione di partenza, perciò non accettabili.

7. ESERCIZI SULLE EQUAZIONI

Ogni tanto, prima di guardare la soluzione, fai la VERIFICA!!!

♥ LA **VERIFICA DELLA CORRETTEZZA DI UNA SOLUZIONE CHE SI E' TROVATA** consiste semplicemente nel sostituire quel valore al posto di x nell'uguaglianza iniziale: se questa risulta vera, allora il valore trovato è davvero soluzione, altrimenti qualcosa non va (o hai sbagliato nella risoluzione, o hai sbagliato nella verifica ☺ …)

- ESEMPIO SVOLTO

$3(7x-8)=5x$ Svolgo i calcoli ...
$21x-24=5x$ Trasporto i termini con x a 1° membro, e quelli senza la x (= termini "noti") al 2° ...
$21x-5x=24$ Riduco i termini simili ...
$16x=24$ Divido ambo i membri per il coefficiente di x ...

$x=\frac{\cancel{24}^{3}}{\cancel{16}_{2}}$; $\boxed{x=\frac{3}{2}}$ (oppure, a partire da $16x=24$, si poteva dividere subito ambo i membri per 8, semplificarli insomma per 8, ottenendo $\cancel{16}^{2}x=\cancel{24}^{3}$ da cui poi $x=3/2$)

- ESEMPIO SVOLTO

$7(x-2)=11(x+2)$ Calcoli ...
$7x-14=11x+22$ Trasportiamo tutte le x a 1° membro, e gli altri termini a 2° membro...
$7x-11x=22+14$ Riduzione termini simili ...
$-4x=36$
QUANDO IL COEFF. DI x NELL'ULTIMO PASSAGGIO E' <0, CONVIENE CAMBIARE I SEGNI ...
$4x=-36$ Divisione per il coefficiente di x ...

$x=\frac{-\cancel{36}^{9}}{\cancel{4}_{1}}$; $\boxed{x=-9}$ (anche, ma non è raccomandato: $-4x=36;\ x=\frac{\cancel{36}^{9}}{-\cancel{4}_{1}}=-9$)

- ESEMPIO SVOLTO

$3(x+7)=11x+3;\quad 3x+21=11x+3;\quad 3x-11x=3-21;\quad -8x=-18;\quad 8x=18$

$\boxed{x=}\frac{\cancel{18}^{9}}{\cancel{8}_{4}}=\boxed{\frac{9}{4}}$ ... oppure, a partire da $8x=18$, si poteva dividere subito ambo i membri per 2 (semplificarli, insomma, per 2), ottenendo $\cancel{8}^{4}x=\cancel{18}^{9}$ da cui poi $x=9/4$

ESERCIZI

1) $7x-1=27$ 2) $7x+5=4x-1$ 3) $5x-3=2x-1$ 4) $4x+7=5x+8$ 5) $3x=7x-1$
6) $10x=20x$ 7) $10x+20=0$ 8) $6x-2=12x+1$ 9) $7x-6x=5x-4$ 10) $x+2x+3=4x+5x+6$
11) $x+1+4x+4=2+3x+3$ 12) $7x+3=8x+1$ 13) $3x-(2x+9)=5-(4x-1)$ 14) $4(x+1)=3(4-x)$
15) $2(x+1)=3x-1$ 16) $3(x+4)=5(x+6)$ 17) $4x-1=3(8x-1)$ 18) $3(x-1)=2[4(x+1)-3]$
19) $3[5(1-x)-4]=2[4-3(1+x)]$ 20) $3x-2+3(x-2)=4x-1+4(x-1)$ 21) $(x-2)^2=x^2$

- ES. SVOLTO: $4(x-1)(x-2)+14x-1=(4x+1)(x+1)+3(2-x)$

$4(x^2-2x-x+2)+14x-1=4x^2\underline{+4x}\ \underline{+x}\ \underline{\underline{+1}}\ \underline{\underline{+6}}\ \underline{-3x}$

$\cancel{4x^2}\ \underline{-8x}\ \underline{-4x}\ \underline{\underline{+8}}\ \underline{+14x}\ \underline{\underline{-1}}=\cancel{4x^2}+2x+7;\quad \cancel{2x}\cancel{+7}=\cancel{2x}\cancel{+7};\quad 0=0$

L'equaz. ha perso tutti i termini con x e si è ridotta ad un'uguaglianza numerica VERA (0 = 0, oppure, se non avessimo mandato via i "+ 7", 7 = 7).
E' dunque INDETERMINATA. Qualunque valore di x ne è soluzione.

- ES. SVOLTO: $(x-1)^2-\left[(x+1)^2+8\right]+3(4x+1)=2x^2-2(x-2)^2$

$x^2-2x+1-(x^2+2x+1+8)+12x+3=2x^2-2(x^2-4x+4)$

$\cancel{x^2}-2x\cancel{+1}\cancel{-x^2}-2x\cancel{-9}+12x+3=\cancel{2x^2}\cancel{-2x^2}+8x\cancel{-8};\quad \cancel{8x}+3=\cancel{8x}$

Qui tutti i termini con x se ne sono andati, ed è rimasta un'uguaglianza puramente numerica, FALSA $(3=0)$.
Se ne conclude che l'equazione è IMPOSSIBILE, cioè priva di soluzioni: nessun valore di x ne è soluzione.

- ES. SVOLTO: $(x-5)^2=(x-3)^2+4^2$

$\cancel{x^2}-10x\cancel{+25}=\cancel{x^2}-6x\cancel{+9}\cancel{+16}$

$-4x=0;\quad \boxed{x=0}$

♥ **RICAPITOLANDO**

Le x se ne vanno, uguaglianza numerica FALSA: IMPOSSIBILE
Le x se ne vanno, uguaglianza numerica VERA: INDETERMINATA
$ax=0\ (a\neq 0)$: l'equazione ha UNA SOLA SOLUZIONE, $x=0$

ESERCIZI

22) $5x = 2x$ 23) $5x = 5x$ 24) $0 \cdot x = 5$ 25) $14 + x = 7(x+2)$ 26) $5x + 3(x-1) = x + 7(x+1)$
27) $4x + 3(x+4) = 12$ 28) $2(2x-1) + 5 = 4(x+1) - 1$ 29) $3(8x+16) = 8(3x+6)$ 30) $3(x+8) = 8(x+3)$

- ESEMPIO SVOLTO: $\frac{1}{4}x = \frac{2x}{3} + \frac{1}{6}$. Premesso che $\frac{1}{4}x = \frac{x}{4}$, $\frac{2x}{3} = \frac{2}{3}x$, possiamo:

  a) fare il denominatore comune, uguale per entrambi i membri, che sarà quindi il minimo comune multiplo di TUTTI i denominatori presenti, sia quelli del 1° che quelli del 2° membro:

  $$\frac{3x}{\cancel{12}} = \frac{8x+2}{\cancel{12}}; \quad 3x - 8x = 2; \quad -5x = 2; \quad 5x = -2; \quad x = -\frac{2}{5}$$

  b) oppure MOLTIPLICARE sia il 1° che il 2° membro, quindi ciascun termine, per quello che sarebbe stato il denominatore comune e semplificare a mente, mandando così via i denominatori ... senza aver fatto il denominatore comune!

  $$12 \cdot \left(\frac{1}{4}x\right) = \left(\frac{2x}{3} + \frac{1}{6}\right) \cdot 12; \quad 3x = 8x + 2 \quad \textit{eccetera}$$

♥ IMPORTANTE
Quando ci sono dei denominatori, conviene innanzitutto liberarsene con uno dei due metodi esposti qui a sinistra. IN GENERALE, NON È CONVENIENTE trasportare termini o ridurre termini simili mentre ci sono ancora i denominatori!

- ESEMPIO SVOLTO: $\frac{x-7}{4} - \frac{3x+12}{8} = \frac{3}{2}x$

$$\frac{2x - 14 \overbrace{-3x-12}^{\text{NOTA}}}{\cancel{8}} = \frac{12x}{\cancel{8}}$$

NOTA: OCCHIO!!! QUI *ENTRAMBI* I SEGNI DEVONO CAMBIARE! Infatti il segno "$-$" si riferisce a TUTTO il binomio $3x+12$: $\frac{2x - 14 - (3x+12)}{\cancel{8}} = \frac{12x}{\cancel{8}}$

$$-x - 26 = 12x; \quad -13x = 26; \quad 13x = -26; \quad \boxed{x = -2}$$

ESERCIZI

31) $\frac{1}{3}x = 4$ 32) $8x = \frac{1}{2}$ 33) $\frac{1}{4}x = \frac{1}{3}$ 34) $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5} = 0$ 35) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$ 36) $\frac{2}{5}x = 3 + x$

37) $\frac{x}{5} - \frac{7}{10} = \frac{x+1}{2}$ 38) $\frac{3x-1}{6} = \frac{2+x}{9}$ 39) $\frac{3x}{8} - \frac{x-3}{4} = 2$ 40) $\frac{x}{2} = \frac{x-1}{7} - \frac{3x+6}{14}$ 41) $\frac{x-3}{4} - \frac{2x}{3} = \frac{1-x}{2}$

42) $\frac{x+4}{5} + \frac{x+1}{10} = \frac{2x+1}{15}$ 43) $\frac{1}{2}x + \frac{x}{3} + \frac{1}{4}x = \frac{x+1}{6}$ 44) $\frac{7x+3}{5} - \frac{3}{2}x = 0$ 45) $\frac{x+3}{5} - \frac{x+1}{4} = 0$

46) $x - \frac{x+10}{12} = 1$ 47) $\frac{5}{8}x - \frac{9x-1}{16} = 0$ 48) $3 \cdot \frac{x-1}{4} = 5 \cdot \frac{x+6}{2}$ 49) $\frac{1}{6}x = \frac{x}{4} - \frac{1}{3}$ 50) $\frac{x+21}{4} = x$

51) $0{,}01 \cdot (x+5) = \frac{x-(7-2x)}{25}$ 52) $3 \cdot \frac{x}{2} - 2 \cdot \frac{x}{3} = \frac{x+1}{8} + 2$ 53) $\frac{x+5}{3} = \frac{1}{5}(x+1)$ 54) $2x - \frac{x+7}{4} = 0$

55) $x = \frac{4x+1}{2}$ 56) $x^2 + 1 = \frac{4x(x-3)+1}{4} + 3 \cdot \frac{x}{2}$ 57) $\frac{3}{5} \cdot \frac{4-x}{2} = \frac{2}{3}(2x-1)$ 58) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}x = \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x$

59) $\frac{1}{3}(x-6) = \frac{1}{2}(x+2)$ *che puoi risolvere eseguendo i prodotti, oppure riscrivendo come* $\frac{x-6}{3} = \frac{x+2}{2}$

60) $\frac{1}{2}(x+4) = \frac{3-2x}{7}$ 61) $\frac{1}{4}(x+2) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}(x-6)$ 62) $1 + \frac{x}{4} - \frac{1}{2}(2-x) = \frac{1}{8}x$ 63) $\frac{1}{3}(2x-1) = 1 - \frac{5x-1}{6}$

64) $\frac{x}{8} - 1 = \frac{x}{5+\frac{1}{3}} + \frac{7}{2^4}$ 65) $\frac{x-\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} - \left[\frac{1}{3}(x+1) + \frac{11}{6}\right] = 0$ 66) $\frac{x}{1+\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}(x+1) = \frac{1}{3}x - \frac{x}{12}$ 67) $\frac{x}{0{,}2} - \frac{x+1}{0{,}2} = 0$

SOLUZIONI

1) $x = 4$ 2) $x = -2$ 3) $x = 2/3$ 4) $x = -1$ 5) $x = 1/4$ 6) $x = 0$ 7) $x = -2$ 8) $x = -1/2$ 9) $x = 1$
10) $x = -1/2$ 11) $x = 0$ 12) $x = 2$ 13) $x = 3$ 14) $x = 8/7$ 15) $x = 3$ 16) $x = -9$ 17) $x = 1/10$
18) $x = -1$ 19) $x = 1/9$ 20) $x = -3/2$ 21) $x = 1$ 22) $x = 0$ 23) *indet.* 24) *imposs.* 25) $x = 0$
26) *imposs.* 27) $x = 0$ 28) *indet.* 29) *indet.* 30) $x = 0$ 31) $x = 12$ 32) $x = 1/16$ 33) $x = 4/3$
34) $x = -6/5$ 35) $x = 7/2$ 36) $x = -5$ 37) $x = -4$ 38) $x = 1$ 39) $x = 10$ 40) $x = -1$ 41) $x = 15$
42) $x = -5$ 43) $x = 2/11$ 44) $x = 6$ 45) $x = 7$ 46) $x = 2$ 47) $x = -1$ 48) $x = -9$ 49) $x = 4$
50) $x = 7$ 51) $x = 3$ 52) $x = 3$ 53) $x = -11$ 54) $x = 1$ 55) $x = -1/2$ 56) $x = -1/2$ 57) $x = 8/7$ 58) $x = -1$
59) $x = -18$ 60) $x = -2$ 61) *indet.* 62) $x = 0$ 63) $x = 1$ 64) $x = -23$ 65) $x = 4$ 66) *imposs.* 67) $x = 9$

ALTRI ESERCIZI

Nelle seguenti equazioni sono presenti dei prodotti notevoli: risolvile.

68) $(3x-1)^2+(4x-3)^2=(5x-2)^2+2^4$ 69) $(3x-5)(5+3x)-9(x-2)^2=11$ 70) $\frac{(7x+1)^2-(5x+1)^2}{24}=x^2$

71) $(8-x)^2=x^2$ 72) $(7-3x)^2+3=(4-3x)^2$ 73) $9(2x+1)(2x-1)+4=(6x+5)^2$ 74) $(9x-2)^2=(9x+2)^2$

75) $\frac{(2x-5)^2-21}{4}=(x+3)(x-3)$ 76) $(x+3)^2+(x+5)^2=(x+2)^2+(x+4)^2$ 77) $\frac{(10x+1)^2}{100}=x^2$

78) $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}(x-1)^2$ 79) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{(x+1)^2+8x^2}{2^3+1}$ 80) $(x-5)^3=x^2(x-15)$ 81) $x^2(x+12)=(x+4)^3$

82) $x^2=\frac{x(x-2)^2-(x-2)^3}{2}$ 83) $(3x-1)^3-1=(2x-1)^3+(x-1)^3+6x^2(3x-2)$ 84) $\frac{(1-2x)^3}{1-3^2}=x^2\left(x-\frac{3}{2}\right)$

Da www.amscopub.com:

85) Which equation has no solution?
A. $x-1=0$
B. $x+1=1$
C. $1-x=1$
D. $x+1=x$

86) Which equation has a solution of -2?
A. $3(x-2)=0$
B. $5(2x-1)=0$
C. $7(x+2)=0$
D. $9(x+4)=0$

87) Which equation has the same solution as $\frac{c}{4}+5=34$?
A. $4c+10=34$ B. $\frac{c}{4}=39$
C. $c-20=136$ D. $\frac{c}{4}=29$

88) Cerca di risolvere A MENTE, PER TENTATIVI, le equazioni seguenti:

a) $2+\frac{2}{x}=1$ *b)* $\frac{12}{x-5}=3$ *c)* $\frac{29}{15+12x}=\frac{29}{15+1234x}$ *d)* $\frac{1}{x}=\frac{1}{2-x}$ *e)* $\frac{1}{x}=x$ (*due soluzioni!*)
f) $\frac{3}{x}=\frac{x}{3}$ (*due soluzioni!*) *g)* $x^2+x=0$ (*due soluzioni!*) *h)* $x+\frac{8}{x}=9$ (*due soluzioni!*) *i)* $\frac{1}{x-4}=0$
l) $\frac{112}{113}(x+7)=0$ *m)* $4x^2=0$ *n)* $(x-8)(x-7)(x+3)=0$ (*3 soluzioni!*) *o)* $x=\sqrt{x}$ (*due soluzioni!*)

89) Risolvi le seguenti equazioncine. Volutamente, l'incognita non è sempre indicata con x!

a) $x=x$ *b)* $x-1=x$ *c)* $7y=3y$ *d)* $\frac{1}{2}z=4$ *e)* $\frac{3}{4}h=5$ *f)* $\frac{t}{2}=\frac{3}{5}$
g) $2-\frac{3}{5}m=0$ *h)* $3x-4=3x+4$ *i)* $3k-1=13k-1$ *l)* $x(x-1)+1=(x-1)^2+x$
m) $(w-1)^2=(w+1)^2$ *n)* $0{,}5q=0{,}4$ *o)* $0{,}5r=0{,}04$ *p)* $0{,}05s=0{,}4$ *q)* $3=-6x$
r) $b=1000b$ *s)* $1000=1000a$ *t)* $\frac{1}{3}c=\frac{1}{2}$ *u)* $3c=\frac{1}{2}$ *v)* $\frac{1}{3}c=\frac{1}{6}c-\frac{1}{2}c$ *z)* $\frac{1}{3}d=\frac{1}{2}d-\frac{1}{6}d$

90) Risolvi le seguenti equazioncine. Volutamente, l'incognita non è sempre indicata con x!

a) $0\cdot(a+2)=0\cdot(a-2)$ *b)* $5^{15}+5^{13}b=0$ *c)* $-c=c$ *d)* $7{,}7771y=7{,}777y+1$ *e)* $3{,}\overline{5}x+1=0$
f) $0{,}0\overline{3}=0{,}\overline{3}x$ *g)* $0{,}2x=0{,}\overline{2}$ *h)* $357=357(n+468)$ *i)* $444(s+7)+333=0$ *l)* $78{,}3045x+3{,}98349x=0$
m) $1+\frac{7}{3}q=0$ *n)* $13^{-3}x=13^{-2}$ *o)* $350^2x=490^2$ *p)* $(y-3)(y+3)=(y-4)(y+4)$ *q)* $3254(65x-4)=0$

91) Scrivi un'equazione, con 0 a 2° membro, e coefficienti interi, che abbia per soluzione $x=-\frac{99}{101}$

92) Scegliendo opportunamente i valori di b e c, scrivi una qualunque equazione, della forma $x^2+bx+c=0$, che abbia per soluzione $x=3$

93) Sapresti giustificare perché l'equazione $(x-2)^2+9=0$ è impossibile?

94) Che valore devi dare al numero m se vuoi che l'equazione $x^2+mx+12=0$ abbia come soluzione
a) $x=4$? b) $x=-6$? c) $x=0$?

95) Un mattone pesa 1 kg + $\frac{1}{10}$ di mattone. Quanto pesa il mattone?

96) Che valore occorre dare alla lettera a affinché l'equazione seguente, nell'incognita x:
$a(2x-3)+5=10(x-1)$ NON abbia una e una sola soluzione? E in tal caso, quante soluzioni ha?

97) Per quale valore di k il polinomio x^3+kx^2-4x-3 è divisibile
(NOTA: "divisibile per" significa che la divisione ha resto 0)
a) per il binomio $(x-1)$? b) per il binomio $(x+3)$?
Indicazione: si applica il "Teorema del Resto" …

98) Per quale valore di m il polinomio $mx^3+3x^2-4mx-12$ è divisibile
a) per il binomio $(x-2)$? b) per il binomio $(x+1)$?

99) Per quale valore di a la divisione $(ax^4-x-22):(x-2)$ ha per resto 1000?

100) Per quale valore di y i due polinomi $A(y)=5y+1$; $B(y)=y-7$ assumono:
a) valori uguali? b) valori opposti? c) valori uno doppio dell'altro?

SOLUZIONI

68) $x=-1$ 69) $x=2$ 70) $x=0$ 71) $x=4$ 72) $x=2$ 73) $x=-\frac{1}{2}$ 74) $x=0$ 75) $x=2$ 76) $x=-\frac{7}{2}$

77) $x=-\frac{1}{20}$ 78) $x=\frac{1}{4}$ 79) $x=0$ 80) $x=\frac{5}{3}$ 81) $x=-\frac{4}{3}$ 82) $x=1$ 83) *indet.* 84) $x=\frac{1}{6}$

85) D 86) C 87) D

88) $a)\ -2$ $b)\ 9$ $c)\ 0$ $d)\ 1$ $e)\ +1,\ -1$ $f)\ +3,\ -3$ $g)\ 0,-1$ $h)\ 1,\ 8$ $i)$ *imp.* $l)\ -7$ $m)\ 0$ $n)\ 8,\ 7,\ -3$ $o)\ 0,\ 1$

89) $a)$ *indeterminata: qualunque valore di x ne è soluzione* $b)$ *impossibile* $c)\ y=0$ $d)\ z=8$ $e)\ h=\frac{20}{3}$
$f)\ t=\frac{6}{5}$ $g)\ m=\frac{10}{3}$ $h)$ *impossibile* $i)\ k=0$ $l)$ *indeterminata: qualunque valore di x ne è soluzione*
$m)\ w=0$ $n)$ (*moltiplica innanzitutto per* 10) $q=\frac{4}{5}$ $o)$ (*moltiplica per ...*) $r=\frac{4}{50}=\frac{2}{25}$ $p)\ s=8$
$q)\ x=-\frac{1}{2}$ $r)\ b=0$ $s)\ a=1$ $t)\ c=\frac{3}{2}$ $u)\ c=\frac{1}{6}$ $v)\ c=0$ $z)$ *indet.: qualunque valore di d ne è soluz.*

90) $a)$ *indet.* $b)$ *semplificabile per* 5^{13}: $5^2+b=0,\ b=-25$ $c)\ c=0$ $d)\ y=10000$ $e)\ x=-\frac{9}{32}$
$f)\ x=\frac{1}{10}$ $g)\ x=\frac{10}{9}$ $h)\ 1=n+468;\ n=-467$ $i)\ 4(s+7)+3=0;\ s=-\frac{31}{4}$ $l)\ x=0$ (*inutile far calcoli!*)
$m)\ q=-\frac{3}{7}$ $n)\ x=13$ $o)\ x=\frac{49}{25}$ $p)$ *imposs.* $q)$ *equivale a* $65x-4=0;\ x=\frac{4}{65}$

91) $101x+99=0$

92) Uno dei tanti modi di procedere è di dare a b un valore a tuo piacimento, poi calcolare 3^2+3b,
infine assegnare a c il valore opposto di quello trovato.
Ad esempio, scegliendo $b=5$, è $3^2+5\cdot 3=24$ quindi l'equazione $x^2+5x-24=0$ farà al caso nostro.

93) Un quadrato non può mai assumere valore negativo, per nessun valore della base;
aggiungendo dunque 9 a un quadrato, non si può pretendere di poter ottenere 0.

94) a) Sostituendo al posto di x il valore 4 si deve ottenere un'uguaglianza vera … $m=-7$
b) $m=8$ c) Impossibile: per nessun valore di m questa equazione può avere 0 come soluzione

95) $x=1+\frac{1}{10}x;\quad x=\frac{10}{9}kg\ \left(1\ kg\ e\ \frac{1}{9}\ di\ kg\right)$

96) $a=5$. In tal caso, l'equazione risulta indeterminata, quindi ha infinite soluzioni.
Infatti $a(2x-3)+5=10(x-1)$ equivale a $2ax-3a+5=10x-10$; ora, $2a=10$ quando $a=5$
e con $a=5$ l'equazione diventa $5(2x-3)+5=10(x-1)$; $\cancel{10x}\ \cancel{-15}\ \cancel{+5}=\cancel{10x}\ \cancel{-10}$ *indeterminata*

97) a) $k=6$: $P(x)=x^3+kx^2-4x-3$ è divisibile per $(x-1)$ se $P(1)=0$, ossia $1^3+k\cdot 1^2-4\cdot 1-3=0;\quad k=6$
b) $k=2$

98) a) Per qualsiasi valore di m b) Per $m=3$

99) Per $a=64$

100) a) Per $y=-2$ b) Per $y=1$ c) Per $y=-5$ $(A(y)=2B(y))$ o per $y=-1$ $(B(y)=2A(y))$

8. UNA RASSEGNA DI PROBLEMI A UNA SOLA INCOGNITA (soluzioni a pag. 169)

1) Se aggiungessi 21 litri di benzina al serbatoio della mia auto, il cui contenuto è attualmente pari a 1/4 della capacità totale, il serbatoio raggiungerebbe i 3/5 della sua capacità.
Dimmi quanti litri al massimo può contenere il serbatoio.

RISOLUZIONE GUIDATA

1a fase: pongo la *x*) $x = $ n° litri che può contenere al massimo il mio serbatoio (= sua capacità)

2a fase: esprimo le quantità in gioco per mezzo di *x*) contenuto attuale in litri del serbatoio = $\frac{1}{4}x$

♥ *Molto sovente in matematica "di" significa "moltiplicato per"!*
$1/4$ *DELLA capacità* $= 1/4$ *MOLTIPLICATO la capacità*

3a fase: imposto l'equazione risolvente) $\frac{1}{4}x + \ \dots\ = \ \dots$ da cui si trae $x = 60$.

♥ OSSERVAZIONE
Questo problema, particolarmente semplice, avrebbe potuto anche essere risolto "*per via aritmetica*", cioè senza ricorrere alla *x*. Dal testo si ricava infatti che 21 litri rappresentano una frazione, del serbatoio, uguale a $\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{12-5}{20} = \frac{7}{20}$.

Ma se 21 litri sono i $\frac{7}{20}$ di un serbatoio, il serbatoio intero equivale a litri $\frac{21}{\frac{7}{20}} = 21 \cdot \frac{20}{7} = 60$.

2) Rossana esce di casa con una banconota da 20 euro e spende 7 euro al cinema; avendo poi acquistato 6 biglietti del metro e 4 dell'autobus (un biglietto per l'autobus costa 1 volta e mezza il biglietto per la metropolitana), rimane con 1 euro soltanto, che lascia a un mendicante per strada.
Quanto costa il biglietto della metropolitana?

RISOLUZIONE GUIDATA

1a fase) $x = $ costo di 1 biglietto per il metro

2a fase) costo di 1 biglietto per l'autobus = ... (*per quale frazione devo moltiplicare x se voglio ottenere "una volta e mezza x"?*)

3a fase) Equazione risolvente: $20 - \ \dots\ - \ \dots\ - \ \dots\ = \ \dots$
(oppure, è lo stesso: $\dots + \dots + \dots + \dots = 20$)

3) Mario e Vincenzo hanno in tasca, fra tutti e due, 52 euro. Ciascuno spende per un mega-gelato 4 euro, dopodiché Mario si trova ad avere in tasca esattamente il triplo di Vincenzo.
Quanto possedevano inizialmente i due?

RISOLUZIONE GUIDATA

1a fase) $x = $ n° euro posseduti inizialmente da Mario
2a fase) n° euro posseduti inizialmente da Vincenzo $= 52 - x$
3a fase) Equazione risolvente: $x - \ \dots\ = \ \dots\ \cdot (52 - x - \ \dots\ )$

OSSERVAZIONI

- Evidentemente, si sarebbe potuto anche porre $x = $ n° euro posseduti inizialmente da Vincenzo. La risoluzione sarebbe stata molto simile: hai voglia di effettuarla anche in questo modo?
- Se avessimo posto $x = $ n° euro posseduti *dopo il gelato* da Vincenzo avremmo potuto scrivere, ad esempio:
  n° euro posseduti *dopo il gelato* da Mario $= 3x$
  n° euro posseduti *prima del gelato* da Vincenzo $= x + 4$
  n° euro posseduti *prima del gelato* da Mario $= 3x + 4$
  Equazione risolvente: $x + 4 + 3x + 4 = 52$

♥ D'ALTRONDE CI SAREBBERO, PER IL PROBLEMA DI MARIO E VINCENZO, ANCHE *ALTRE* POSSIBILI VARIANTI DI RISOLUZIONE:
TIENI SEMPRE PRESENTE CHE DI FRONTE A QUASI TUTTI I PROBLEMI POSSIAMO SCEGLIERE DI PROCEDERE IN PIU' MODI DIVERSI !!!

♥ In certi problemi, è possibile "saltare" l'esposizione della seconda fase perché la si "ingloba nella terza fase", vale a dire: dopo aver posto la *x*, se il problema è semplice, in pratica si può scrivere subito l'equazione risolvente.

4) Ho acquistato quattro confezioni di pennarelli; tre uguali fra loro, e la quarta con inchiostro di migliore qualità, ma con 4 pennarelli in meno. Se in totale i pennarelli sono in numero di 68, di quanti pennarelli era composta ciascuna confezione?

5) Pierino riceve la paghetta mensile e ne fa fuori subito metà per un regalo di compleanno a un amico. Successivamente, essendo molto goloso e per via della giornata davvero caldissima, si sbafa ben 4 gelati da euro 2,50 l'uno, e rimane a questo punto con la decima parte della paghetta soltanto. Determina l'ammontare di questa.

6) Paolo nei giorni feriali pranza in una trattoria molto alla buona, ma il sabato e la domenica preferisce concedersi il ristorante, dove un pasto gli costa 4 euro in più rispetto alla trattoria. Qual è il costo di un pranzo in trattoria, se in una settimana Paolo spende in tutto 71 euro?

7) Mi son procurato per una festa coi vecchi compagni di Liceo delle bottiglie di spumante e alcune torte. Sapendo che una torta costa due volte e mezza una bottiglia, e che in totale ho comprato 8 bottiglie e 6 torte, spendendo in tutto 115 euro, dimmi qual è il prezzo di una bottiglia e quale quello di una torta.

8) Se Arianna si è iscritta ad una palestra la cui frequentazione costa 20 euro al mese, più una tassa di iscrizione di 36 euro, e Carolina ha preferito un'altra palestra, per iscriversi alla quale sono necessari 50 euro ma la cui tariffa mensile è di euro 18, stabilisci, tramite un'equazione, dopo quanti mesi si troveranno ad aver speso la medesima cifra.

9) In una serata al pub durante una gita scolastica, vengono consumate
7 gassose, 23 aranciate (un'aranciata costa 50 centesimi più di una gassosa),
e 15 birre (una birra costa 1,50 euro più di un'aranciata).
Sapendo che la spesa complessiva è di euro 122,50, stabilisci qual è il prezzo di una gassosa.

10) Mumble mumble … Se il gestore del ristorante nel quale sono solito pasteggiare a prezzo fisso dal Lunedì al Venerdì mi concedesse uno sconto di 3 euro a pasto, per la stessa spesa complessiva potrei pranzare anche il Sabato.
… Hurrah! Ha accettato la mia proposta! Tu ora dimmi: quanto mi costa il pasto scontato?

11) Lauretta, proprietaria di un bar, ha acquistato un certo numero di bottiglie di sciroppo di orzata a 3 euro l'una; se ogni bottiglia fosse costata 50 centesimi in meno, ne avrebbe potute comprare per lo stesso prezzo 3 in più. Di quante bottiglie si tratta?

12) "*Tre fratelli, Anselmo, Beniamino e Carmelo, escono la domenica pomeriggio:*
Anselmo con la metà dei soldi di Beniamino, e Carmelo con 10 euro in meno di Beniamino.
In totale i tre hanno in tasca 35 euro. Quanto possiede ciascuno?"
Le tre compagne di scuola Alice, Brigitta e Cecilia si mettono all'opera per risolvere questo problema e a un certo punto confrontano i loro quaderni.

- ❑ Su quello di Alice c'è l'equazione: $x-10+\frac{1}{2}x+x=35$ con la soluzione $x=18$.
- ❑ Brigitta ha scritto invece l'equazione $2x+x+2x-10=35$ e risolvendola ha trovato $x=9$.
- ❑ Infine il quaderno di Cecilia porta l'equazione $x+x+10+\frac{1}{2}(x+10)=35$ da cui si ricava $x=8$.

Chi delle tre ha fatto giusto?

♪♪♪ NON HO l'ETA' … ♪♪♪

13) Fra 11 anni l'età di Mario sarà tripla di quella che egli aveva 9 anni fa. Qual è l'età attuale di Mario?
RISOLUZIONE GUIDATA
1a fase) $x =$ età *attuale* di Mario
2a fase) $x+\ldots=$ *età di Mario fra* 11 *anni*; $x-\ldots=$ *età di Mario* 9 *anni fa*
3a fase) Equazione risolvente: $x+\ldots=\ldots\cdot(x-\ldots)$

14) Oggi un padre ha il triplo dell'età di suo figlio, ma fra 14 anni le età saranno una *doppia* dell'altra. Quanti anni hanno i due ora?

15) Due fratelli hanno rispettivamente 15 e 21 anni, il loro padre 43 anni.
Si chiede fra quanti anni l'età del padre sarà uguale alla somma delle età dei due figli.

16) Anna e Barbara sono sorelle; Anna è nata 3 anni prima. Sapendo che 6 anni fa Anna aveva una volta e mezza l'età di Barbara, sapresti determinare le età attuali delle due?

17) Determina due numeri tali che la loro differenza sia 3 e che la differenza fra i 5/6 del maggiore e i 2/5 del minore sia 48 (♥ *tieni sempre presente, quando fai una "differenza", che devi seguire l'ORDINE in cui vengono menzionati i termini. Quindi la differenza fra* A *e* B *è* A − B, *NON* B − A).

18) Trova tre numeri sapendo che:
- il secondo supera di 12 la metà del primo;
- il terzo è il quintuplo della differenza fra il secondo e il primo;
- la media dei tre numeri è 20.

19) In un cortile, nel quale vi sono conigli e galline, si contano in totale 23 teste e 62 zampe. Quanti sono i conigli e quante le galline?

20) In un'opera scritta fra il V e il VI secolo, nota come l'*Antologia Greca*, l'autore Metrodoro di Bisanzio riferisce il seguente epigramma, riguardante il matematico Diofanto, vissuto ad Alessandria d'Egitto in epoca piuttosto incerta, forse nel III secolo dopo Cristo:

Il Maestro trascorse 1/6 della sua vita nella fanciullezza, 1/12 nell'adolescenza, 1/7 da adulto non ancora sposato; dopo 5 anni dal matrimonio ebbe un figlio, che per volontà del Destino visse solo la metà degli anni del padre, morendo, ahimè, 4 anni prima di lui.

Quanti anni visse Diofanto?

21) Trova due numeri sapendo che è uguale a 51 sia la loro somma che la differenza dei loro quadrati.

22) Due numeri (non interi) hanno come somma 18, come differenza dei quadrati 54. Determinali.

23) Trova tre numeri pari consecutivi, sapendo che la loro somma è 1542.

24) Trova tre numeri pari consecutivi, che diano per somma 3004.

25) Trova due interi positivi sapendo che si tratta di due multipli consecutivi di 7, e che la differenza dei loro quadrati è 931.

26) Trova quattro numeri naturali consecutivi sapendo che la somma dei quadrati del primo e del quarto è uguale alla somma dei quadrati degli altri due (… *uh, che strana questa equazione*!)

27) Trova quattro numeri naturali consecutivi sapendo che la somma dei quadrati del primo e del quarto supera di 4 unità la somma dei quadrati degli altri due (… *che strana questa equazione*!)

28) Un carico di 111 kg viene suddiviso in tre parti, in modo che la seconda parte sia i ¾ della prima, e la terza sia i ¾ della seconda. Quanto pesa ciascuna parte?

29) In un nuovissimo gioco a quiz televisivo, il concorrente può anche rimetterci! Si vincono infatti 150 euro per ogni risposta esatta, ma se ne perdono 120 per ogni risposta errata. Se un concorrente dopo 18 domande ha perso 270 euro, quante risposte giuste e quante sbagliate ha fornito?

30) Con una grossa damigiana di vino potrei riempire, in alternativa, 160 bottiglie oppure 96 bottiglioni (un bottiglione ha una capacità di ½ litro superiore a quella di una bottiglia). Quanti litri di vino contengono: una bottiglia, un bottiglione, la damigiana?

31) Ho trovato in soffitta 60 vecchie monete, alcune da 50 Lire e altre da 100 Lire, per un totale di 4400 Lire. Mi sai dire quante di queste monete sono da 50 e quante da 100?

32) Quando nacque suo figlio Giuseppe, il signor Mario aveva 31 anni. Sapendo che fra 10 anni l'età del signor Mario sarà uguale a 6 volte l'età che aveva Giuseppe 4 anni fa, trovare le età attuali dei due.

33) Per la festa del suo compleanno, Monica acquista meringhe e bignole, per un totale di 4 chili. Durante la festa, vengono mangiati i 3/8 delle meringhe e i 5/6 delle bignole; alla fine, il peso totale delle paste avanzate è di 1 kg e 4 etti. Quanti etti di meringhe e quanti etti di bignole aveva comprato Monica?

34) Sei studenti discutono dei loro voti di Maturità. I primi 5 hanno preso, rispettivamente: 100, 90, 90, 78, 72. Che voto ha preso il rimanente, se la media dei loro voti è stata 88?

$$\begin{matrix} \textit{media} \\ \textit{aritmetica} \end{matrix} = \frac{\textit{somma dei dati}}{\textit{numero dei dati}}$$

35) In una classe ci sono 25 allievi, parte maschi e parte femmine. In una impegnativa verifica scritta, la media dei voti dei maschi è stata esattamente 6,5 mentre la media dei voti delle ragazze esattamente 7. Stabilisci il numero esatto dei maschi e delle femmine componenti la classe sapendo che la media complessiva di tutti i voti è risultata uguale a 6,64.

36) Un gruppo di amici, in "società", dopo tante giocate fallite ha finalmente vinto al Lotto una modesta cifra. Stabilisci l'ammontare di questa, nonché il numero degli amici, sapendo che se ogni persona incassasse 40 euro, ne rimarrebbero ancora 10 da spartire, mentre affinché si potessero dare 45 euro a ciascuno la vincita avrebbe dovuto essere di 20 euro maggiore.

37) Antonio ha 38 anni, sua moglie Chiara 6 in meno; dal loro matrimonio sono nati ben 4 figli, che hanno oggi 8, 10, 12 e 14 anni rispettivamente. Determina, tramite un'equazione, fra quanti anni la somma delle età dei figli sarà uguale alla somma delle età dei genitori.

38) Mariuccia ha raccolto 40 steli in un prato di trifogli, salvo poi accorgersi che una parte di questi erano in realtà quadrifogli. Se si contano in totale 127 "lobi" (= foglioline), quanti sono i quadrifogli?

39) I biglietti per uno spettacolo costano 8 € per gli adulti, ma i minorenni godono di uno sconto del 25%. Se sono stati venduti 240 biglietti e incassati 1720 euro, quanti sono stati gli spettatori minorenni?

40) Maledetto vizio delle carte!
Oggi sono andato al bar con una certa cifra e ho accettato di sedermi al tavolo del poker.
In questo modo ho subito perso la metà di ciò che possedevo, più 50 euro.
Poi mi sono messo a giocare a ramino, e ci ho lasciato i 3/5 di quello che mi restava.
Così sono rimasto - sob! ☹ - con 120 miseri euro, che ora devono bastarmi fino alla fine del mese.
Perché sono così stupido? E quanto possedevo inizialmente?

41) Due sacchi contengono complessivamente 96 kg di cemento. Se 9 kg vengono trasferiti dal più pesante al più leggero, la differenza fra i due pesi diventa di 6 kg. Quanto pesavano inizialmente i due sacchi?

42) Se a ciascuno dei quattro numeri 21, 31, 39, 55 si aggiungesse uno stesso numero x, i quattro numeri ottenuti formerebbero, nell'ordine, una proporzione. Quanto vale x?

♫ INVESTIMENTI E PERCENTUALI

43) Ho investito la somma di 6000 euro suddividendola in due parti A e B;
sulla prima parte ho guadagnato il 3%, mentre sulla seconda ho perso il 2%.
Complessivamente, sono rimasto esattamente con quanto avevo all'inizio!
A quanto ammontavano le due parti A e B?

RISOLUZIONE GUIDATA

1a fase) n° euro parte A $= x$

2a fase) n° euro parte B $=$ ... $-x$

guadagno sulla parte A $= \frac{3}{100}x$ $\left(\textit{il 3\% di una data quantità } q \textit{ è la quantità } \frac{3}{100}q \right)$

perdita (*senza segno* "−") sulla parte B $=$ ...

3a fase) Equazione risolvente: $\frac{3}{100}x =$ ...

44) Un grosso emporio acquista da una fabbrica, in previsione dell'inverno, una partita di 30 stufe, alcune del modello A (più costoso: 1400 euro), altre del modello B (un po' più economico: 1200 euro). Dato l'ammontare cospicuo dell'ordine, la fabbrica accorda uno sconto del 10% sui pezzi che sarebbero costati 1200 euro, e del 15% sui pezzi che sarebbero costati 1400 euro. Sapendo che in totale con questi sconti l'emporio ha risparmiato 4950 euro, stabilisci quante stufe del modello A e quante del modello B sono state acquistate.

45) Sul prezzo di una bella giacca ho ottenuto lo sconto del 15% e l'ho quindi pagata 178,50 euro. Qual era il prezzo iniziale?

46) Ho investito 20000 euro dei miei risparmi in azioni, dividendo la cifra in due "*tranche*", ma, purtroppo, perdendo su ciascuna. Se sulla prima tranche ci ho rimesso il 5%, sulla seconda il 3%, e in totale il mio capitale si è ridotto al valore di 19240 euro, stabilisci come l'avevo ripartito.

47) Se ho suddiviso il mio patrimonio in due parti A e B, investendo ciascuna in due modi diversi, e il mio guadagno è stato del 3% sulla parte A, del 4% sulla parte B, ma sia sulla parte A che sulla parte B ho guadagnato 600 euro, quanti euro possedevo inizialmente?

48) Nel salvadanaio di un bambino ci sono k monetine da 50 centesimi, k+1 da 20, k+2 da 10, k+3 da 5, per un totale di euro 6,50. Quanto vale k?

♥ **OSSERVAZIONE**:
qui, se vuoi, puoi benissimo utilizzare nel ruolo di incognita il simbolo k già presente.
Non è obbligatorio indicare un numero incognito sempre con x!

49) Per quale valore di m i due monomi $a^{31m-1000}$; $x^5 y^{27m+2999}$ hanno il medesimo grado?

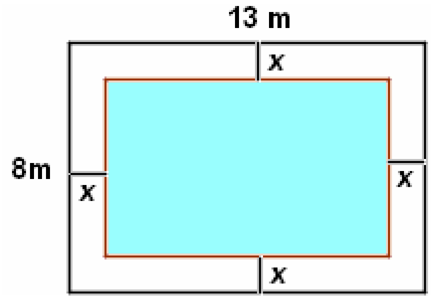
50) *Problema inventato da Christopher Clavius, 1538-1612*:
L'accordo fra un nobiluomo e un domestico prevede un salario annuale di un mantello + 100 franchi.
Passati 7 mesi, però, un inconveniente fa sì che il domestico debba interrompere il lavoro.
Il padrone gli paga a questo punto il servizio prestato col mantello + 20 franchi.
Quanti franchi vale il mantello?

51) Un turista vuole salire in cima ad una lunghissima scalinata che porta a una terrazza panoramica. Dopo aver percorso i 2/3 dei gradini, si ferma per riposare.
Quindi percorre i 3/4 dei gradini che gli rimangono, e si ferma nuovamente.
A questo punto sale i 4/5 dei gradini ancora restanti e fa un'ultima piccola pausa.
Coraggio! Rimangono solamente 4 gradini! … Di quanti gradini in totale è composta la scalinata?

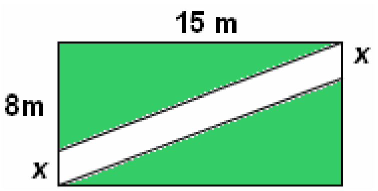
52) Fra gli iscritti a un circolo i 2/3 sono maschi, e fra questi maschi i 3/5 fa uso di alcoolici.
Fra le femmine, invece, solo la quarta parte beve alcoolici.
Se complessivamente 124 persone NON assumono alcoolici, quanti iscritti conta il circolo?

53) Dividere il numero 739 in 5 parti, tali che ciascuna (eccetto la prima) superi di un'unità il doppio della precedente.

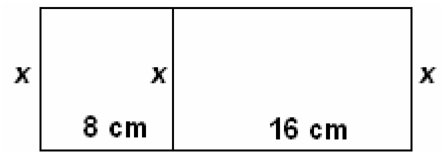
54) Il mese scorso una coppia di giovani sposi, che vive col solo stipendio del marito, ha speso: 400 euro per l'affitto della casa, i 2/5 di quanto restava per il mangiare, e i 5/6 del rimanente per le altre necessità (luce, acqua, gas, telefono, vestiario, svago).
Miracolosamente sono avanzati ancora 100 euro. A quanto ammonta lo stipendio percepito?



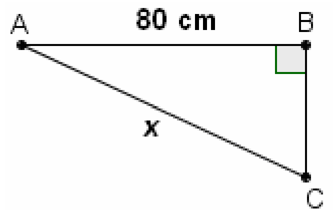
55) Determina x sapendo che la lunghezza del contorno della piscina è uguale ai 2/3 della lunghezza del contorno del terreno rettangolare, di lati 13 metri e 8 metri, all'interno del quale la piscina è stata costruita
(*troverai una frazione, o un numero con la virgola*)



56) Le dimensioni del rettangolo di terreno raffigurato qui a sinistra misurano 15 m e 8 m, e la superficie occupata dal sentiero è la quarta parte della superficie restante. Quanto misura x?



57) Sapendo che i perimetri dei due rettangoli piccoli in figura sono uno i 9/13 dell'altro, determina l'area del rettangolo grande.



58) Una catenella chiusa è lunga complessivamente cm 180.
Se la si fa passare attorno a due paletti A e B distanti cm 80 e la si tende in modo che l'angolo $A\hat{B}C$ sia di 90°, quanto misurerà il tratto AC?
(*Per impostare l'equazione risolvente puoi utilizzare il Teorema di* …)

59) In un triangolo ABC l'angolo $\hat{B}$ è il triplo dell'angolo $\hat{A}$, mentre l'angolo $\hat{C}$ supera $\hat{B}$ di 33°.
Determina le misure dei tre angoli. (*Ricorda che in ogni triangolo la somma degli angoli vale 180°*)

60) In un triangolo isoscele il lato obliquo supera la base di 2 m, e il perimetro è di m 58.
Trova lati obliqui e base.

61) Trova i lati di un triangolo isoscele di perimetro 64 cm, nel quale il lato obliquo è i 5/6 della base.

62) Di un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, si sa che $7BC - 3AB = 24$ cm ed è noto il perimetro: cm 52. Quanto misurano base e lato obliquo?

63) In un rettangolo, il perimetro misura cm 78, mentre la somma fra i 5/6 della base e i 2/3 dell'altezza è cm 30. Trova le dimensioni del rettangolo.

64) In un rettangolo, l'altezza supera di 2 cm la metà della base, e la metà dell'altezza è uguale alla terza parte della base. Quanto misura il perimetro?

65) Trova la misura x del lato di un quadrato sapendo che, se questa misura venisse aumentata di 3 cm, l'area del quadrato aumenterebbe di 81 cm^2.

Altri problemi di argomento geometrico si trovano a pagina 219; altri ancora sul Volume 2

♫ MISTURE E CONCENTRAZIONI

66) In 80 kg di soluzione, il sale rappresenta il 4% del peso totale. Quanti kg di acqua distillata devo aggiungere se voglio che il sale venga a costituire solamente il 2,5% del peso totale?

RISOLUZIONE GUIDATA

Osserviamo, per cominciare, che nella soluzione iniziale sono presenti $4/100 \cdot 80 = 3,2$ kg di sale.

Bene, ora io aggiungo x kg di acqua distillata; così il peso totale della soluzione diventa di $80 + x$ kg; se voglio che il sale presente (sempre gli stessi 3,2 kg) rappresenti il 2,5 % del peso totale,

dovrà essere $3,2 = \frac{2,5}{100} \cdot (80 + x)$ da cui $x = \ ...$

67) Un commerciante di vini disonesto ha mischiato una partita di vino ottimo con una di vino scadente, ottenendo una mistura di 120 litri della quale il vino buono rappresenta il 50%. Quanti litri di vino buono dovrebbe aggiungere a questa mistura, se volesse portare la percentuale di vino buono al 70%?

68) Se si ha a disposizione un liquido A contenente il 10% di candeggina e il 90% di acqua e un liquido B contenente il 25% di candeggina e il 75% di acqua, quanti litri di A e quanti di B occorre mischiare se si vogliono ottenere 10 litri di soluzione acquosa al 15% di candeggina? (*Risultati non interi*)

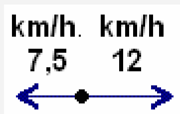
♫ VELOCITA'

69) Due veicoli partono dallo stesso punto procedendo in versi opposti, alle velocità di 7,5 e 12 km/h rispettivamente. Dopo quanti minuti la loro distanza sarà di 1200 metri?

RISOLUZIONE GUIDATA

Nel moto uniforme (= a velocità costante): $\boxed{v = \frac{s}{t}}$ $\left(velocità = \frac{spazio\ percorso}{tempo\ impiegato} \right)$ $\boxed{s = v \cdot t}$ $\boxed{t = \frac{s}{v}}$

Innanzitutto converrà portare tutti i dati in metri e in minuti.



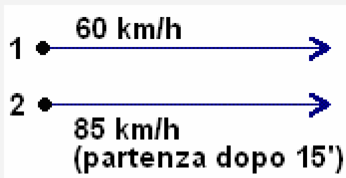
$7,5 \text{ km/h} = 7,5 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{60 \text{ minuti}} = \frac{7500 \text{ m}}{60 \text{ minuti}} = 125$ metri/minuto; 12 km/h = ... metri/minuto

Indichiamo con t il numero di minuti che devono passare (meglio qui utilizzare il simbolo t, dall'iniziale di "tempo", piuttosto che x). Dopo t minuti, i due veicoli avranno percorso rispettivamente $125t$ metri e $...\ t$ metri. Allora l'equazione risolvente sarà $125t + ...\ t = ...$ da cui $t \approx 3,7$ minuti

70) Un treno merci parte da una stazione e marcia alla velocità di 60 km orari.
Un secondo treno parte dalla stessa stazione dopo 15' nella stessa direzione del primo, viaggiando su di un binario parallelo, alla velocità di 85 km orari.
Dopo quanto tempo il secondo treno raggiunge il primo, e a quale distanza dalla stazione di partenza?

RISOLUZIONE GUIDATA

Diciamo che il sorpasso avverrà dopo t ore dalla partenza del 2° treno (quindi, dopo $t + 15/60 = t + 1/4$ ore dalla partenza del 1° treno).
Al momento del sorpasso, il secondo treno avrà viaggiato per t ore, alla sua velocità di 85 km all'ora, e avrà quindi percorso $85t$ km, mentre il primo treno avrà viaggiato per $t + 1/4$ ore, alla sua velocità di 60 km all'ora, e avrà quindi percorso $60(t + 1/4)$ km.



Avremo dunque l'equazione risolvente $85t = 60(t + 1/4)$ da cui $t = ...$
Pertanto il sorpasso avviene dopo … di ora ossia … minuti dalla partenza del secondo treno; la distanza dalla stazione di partenza è calcolabile facendo, indifferentemente, … oppure …

71) Due treni partono simultaneamente, marciando su due binari paralleli, il primo da una città A e il secondo, venendo incontro al primo, da una città B.
Le due città distano 120 km, il primo treno procede a 60 km all'ora e il secondo a 100 km all'ora.
Dopo quanto tempo i due treni si incontrano e a quali distanze dalle due città?

72) Due autobus si vengono incontro, partendo simultaneamente da due località distanti 385 km; entrambi viaggiano a velocità costante, ma uno di essi mantiene una velocità di 15 km/h minore rispetto all'altro. Se ci mettono 2 h e 20' ad incrociarsi, quali sono le due velocità?

73) Due autobus partono per una gita scolastica da una stessa località, ma uno di essi, per un imprevisto, si avvia con 20 minuti di ritardo rispetto all'altro.
L'autista dell'autobus partito per primo viaggia alla velocità costante di 70 km/h, mentre il secondo autobus, per recuperare il ritardo, procede a una velocità di 20 km/h più elevata.
Si domanda quanto tempo ci metterà l'autobus partito per secondo, a raggiungere il primo.

♫ **NUMERI INTERI DISGREGATI IN CIFRE**

Per i problemi in questo riquadro occorre tener presente che, se un numero intero si scrive, poniamo, come $[abc]$, *allora è uguale a* $100a+10b+c$. *Ad esempio,* $348=3\cdot100+4\cdot10+8$.

74) Determina un intero di due cifre, sapendo che quella delle decine supera di 2 quella delle unità, e il numero stesso supera di 3 il sestuplo del valore della somma delle sue cifre.

RISOLUZIONE GUIDATA

$\text{Cifra delle unità}=x;\quad \text{cifra delle decine}=x+2;\quad \text{valore dell'intero}=10(x+2)+x$

$10(x+2)+x=...$

75) In un intero di due cifre la cifra delle unità è il doppio di quella delle decine. L'intero è uguale alla somma delle sue cifre, aumentata di 27. Di che intero si tratta?

76) Un intero è composto da 3 cifre consecutive crescenti. Determinalo, sapendo che se lo si scrive all'incontrario, il nuovo intero ottenuto supera di 9 unità i 4/3 dell'intero originario.

77) Trova un intero di due cifre sapendo che la cifra delle decine supera di 2 quella delle unità, e che scrivendo il numero al rovescio, il nuovo valore è inferiore di 18 al valore iniziale.

♫ **SEMPRE PIU' DIFFICILE!!!**

I problemi che seguono sono più "tosti".
Se sei un duro lotterai a lungo prima di "sbirciare", cliccando sulla freccia, la correzione!!!

In Inglese si usa il termine "CHALLENGE" (letteralmente: "sfida") per indicare un problema o quesito più arduo del solito

78) Una contadina si reca al mercato con il suo paniere di uova.
Un primo cliente le acquista la metà delle uova più mezzo uovo,
un secondo cliente la metà delle uova rimaste più mezzo uovo,
un terzo (e ultimo) cliente la metà delle uova rimaste più mezzo uovo.
Voilà! La contadina ha così venduto tutte le uova con cui era partita!
… Ma quante erano queste uova?

79) ⇨ Per riempire una piscina vengono aperti, contemporaneamente, tre rubinetti.
Il primo rubinetto, se usato da solo, riempirebbe la piscina in 3 ore.
Il secondo, da solo, ce la farebbe in 4 ore. E il terzo, da solo, ci metterebbe 12 ore.
Ma visto che i rubinetti vengono adoperati insieme, in quanto tempo verrà riempita la piscina?
(*Indicazione: domandati quale frazione di piscina riempie, in 1 ora, ciascun rubinetto* ...)

80) Un rubinetto A scarica 1 volta e mezza l'acqua scaricata dal rubinetto B nel medesimo tempo.
Se aperti in simultanea, impiegherebbero 36 minuti a riempire la vasca.
E se si utilizzasse solo il rubinetto A, quanto tempo occorrerebbe?

81) ⇨ E' mezzogiorno, e le lancette dell'orologio sono sovrapposte.
Fra quanti minuti torneranno di nuovo a sovrapporsi?

82) ⇨ Il tragitto di una gara sportiva è suddiviso in tre tappe. La prima tappa, uguale alla metà della distanza totale, è stata percorsa dal vincitore in bicicletta, alla velocità di 12 m al secondo.
La seconda tappa, uguale a un terzo della distanza totale, è stata percorsa a piedi, alla velocità di 5 metri al secondo. E la tappa rimanente è stata percorsa a nuoto, alla velocità di 1 metro al secondo.
Sapendo che il tempo totale impiegato è stato di 1 ora e 50 minuti, si chiede:
di quanti chilometri è il tragitto complessivo?

83) ⇨ Quando un termometro in scala Celsius segna 0 gradi Celsius (0° C), un termometro Fahrenheit segna 32 gradi Fahrenheit (32° F);
l'acqua bolle a 100° C e a 212° F.

C	F
0	32
100	212

a) Trova la formula che lega la temperatura F su di un termometro Fahrenheit alla stessa temperatura C misurata da un termometro Celsius: F = ... [*espressione contenente* C]

b) Rispondi ora a questa domanda: esiste una temperatura che è indicata con lo stesso numero tanto su di un termometro Celsius che su di un termometro Fahrenheit?

ALTRI PROBLEMI DI RISERVA, TUTTI CON CORREZIONE

(le soluzioni sono a pagina 169, le correzioni a pagina 166-167)

84) Piero è un risparmiatore. A Gennaio mette da parte una certa somma; a partire da Febbraio, ogni mese riesce a risparmiare 50 euro in più rispetto al mese precedente. Se alla fine di Aprile i suoi risparmi dell'anno in corso ammontano a 2100 euro, quanto ha messo da parte ogni mese?

85) Il commerciante Paolo esce di casa con 200 euro, incassa alla fiera una certa somma di denaro, poi però ☹ deve pagare una multa per la sosta del suo furgone in area vietata, perdendo così il 10% di quanto aveva nel portafogli. Rincasa quindi con 585 euro. Quanto aveva incassato alla fiera?

86) Carlo ha 10 anni più di suo fratello Dario, e fra 6 anni le due età saranno una il doppio dell'altra. Quanti anni ha Carlo attualmente?

87) Trova due interi sapendo che si tratta di due multipli consecutivi di 5 e che la differenza dei loro quadrati è 975.

88) Trova due numeri sapendo che è uguale a 21 sia la loro differenza, che la differenza dei loro quadrati (*psst … in confidenza … non è che debbano per forza essere entrambi positivi*!)

89) Anna ha 5 anni in meno rispetto a suo fratello Bruno.
3 anni fa Anna aveva esattamente i 4/5 dell'età che aveva Bruno. Qual è l´età attuale dei due?

90) Una ditta vende due tipi di computer, uno più costoso, da 1000 euro, e uno più economico, il cui prezzo, rispetto all'altro, è il 25% in meno.
Dopo la vendita di 22 macchine in totale, l'incasso complessivo è stato di euro 20000.
Quanti computer di ciascun tipo sono stati venduti?

91) Trova due numeri sapendo che hanno per somma 50, mentre la differenza dei loro quadrati è 100.

92) Pierino è goloso dei grossi gelati di un certo banchetto, e pensa che se la sua paghetta settimanale fosse di 1 euro in più, riuscirebbe con essa a pagarsi 6 bei gelati. Ma alla fine Pierino, giudiziosamente, ricevuta la paghetta compra 2 gelati soltanto, compra anche una cassata, da mangiare in famiglia, che costa 4 euro in più rispetto al gelato, e avanza 5 euro e 50 centesimi.
A quanti euro ammonta la paghetta? E quanto costa un gelato?

93) Tre amici posseggono in totale 400 euro, ma questi non sono suddivisi equamente.
Mentre infatti Bruno risulta avere il triplo di Aldo, più ancora 32 euro, Carlo se avesse 6 euro in più avrebbe il doppio di Bruno. Quanto possiede ciascuno?

94) Un tragitto di 480 km viene suddiviso in 3 tappe, tali che ciascuna (a parte, ovviamente, la prima) è inferiore di 20 km al doppio della precedente. Quanti km misura ciascuna tappa?

95) La differenza fra i perimetri di due quadrati è di 16 cm, mentre la differenza delle aree è di 104 cm^2. Quanto misura il lato di ciascun quadrato?

96) Se ho in tasca 36 monete, parte da 20 centesimi, le rimanenti da 50 centesimi, e il totale equivale a 12 euro, quante sono le monete da 20 centesimi e quante quelle da 50 centesimi?

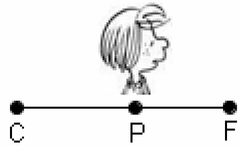
97) Pierino, guardando la vetrina del pasticcere, riflette:
vorrebbe comprare 8 piccole torte, ma gli manca 1 euro; se invece comprasse 6 crostate, avanzerebbe 1 euro. Sapendo che una torta costa 1 € in meno di una crostata, dimmi quanti euro ha in tasca Pierino.

98) Trova un intero di due cifre sapendo che la somma delle sue cifre è 9, e che se lo si scrive al rovescio il nuovo numero ottenuto supera di 45 quello iniziale.

99) La differenza fra i tempi, nel percorrere una determinata distanza ai 40 km/h oppure ai 45 km/h, è di 10 minuti. Qual è la distanza in questione?

100) Ho aggiunto 5 litri di acqua a una soluzione di 10 litri contenente una certa percentuale di acido cloridrico, ottenendo una diminuizione della concentrazione di questo, che si è ora ridotta all'1%. Sapresti risalire alla concentrazione originaria?

101) Carlo vuol andare a fare i compiti dalla compagna Patty, passando però prima dal Fornaio, distante da casa di Carlo 700 metri, per comprare due croissant da mangiare a merenda. In questo modo, farà due volte e mezza la strada che avrebbe fatto andando direttamente da Patty per la via più breve. Quanto distano la casa di Carlo e quella di Patty?



102) Un tale ha cambiato una corona in monete da 1/10 di corona e da 1/20 di corona; in totale, le monete che ha ricevuto sono state 17. Quante monete di ciascun tipo? (*da "Elementi di Algebra" di Eulèro*)

RISOLUZIONI

84)
$x = n°$ *euro risparmiati a Gennaio*
$x+50 = n°$ *euro risparmiati a Febbraio*
$x+100 = n°$ *euro risparmiati a Marzo*
$x+150 = n°$ *euro risparmiati ad Aprile*
$x+(x+50)+(x+100)+(x+150)=2100$
$4x+300=2100$
$4x=1800$
$\boxed{x=450}$
I risparmi perciò sono stati:
in Gennaio, 450 *euro*; *in Febbraio*, 500 *euro*;
in Marzo, 550 *euro*; *in Aprile*, 600 *euro*.

85)
$x = n°$ *euro incassati alla fiera*
$n°$ *euro multa* $= \frac{10}{100}(200+x) = \frac{1}{10}(200+x)$
$200+x-\frac{1}{10}(200+x)=585$
$\left(\textit{oppure direttamente}: \frac{90}{100}(200+x)=585\right)$
$200+x-20-\frac{1}{10}x=585$
$2000+10x-200-x=5850;\quad 9x=4050$
$\boxed{x=\frac{4050}{9}=450}$

86)
età attuale Carlo $= x$
età attuale fratello Dario $= x-10$
età Carlo fra 6 *anni* $= x+6$
età fratello Dario fra 6 *anni* $= x-10+6=x-4$
$x+6=2(x-4);\quad x+6=2x-8;\quad -x=-14;$
$x=14$
$\boxed{\textit{Carlo ha attualmente } 14 \textit{ anni}}$,
suo fratello Dario 4

87)
$x,\ x+5$
$(x+5)^2-x^2=975$
$\cancel{x^2}+10x+25\cancel{-x^2}=975$
$10x=950$
$x=95$
I due numeri sono $\boxed{95}$ *e* $\boxed{100}$

88)
$x,\ x+21$
$(x+21)^2-x^2=21;$
$\cancel{x^2}+42x+441\cancel{-x^2}=21;$
$42x=-420;$
$\boxed{x=-10};\ \boxed{x+21=11}$

89)
età attuale Anna $= x$
età attuale Bruno $= x+5$
età Anna 3 *anni fa* $= x-3$
età Bruno 3 *anni fa* $= x+5-3=x+2$
$x-3=\frac{4}{5}(x+2);\quad x-3=\frac{4}{5}x+\frac{8}{5};\quad 5x-15=4x+8;$
$x=23$
$\boxed{\textit{Anna ha attualmente } 23 \textit{ anni, Bruno } 28}$

90)
costo computer più caro $= 1000$ *euro*
costo computer più economico $= \frac{75}{100}\cdot 1000$ *euro* $= 750$ *euro*
$n°$ *computer da* 1000 *euro venduti* $= x$; $n°$ *computer da* 750 *euro venduti* $= 22-x$
$1000\cdot x+750\cdot(22-x)=20000;\quad 1000x+16500-750x=20000;\quad 250x=3500;\quad x=14$
Sono stati venduti $\boxed{14}$ *computer del tipo più costoso*, $\boxed{8}$ *del tipo più economico.*

91)
numero minore $= x$
numero maggiore $= 50-x$
$(50-x)^2-x^2=100$
$2500-100x\cancel{+x^2}\cancel{-x^2}=100$
$-100x=-2400$
$x=24$
$\boxed{\textit{I due numeri sono } 24 \textit{ e } 50-24=26}$

92)
Costo in euro di un gelato $= x$
Costo in euro di una cassata $= x+4$
Ammontare in euro paghetta $= \left\langle \begin{matrix} 6x-1 \\ 2x+x+4+5{,}5 \end{matrix} \right.$
$6x-1=2x+x+4+5{,}5$
$3x=10{,}5$
$x=3{,}5$
Un gelato costa $\boxed{3{,}5}$ *euro*,
e la paghetta di Pierino ammonta a euro $6\cdot 3{,}5-1=\boxed{20}$

93)

$a = x;\quad b = 3x + 32$

$c = 2(3x+32) - 6 = 6x + 64 - 6 = 6x + 58$

$x + (3x+32) + (6x+58) = 400$

$10x + 90 = 400;\quad 10x = 310$

$x = 31$

$a = \boxed{31},\quad b = 3\cdot 31 + 32 = 93 + 32 = \boxed{125},$

$c = 2\cdot 125 - 6 = 250 - 6 = \boxed{244}$

94)

$\textit{lunghezza in km } 1^a \textit{ tappa} = x$

$\textit{lunghezza in km } 2^a \textit{ tappa} = 2x - 20$

$\textit{lunghezza in km } 3^a \textit{ tappa} = 2(2x-20) - 20 =$
$= 4x - 40 - 20 = 4x - 60$

$x + (2x-20) + (4x-60) = 480 \quad x = 80$

$\textit{La } 1^a \textit{ tappa misura } \boxed{80\,km},$

$\textit{la } 2^a \textit{ misura } 2\cdot 80 - 20 = 160 - 20 = \boxed{140\ km},$

$\textit{la } 3^a \textit{ misura } 2\cdot 140 - 20 = 280 - 20 = \boxed{260\ km}$

95)

$\textit{lato } 1° \textit{ quadrato, il più piccolo (misura in cm)} = x$

$\textit{lato } 2° \textit{ quadrato, il più grande (misura in cm)} = x + 4$

(*se passando dal* 1° *al* 2° *il perimetro aumenta di* 16, *vuol dire che ciascun lato aumenta di* 4!)

$(x+4)^2 - x^2 = 104$

$\cancel{x^2} + 8x + 16 \cancel{-x^2} = 104;\quad 8x = 88;\quad x = 11$

Il lato del quadrato più piccolo misura $\boxed{11\ cm}$,
quello del più grande misura $\boxed{15\ cm}$

96)

$x = \textit{n° monete da } 20 \textit{ centesimi}$

$36 - x = \textit{n° monete da } 50 \textit{ centesimi}$

$20\cdot x + 50\cdot(36-x) = 1200$

$20x + 1800 - 50x = 1200$

$-30x = -600;\quad x = 20$

$\textit{n° monete da } 20 \textit{ centesimi} = \boxed{20}$

$\textit{n° monete da } 50 \textit{ centesimi} = 36 - 20 = \boxed{16}$

97)

$x = \textit{costo in euro di una crostata}$

$\textit{costo in euro di una torta} = x - 1$

$\textit{n° euro posseduti da Pierino} = \left\langle \begin{array}{l} 8(x-1)-1 \\ 6x+1 \end{array} \right.$

$8(x-1) - 1 = 6x + 1$

$8x - 8 - 1 = 6x + 1;\quad 2x = 10;\quad x = 5$

$\textit{costo in euro di una crostata} = 5$

$\textit{costo in euro di una torta} = 4$

$\textit{n° euro posseduti da Pierino} = 8\cdot 4 - 1 = 32 - 1 = \boxed{31}$

$\textit{o anche } 6\cdot 5 + 1 = \boxed{31}$

98)

$\textit{Cifra delle unità numero originario} = x$

$\textit{Cifra delle decine numero originario} = 9 - x$

$\textit{Numero originario} = 10(9-x) + x$

$\textit{Cifra delle unità numero rovesciato} = 9 - x$

$\textit{Cifra delle decine numero rovesciato} = x$

$\textit{Numero rovesciato} = 10x + (9-x)$

$10x + (9-x) = 10(9-x) + x + 45$

... $x = 7$. *Il numero richiesto è dunque il* $\boxed{27}$

99)

$v = \frac{s}{t} \rightarrow t = \frac{s}{v}$

Detta ora s la distanza richiesta,
avremo, ragionando in km, ore e km/h,

$\frac{s}{40} - \frac{s}{45} = \frac{1}{6} \quad \left(10' \textit{ sono } \frac{1}{6} \textit{ di ora}\right)$

$\frac{9s - 8s}{\cancel{360}} = \frac{60}{\cancel{360}};\quad s = 60$

La distanza in questione è di $\boxed{60\ km}$

100)

Detto x il peso dell'acido cloridrico nella soluzione originaria, prima dell'aggiunta dei 5 litri d'acqua, avremo:

$x = \frac{1}{100}(10+5);\quad x = \frac{15}{100}$

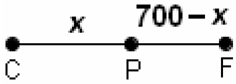
Perciò la soluzione originaria conteneva 15/100 di litro di acido cloridrico, e poiché tale soluzione era di 10 litri, in essa la percentuale di acido era data da

$\dfrac{\frac{15}{100}}{10}\cdot 100 = \boxed{1{,}5\ \%}$

Qui in fondo il valore cercato è stato determinato più con calcoli diretti che con una equazione …

101)

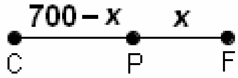
Così:



$x + 2(700-x) = 2{,}5x$

da cui $x = \boxed{400}$

… oppure così:



$700 - x + 2x = 2{,}5(700-x)$

da cui $x = 300 \rightarrow \overline{CP} = \boxed{400}$

102)

$x = \textit{n° monete da } 1/10 \textit{ di corona}$

$17 - x = \textit{n° monete da } 1/20 \textit{ di corona}$

$x\cdot\frac{1}{10} + (17-x)\cdot\frac{1}{20} = 1 \quad x = 3$

$\boxed{3 \textit{ monete da } 1/10 \textit{ e } 14 \textit{ da } 1/20}$

ESEMPI DI PROBLEMINI IN LINGUA INGLESE, TROVATI SU INTERNET
(basta digitare, su di un motore di ricerca, le parole chiave **equation** + **word** + **problem**
word problems = *problemi espressi a parole*)

Terminologia matematica inglese, da www.mathleague.com (The Math League)

Word	Operation	Example	As an equation
sum	addition	The sum of my age and 10 equals 27	$y+10=27$
difference	subtraction	The difference between my age and my younger sister's age, who is 11 years old, is 5	$y-11=5$
product	multiplication	The product of my age and 14 is 168	$y\cdot 14=168$
times	multiplication	Three times my age is 60	$3\cdot y=60$
less than	subtraction	Seven less than my age equals 32	$y-7=32$
more than	addition	Eleven more than my age equals 43	$y+11=43$

NOTA $+$ e $-$ in quanto *operazioni* si leggono "*plus*" (pron. *plàs*) e "*minus*" (pron. *mainəs*) ma in quanto *segni di numeri relativi* vanno invece letti come "*positive*" e "*negative*". Es. -7 "*negative seven*". La moltiplicazione si legge "*times*" (es. 5×4 "*five times four*"), più raramente "*multiplied by*".

Da www.themathpage.com (Lawrence Spector):

103) A class of 50 students is divided into two groups; one group has eight less than the other; how many are in each group?

104) Julie has \$50, which is eight dollars more than twice what John has. How much has John?

105) Divide \$80 among three people so that the second will have twice as much as the first, and the third will have \$5 less than the second.

106) There are *b* boys in the class. This is 3 more than 4 times the number of girls. How many girls are there?

107) A woman is now 30 years older than her son. 15 years ago, she was twice as old. What are the present ages of the woman and her son?

108) A total of 925 tickets were sold for \$5,925 (*cinquemilanovecentoventicinque*). If adult tickets cost \$7.50, and children's tickets cost \$3.00, how many tickets of each kind were sold?
(♥ **Qui, ALL'ANGLOSASSONE, LA VIRGOLA FA DA SEPARATORE PER LE MIGLIAIA, IL PUNTO PER LA PARTE DECIMALE**)

Da www.stfx.ca/special/mathproblems/grade9.html (The Canadian School Math Page):

109) Flora had an average of 56% on her first 7 exams. What would she have to make on her eighth exam to obtain an average of 60% on 8 exams?

110) A classroom contained an equal number of boys and girls. Eight girls left to play hockey, leaving twice as many boys as girls in the classroom. What was the original number of students present?

Dal sito www.algebralab.org:

111) If 4 is subtracted from twice a number, the result is 10 less than the number. Find the number.

112) Karin's mom runs a dairy farm. Last year Betty the cow gave 375 gallons less than twice the amount from Bessie the cow. Together, Betty and Bessie produced 1464 gallons of milk. How many gallons did each cow give?

113) Twice a number is added to the number and the answer is 90. Find the number.

114) Jose has a board that is 44 inches long. He wishes to cut it into two pieces so that one piece will be 6 inches longer than the other. How long should the shorter piece be?

115) Paula received a paycheck of \$585. This amount reflects her weekly earnings less 10% of her earnings for deductions. How much was she paid before deductions were taken out?

Dal sito www.analyzemath.com (Abdelkader Dendane)

116) At 9 am a car (A) began a journey from a point, traveling at 40 mph (*miles per hour, miglia per ora*). At 10 am another car (B) started traveling from the same point at 60 mph in the same direction as car A. At what time will car B pass car A? (*am=antimeridiane, pm=pomeridiane, dopo mezzogiorno*)

SOLUZIONI DEI PROBLEMI

1) $\frac{1}{4}x+21=\frac{3}{5}x$; capacità = 60 litri 2) $20-7-6x-4\cdot\frac{3}{2}x=1$ opp. $1+4\cdot\frac{3}{2}x+6x+7=20$; biglietto metro $=1$ euro
3) $x-4=3\cdot(52-x-4)$; Mario possedeva inizialmente 37 euro e Vincenzo 15 4) 18, 18, 18, 14 pennarelli
5) 25 euro 6) Costo pranzo in trattoria = 9 euro 7) Una bottiglia costa 5 euro, una torta 12,50 euro 8) 7 mesi
9) 1 euro e 80 10) costo pasto scontato = 15 euro 11) 15 bottiglie di orzata 12) Tutte! La x non è la stessa …
13) $x+11=$ età di Mario fra 11 anni; $x-9=$ età di Mario 9 anni fa ; $x+11=3\cdot(x-9)$; Mario ora ha 19 anni
14) 42 anni e 14 anni 15) Fra 7 anni 16) Anna ha 15 anni, Barbara 12 17) 105, 108 18) 12, 18, 30
19) 8 conigli, 15 galline 20) Diofanto visse 84 anni 21) 25, 26 22) 15/2, 21/2 23) 512, 514, 516
24) Problema impossibile 25) 63, 70
26) Problema impossibile: nessuna quaterna di interi consecutivi può avere questa proprietà
27) Problema indeterminato: qualsiasi quaterna di interi consecutivi gode di questa proprietà
28) 48 kg, 36 kg, 27 kg 29) 7 risposte giuste e 11 sbagliate
30) Le capacità sono: bottiglia, 3/4 di litro; bottiglione, 5/4 di litro (1 litro e ¼); damigiana, 120 litri
31) 32 monete da 50 lire e 28 da 100 lire 32) 13 anni e 44 anni 33) 16 etti di meringhe e 24 di bignole
34) Ha preso 98 35) 18 maschi, 7 femmine 36) La vincita è stata di 250 euro, e gli amici sono 6
37) Fra 13 anni 38) I quadrifogli sono 7 39) 100 spettatori minorenni 40) Ero andato al bar con 700 euro
41) Il testo del problema è ambiguo, perché non chiarisce se dopo il trasferimento il sacco che era inizialmente più pesante resta ancora il più pesante, oppure diventa il più leggero.
Nel primo caso i due pesi iniziali sono 60 kg e 36 kg, nel secondo caso 54 kg e 42 kg
42) $x=9$ 43) n° euro parte A $=x$, n° euro parte B $=6000-x$,
guadagno su A $=\frac{3}{100}x$, perdita su B $=\frac{2}{100}(6000-x)$; eq. ris.: $\frac{3}{100}x=\frac{2}{100}(6000-x)$;
A = 2400 euro, B = 3600 euro
44) 15 di ciascun modello 45) Il prezzo iniziale della giacca era di 210 euro 46) 8000 e 12000 euro
47) 35000. $3/100$A = 600 da cui A=… e analogamente per B 48) $k=7$ 49) $m=1001$ 50) Vale 92 franchi
51) 240 gradini 52) Gli iscritti al circolo sono 240 53) 23, 47, 95, 191, 383 54) 1400 euro
55) metri $7/4=1{,}75$ 56) m 1,6 57) 240 cm^2 58) Pitagora: $80^2+(...)^2=x^2$; AC = 82 cm
59) 21°, 63°, 96° 60) Base = 18 m, lato obliquo = 20 m 61) Base = 24 cm, lato obliquo = 20 cm
62) Base = 12 cm, lato obliquo = 20 cm 63) Base = 24 cm, altezza = 15 cm
64) Base = 12 cm, altezza = 8 cm, perimetro = 40 cm 65) $(x+3)^2=x^2+81$; $x=12$ cm
66) $x=48$: devo aggiungere 48 kg di acqua distillata 67) Dovrebbe aggiungere 80 litri di vino buono
68) 6 litri e 2/3 di litro di A, 3 litri e 1/3 di litro di B
69) $7{,}5\text{ km/h}=7{,}5\cdot\frac{1000\text{ m}}{60\text{ minuti}}=\frac{7500\text{ m}}{60\text{ minuti}}=125$ metri/minuto; 12 km/h = 200 metri/minuto
Dopo t minuti, i due veicoli avranno percorso rispettivamente $125t$ metri e $200t$ metri.
Allora l'equazione risolvente sarà $125t+200t=1200$ da cui $t\approx 3{,}7$ minuti
70) $t=3/5$; pertanto il sorpasso avviene dopo 3/5 di ora ossia 36 minuti dalla partenza del 2° treno; la distanza in km dalla stazione di partenza è calcolabile facendo, indifferentemente, $85\cdot 3/5$ oppure $60\cdot(3/5+1/4)$. Perciò il 2° treno, quello che parte dopo ed è più veloce, raggiunge il più lento dopo aver viaggiato per 36 minuti, e a 51 km dalla stazione di partenza.
NOTA: Si poteva anche ragionare più "alla buona" dicendo che, visto che le velocità sono rispettivamente di 85 e di 60 km/h, nel suo "inseguimento" il secondo treno recupera ogni ora 25 km sull'altro; siccome i km di distacco da recuperare sono 15 (nei 15 minuti = 1/4 di ora in cui ha viaggiato da solo, il primo treno ha percorso $60\cdot 1/4=15$ km), basterà fare $15:25=3/5$ di ora.
71) Dopo ¾ d'ora, a 45 km dalla città A e a 75 km da B 72) 90 e 75 km/h (2 h 20'= h 7/3) 73) 1 h 10'
74) $valore\ dell'intero=10(x+2)+x$; $10(x+2)+x=6(x+2+x)+3$. L'intero è 75 75) 36 76) 567
77) L'equazione risolvente è indeterminata. Sono soluzioni del problema tutti i numeri di due cifre, nei quali la cifra delle decine supera di 2 quella delle unità, ossia: 97, 86, 75, 64, 53, 42, 31, 20.
78) Le uova erano 7 79) $t\cdot(1/3+1/4+1/12)=1$; 1 ora e ½ 80) 1 ora
81) Fra 720/11 di minuto, ossia 1 ora + 60/11 di minuto, oppure 1 h, 5 minuti e 5/11 di minuto.
82) 24 km 83) a) $F=\frac{180}{100}C+32$ b) $-40°C=-40°F$ 84) 450 euro , ecc. 85) 450 euro 86) 14 anni
87) 95 e 100 88) -10 e 11 89) Anna : 23 anni; Bruno : 28 90) 14 (tipo più costoso) e 8 91) 24 e 26
92) Paghetta: 20 euro; gelato: 3,50 93) 31, 125, 244 euro 94) 80, 140, 260 km 95) 11 e 15 cm
96) 20 da 20, 16 da 50 97) 31 euro 98) 27 99) 60 km 100) 1,5 % 101) 400 m 102) 3 e 14 103) 29, 21
104) \$21 105) 17, 34, 29 106) $\frac{b-3}{4}$ 107) 75, 45 108) 700, 225 109) 88% 110) 32 111) -6 ("negative six")
112) 851, 613 gallons 113) 30 114) 19 inches 115) \$650 116) Car B passes car A at 12 am

9. QUESITI TRATTI DA GARE MATEMATICHE (risposte in fondo alla pagina)

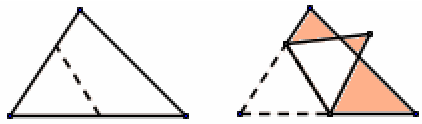
[*Inutile osservare che in una gara matematica una risposta si può A VOLTE dare più rapidamente se si procede per tentativi, o per esclusione, o con ragionamenti vari, anziché tramite un'equazione*!]

115) The Calgary Mathematical Association - Junior High School Mathematics Contest 2005
Il punteggio di Semra in una prova matematica fu registrato in modo errato dall'insegnante. Il vero punteggio era esattamente 4 volte quello segnato. Quando la prof. corresse l'errore, il punteggio medio della classe, composta da 24 studenti Semra inclusa, si alzò di 2 punti. Quale era stato il punteggio reale di Semra?

116) PRISM: Problem Solving for Irish Second level Mathematicians, 2007
Un giocatore si reca al Casinò e raddoppia il suo denaro. Se ne va, pagando 8 € per il parcheggio. Cambia Casinò, raddoppia nuovamente il suo denaro ed esce, pagando altri 8 € per il parcheggio e … restando a questo punto senza il becco di un euro. Con quanti soldi era entrato nel primo Casinò?

117) University of New Brunswick and Université de Moncton - Junior High School Math. Comp. 1992
Un emporio vende succo di frutta in bottiglie piccole e grandi; una bottiglia grande costa il triplo di una piccola. Jack ha comprato 10 bottiglie piccole e 6 grandi; spendendo la stessa cifra, Lise ha acquistato 24 bottiglie. Quante di queste erano piccole?
a) 16 b) 18 c) 20 d) 22 e) Le informazioni non sono sufficienti per rispondere

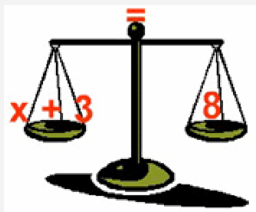
118) Kangourou 2010
Un triangolo (figura di sinistra) viene ripiegato lungo la linea tratteggiata, a formare una figura con sette lati, la cui area è i 2/3 di quella del triangolo di partenza. Quanto vale l'area di questo, se la regione scura ha area 1?



119) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round 1997
E' stato richiesto a Tanya di aggiungere 14 a un certo numero e di dividere poi il risultato per 4. Tanya invece si è confusa e ha prima aggiunto 4, poi diviso per 14. Se così facendo ha ottenuto alla fine 5, quale sarebbe stato il risultato corretto? a) 5 b) 20 c) 25 d) 66 e) 70

120) UK Junior Mathematical Olympiad 2011
Alcuni fogli rettangolari di carta sono disposti uno sull'altro. La pila è poi ripiegata a metà a formare un libretto, di cui vengono numerate le pagine: 1, 2, 3, … dalla prima fino all'ultima. Ora, la somma dei 4 numeri su di uno stesso foglio dà 58. Quanti fogli sono stati utilizzati?

Dal sito **www.regentsprep.org**



Remember when solving equations
to "**KEEP THE EQUATION BALANCED**"
by making the **SAME CHANGES**
to **BOTH SIDES** of the equal sign.

Example. Solve this equation for *x*: $5x-2=13$

First, undo the subtraction by adding 2.
Then, undo the multiplication by dividing by 5.

(Remember to perform your changes to both sides of the equation to "keep the equation balanced")

$$5x-2=13$$
$$+2 \quad +2$$
$$5x=15$$
$$\frac{5x}{5}=\frac{15}{5}$$
$$x=3$$

CHECK YOUR ANSWER!
You will always know if your answer is correct
by doing a simple "check":
SUBSTITUTE your answer into the original equation
and see if the result is true.

Check:
$$5\cdot 3-2=13$$
$$15-2=13$$
$$13=13$$
true

RISPOSTE 115) 64 116) 6 € 117) d (possono sembrare necessarie due incognite, ma in realtà …)
118) 3 119) b 120) $(1,\,2,\,4n,\,4n-1)$; $(3,\,4,\,4n-2,\,4n-3)$; ... $8n+2=58 \to n=7$

10. DUE RIGHE DI STORIA (GRAZIE a Nadir Murru dell'Università di Torino!)

I primi a utilizzare, sostanzialmente, equazioni di 1° grado nella risoluzione di problemi furono i **Babilonesi**, intorno al 2000 a.C.
Le questioni esaminate venivano esposte e risolte tramite il linguaggio, senza notazioni e formule specifiche. Per indicare le incognite si usavano termini come *us* (lunghezza), *sag* (larghezza) e *asa* (area), dal momento che i quesiti inizialmente affrontati riguardavano la suddivisione e determinazione di terreni.

Per quanto attiene all'**Antico Egitto**, la più antica testimonianza nel campo delle equazioni risale al famoso **Papiro di Rhind** oggi conservato presso il British Museum. Esso è anche detto Papiro di Ahmes dal nome di uno scriba che verso il 1650 a.C. vi trascrisse un documento preesistente, redatto tra il 2000 e il 1800 a.C.
Si tratta di una raccolta di problemi e di loro risoluzioni attraverso equazioni di primo grado; in esso l'incognita dell'equazione viene chiamata *aha*, cioè *mucchio*.

Ecco un esempio tra i tanti problemi raccolti nel papiro:

"determinare il valore di *aha* se la somma di *aha* col suo quarto dà come risultato 15"

Tale problema è equivalente all'equazione di primo grado $x+\frac{1}{4}x=15$, da cui $x=...$

… A te la facile risposta, lettore! ☺

Il 24esimo, che porta all'equazione che noi scriveremmo come $x+\frac{1}{7}x=19$,

viene affrontato dal solutore col cosiddetto "**metodo di falsa posizione**".

Egli assegna al "mucchio" (noi diremmo: alla *x*) un valore a caso, scegliendo nella fattispecie il 7,

e calcola il corrispondente valore di $x+\frac{1}{7}x$ ottenendo come risultato 8.

Successivamente, confronta l'8 col 19, trovando la relazione $8\cdot\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=19$.

E a questo punto conclude:

il "mucchio" si otterrà moltiplicando il 7 per la quantità $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$.

La risoluzione di un'equazione di primo grado è molto elementare. Però per rintracciare uno scritto che indaghi il soggetto in modo esauriente dobbiamo attendere l'*Arithmetica* di **Diofanto** (250 d. C.), il primo trattato esclusivamente dedicato alla teoria dei numeri, nel quale l'autore si applica principalmente allo studio di equazioni a una o più incognite, di cui ricerca le soluzioni intere e razionali.
Tali equazioni sono chiamate Diofantee o Diofantine e la più semplice è appunto quella del tipo $ax=b$, con a, b numeri interi.

Se misurarsi con un'equazione di primo grado è agevole, ben più complicata si presenta l'impostazione di *problemi* attraverso equazioni.
In questo caso occorrono infatti un certo ingegno e una certa abilità per interpretare correttamente il quesito, intuendo quale sia la quantità che conviene porre come incognita e utilizzando in modo corretto i dati.

Lo stesso Diofanto volle che sulla sua tomba venisse scritto il seguente epitaffio, dalla lettura del quale è possibile risalire (attraverso un'equazione!) all'età fino a cui visse il Maestro:
"Dio gli concesse di rimanere fanciullo per un sesto della sua vita, e trascorso un altro dodicesimo, gli coprì le guance di peluria; dopo un altro settimo Egli gli accese la fiaccola del matrimonio, e cinque anni dopo il matrimonio gli concesse un figlio. Purtroppo questo bambino nato dopo tanto tempo fu sfortunato: raggiunta la metà della vita di suo padre, fu portato via da un destino crudele. Dopo aver consolato il suo dolore con la scienza dei numeri per quattro anni, pervenne al termine della propria esistenza".

Le equazioni di primo grado, seppur legate a problemi di quotidiano interesse, per la loro semplicità non offrono un gran divertimento alle menti dei matematici sempre protese a sfide che le impegnino adeguatamente.
Però è a partire da questi primi mattoncini che è possibile volgere lo sguardo a orizzonti più lontani!
Da qui infatti le basi dell'Algebra, punto di partenza verso studi superiori, come per esempio quello delle equazioni di 2° grado … o ancora più avanti di terzo o di quarto … per non parlare del "terribile" grado quinto.
La comprensione del motivo per cui la risoluzione della generica equazione di quinto grado $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$ risultava così tremendamente ostica è dovuta a due giovani geniali: il norvegese Niels Henrik **Abel** (1802-1829) e il francese Évariste **Galois** (1811-1832).
Ne riparleremo sul Volume 2, col quale proseguirà fra tante novità e sorprese il nostro viaggio nel fantastico mondo delle equazioni.