IL TEOREMA DI PITAGORA IN BREVE

Per una trattazione accurata, e per la dimostrazione, rimandiamo all'apposito capitolo del Volume 2.
Qui ci limitiamo a dare l'*enunciato*
(enunciato *algebrico*; il *geometrico* è sul Vol. 2)
e alcuni esempi di *esercizi*.

Dunque (**Teorema di Pitagora**):

"In un triangolo rettangolo,
la somma dei quadrati dei cateti
è sempre uguale al quadrato dell'ipotenusa".

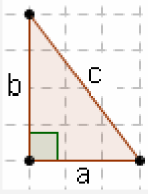
E anche (**Inverso del Teorema di Pitagora**):

"Se in un triangolo accade
che la somma dei quadrati di due lati
sia uguale al quadrato del lato rimanente,
allora il triangolo è rettangolo".

Il triangolo
è rettangolo.
Allora

$$\boxed{a^2+b^2=c^2}$$

da cui



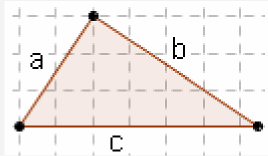
$$c=\sqrt{a^2+b^2};\quad a=\sqrt{c^2-b^2};\quad b=\sqrt{c^2-a^2}$$

♪♪♪ "Guarda che cosa astrusa: la somma dei quadrati dei cateti mi dà il quadrato dell'ipotenusa!" ♪♪♪

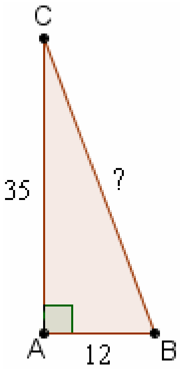
VICEVERSA, se si sa che

$$\boxed{a^2+b^2=c^2},$$

allora si può essere certi
che il triangolo è rettangolo
(l'angolo retto è quello opposto al lato di misura c)



a) Un triangolo ABC, rettangolo in A, ha i cateti che misurano $AB=12\text{ cm},\ AC=35\text{ cm}$. Quanto è lunga l'ipotenusa BC?

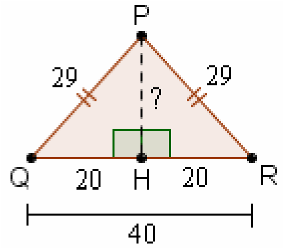


$$BC^2=AB^2+AC^2$$

da cui

$$\begin{aligned}BC&=\sqrt{AB^2+AC^2}=\\&=\sqrt{12^2+35^2}=\\&=\sqrt{144+1225}=\\&=\sqrt{1369}=37\text{ cm}\end{aligned}$$

b) Nel triangolo isoscele PQR i lati obliqui PQ e PR misurano ciascuno cm 29, e si ha QR = cm 40. Determinare l'area.



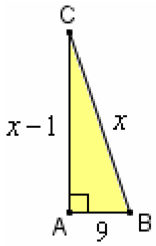
Tracciando l'alt. PH, si ha $QH=HR=QR/2=20\text{ cm}$
Allora, nel triangolo rettangolo PHR, è

$$PH=\sqrt{PR^2-HR^2}=\sqrt{29^2-20^2}=$$
$$=\sqrt{841-400}=\sqrt{441}=21\text{ cm}$$

quindi $\quad Area=\dfrac{QR\cdot PH}{2}=\dfrac{40\text{ cm}\cdot 21\text{ cm}}{2}=420\text{ cm}^2$

c) Un triangolo i cui lati misurano metri 7, 24 e 25 ha qualcosa di speciale???
… Sì, perché se osserviamo che
$7^2+24^2=49+576=625=25^2$
potremo dedurre che il triangolo è rettangolo, in quanto la somma dei quadrati di due dei suoi lati uguaglia il quadrato del terzo lato. Abbiamo applicato ♥ L'INVERSO DEL TEOREMA DI PITAGORA.

d) In un triangolo rettangolo, un cateto misura metri 9, e l'altro cateto è inferiore di 1 metro all'ipotenusa. Determina tutti i lati del triangolo.

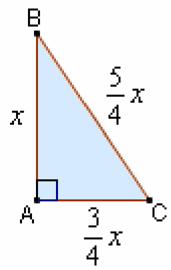


$$AB^2+AC^2=BC^2$$
$$\boxed{9^2+(x-1)^2=x^2}$$
$$81\ \cancel{+x^2}-2x+1=\cancel{x^2}$$
$$-2x=-82;\quad x=41$$
$$BC=41\text{ m},\ AC=40\text{ m}$$

♥ In questo problema, dunque, PITAGORA È STATO UTILIZZATO PER IMPOSTARE L'EQUAZIONE RISOLVENTE.

Inutile, nella fattispecie, sarebbe stato utilizzare formule inverse o radici quadrate: per scrivere un'uguaglianza contenente x, è bastata la relazione pitagorica "originaria".

e) In un triangolo rettangolo, i cateti sono uno i ¾ dell'altro e il perimetro misura 36*a*. Determinare l'area.

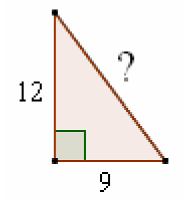


$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=$$
$$=\sqrt{x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2}=\ldots=\frac{5}{4}x$$
$$x+\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}x=36a\quad\ldots\quad x=12a$$
$$AC=\frac{3}{4}x=\frac{3}{4}\cdot 12a=9a$$
$$S=\frac{AC\cdot AB}{2}=\frac{9a\cdot 12a}{2}=54a^2$$

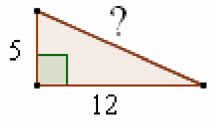
♥ In questo problema, dunque, PITAGORA È STATO UTILIZZATO PER ESPRIMERE UN SEGMENTO IN FUNZIONE DI *x*.

ESERCIZI SUL TEOREMA DI PITAGORA

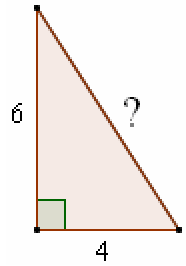
1)



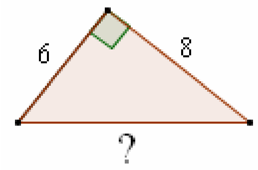
2)



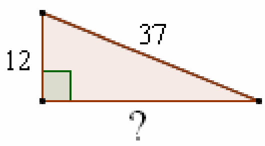
3)



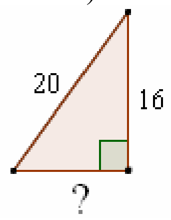
4)



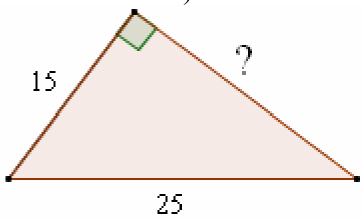
5)



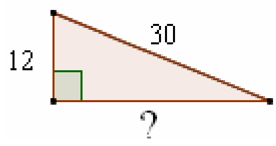
6)



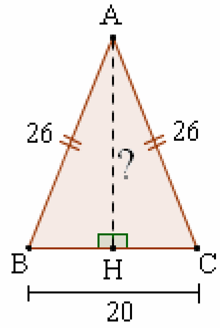
7)



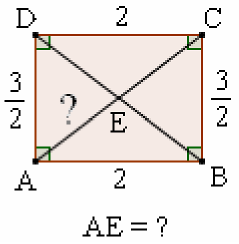
8)



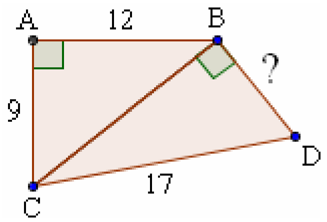
9)



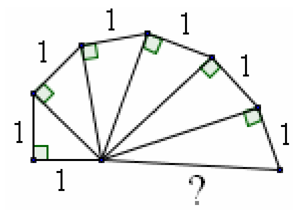
10)



11)



12)



Dal sito www.proprofs.com:

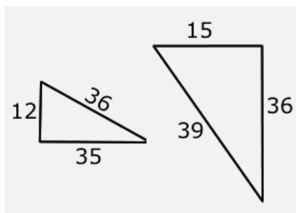
13) Two joggers run 8 miles north and then 15 miles west.
What is the shortest distance they must travel to return to their starting point?

Dal sito www.transum.org:

14a) A rectangular swimming pool is 21 m wide and 50 m long.
Calculate the length of a diagonal to 1 decimal place.

14b) A ladder is 6 m long. How far from the base of a wall should it be placed if it is to reach 5 m up the wall? Give your answer correct to 1 decimal place.

Dal sito www.emathematics.net: 15) Are these right triangles? →



RISPOSTE

1) 15 2) 13 3) $\sqrt{52} = 7,...$ 4) 10 5) 35 6) 12

7) 20 8) $\sqrt{756} = 27,...$ 9) 24 10) $5/4 = 1,25$ 11) 8 12) $\sqrt{7} = 2,6...$

13) 17 miles 14a) m 54,2… 14b) m 3,3…

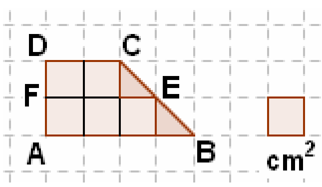
15) We can use the Converse of the Pythagorean Theorem to find if the triangles are right triangles.
If the equation $a^2 + b^2 = c^2$ is true, then we will have a right triangle.
The first triangle is not a right triangle; the second triangle is a right triangle.

AREE E VOLUMI IN BREVE

Un discorso approfondito sulle aree si trova nel capitolo di Teoria della Misura del Volume 2.
Qui ci accontentiamo di accennare a qualche idea elementare, riportando le formule principali.

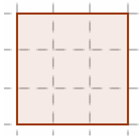
Cosa vuol dire calcolare l' "area" di una superficie?
Vuol dire chiedersi quante volte è contenuta, nella superficie in questione, *un'altra* superficie, quella che farà da "*unità di misura*", ad esempio: il quadrato di lato 1 cm (detto "centimetro quadrato", che si abbrevia in cm^2)

Il quadrilatero ABCD qui a fianco ha un'area di $6\ cm^2$.
L'area di ABEF è di $3{,}5\ cm^2$.



Si dimostra che valgono le seguenti formule, che permettono di calcolare le aree di alcune superfici particolari conoscendo le misure delle lunghezze di determinati segmenti.
Il simbolo indicante l'area in queste formule è S
(S come "Superficie"; si usa spesso dire, infatti, "superficie" per significare "area di una superficie")

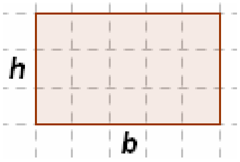
QUADRATO



ℓ

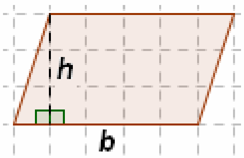
$S = \ell \cdot \ell = \ell^2$

RETTANGOLO



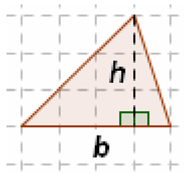
$S = base \cdot altezza = b \cdot h$

PARALLELOGRAMMO



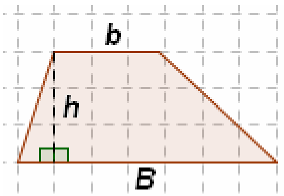
$S = base \cdot altezza = b \cdot h$

TRIANGOLO



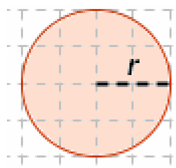
$$S = \frac{base \cdot altezza}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

TRAPEZIO



$$S = \frac{(base_{MAGG} + base_{min}) \cdot altezza}{2} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

CERCHIO



$S = \pi \cdot r^2$
con $\pi = 3{,}14159...$

Se una superficie viene ingrandita in scala in modo che le sue DIMENSIONI LINEARI RADDOPPINO (es.: un poligono "gonfiato" in maniera che gli angoli restino uguali, ma raddoppino le misure dei lati), allora la sua AREA diventerà il QUADRUPLO.
Se il "rapporto di scala" è 3, il rapporto fra le aree (della figura ingrandita e di quella originaria) è 9.
Se il "rapporto di scala" è k, il rapporto fra le aree (della figura ingrandita e di quella originaria) è k^2.

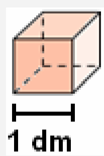
CENNI SUI VOLUMI; COS'E' UN "LITRO"

Il discorso per i volumi (trattato più in dettaglio nel capitolo di Geometria Solida del Vol. 2) **è analogo.**
Trovare il volume di un solido vuol dire chiedersi quante volte ci sta dentro, in quel solido, un *altro* solido, che farà da "*unità di misura*", ad es.: il cubo di lato 1 cm (detto "centimetro cubo", che si abbrevia in cm^3).

Se un solido viene ingrandito in scala in modo che le sue DIMENSIONI LINEARI vengano MOLTIPLICATE PER 2, allora il suo VOLUME ne risulterà MOLTIPLICATO PER 8.
In generale, se il "rapporto di scala" è k, il rapporto fra i volumi è k^3.

Il "LITRO" è a tutti gli effetti una misura di VOLUME, perché 1 litro di un liquido non è altro che 1 "decimetro cubo" (1 dm^3) di quel liquido, vale a dire: una quantità di quel liquido, pari a un cubo il cui lato misuri 1 decimetro (0,1 metri).
In un metro cubo di spazio ci stanno dunque 1000 litri.

1 litro = 1 dm^3



TERMINOLOGIA ALGEBRICA … DI ISPIRAZIONE GEOMETRICA

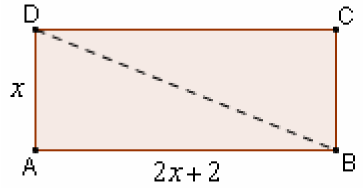
L'area di un quadrato ABCD si calcola elevando alla seconda la misura della lunghezza del lato: $S = \ell^2$.
"Elevare alla 2ª potenza, elevare all'esponente 2" fa venire in mente il calcolo dell'area di un quadrato.
Ecco perché si è affermata l'abitudine di dire "*eleviamo al quadrato*" anziché "*eleviamo all'esponente 2*".
Allo stesso modo, dato che il volume di un cubo si calcola con la formula $V = \ell^3$, dove ℓ è la lunghezza del lato del cubo, ci si è abituati a dire "*elevamento al cubo*" anziché "*elevamento all'esponente 3*".

PROBLEMI GEOMETRICI (DI 1° GRADO)

- In un rettangolo, la base supera di 2 cm il doppio dell'altezza e il perimetro è di 34 cm. Trovare l'area e la diagonale.

Facciamo il **disegno,**
cercando di restare più fedeli possibile ai dati del problema.
In questo caso, ad esempio, occorrerà disegnare la base in modo che sia lunga più del doppio dell'altezza …

Accanto ad disegno, scriviamo tutti i dati, sia quelli geometrici che quelli numerici.
E scriviamo anche, con accanto dei punti interrogativi, quali sono **le richieste del problema**.



ABCD rettangolo
$\mathrm{AB} = 2\mathrm{AD} + 2\ cm$
$2p(\mathrm{ABCD}) = 34\ cm$
$S(\mathrm{ABCD}) = ?\quad \mathrm{BD} = ?$

Valgono le solite indicazioni generali (vedi pag. 148) date in relazione ai problemi di soggetto qualsiasi:
la risoluzione di un problema a una incognita si può suddividere in 3 fasi 1), 2), 3)

1) Pongo la x :
$\boxed{\mathrm{AD} = x}$

♥ **La x** non deve per forza coincidere con una delle richieste del problema; **va scelta in modo che sia poi facile esprimere gli altri segmenti in gioco, per mezzo di x**

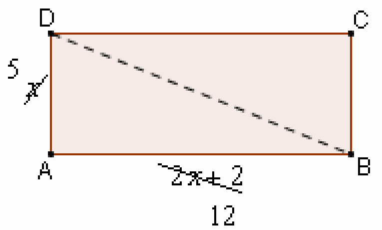
2) Esprimo gli altri segmenti in gioco per mezzo ("in funzione") di x :
$\boxed{\mathrm{AB} = 2x + 2}$

♥ **E' ESTREMAMENTE UTILE riportare sul disegno, in matita, sia la x che le varie espressioni contenenti x via via ricavate.**

3) Imposto l'equazione risolvente :
$\boxed{2(2x+2)+2x=34}$
$4x+4+2x=34$
$6x=30$
$x=5$

♥ **L'equazione risolvente si imposta utilizzando un dato che non sia mai stato sfruttato fino a quel momento** *(nel nostro caso, il perimetro).*
Se ci servissimo, per l'equazione risolvente, di un'informazione già utilizzata prima, ci ritroveremmo fra le mani un'equazione *indeterminata*!

Quindi
$\mathrm{AD} = 5\ cm,$
$\mathrm{AB} = 2x+2 = 10+2 = 12\ cm$ (NOTA 1)
Converrà a questo punto riportare sulla figura i valori ottenuti!



$\boxed{S=}\ \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD} = 12\cdot 5 = \boxed{60\ cm^2}$ (NOTA 2)
$\boxed{\mathrm{BD}=}\ \sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2} = \sqrt{12^2+5^2} =$
$= \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = \boxed{13\ cm}$ (NOTA 3)

NOTA 1
A stretto rigore, l'unità di misura andrebbe indicata in tutti gli anelli della catena e non solo nell'ultimo, scrivendo quindi, in questo caso,
$\mathrm{AB} = (2x+2)\ cm = (10+2)\ cm = 12\ cm$
Tuttavia noi, per brevità, la scriveremo solo alla fine.

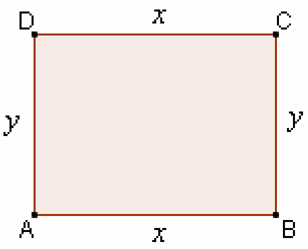
NOTA 2
*L' "area" si può indicare con A oppure con S (il termine "superficie" è usato, seppure impropriamente, anche per indicare l' "area di una superficie"). A rigore, "superficie" indica invece l'entità **geometrica**, "area" il **numero** che esprime la misura dell'estensione di una superficie.*

NOTA 3
Qui abbiamo applicato il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABD.

Certo, **sovente sono possibili più risoluzioni alternative**!
Anche nel nostro caso: il dato *perimetro = 34* ci diceva che la somma *base+altezza* era *17*, quindi avremmo potuto, ad es., porre
$base = x;\ altezza = 17 - x$ da cui l'equazione risolvente: $x = 2(17-x)+2;\ \ldots\ x = 12\ eccetera$

- Trovare le dimensioni di un rettangolo nel quale
il perimetro supera di 10 cm il triplo dell'altezza,
e la differenza fra il triplo della base e il doppio dell'altezza è 12 cm.

Disegno



Dati

ABCD rettangolo
$2p(\text{ABCD}) = 3\text{AD} + 10\ cm$
$3\text{AB} - 2\text{AD} = 12\ cm$
$\text{AB} = ?\quad \text{AD} = ?$

Questa volta i dati sono tali che, comunque si ponga la *x*,
sarebbe poi un po' scomodo esprimere l'altro segmento in gioco per mezzo di *x*.
In questi casi è preferibile PORRE PIU' INCOGNITE e impostare un SISTEMA,
costituito da TANTE EQUAZIONI, QUANTE SONO LE INCOGNITE POSTE.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{AB} = \text{DC} = x \\ \text{AD} = \text{BC} = y\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{cases} 2x + 2y = 3y + 10 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}}$$

Risolvendo ora il sistema, otteniamo:

$$2\cdot\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 20 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} (1)-(2) \\ (1) \end{array}\begin{cases} x = 8 \\ 2\cdot 8 - y = 10;\ \ 16 - y = 10;\ \ y = 6 \end{cases}$$

Quindi
$\text{AB} = \text{DC} = 8\ cm$
$\text{AD} = \text{BC} = 6\ cm$

♥ **La risoluzione in più incognite è consigliabile quando, comunque si ponga la *x*, è poi difficoltoso o se non altro scomodo esprimere per mezzo della *x* scelta, le altre quantità in gioco.**

In tal caso, si pongono due o più incognite, e si scrive un sistema, nel quale LE EQUAZIONI SIANO TANTE QUANTE LE INCOGNITE PRESENTI.

L'eventualità che il numero delle equazioni, indipendenti fra loro, che si possono impostare, sia diverso dal numero delle incognite, è assai rara nei problemi "scolastici".

Volendo, avremmo anche potuto risolvere con una incognita sola:
se si osservano i dati

$$2p(\text{ABCD}) = 3\text{AD} + 10\ cm$$
$$3\text{AB} - 2\text{AD} = 12\ cm$$

si capisce che nell'ultima uguaglianza si può isolare con un paio di passaggi AB, ottenendo

$$3\text{AB} = 2\text{AD} + 12\ cm$$
$$\text{AB} = \frac{2\text{AD} + 12\ cm}{3}$$

per cui, se si pone ora $\boxed{\text{AD} = x}$,

si ha $\boxed{\text{AB} = \frac{2x + 12}{3}}$

e si può scrivere dunque l'equazione risolvente

$$2p(\text{ABCD}) = 3\text{AD} + 10\ cm$$
$$\boxed{2\cdot\frac{2x + 12}{3} + 2x = 3x + 10}$$

con la quale si trova

$\boxed{x = \text{AD} = 6}$.

Se confrontiamo i due metodi di risoluzione, vediamo che per *questo* particolare problema, pur essendo possibile risolvere con 1 sola incognita, la risoluzione con più incognite e quindi col sistema si rivela migliore, anche per la possibilità di affrontare poi il sistema col simpatico metodo di riduzione.

In generale, comunque, di fronte a un problema geometrico, *la risoluzione con una incognita sola è preferibile*, perché risulta di norma più comoda e perché mette maggiormente in risalto le interrelazioni fra le varie quantità. *Tranne, ribadiamolo, in quei casi in cui sia eccessivamente laborioso esprimere tutte le quantità in gioco, in funzione di una sola di esse.*

PROBLEMI GEOMETRICI DI 1° GRADO: ESERCIZI (la freccia è un link alla correzione)

1) ⇨ In un triangolo isoscele il lato obliquo è i 5/6 della base, e la differenza fra base e lato obliquo è di 3 cm. Quanto misura il perimetro? E l'area?

2) In un triangolo isoscele, di perimetro 72 cm, il lato obliquo supera la base di 6 cm. Determina i tre lati.

3) Di un triangolo si conosce il perimetro (48 cm), e si sa che due dei lati hanno per somma 27 cm e per rapporto 4/5. Quanto misura ciascuno dei tre lati?

4) ⇨ In un triangolo isoscele, la somma del triplo della base col doppio del lato obliquo misura 82 cm ed è di 19 cm la differenza fra il triplo del lato obliquo e il doppio della base. Determina il perimetro.

5) In un triangolo rettangolo i cateti sono uno i ¾ dell'altro, e la loro somma misura cm 21. Quanto misura il perimetro?

6) Di un trapezio isoscele si conoscono:
l'area $(44\ \text{cm}^2)$, l'altezza $(4\ \text{cm})$ e il rapporto fra le due basi $(4/7)$. Quanto vale il perimetro?

7) In un triangolo isoscele il lato obliquo è inferiore di 4 cm rispetto alla base. Il perimetro è di cm 64. Trovare i lati, l'area, l'altezza relativa al lato obliquo.

8) In un triangolo isoscele DEF, di base $\overline{EF}$, si ha $\overline{EF}+\overline{DE}=\text{m } 11$, e $2\overline{EF}+3\overline{DE}=\text{m } 27$. Determina i lati del triangolo e la sua area.

9) Se il perimetro di un quadrato aumentasse di 8 cm, l'area aumenterebbe di $36\ \text{cm}^2$. Quanto misura il lato del quadrato?

10) In un triangolo PQR i due angoli più ampi sono rispettivamente il doppio e il quintuplo del più piccolo. Quanto misurano i tre angoli?

11) In un triangolo ABC si sa, riguardo agli angoli interni, che $3\hat{A}+2\hat{B}=195°$ e che $4\hat{B}-3\hat{C}=30°$. Quanto misurano i tre angoli?

12) Determinare perimetro e area di un rombo del quale si conoscono la somma delle diagonali (62 cm) e la loro differenza (34 cm).

13) Un trapezio isoscele ha la base minore uguale al lato obliquo. Il perimetro del trapezio misura 52 cm, e la somma della quinta parte del lato obliquo con la metà della base maggiore vale 13 cm. Determinare le misure dei quattro lati e dell'area.

14) ABCD è un trapezio rettangolo. La base maggiore $\overline{AB}$ supera di 4 cm la somma di altezza e lato obliquo; questi differiscono di 8 cm, mentre la differenza fra base maggiore e lato obliquo è di 9 cm. Determinare il perimetro e l'area.

15) Un parallelogrammo ha il perimetro di 2 m; un lato supera l'altro di 22 cm. Quanto misurano i due lati? Sapendo inoltre che la proiezione del lato maggiore sul minore vale 11 cm, trovare l'area della figura.

16) ⇨ Un trapezio rettangolo ha la base minore uguale all'altezza. Il lato obliquo supera di 2 cm la base minore, mentre la differenza fra le due basi è di 8 cm. Sapresti determinare i quattro lati?
(*In questo problema si può applicare il Teorema di Pitagora per impostare l'equazione risolvente*)

17) Sapendo che la mediana $\overline{CM}$ relativa all'ipotenusa $\overline{AB}$ di un triangolo rettangolo ABC supera di 18 cm la propria proiezione $\overline{HM}$ sull'ipotenusa, e che l'altezza $\overline{CH}$ relativa all'ipotenusa misura 24 cm, determinare perimetro e area di ABC (qui occorre sapere che la mediana relativa all'ipotenusa, in un triangolo rettangolo, è sempre uguale alla metà dell'ipotenusa stessa).

18) ⇨ Trovare il perimetro di un triangolo isoscele di area $108\ \text{cm}^2$, sapendo che il lato è i 5/8 della base.
(*Qui si può applicare il Teorema di Pitagora per esprimere un segmento in funzione di x, cioè: per mezzo di x; l'equazione risolvente non è di 1° grado, ma è comunque di risoluzione immediata*)

19) Trova il perimetro di un rettangolo nel quale la diagonale è di 1 metro più lunga rispetto a una delle dimensioni, e l'altra dimensione misura 9 metri.

20) Un rombo, nel quale le diagonali sono una i ¾ dell'altra, ha il perimetro di 60 cm. Quant'è la sua area?

RISPOSTE

1) $48\ \text{cm};\ 108\ \text{cm}^2$ 2) $20,\ 26$ e $26\ \text{cm}$ 3) $12,\ 15$ e $21\ \text{cm}$ 4) $50\ \text{cm}$ 5) $2p=36\ \text{cm}$ 6) $32\ \text{cm}$
7) lato obliquo $=$ cm 20, base $=$ cm 24, area $=\text{cm}^2\ 192$; alt. rel. al lato obl. $=$ cm $19{,}2$ $(b\cdot h=2S\rightarrow h=2S/b)$
8) $EF=\text{m } 6,\ DE=DF=\text{m } 5,\ S=\text{m}^2\ 12$ 9) $8\ \text{cm}$ 10) $22°30',\ 45°,\ 112°30'$ 11) $15°,\ 75°,\ 90°$
12) $100\ \text{cm},\ 336\ \text{cm}^2$ 13) $10,\ 10,\ 10$ e $22\ \text{cm};\ 128\ \text{cm}^2$ 14) $50\ \text{cm},\ 80\ \text{cm}^2$ 15) $61\ \text{cm}$ e $39\ \text{cm};\ 2340\ \text{cm}^2$
16) $15,\ 15,\ 23$ e $17\ \text{cm}$ 17) $120\ \text{cm};\ 600\ \text{cm}^2$ 18) $54\ \text{cm}$ 19) $98\ \text{m}$ 20) $216\ \text{cm}^2$