PROPORZIONI E PROPORZIONALITA'

1. PROPORZIONI

Si dice "**proporzione**" un'**uguaglianza fra due rapporti** (= quozienti).

Esempio

$\mathbf{12 : 16 = 15 : 20}$

Questa proporzione è corretta, perché effettivamente i due rapporti (= quozienti)

12:16 e 15:20

sono uguali fra loro (valgono entrambi ¾, o, se si preferisce: 0,75).

Di solito si legge "**12 *sta a* 16 *come* 15 *sta a* 20**",
proprio per evidenziare il fatto che si va a confrontare il "peso di un numero rispetto all'altro":
12, nei confronti di 16, è i ¾ e quindi è proprio come 15 nei confronti di 20.

ESERCIZI (risposte in fondo a questa pagina)

a) Quanto deve valere *x* se si vuole che la proporzione $24:12 = x:11$ sia corretta?
b) Quanto deve valere *y* se si vuole che la proporzione $5:15 = y:18$ sia corretta?
c) Quanto deve valere *z* se si vuole che la proporzione $6:4 = 30:z$ sia corretta?

Un po' di **terminologia**.

In una proporzione,

- i due dividendi (cioè: il 1° e il 3° termine) si dicono "**antecedenti**";
- i due divisori (cioè: il 2° e il 4° termine) si dicono "**conseguenti**";

antecedenti

$$\overset{\uparrow}{12} : \underset{\downarrow}{16} = \overset{\uparrow}{15} : \underset{\downarrow}{20}$$

conseguenti

- il 1° e il 4° termine si dicono "**estremi**";
- il 2° e il 3°, "**medi**".

estremi

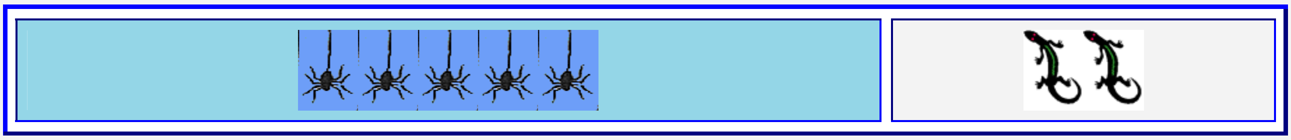
$$\overset{\nearrow}{12} : \underset{\downarrow}{16} = \underset{\downarrow}{15} : \overset{\nwarrow}{20}$$

medi

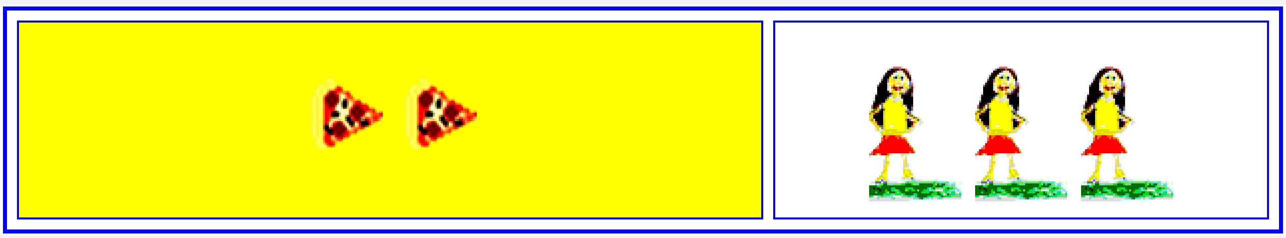
Dal sito http://math.rice.edu/~lanius/Lessons/index.html di Cynthia Lanius (USA) :

All About Ratios (*ratio = rapporto, sia in Latino che in Inglese*!)

1. If you have spiders to lizards at the ratio below and have 12 lizards,
   how many spiders do you have?



2. If you have pizza slices to girls at the ratio below, and if you have 33 girls,
   how many slices of pizza do you have?



Risposte agli esercizi di questa pagina:

a) Il quoziente 24:12 vale 2, quindi anche il quoziente *x*:11 dovrà valere 2,
e ciò avviene a condizione che *x* sia uguale a 22.
Anche: così come 24 è il doppio di 12, altrettanto *x* dovrà essere il doppio di 11 da cui $x = 22$.

b) Così come 5 è la terza parte di 15, anche *y* dovrà essere la terza parte di 18. Perciò $y = 6$.

c) 6:4 =1,5 ossia il 6 è 1 volta e mezza il 4. Il 30 è una volta e mezza … che cosa? 20, evidentemente!
Anche ragionando "da destra a sinistra":
z, rispetto al 30, dovrà avere lo stesso "peso" che ha il 4 rispetto al 6.
Ma 4 è i 4/6 di 6, cioè i 2/3 di 6, e allora *z* dovrà essere i 2/3 di 30, cioè 20.

PROPRIETA' FONDAMENTALE DELLE PROPORZIONI

In una proporzione, il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi;

E, VICEVERSA (importante!!!),

se 4 numeri non nulli sono tali che il prodotto di due di essi è uguale al prodotto degli altri due, allora con tali quattro numeri si può costruire una proporzione, a patto di prendere come medi (o come estremi) i fattori di un medesimo prodotto.

Brevemente:
se a, b, c, d sono quattro numeri non nulli,
vale la **doppia implicazione**

$$\mathbf{a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc}$$

Dimostrazione $\quad \mathrm{a : b = c : d} \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{ad}}{\mathrm{bd}} = \dfrac{\mathrm{bc}}{\mathrm{bd}} \Leftrightarrow \mathrm{ad = bc}$

♥ Il simbolo $\Leftrightarrow$ è quello di "biimplicazione logica": "*se … allora … e viceversa*", *per qualsiasi valore delle lettere coinvolte*

♥ E' davvero di grande importanza tener presente che **questa proprietà consta di DUE enunciati**: un enunciato **diretto**, e il rispettivo **inverso** (*).

Essa fornisce perciò una condizione NECESSARIA E SUFFICIENTE affinché quattro numeri non nulli, presi in un dato ordine, formino una proporzione valida.

(*) Per verificare se una proporzione è corretta,
anziché calcolare i due quozienti per vedere se coincidono,
si può andare a vedere se il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi:
così facendo si applica, appunto, la "Proprietà Fondamentale"
… precisamente - nota bene! - nel suo "aspetto **INVERSO**"!

La Proprietà Fondamentale delle proporzioni ha importanti **CONSEGUENZE**.
Ad esempio, supponiamo che in una proporzione siano noti i primi tre termini ma non il quarto; allora si può scrivere

$$\mathrm{a : b = c :} x; \quad \mathrm{a}x = \mathrm{bc}; \quad x = \frac{\mathrm{bc}}{\mathrm{a}}.$$

E in generale, è facile vedere che:

se il termine incognito è un estremo, sarà uguale al prodotto dei medi FRATTO l'estremo noto;
se il termine incognito è un medio, sarà uguale al prodotto degli estremi FRATTO il medio noto

Esempio:

$$\mathbf{25 : x = 20 : 12} \qquad \mathbf{x = \frac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot \overset{3}{\cancel{12}}}{\cancel{20}_{\,4}} = 15}$$

Se più termini di una proporzione sono espressi in funzione di una stessa incognita x, la proporzione si può interpretare come un'equazione che permetterà di trovare il valore di x.

Applicare la Proprietà Fondamentale è in questo caso un modo veloce e comodo per liberarsi dai denominatori.

Esempio:

$$\mathbf{(x+4) : 10 = (2x+1) : 15}$$
$$\mathbf{(x+4) \cdot 15 = 10 \cdot (2x+1)}$$
$$15x + 60 = 20x + 10$$
$$-5x = -50$$
$$x = 10$$

In alternativa, si poteva trasformare in una "classica" equazione coi denominatori:

$$(x+4) : 10 = (2x+1) : 15$$

$$\frac{x+4}{10} = \frac{2x+1}{15}; \quad \frac{3(x+4)}{\cancel{30}} = \frac{2(2x+1)}{\cancel{30}} \quad \text{ecc.}$$

Le proporzioni godono di diverse altre **proprietà**, che si possono facilmente dimostrare con semplici passaggi algebrici, utilizzando eventualmente la "Proprietà Fondamentale".
Queste proprietà permettono, a partire da una proporzione fissata $\boxed{\mathbf{a:b=c:d}}$,
di ricavarne altre, che saranno corrette anch'esse *se e solo se* lo è quella di partenza.
Ecco qui di seguito un elenco delle **PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI**.

b : a = d : c (**invertire**)
a : c = b : d (**permutare i medi**)
d : b = c : a (**permutare gli estremi**)

$\left.\begin{array}{l}\mathbf{(a\pm b):a=(c\pm d):c}\\ \mathbf{(a\pm b):b=(c\pm d):d}\end{array}\right]$ (**comporre e scomporre**) *In una proporzione, la somma del 1° e del 2° termine sta al 1°* (*o al 2°*) *come la somma del 3° e del 4° sta al 3°* (*o al 4°*). *Idem per la differenza.*

(comporre e scomporre applicato agli antecedenti e ai conseguenti)
$\left.\begin{array}{l}\mathbf{(a\pm c):(b\pm d)=a:b}\\ \mathbf{(a\pm c):(b\pm d)=c:d}\end{array}\right]$ *In una proporzione, la somma* (*o la differenza*) *degli antecedenti sta alla somma* (*o alla differenza*) *dei conseguenti, come ciascun antecedente sta al proprio conseguente.*

ESERCIZIO: parti da una proporzione corretta di tua invenzione e controlla che le varie proporzioni ottenibili da quella applicando le varie proprietà di cui sopra, sono ancora corrette.

- **Dimostriamo**, ad esempio, la proprietà del **permutare i medi**:
  $a:b=c:d \underset{\text{(NOTA)}}{\Leftrightarrow} bc=ad \underset{\text{(NOTA)}}{\Leftrightarrow} a:c=b:d$ NOTA - Proprietà Fondamentale

- Come ulteriore esempio, **dimostriamo** una delle proprietà denominate "del **comporre**":
  $a:b=c:d \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \Leftrightarrow (a+b):b=(c+d):d$

Alle proprietà sopra elencate si può aggiungere la seguente, relativa alle "catene di rapporti uguali":
"**data una CATENA DI RAPPORTI UGUALI, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come ciascun antecedente sta al proprio conseguente**".

Es.: dalla catena $14:7=6:3=10:5$ si possono ricavare le 3 proporzioni $(14+6+10):(7+3+5)=\left\langle\begin{array}{l}14:7\\6:3\\10:5\end{array}\right.$

Applicazione: trovare 3 numeri sapendo che la loro somma è 90 e che sono proporzionali ai numeri 4, 11, 3 (o, come anche si dice, "stanno fra loro come 4:11:3")

$x:4=y:11=z:3 \quad (x+y+z):(4+11+3)=x:4 \quad 90:18=x:4 \quad x=\frac{90\cdot 4}{18}=20$ ... e analogamente per y, z

Il quarto termine di una proporzione è detto "QUARTO PROPORZIONALE dopo i primi tre termini".

Ad esempio, nella proporzione 8:6 = 12:9 abbiamo che 9 è il quarto proporzionale dopo 8, 6, 12.

- *Trovare il quarto proporzionale dopo* 24, 6, 8
  $\boxed{24:6=8:x}$ da cui: $x=\frac{6\cdot 8}{24}=2$ (anche molto più semplicemente: così come 24 è il quadruplo di 6, 8 è il quadruplo di cosa? Di 2, è ovvio!)

Una proporzione in cui i due medi sono uguali si dice "PROPORZIONE CONTINUA".

Ad esempio, 9:6 = 6:4 è una proporzione continua.

In una proporzione continua, ciascuno dei due medi uguali si dice "MEDIO PROPORZIONALE fra il 1° e il 4° termine".

Ad esempio, in 9:6 = 6:4 , il 6 è medio proporzionale fra 9 e 4.

- *Trovare il medio proporzionale fra* 2 *e* 32
  $\boxed{2:x=x:32}$ $x^2=2\cdot 32;$ $x^2=64;$ $x=8$ (oppure $x=\pm 8$, a seconda del contesto)

ESERCIZI

1) Verifica che le seguenti proporzioni sono tutte corrette,
controllando che in ciascuna il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi

a) $12:16=15:20$ b) $12:6=6:3$ c) $40:12=100:30$ d) $1{,}2:2{,}16=1{,}5:2{,}7$

2) Determina il termine incognito nelle seguenti proporzioni,
pensando direttamente all'uguaglianza dei due rapporti e quindi *senza applicare le formule* "prodotto dei medi fratto l'estremo noto", "prodotto degli estremi fratto il medio noto"

a) $6:3=x:5$ b) $6:3=5:x$ c) $15:3=35:x$ d) $15:3=x:4$
e) $1:2=2:x$ f) $x:10=4:8$ g) $3:4=x:28$ h) $2:3=x:10$
i) $4:3=x:12$ j) $x:4=6:30$ k) $40:50=x:2$ l) $18:x=30:40$
m) $7:y=6:3$ n) $24:8=z:11{,}25$ o) $t:2{,}6=12:8$ p) $0{,}05:5=x:0{,}2$

3) Determina il termine incognito nelle seguenti proporzioni, *applicando le formule* "prodotto dei medi fratto l'estremo noto", "prodotto degli estremi fratto il medio noto"

a) $12:20=18:x$ b) $10:25=x:10$ c) $x:3=4:5$ d) $15:x=35:30$
e) $12:5=x:8$ f) $x:\frac{3}{4}=\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$ g) $x:2{,}4=3{,}2:5$ h) $0{,}8:0{,}2=0{,}1:x$

4) Le seguenti proporzioni contengono più volte un'incognita. Determina il valore di questa.

a) $18:(x+4)=15:x$ b) $(x+2):14=(x+3):16$ c) $x:(x+1)=(x+2):(x+7)$
d) $h:(h-2)=(h-3):h$ e) $(w+1{,}2):4=(w-1{,}2):3$ f) $a:(2a+3)=5:10$

5) Determina il *quarto proporzionale* dopo:

a) 4, 8 e 10 b) 5, 15 e 15 c) 40, 25 e 32 d) 3, 4 e 5
e) 3; 3,3; 4 f) 2,5; 3,6; 4,7 g) $3^7,\ 3^{11},\ 3^{10}$ h) $5\cdot10^{12},\ 3\cdot10^{13},\ 2\cdot10^{8}$

6) Determina il *medio proporzionale* (positivo) fra:

a) 3 e 48 b) 24 e 6 c) 2 e 3 d) 2,5 e 6,4
e) 3^7 e 3^{11} f) $3{,}3$ e $3{,}\overline{3}$ g) 1 e 5^6 h) 100 e 1000

7) **Dividere un numero in parti proporzionali a due numeri dati**

Dividere il numero 30 in parti proporzionali ai numeri 5 e 7 significa trovare due numeri *x*, *y* tali che
I) $x+y=30$
II) $x:5=y:7$.

Se, partendo dalla proporzione, si applica la proprietà del "comporre gli antecedenti e i conseguenti",
si ottiene: $\underbrace{(x+y)}_{30}:(5+7)=\left\langle\begin{matrix}x:5\\y:7\end{matrix}\right.$ da cui: $x=12{,}5;\ y=17{,}5$

In generale, comunque, per dividere un numero *c* in due parti proporzionali ai due numeri *a* e *b*, basta dividere *c* per la somma $a+b$ poi moltiplicare il risultato ottenuto prima per *a* poi per *b*.

Dividi il numero dato in parti proporzionali ai numeri a fianco specificati:

a) 30; 1 e 4 b) 30; 2 e 3 c) 100; 2 e 3 d) 1; 9 e 11
e) 0,07; 5 e 9 f) 30; 5 e 2 g) 72; 3 e 5 h) 72; 2 e 3

8) Pierino, alla richiesta di determinare *x* nella proporzione $x:(x-4)=20:15$, scrive: $x=\frac{(x-4)\cdot20}{15}$,
ma non è molto convinto di questo procedimento. Cosa gli consiglieresti?

RISULTATI

2a) 10 2b) 2,5 2c) 7 2d) 20 2e) 4 2f) 5 2g) 21 2h) 20/3
2i) 16 2j) 4/5 2k) 8/5 2l) 24 2m) 3,5 2n) 33,75 2o) 3,9 2p) 0,002
3a) 30 3b) 4 3c) 12/5 3d) 90/7 3e) 96/5 = 19,2 3f) 5/8 3g) 1,536 3h) 0,025
4a) 20 4b) 5 4c) 1/2 4d) 6/5 4e) 8,4 4f) impossibile
5a) 20 5b) 45 5c) 20 5d) 20/3 5e) 4,4 5f) 6,768 5g) 3^{14} 5h) $1{,}2\cdot10^9$
6a) 12 6b) 12 6c) $\sqrt{6}\approx2{,}45$ 6d) 4 6e) 3^9 6f) $\sqrt{11}\approx3{,}317$ 6g) 5^3 6h) $\sqrt{100000}\approx316$
7a) 6 e 24 7b) 12 e 18 7c) 40 e 60 7d) 0,45 e 0,55 7e) 0,025 e 0,045 7f) $150/7\approx21{,}4$ e $60/7\approx8{,}6$
7g) 27 e 45 7h) 28,8 e 43,2 8) Di fare *prodotto dei medi = prodotto degli estremi* poi risolvere l'equazione

2. PROPORZIONALITA’ DIRETTA E INVERSA

a) PROPORZIONALITA’ DIRETTA

“Se le mie ore di lavoro sono il doppio, anche il guadagno è il doppio”.

Così riflette questa paziente e volonterosa signora immigrata,
che viene chiamata da famiglie italiane per fare qualche servizio di pulizia nelle case.

- 8 euro per 1 ora di pulizia;
- 16 euro per 2 ore, dunque,
- 24 euro per 3 ore,
- 32 euro per 4 ore,
- ecc.

Se *raddoppiano* le *ore* lavorate, *raddoppia* anche il *guadagno*;
se *triplicano* le *ore* lavorate, *triplica* il *guadagno*,
... ecc.

Vale la formula $\boxed{euro = 8 \cdot ore}$ da cui, ad esempio,

- se $ore = 5$, si avrà $euro = 8 \cdot 5 = 40$;
- se $ore = 5 \cdot 2 = 10$ $(il\ doppio\ di\ prima)$,
  sarà $euro = 8 \cdot (5 \cdot 2) = (8 \cdot 5) \cdot 2 = 40 \cdot 2 = 80$ $(il\ doppio\ di\ prima)$.

Vale anche, per ogni prestazione lavorativa, l’uguaglianza $\boxed{\dfrac{euro}{ore} = 8}$

da cui, per esempio, l’altra uguaglianza $\boxed{\dfrac{euro_{\text{MARTEDI'}}}{ore_{\text{MARTEDI'}}} = \dfrac{euro_{\text{GIOVEDI'}}}{ore_{\text{GIOVEDI'}}} = 8}$

che può essere scritta pure come proporzione: $\boxed{euro_{\text{MARTEDI'}} : ore_{\text{MARTEDI'}} = euro_{\text{GIOVEDI'}} : ore_{\text{GIOVEDI'}}}$

Si dice che **due grandezze x, y in relazione fra loro** (nell’es.: le ore lavorate, gli euro guadagnati) sono **DIRETTAMENTE PROPORZIONALI (l’avverbio “direttamente” si può anche omettere)** quando **la legge che le lega è della forma**

$$\boxed{y = k \cdot x}$$

dove k è una costante che prende il nome di “**coefficiente di proporzionalità** (diretta)”.

In questo caso vale l’uguaglianza

$$\boxed{\frac{y}{x} = k}$$ **(il loro RAPPORTO si mantiene COSTANTE!)**

da cui, per coppie di valori corrispondenti $(x_1, y_1);\ (x_2, y_2);\ (x_3, y_3);\ ...$

l’uguaglianza di rapporti $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{y_3}{x_3} = ...$

e quindi la possibilità di scrivere proporzioni come

$$\boxed{\mathbf{y_1 : x_1 = y_2 : x_2}}\quad ossia$$

$$\underset{\substack{un\ valore\\ di\ una\\ grandezza\\ ...}}{y_1} : \underset{\substack{...sta\ al\\ valore\\ corrispondente\\ dell'altra\\ ...}}{x_1} = \underset{\substack{...come\ un\\ altro\ valore\\ della\ prima\\ grandezza\\ ...}}{y_2} : \underset{\substack{...sta\ al\\ valore\\ corrispondente\\ dell'altra}}{x_2}$$

$$OPPURE\ (permutando\ i\ medi)$$

$$\boxed{\mathbf{y_1 : y_2 = x_1 : x_2}}\quad ossia$$

$$\substack{rapporto\ \ fra\ due\ valori\\ di\ una\ grandezza} = \substack{rapporto\ \ fra\ i\ valori\ corrispondenti\\ dell'altra\ grandezza,\ presi\ NELLO\ STESSO\ ORDINE}$$

b) PROPORZIONALITA' INVERSA

"Se percorro quel tratto di strada a velocità doppia, ci metto metà del tempo".

Da casa mia al posto dove lavoro ci sono 2 km.
Detesto spostarmi in automobile:
vado invece a piedi, viaggiando, all'andata, a 6 km/h, e mettendoci dunque 1/3 di ora (20 minuti).
Il ritorno lo faccio poi di corsa, a velocità doppia: 12 km/h, e ci metto quindi 1/6 di ora (10 minuti).

- 2 km, a 6 km all'ora: 1/3 di ora
- 2 km, a 12 km all'ora: 1/6 di ora
- 2 km, a 18 km all'ora: 1/9 di ora (la corsa di un bravo podista)
- 2 km, a 24 km all'ora: 1/12 di ora (in bici)
- ecc.

Se *raddoppia* la velocità di percorrenza di una distanza fissata, il tempo *si riduce alla metà*;
se *triplica* la velocità di percorrenza della stessa distanza, il tempo *si riduce alla terza parte*;
... ecc.

Vale la formula

$$\boxed{tempo = \frac{2}{velocità}} \quad (tempo \text{ in ore, } distanza\ \ fissa \text{ di 2 km, } velocità \text{ espressa in km all'ora})$$

da cui, ad esempio, se

$velocità = 8\ km/h$, si avrà $tempo = \frac{2\ km}{8\ km/h} = \frac{1}{4} h \quad (un\ quarto\ d'ora, 15\ minuti)$;

$velocità = 16\ km/h\ (il\ doppio\ di\ prima)$, si avrà $tempo = \frac{2\ km}{16\ km/h} = \frac{1}{8} h \quad (7'\ e\ 30'', la\ metà\ di\ prima)$.

Vale anche l'uguaglianza

$$\boxed{tempo \cdot velocità = 2}$$

da cui, per esempio, l'altra uguaglianza

$$\boxed{tempo_{CORSA} \cdot velocità_{CORSA} = tempo_{BICI} \cdot velocità_{BICI} = 2}$$

che, grazie alla proprietà fondamentale delle proporzioni applicata in senso inverso,
può essere scritta pure sotto forma di proporzione:

$$\boxed{tempo_{CORSA} : tempo_{BICI} = velocità_{BICI} : velocità_{CORSA}}$$

Si dice che **due grandezze x, y in relazione fra loro**
(nel nostro esempio: la velocità e il tempo di percorrenza di una distanza fissata)
sono **INVERSAMENTE PROPORZIONALI** quando **la legge che le lega è della forma**

$$\boxed{y = \frac{k}{x}}$$

dove k è una costante che prende il nome di "**coefficiente di proporzionalità inversa**".

In questo caso vale l'uguaglianza

$$\boxed{x \cdot y = k} \quad \textbf{(il loro PRODOTTO si mantiene COSTANTE!)}$$

da cui, per coppie di valori corrispondenti $(x_1, y_1);\ (x_2, y_2);\ (x_3, y_3); ...$
le uguaglianze di prodotti $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = ...$

e quindi la possibilità di scrivere proporzioni come

$$\boxed{\mathbf{y_1 : y_2 = x_2 : x_1}} \quad ossia$$

$$\begin{matrix} rapporto\ \ fra\ due\ valori \\ di\ una\ grandezza \end{matrix} = \begin{matrix} rapporto\ \ fra\ i\ valori\ corrispondenti \\ dell'altra\ grandezza, ma\ IN\ ORDINE\ SCAMBIATO \end{matrix}$$

Esempi di problemi del “TRE SEMPLICE”

Premettiamo che viene detto “problema del tre semplice” un problema nel quale è coinvolta UNA COPPIA DI GRANDEZZE direttamente o inversamente PROPORZIONALI, e si considerano 4 VALORI (2 DI UNA GRANDEZZA, PIÙ I 2 CORRISPONDENTI DELL’ALTRA). Di tali valori, 3 SONO NOTI, mentre IL RESTANTE È INCOGNITO ed è la richiesta del problema.

Problema (“TRE SEMPLICE DIRETTO”):
se 4,5 metri di stoffa costano 20 euro, quanti metri di stoffa si potranno comprare con 15 euro?

Qui è evidentemente in gioco una coppia di grandezze (i metri di stoffa, il costo in euro) direttamente proporzionali: raddoppiando i metri, infatti, raddoppierebbe il costo.

metri		euro	
4,5	↓	20	↓
x		15	

Le frecce puntano nella stessa direzione proprio per il fatto che la proporzionalità è DIRETTA.
Si scriverà poi la proporzione, seguendo l’ordine delle frecce.

$\boxed{\mathbf{4{,}5 : x = 20 : 15}}$ da cui subito $x = \dfrac{4{,}5 \cdot 15}{20} = 3{,}375$.

- Ovviamente si può anche ricorrere a semplicissime “SCORCIATOIE” tipo:
  se 4,5 metri costano 20 euro, con 15 euro potrò acquistare
  i $\dfrac{15}{20}$, ossia i $\dfrac{3}{4}$, di 4,5 metri, vale a dire $\dfrac{3}{4} \cdot 4{,}5 = 3{,}375$ metri.

- C’è da dire che un METODO ALTERNATIVO altrettanto efficace
  per risolvere problemi di questo tipo è sempre la “RIDUZIONE ALL’UNITÀ”:
  dato che 4,5 metri di stoffa costano 20 euro,
  con 1 euro si potranno acquistare $\dfrac{4{,}5}{20}$ metri di stoffa ossia 0,225 metri di stoffa;
  ma se con 1 euro si comprano 0,225 metri di stoffa,
  con 15 euro se ne acquisteranno $0{,}225 \cdot 15 = 3{,}375$

Problema (“TRE SEMPLICE INVERSO”):
8 braccianti portano a termine un dato lavoro in 20 ore.
E se invece gli operai fossero solo 5, quante ore ci vorrebbero per ultimare il lavoro?

Qui la proporzionalità è evidentemente inversa,
perché raddoppiando il numero di lavoratori si dimezza il numero delle ore occorrenti.

lavoratori		ore	
8	↓	20	↑
5		x	

Le frecce puntano in direzioni opposte proprio per il fatto che la proporzionalità è INVERSA.
Si scriverà poi la proporzione, seguendo l’ordine delle frecce.

$\boxed{\mathbf{8 : 5 = x : 20}}$ da cui $x = \dfrac{8 \cdot 20}{5} = 32$

- SCORCIATOIA: se il numero di operai dimezzasse $(\cdot 1/2)$, il numero di ore raddoppierebbe $(\cdot 2)$.
  Quando il numero di operai passa da 8 a 5, subendo quindi una moltiplicazione per 5/8,
  il numero di ore risulterà moltiplicato per il RAPPORTO INVERSO 8/5;
  perciò basta fare 20 moltiplicato 8/5, che dà 32.

- IN ALTERNATIVA, senza proporzioni, con la “RIDUZIONE ALL’UNITÀ”:
  8 braccianti completano il lavoro in 20 ore;
  allora se ci fosse 1 solo bracciante, lui ci metterebbe $20 \cdot 8 = 160$ ore.
  Quindi se i braccianti sono 5, ci metteranno $\dfrac{160}{5} = 32$ ore.

- SE PREFERIAMO, possiamo anche pensare di aver effettuato,
  piuttosto che una “riduzione all’unità”, un “CALCOLO DEL TOTALE”:
  il totale delle ore di lavoro necessarie (da ripartirsi poi fra i vari operai) è $20 \cdot 8 = 160$.
  Poiché però si vogliono utilizzare 5 braccianti, ciascuno dovrà essere impiegato per $\dfrac{160}{5} = 32$ ore.

Un altro esempio.

Con una damigiana di vino, si riempiono 40 bottiglie da 1,5 litri.
E se si usassero invece bottiglie da 1,25 litri, quante ce ne vorrebbero?

Qui abbiamo una coppia di grandezze (la capacità di 1 bottiglia, il numero di bottiglie) inversamente proporzionali:
raddoppiando la capacità, infatti, dimezzerebbe il numero di bottiglie occorrenti.

bottiglie	litri
40 ↓	1,5 ↑
x	1,25

Le frecce puntano in direzioni opposte proprio per il fatto che la proporzionalità è INVERSA.
Si scriverà poi la proporzione, seguendo l'ordine delle frecce.

$\boxed{\mathbf{40 : x = 1{,}25 : 1{,}5}}$ da cui $x = \dfrac{40 \cdot 1{,}5}{1{,}25} = 48$.

IN ALTERNATIVA, senza proporzioni ("CALCOLO DEL TOTALE"):
la nostra damigiana equivale a 40 bottiglie da 1,5 litri;
bene, quindi la damigiana contiene $40 \cdot 1{,}5 = 60$ litri.

Quante bottiglie da 1,25 sono necessarie allora? Ovviamente, $\dfrac{60}{1{,}25} = 48$.

Volendo, anche qui sarebbe possibile interpretare il procedimento
come se si trattasse di una "RIDUZIONE ALL'UNITÀ".
Di bottiglie da 1 litro, quante ce ne vorrebbero?
Evidentemente, $40 \cdot 1{,}5 = 60$.
Dunque di bottiglie da 1,25 litri ce ne vogliono invece 60/1,25 = 48.

- Dai tre esempi forniti si trae che quando si fa la "RIDUZIONE ALL'UNITÀ", L'UNITÀ IN QUESTIONE SI RIFERISCE SEMPRE A QUELLA QUANTITÀ, FRA LE DUE, DELLA QUALE SONO NOTI ENTRAMBI I VALORI.

Qualche esempio di problema del "TRE COMPOSTO"

Nei problemi del "tre composto" si hanno *più* di 2 grandezze in gioco (3 o più grandezze, quindi), tali che prese due qualsiasi di tali grandezze, fra esse si riscontra sempre una proporzionalità, diretta o inversa.

Volendo, esisterebbero anche per i problemi di questo tipo specifiche schematizzazioni e tecniche "standard"; tuttavia, ci sembra preferibile suggerire, come idea di fondo, quella di cercare opportune RIDUZIONI ALL'UNITÀ o CALCOLI DI TOTALI, come negli esempi che seguono.

Esempio 1 - *Nel magazzino di una caserma ci sono 25 kg di sapone.*
Questa quantità basta per 40 soldati e per 20 giorni.
Se ci fossero 30 kg e 50 soldati, per quanti giorni basterebbe il sapone?

1 solo soldato, nei 20 giorni, ha bisogno di 25/40 = 0,625 kg di sapone.
1 solo soldato, in 1 solo giorno, necessita di 0,625/20 = 0,03125 kg di sapone.
50 soldati, in 1 solo giorno, consumano $0{,}03125 \cdot 50 = 1{,}5625$ kg di sapone.
Essendoci ora 30 kg di sapone, questi basteranno, a 50 soldati, per 30/1,5625 = 19,2 giorni.

Esempio 2 - *La quantità di fieno che riempie questo camion basta a 15 mucche per 12 giorni, qualora se ne diano a ogni mucca 25 kg al giorno. E se si diminuisse la razione a 20 kg al giorno, quante mucche si potrebbero alimentare in un periodo di 18 giorni?*

In totale, quanti kg di fieno contiene il camion? $25 \cdot 15 \cdot 12 = 4500$ kg.
Pensando di distribuire questa quantità in 18 giorni, sono allora disponibili
4500/18 = 250 kg al giorno.
Con razioni da 20 kg, si potrebbero fare 250/20 = 12,5 razioni, quindi alimentare 12,5 mucche.

Esempio 3 - *30 operai, lavorando ciascuno 8 ore, riescono a produrre in una fabbrica 1500 pezzi.*
Quante ore dovrebbero lavorare 20 operai per una produzione di 2500 pezzi?

1 operaio in 8 ore produce 1500/30 = 50 pezzi. 1 operaio in 1 ora produce 50/8 = 6,25 pezzi.
20 operai in 1 ora producono $6{,}25 \cdot 20 = 125$ pezzi.
Per produrre 2500 pezzi i 20 operai ci metteranno dunque 2500/125 = 20 ore.

ESERCIZI

Per le seguenti coppie di grandezze, stabilisci se sono legate da proporzionalità diretta o inversa.
Scrivi anche la formula che lega una grandezza all'altra.
Quanto vale, in ciascun caso, la costante di proporzionalità?

1) Base b e altezza h (misure in cm) di un rettangolo la cui area è di $\text{cm}^2\ 24$

2) Guadagno g del proprietario di una casa, e numero n di mesi di permanenza dell'inquilino, supponendo che il canone di affitto mensile c rimanga costante

3) Raggio r della ruota di una data bicicletta, e numero n di giri occorrenti per coprire una distanza fissa $\overline{d}$ (*leggi*: "*d segnato*")

4) Lato ℓ e perimetro $2p$ di un quadrato

5) Altezza h e volume V dell'acqua in una data piscina a forma di parallelepipedo

6) Velocità v (in litri al secondo) con cui l'acqua esce dal rubinetto, e volume V (in litri) dell'acqua nella vasca, inizialmente vuota, dopo un numero di secondi fissato $\overline{t}$ ("*t segnato*")

7) Velocità v (in litri al secondo) con cui l'acqua esce dal rubinetto, e tempo t (in secondi) impiegato perché un dato serbatoio passi da vuoto a pieno

8) Costo c al litro del vino, e numero n di litri acquistabili, se si intende spendere 800 euro

9) Numero n di giri compiuti dalla ruota anteriore di una data bicicletta, e distanza d percorsa

10) Densità d di un liquido e suo peso p, per un dato volume costante V

11) Numero n di lati e misura ℓ del lato di un poligono regolare di perimetro $2p$ assegnato

12) Numero n di lavoratori da assumere per portare a termine un dato lavoro (es. la vendemmia in una data vigna), e numero k di ore nel quale si desidera che il lavoro venga ultimato

I successivi problemi del "tre semplice" e del "tre composto" sono strati tratti dal ricco e simpatico sito Ubimath (www.ubimath.org) grazie all'autorizzazione del gentile Autore Ubaldo Pernigo.

Problemi del "tre semplice"

13) Giovanni acquista 6 kg di caffè pagandoli 2 euro il chilogrammo. Quanto caffè avrebbe potuto acquistare, disponendo dello stesso importo, se il costo fosse stato di 2,40 euro il chilogrammo?

14) Un libro di 400 pagine contiene in media in ogni pagina 27 righe.
Nella ristampa del libro l'editore cambiando il formato della pagina fa rientrare più righe.
Dal nuovo formato il libro risulta ora di 360 pagine.
Da quante righe è composta una pagina nel nuovo formato?

15) Giovanni lavorando 20 giorni, ha riscosso 900 euro.
Se volesse percepire 450 euro in più, quanti giorni dovrebbe lavorare alle stesse condizioni?

16) Su di una nave sono stati imbarcati i viveri occorrenti per una crociera di 18 giorni con 950 persone.
A metà viaggio sbarcano 95 persone: per quanti giorni basterebbero ora i viveri?

17) Per confezionare 41 scatole sono stati necessari 82 kg di cartone.
Quanti kg ne occorrono per confezionare 95 scatole?

18) Per trasportare della merce un camionista compie 6 viaggi con un carico medio di 30 quintali.
Con un mezzo più piccolo che porti mediamente 18 quintali, quanti viaggi dovrebbe prevedere?

19) Una stampante laser produce 120 stampe in 3 minuti. Quanto impiegherà per eseguire 200 stampe?

20) Per misurare l'altezza del campanile viene rilevata la lunghezza della sua ombra, che misura 11,7 m, e di quella di un'asta di 1,2 m che risulta essere di 45 cm. Quanto è alto il campanile?

21) Una stampante laser produce 120 pagine in 3 minuti. In 10 minuti quante pagine stamperà?

22) Michele, per raggiungere la filiale da ispezionare, ha viaggiato in auto per 4 ore ad una velocità media di 70 km/h. Quanto avrebbe impiegato agli 80 km/h?

23) In sette giorni le ghiandole salivari di un individuo adulto producono circa dieci litri e mezzo di saliva.
Quanta saliva produce mediamente un individuo adulto in un mese (30 giorni)?

24) Per creare una rotonda ad un incrocio 8 operai impiegano 27 giorni lavorativi.
Se vengono impiegati 12 operai quanto tempo in meno si impiegherebbe nella stessa costruzione?

25) Per fornire il primo piatto a 150 persone vengono usati 45 kg di pasta.
Quanta pasta occorre utilizzare per 200 persone?

26) Un rotolo di cavo metallico, che svolto si sviluppa per una lunghezza di 15 m, pesa 45 kg. Quanto peserebbe un cavo analogo lungo 75 m?

27) Per tinteggiare il vano scale della propria casa Giacomo e Giovanni stimano di impiegare 9 ore di lavoro. Quanto impiegherebbero con l'aiuto di papà?

Problemi del "tre composto"

28) Per dipingere 30 metri quadrati di stanza sono stati utilizzati 12 barattoli di colore da 2,5 kg. Quanti barattoli da 15 kg saranno necessari per dipingere una superficie di 270 metri quadrati?

29) Una ditta di pulizie per mantenere una superficie di 400 metri quadrati chiede per 5 mesi 2500 euro. Quale sarà la spesa per un anno, alle stesse condizioni, per una superficie di 500 metri quadrati?

30) Per stendere 600 m di linea elettrica, 5 elettricisti impiegano 8 ore. Quante ore impiegherebbero 4 elettricisti per stenderne 60 metri in meno?

31) Un artigiano paga 1000 euro per trasportare 18 quintali di merce a 30 chilometri di distanza. Quanti quintali potrà inviare a 6 chilometri con 300 euro?

32) Lavorando 9 ore al giorno per 8 giorni lavorativi si riceve una paga di 416 euro. Quanto si riceverebbe lavorando un'ora in meno al giorno ma per 18 giorni?

33) 30 operai, lavorando 8 ore al giorno, impiegarono 15 giorni per aprire un fosso lungo 210 metri e largo 1,5 metri. Quanto impiegheranno 40 operai, lavorando 9 ore al giorno, per aprire un fosso lungo 840 metri e largo 3 metri?

34) Mario, che dirige un centro ippico, ha calcolato che i suoi 6 cavalli mangiano 15 quintali di biada in 25 giorni. Quanti quintali servono per alimentare 18 cavalli per 30 giorni?

35) Lavorando 6 ore per 4 giorni vengono prodotti in uno stabilimento 3840 giocattoli. Lavorando 8 ore al giorno, quanti giocattoli si produrrebbero in 8 giorni?

36) In 21 giorni, 18 operai lavorando 8 ore al giorno costruiscono un tratto di strada lungo 420 m. Quanti giorni dovrebbero lavorare 20 operai per 6 ore al giorno per costruire un'opera analoga ma lunga 600 m?

RISPOSTE (la costante di proporzionalità, diretta o inversa, è evidenziata in un quadratino)

1) $Inv.\ \ b\cdot h=\boxed{24},\ \ b=\boxed{24}/h,\ \ h=\boxed{24}/b$ 2) $Dir.\ \ g=\boxed{c}\cdot n$

3) $Inv.\ \ 2\pi r\cdot n=\bar{d},\ \ r\cdot n=\boxed{\frac{\bar{d}}{2\pi}},\ \ n=\frac{\bar{d}}{2\pi r}=\frac{\boxed{\frac{\bar{d}}{2\pi}}}{r},\ \ r=\frac{\bar{d}}{2\pi n}=\frac{\boxed{\frac{\bar{d}}{2\pi}}}{n}$ 4) $Dir.\ \ 2p=\boxed{4}\ell$

5) $Dir.\ \ V=\boxed{B}h$, *se con B si indica l'area della base* 6) $Dir.\ \ V=v\cdot\boxed{\bar{t}}$

7) $Inv.\ \ v\cdot t=\boxed{s},\ \ v=\boxed{s}/t,\ \ t=\boxed{s}/v$, *essendo s la capacità in litri del serbatoio*

8) $Inv.\ \ c\cdot n=\boxed{800}$ 9) $Dir.\ \ d=\boxed{2\pi r}\cdot n$, *se con r si indica il raggio della ruota*

10) $Dir.\ \ d=\frac{p}{V},\ \ p=\boxed{V}d$ *(densità = peso per unità di volume)* 11) $Inv.\ \ \ell\cdot n=\boxed{2p}$

12) $Inv.\ \ nk=\boxed{c},\ \ n=\frac{\boxed{c}}{k},\ \ k=\frac{\boxed{c}}{n}$ *dove c è il numero totale di ore che ci metterebbe un uomo solo per fare il lavoro. Ovviamente, qui i valori sono stimati, approssimativi.*

13) 5 kg 14) 30 righe 15) 30 giorni 16) 10 giorni ancora 17) 190 kg
18) 10 viaggi 19) 5 minuti 20) 31,2 metri 21) 400 pagine 22) 3,5 ore (3 h 30')
23) 45 litri 24) 9 gg. in meno 25) 60 kg 26) 225 kg 27) 6 ore 28) 18 barattoli
29) 7500 euro 30) 9 ore 31) 27 quintali di merce 32) 832 euro 33) 80 giorni
34) 54 quintali 35) 10240 giocattoli 36) 36 giorni

Matematica e Problemi della Realtà

PROBLEMI DELLA REALTA' CON RAPPORTI E PROPORZIONI

Per i problemi seguenti, puoi ricorrere ai ragionamenti più vari nonché a tutte le tue conoscenze su RAPPORTI, PROPORZIONI (eventualmente: RIDUZIONI ALL'UNITA'), PERCENTUALI, EQUAZIONI.
Mi raccomando: verifica alla fine se il valore da te trovato è corretto, prima di andare a vedere i risultati!

1) In una carta stradale la scala è 1:500000.
Qual è la distanza reale in km di due città che sulla mappa distano cm 5,5?
Se due località distano 35 km nella realtà, quanti cm disteranno sulla carta?

2) Ho una cartina geografica senza l'indicazione della scala.
Tuttavia, so che fra il paese dove vivo e il capoluogo di provincia ci sono in linea d'aria 15 km.
Se sulla cartina questa distanza è di 4 cm, quanto disteranno nella realtà due località che sul foglio si trovano a 3,2 cm l'una dall'altra?
E viceversa, a una distanza reale di 19 km quale distanza in cm corrisponderà sulla cartina?

3) Camilla è alta 1 metro e 72 cm.
In questo momento si trova nei giardinetti pubblici e la sua ombra sul terreno è lunga 1 metro e 40.
L'ombra di un pino invece è lunga 8 metri.
Quanto è alto il pino?

4) In media in una località di villeggiatura si sono avuti quest'anno 3 giorni di pioggia ogni 5 giorni di sole; in un'altra, mediamente, ogni 10 giorni ce ne sono stati 6 di sole e 4 di pioggia.
In quale delle due località si può dire, con questi dati, che il tempo sia stato migliore?

5) Su di un sacco di semi di erba per giardino di provenienza inglese c'è scritto che "per 100 piedi quadrati (square feet) di prato occorre 1 libbra (pound) di semi".
Ora, arrotondando, 1 libbra vale circa 450 grammi, e 1 piede circa 30 cm.
Se il praticello di casa mia è formato da 1 rettangolo di 12 metri per 3 più un altro rettangolo di metri 5 per 4, quanti kg di semi dovrò impiegare?

6) Gli ingredienti di una ricetta per una torta alle fragole da 25 cm di diametro, tolti quelli di peso trascurabile, sono:

160 gr di zucchero,
250 gr di farina,
150 ml di latte,
80 gr di burro,
200 gr di fragole.

TORTA ALLE FRAGOLE

a) E' andato però perso lo stampo del diametro di 25 cm e ce n'è uno di riserva, della stessa altezza ma col diametro di soli 20 cm.
Come andrà modificata la quantità di ciascun ingrediente?
(Occhio: passando da un diametro di 25 a uno di 20 cm, la torta *non* si riduce ai 20/25 … Perché?)

gr di zucchero	…
gr di farina	…
ml di latte	…
gr di burro	…
gr di fragole	…

b) La mamma vuole, a grande richiesta, riprendere la ricetta per la torta alle fragole; ha ritrovato, in soffitta, lo stampo da 25 cm di diametro, ma intende fare il dolce un po' più basso in modo che venga a pesare soltanto 7 etti.
Come vanno modificate le dosi degli ingredienti (1 ml di latte pesa circa 1 grammo)?

gr di zucchero	…
gr di farina	…
ml di latte	…
gr di burro	…
gr di fragole	…

7) Per stimare il numero *a* di animali presenti in un dato territorio, si opera come segue.
s animali vengono catturati, e marcati con un segno di riconoscimento, poi liberati.
Dopo un certo tempo, si catturano *b* esemplari e si conta il numero *s*' di quelli che portano il marchio. Ad es., se sono stati catturati, segnati e rimessi in libertà 60 pesci, e successivamente ne sono stati pescati 160 osservando che 12 portavano il segno, quanti pesci si può presumere che contenga quel piccolo specchio d'acqua?
Dopo aver risposto, esprimi, in generale, il numero *a* in funzione di (= per mezzo di) *b*, *s*, *s*'

Da www.kwiznet.com

8a) At the rate of 28 lines per page, a book has 300 pages. If the book has to contain only 280 pages, how many lines should a page contain? a) 29 lines b) 30 lines c) 32 lines

8b) A farmer has enough grain to feed 50 cattle for 10 days. He sells 10 cattle. For how many days will the grain last now?

9) It takes 4 men 6 hours to repair a road. How long will it take 7 men to do the job if they work at the same rate? (da www.onlinemathlearning.com; *il risultato non è intero*)

Dividere un numero in parti proporzionali a due (o più) numeri dati

Dividere il numero 30 in parti proporzionali ai numeri 5 e 7 significa trovare due numeri *x*, *y* tali che

a. $x+y=30$
b. $x:5=y:7$

Se, partendo dalla proporzione, si applica la proprietà del "comporre gli antecedenti e i conseguenti",

si ottiene $\underbrace{(x+y)}_{30}:(5+7)=\left\langle\begin{matrix}x:5\\y:7\end{matrix}\right.$ da cui $x=12{,}5;\ y=17{,}5$

In generale, comunque, per dividere un numero *c* in due parti proporzionali ai due numeri *a* e *b*, basta dividere *c* per la somma $a+b$ poi moltiplicare il risultato ottenuto prima per *a* poi per *b*.

10) Dividi il numero dato in parti proporzionali ai numeri a fianco specificati:

a) 45; 4 e 5 b) 60; 11 e 4 c) 100; $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ d) 0,075; 1 e 5 e) 40; 2, 3 e 5

11) Il papà ha invitato i tre figli Anna, Benedetta e Corrado a collaborare alla vita familiare con piccoli lavori come strappare le erbacce in giardino, lavare i piatti, stendere i panni … Se alla fine della settimana Anna ha lavorato per 1 ora e ½, Betty per 2 ore e Corrado per 4, e i genitori decidono di assegnare un premio di 30 euro suddividendolo in parti direttamente proporzionali al tempo impiegato, quanto spetterà a ciascuno dei tre ragazzi?

12) La mamma, insegnante di matematica, al termine dell'anno scolastico decide di assegnare ai 3 figlioli un premio, ottenuto suddividendo una cifra fissa in tre parti, INVERSAMENTE PROPORZIONALI al numero di insufficienze prese nell'anno scolastico. Ora, poiché Anna ha preso 1 sola insufficienza, Benedetta 4 e Corrado 3, e il premio da suddividere è di 100 euro, determina quanto tocca a ciascuno (approssimativamente, perché i valori esatti sono da arrotondare in quanto decimali illimitati …)
Ragiona per conto tuo, in modo assolutamente libero, su questo problema!
Andare "alla caccia della regola" non serve assolutamente a niente!
In fondo a questa pagina, nella sezione "Risposte", c'è un'indicazione, che però - insisto - dovresti leggere soltanto alla fine, dopo aver cercato di arrivare alla soluzione senza aiuti.

RISPOSTE

1) 27,5 km; 7 cm 2) 12 km; poco più di 5 cm 3) Circa 10 m (il calcolo dà $\approx$ m 9,8) 4) Nella 1ª 5) 2,8 kg
6) a) La torta si riduce ai $400/625=16/25$ ossia a $0{,}64=64\%$. 102,4; 160; 96; 51,2; 128.
b) Occorre moltiplicare la quantità di ciascun ingrediente per 700/840 ossia 5/6 (circa 0,83)
7) Si può stimare appross. in 800 pesci; $a=b\cdot s/s'$ 8a) b 8b) 12 days and ½ 9) 3+3/7 hours
10) a) 20 e 25 b) 44 e 16 c) 40 e 60 d) 0,0125 e 0,0625 e) 8, 12 e 20 11) 6, 8 e 16 euro
12) Cosa vuol dire, innanzitutto, "inversamente proporzionali a 1, 4, 3"?
Vuol dire che se Anna con 1 insufficienza prende *tot*, allora Benedetta con 4 deve prendere la 4ª parte … e allora *inversamente proporzionali a 1, 4 e 3* significa *direttamente proporzionali a 1, 1/4 e 1/3* … Controlla, alla fine del procedimento, che, ad esempio, il premio spettante ad Anna sia il quadruplo di quello di Benedetta, che Benedetta prenda i ¾ di Corrado, ecc.; controlla anche che la somma dei tre premi dia effettivamente 100 €. Comunque, approssimando all'intero, i valori spettanti risultano essere di euro 63, 16 e 21. I tre ragazzi hanno una mamma molto originale … e, immaginiamo, simpatica ☺.

3. I GRAFICI DELLA PROPORZIONALITA' DIRETTA E INVERSA

A) Riprendiamo ancora l'esempio di GRANDEZZE DIRETTAMENTE PROPORZIONALI
da cui eravamo partiti (pag. 178):
gli *euro* guadagnati dalla signora delle pulizie e le sue *ore* di lavoro (il costo orario era di 8 euro).

ore x	euro y
1	8
2	16
3	24
4	32
5	40
…	...

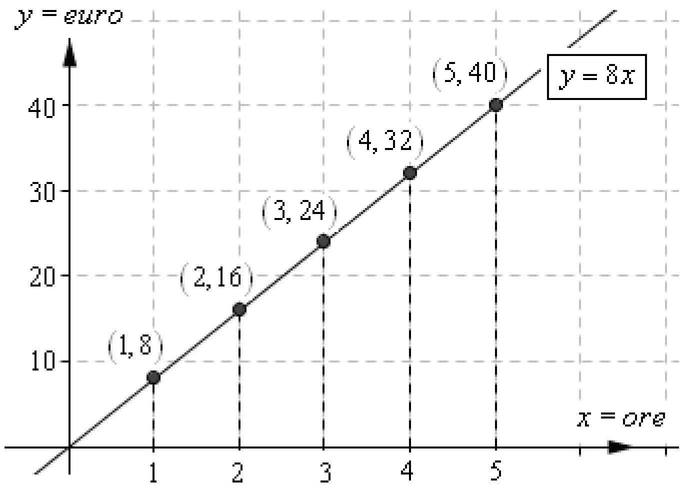
Indicato con x il numero di *ore*, e con y il numero corrispondente di *euro*,
la relazione che lega x con y è la

$$\boxed{y = 8x}$$

e rappresentando questa funzione $y = 8x$ in un riferimento cartesiano,
ossia evidenziando nel riferimento quei punti le cui coordinate (x, y)
sono costituite da una coppia di valori che si corrispondono

$(1,8)$ $(2,16)$ $(3,24)$ $(4,32)$ $(5,40)$ ...

vediamo che questi punti sono ALLINEATI fra loro:
stanno tutti su di una RETTA (passante per l'origine).



Abbiamo scelto,
per ovvi motivi di opportunità,
unità di misura diverse
in orizzontale (1 quadretto = 1 ora)
e in verticale (1 quadretto = 10 euro).

I punti sarebbero risultati allineati
anche scegliendo le unità di misura
in modo diverso.

> Se si rappresenta sul piano cartesiano la legge che lega due grandezze
> **DIRETTAMENTE PROPORZIONALI** x, y
>
> $$\boxed{y = k \cdot x}$$
>
> si ha sempre che i punti del grafico sono *allineati* fra loro:
> essi giacciono su di una **RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE**.

- Una particella materiale libera (non soggetta, cioè, a forze) appare, ad un osservatore "inerziale" (ossia, libero a sua volta), in quiete oppure in moto rettilineo uniforme con velocità v costante.
La legge spazio-tempo è $s = vt$ e lo spazio percorso è direttamente proporzionale al tempo del moto.
- Una molla che sia stata allungata o compressa di una certa lunghezza x esercita una forza elastica definita dalla relazione $F = -kx$ (il segno $-$ sta a indicare che il verso della forza è opposto a quello della deformazione), essendo k la "costante elastica" della molla.
La forza F è perciò direttamente proporzionale all'allungamento o compressione x.
- Un corpo di massa m che si trovi ad una altezza h da terra ha una "energia potenziale gravitazionale" $U = mgh$, dove g è una costante, data dall'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre. Perciò l'energia potenziale gravitazionale di un corpo è direttamente proporzionale all'altezza a cui si trova.
- La legge di Stevino afferma che la pressione di un liquido di densità ρ ad una data profondità h è data da $p = \rho gh$ ed è quindi direttamente proporzionale alla profondità.

B) E il grafico di una PROPORZIONALITÀ INVERSA, che forma avrà?
Riprendiamo l'esempio del tragitto fisso di 2 km percorso a differenti velocità (pag. 179):
velocità e tempo di percorrenza erano grandezze inversamente proporzionali,
perché raddoppiando la velocità dimezzava il tempo impiegato.

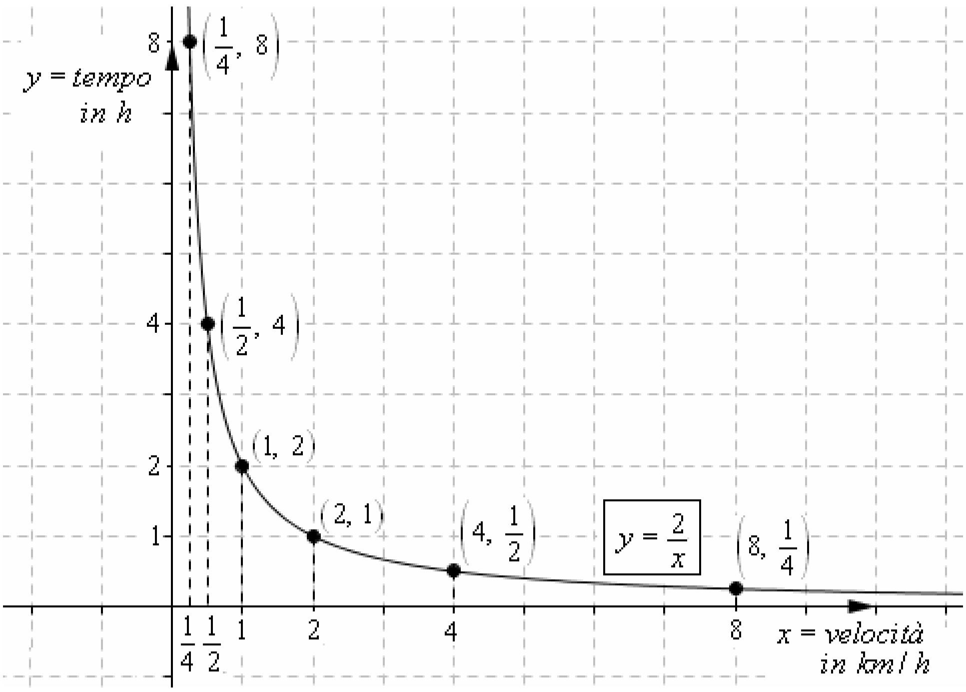
Velocità x in km all'ora	tempo y in ore per fare i 2 km
1/4	8
1/2	4
1	2
2	1
4	1/2
8	1/4
…	...

La formula era

$$tempo = \frac{2}{velocità} \quad (\textit{tempo} \text{ in ore, } \textit{distanza fissa} \text{ di 2 km, } \textit{velocità} \text{ espressa in km all'ora})$$

ossia

$$\boxed{y = \frac{2}{x}} \quad (xy = 2)$$



Se si rappresenta sul piano cartesiano la legge che lega due grandezze **INVERSAMENTE PROPORZIONALI** x, y

$$\boxed{y = \frac{k}{x}}$$

i punti del grafico giacciono su di un **RAMO DI IPERBOLE**.

- La 2^a legge di Newton, se viene scritta nella forma $a = F/m$, ci dice che l'accelerazione a subita da un corpo di massa m quando gli viene applicata una forza di intensità F,
  - è direttamente proporzionale alla forza,
  - ed è (per una forza fissata) inversamente proporzionale alla massa.

- Per un gas perfetto sottoposto a una trasformazione isoterma (= a temperatura costante) vale la legge di Boyle-Mariotte, secondo la quale pressione e volume sono inversamente proporzionali:

$$p \cdot V = \text{costante}, \quad V = \frac{\text{costante}}{p}, \quad p = \frac{\text{costante}}{V}$$

4. PROPORZIONALITA’ RISPETTO AL QUADRATO, E RISPETTO ALL’INVERSO DEL QUADRATO

Se lasciamo cadere un sassolino nel fiume da un viadotto molto alto,
la legge che regola la caduta dei gravi ci dice che il sasso percorrerà uno spazio s dato da

$s = 4{,}9 \cdot t^2$ (spazio s misurato in metri, tempo t misurato in secondi): quindi
dopo 1 secondo dall’inizio della caduta il sasso avrà percorso in discesa un tratto di $4{,}9 \cdot 1^2 = 4{,}9$ metri
dopo 2 secondi dall’inizio della caduta avrà percorso $4{,}9 \cdot 2^2 = 19{,}6$ metri
dopo 3 secondi avrà percorso $4{,}9 \cdot 3^2 = 44{,}1$ metri
eccetera.

Pertanto
se il tempo di caduta raddoppia, la distanza percorsa dall’oggetto è il quadruplo,
se il tempo di caduta triplica, la distanza percorsa risulta moltiplicata per 9, ecc.

Quando la legge che lega due grandezze x, y è della forma

$$\boxed{y = kx^2}$$

si dice che ***y* è DIRETTAMENTE PROPORZIONALE AL QUADRATO di *x***.

La legge di attrazione gravitazionale afferma che due masse m_1, m_2 esercitano sempre l’una sull’altra una forza di reciproca attrazione la cui intensità è data da

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

essendo G una costante della natura detta “costante di gravitazione universale”,
ed essendo d la distanza delle due masse.
Pertanto se la distanza raddoppia, la forza attrattiva si riduce alla quarta parte,
se la distanza triplica, la forza attrattiva si riduce a 1/9 di quella iniziale, ecc.

La legge che lega F a d è quindi della forma $F = \frac{k}{d^2}$

Quando la legge che lega due grandezze x, y è della forma

$$\boxed{y = \frac{k}{x^2} = k \cdot \frac{1}{x^2}}$$

si dice che ***y* è INVERSAMENTE PROPORZIONALE AL QUADRATO di *x***
(= PROPORZIONALE ALL’INVERSO DEL QUADRATO di *x*).

ESEMPI (SUI VARI TIPI DI PROPORZIONALITA’)

- Lo spazio s percorso da un corpo che, inizialmente fermo, viene lasciato cadere a terra per effetto della forza peso, è *direttamente proporzionale al quadrato* del tempo t di caduta, secondo la relazione

  $$s = \frac{1}{2}gt^2$$

  (g è costante: è l’accelerazione di gravità sulla superficie terrestre, uguale a $\approx 9{,}8$ m/s per ogni secondo).
  Più in generale, qualunque corpo soggetto ad una forza costante F subisce una accelerazione costante a e se inizialmente (istante $t = 0$) era fermo, comincia a muoversi secondo la legge

  $$s = \frac{1}{2}at^2$$

- L’energia cinetica (= dovuta al movimento) di un corpo di massa m, che si muove con velocità v, è

  $\mathrm{E_C} = \frac{1}{2}mv^2$ (NOTA: per indicare l'energia cinetica si possono utilizzare i simboli $\mathrm{E_c}$, $\mathrm{E_k}$, K)

  e risulta perciò *direttamente proporzionale al quadrato* della velocità.

- Una molla che sia stata allungata o compressa di una certa lunghezza *x* ha "immagazzinato energia", ed è in grado di compiere un lavoro uguale al lavoro che è stato necessario per comprimerla o allungarla.

  Detta k la "costante elastica" della molla,
  l'energia potenziale elastica posseduta dalla molla dopo la deformazione è data da

  $$\mathrm{U} = \frac{1}{2}kx^2$$

  NOTA: per indicare l'energia potenziale (= legata alla posizione) sono utilizzati sia il simbolo E_p che il simbolo U, ma U è più frequente

  ed è perciò *direttamente proporzionale al quadrato* di *x*.

- La forza di attrazione gravitazionale fra due masse m_1 e m_2 è regolata dalla legge

  $$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

  dove *G* è una costante della natura detta "costante di gravitazione universale",
  ed è quindi *inversamente proporzionale al quadrato* della distanza *d*.

- Similmente, la forza di attrazione o repulsione fra due cariche elettriche Q_1 e Q_2 è regolata dalla legge

  $$F = \frac{kQ_1Q_2}{d^2}$$

  dove *k* è una costante che dipende dal mezzo in cui le due cariche sono immerse (il vuoto, l'aria, ecc.).
  Quindi l'intensità di tale forza è *inversamente proporzionale al quadrato* della distanza *d* delle cariche.

- L'intensità di un suono che è stato prodotto da una sorgente puntiforme
  è *inversamente proporzionale al quadrato* della distanza *R* dalla sorgente, secondo la formula

  $$I = \frac{P}{4\pi R^2}$$

  dove *P* è una costante ("potenza", ovvero energia emessa nell'unità di tempo, dalla sorgente sonora).

- Se un solido viene ingrandito, o rimpicciolito, di un dato "fattore di scala",
  il volume cambia in modo *direttamente proporzionale al cubo* del fattore di scala:
  ad esempio,
  - se le misure lineari vengono moltiplicate per 2, il volume risulta moltiplicato per 8;
  - se le misure lineari vengono moltiplicate per 3, il volume risulta moltiplicato per 27.

  $$\mathrm{V}_2 = \mathrm{V}_1\left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)^3$$

- Terza legge di Keplero: i quadrati dei periodi *T* di rivoluzione dei pianeti sono
  direttamente proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori *d* delle loro orbite.

  $$T^2 = kd^3 \quad o \quad \frac{T^2}{d^3} = k$$

- Il periodo *T* di un pendolo (= il tempo occorrente al pendolo per compiere un'oscillazione completa)
  è *direttamente proporzionale alla radice quadrata* della sua lunghezza ℓ: vale infatti la relazione

  $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{g}}$$

  dove *g* è costante, essendo l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre.

- La prima legge di Ohm, scritta nella forma

  $$I = \frac{V}{R},$$

  afferma che l'intensità *I* della corrente elettrica che percorre un filo conduttore di data resistenza *R*
  è *direttamente proporzionale* alla differenza di potenziale *V* applicata agli estremi del filo.
  Se invece si pensa fissata la differenza di potenziale,
  l'intensità *I* di corrente è *inversamente proporzionale* alla resistenza *R* del filo.
  La "resistenza" misura la difficoltà che la corrente incontra nel fluire attraverso il filo.

- Per un filo conduttore di sezione *S* costante, il valore *R* della resistenza è *direttamente proporzionale* alla lunghezza ℓ. Se invece è ℓ che resta costante, *R* è *inversamente proporzionale* alla sezione *S*.

  La relazione $R = \rho\frac{\ell}{S}$ è detta "seconda legge di Ohm".

  La costante ρ si chiama "resistività"; dipende dal materiale di cui è fatto il filo (e dalla temperatura).