SCOMPOSIZIONE IN FATTORI (= FATTORIZZAZIONE) DI UN POLINOMIO

Scomporre in fattori
(= fattorizzare)
un polinomio
significa trasformarlo,
se possibile:

a) nel prodotto di due polinomi,

b) oppure nel prodotto di un monomio per un polinomio,

c) oppure ancora nella potenza di un polinomio.

Studieremo in questo capitolo le principali tecniche di fattorizzazione, a cominciare dalle più semplici.

Dal mirabile "**Teorema Fondamentale dell'Algebra**" (Volume 2) si trae fra l'altro, come conseguenza, che QUALSIASI polinomio a una sola variabile ammette SEMPRE una scomposizione in fattori di 1° o di 2° grado. D'altra parte, è stato pure dimostrato che non esiste nessun algoritmo di carattere generale capace di fattorizzare un polinomio arbitrario, nemmeno se ci si limita ad una sola lettera, per cui poi, nella pratica, la fattorizzazione viene effettuata solo su polinomi particolarmente "docili".

Negli esercizi di base per l'apprendimento, vengono proposti di solito polinomi a coefficienti interi, intendendo che pure la scomposizione venga realizzata utilizzando esclusivamente coefficienti interi (se poi nel polinomio di partenza compaiono coefficienti frazionari, ammetteremo che possano entrare coefficienti frazionari anche nella scomposizione; escluderemo comunque, almeno in questa prima fase, l'impiego di coefficienti irrazionali).

In My Humble Opinion

Se sei un insegnante e stai utilizzando questo testo coi tuoi allievi, mi permetto di invitarti a … non dedicare UN TEMPO ECCESSIVO alla fattorizzazione.
E' vero che questo argomento contribuisce a sviluppare la "sensibilità algebrica" dello studente; d'altra parte, si tratta di esercizi abbastanza "meccanici" e in una certa misura artificiosi, ed è forse allora preferibile ridurne un poco il "peso", dando più spazio ad altre attività atte a valorizzare il ragionamento, le capacità di analisi e di *problem solving*, l'immaginazione.

1. RICONOSCIMENTO DI PRODOTTI NOTEVOLI

Se il polinomio che si vuole fattorizzare è il risultato dello svolgimento di un prodotto notevole, la scomposizione consisterà semplicemente nel risalire al prodotto notevole di partenza.

a) x^2-6x+9. Riconosciamo facilmente che si tratta del quadrato di un binomio. Dunque:
$x^2-6x+9=(x-3)^2$ oppure, in alternativa, $x^2-6x+9=(-x+3)^2=(3-x)^2$

b) $\frac{1}{16}a^4+\frac{1}{10}a^3+\frac{1}{25}a^2$

Dal fatto che ci siano 3 termini, due dei quali (il 1° e il 3°) sono quadrati di monomi, si è portati a pensare che si abbia anche qui il quadrato di un binomio. Proviamo a scrivere allora

$$\frac{1}{16}a^4+\frac{1}{10}a^3+\frac{1}{25}a^2=\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{5}a\right)^2$$

ma ci converrà *controllare* attentamente, svolgendo il prodotto notevole, se si ottiene davvero il polinomio di partenza.
In effetti, vediamo che è proprio così.
Dunque la scomposizione da noi ipotizzata è OK.

Osserviamo che anche in questo caso ci sarebbe stata un'altra possibilità: $\left(-\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{5}a\right)^2$.

Fra le due alternative, di norma si sceglie la più semplice ed elegante, ossia la prima.

♥ **SUGGERIMENTO DA AMICO!**

Dopo che hai effettuato una scomposizione, il modo più sicuro ed efficace per verificare se è corretta consiste nel RIFARE IL CALCOLO A RITROSO, allo scopo di controllare se effettivamente, rimoltiplicando, o svolgendo la potenza, si riottiene il polinomio iniziale.

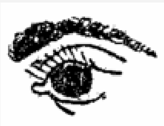
CALDAMENTE RACCOMANDATO, specie a chi è – pardòn – "alle prime armi". Utile anche per capire bene i meccanismi algebrici e mentali della fattorizzazione!

c) $9x^2-6xy+y^2-24x+8y+16$

Qui abbiamo 6 termini, di cui tre ($9x^2, y^2, 16$) sono quadrati di monomi. Potrebbe perciò trattarsi del quadrato di un trinomio; se così fosse, i termini sarebbero, a parte i segni che per ora lasciamo in sospeso, $3x, y, 4$. Prepariamoci dunque lo schema $(3x \quad y \quad 4)^2$ dopodiché decideremo i segni in modo che, svolgendo il quadrato, ci venga restituito (almeno, speriamo!) il polinomio di partenza.
Ipotizziamo che sia : $9x^2-6xy+y^2-24x+8y+16=(3x-y-4)^2$
e, svolgendo il prodotto notevole, vediamo che in effetti si riottiene esattamente il polinomio dato.
Dunque la scomposizione è confermata. Anche, in alternativa: $9x^2-6xy+y^2-24x+8y+16=(-3x+y+4)^2$

♥ **Ogniqualvolta la scomposizione porta ad un quadrato, c'è sempre una seconda "soluzione", nella quale tutti i termini del polinomio che è base del quadrato vengono cambiati di segno. In effetti, due numeri opposti hanno sempre lo stesso quadrato!**
Ad esempio, il numero 49 *è il quadrato di* 7, *ma è anche il quadrato di* -7

d) $x^2-25=(x+5)(x-5)$



♥ Una **differenza di quadrati** si scompone facendo **la somma delle basi moltiplicato la loro differenza:**

♥ **FORMULA IMPORTANTISSIMA!!!**
$$\boxed{\mathbf{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}}$$

e) $\frac{9}{4}a^{12}-49b^8c^6=\left(\frac{3}{2}a^6+7b^4c^3\right)\left(\frac{3}{2}a^6-7b^4c^3\right)$

f) $y^4-16=\underbrace{(y^2+4)}_{\substack{\text{SOMMA}\\ \text{di quadrati:}\\ \text{NON}\\ \text{scomponibile!}}}\underbrace{(y^2-4)}_{\substack{\text{DIFF.}\\ \text{di quadrati,}\\ \text{scomponibile}}}=(y^2+4)(y+2)(y-2)$

g) $x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$

h) $a^8-4a^6+6a^4-4a^2+1=(a^2-1)^4=[(a+1)(a-1)]^4=(a+1)^4(a-1)^4$

♥ Intenderemo che ogni esercizio di scomposizione debba essere portato a termine *completamente*: dunque **dovrai sempre domandarti se i fattori ottenuti siano a loro volta scomponibili e, in caso affermativo, fattorizzare anche questi**

ESERCIZI (riconoscimento di prodotti notevoli)

1) $x^2-8x+16$	2) $9a^2+12ab+4b^2$	3) t^4+1+2t^2
4) $a^2b^2-14abc+49c^2$	5) $9r^2-6r+1$	6) $25+36y^6+60y^3$
7) x^2-9	8) $16t^4-1$	9) $49a^2-36b^2$
10) $1-t^8$	11) $8x^3+60x^2+150x+125$	12) $a^{15}-6a^{10}+12a^5-8$
13) t^3+1+3t^2+3t	14) $27a^3-27a^2xy+9ax^2y^2-x^3y^3$	15) $y^4-8y^3+24y^2-32y+16$
16) $a^8+4a^6+6a^4+4a^2+1$	17) $1+5b+10b^2+10b^3+5b^4+b^5$	18) $4a^2+9b^2+1-12ab-4a+6b$
19) $t^2x^2-2tx^2+x^2+4tx-4x+4$	20) $9a^6-12a^4-6a^3+4a^2+4a+1$	21) a^4-2a^2+1
22) $\frac{1}{4}y^2+y+1$	23) $\frac{1}{4}y^2-1$	24) $\frac{4}{9}a^2+\frac{9}{4}b^2-2ab$
25) $1-c+\frac{1}{3}c^2-\frac{1}{27}c^3$	26) $s^4+\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{9}+s^2p-\frac{2}{3}s^2-\frac{1}{3}p$	27) $a^{12}+3a^8+3a^4+1$
28) $a^{12}-3a^8+3a^4-1$	29) $a^{2k}+6a^k+9$	30) $y^{2a+2}-1$

RISULTATI

1) $(x-4)^2$ o anche $(4-x)^2$	2) $(3a+2b)^2$ o anche $(-3a-2b)^2$	3) $(t^2+1)^2$
4) $(ab-7c)^2$	5) $(3r-1)^2$	6) $(5+6y^3)^2=(6y^3+5)^2$
7) $(x+3)(x-3)$	8) $(4t^2+1)(2t+1)(2t-1)$	9) $(7a+6b)(7a-6b)$
10) $(1+t^4)(1+t^2)(1+t)(1-t)$	11) $(2x+5)^3$	12) $(a^5-2)^3$
13) $(t+1)^3$	14) $(3a-xy)^3$	15) $(y-2)^4$ oppure $(-y+2)^4$
16) $(a^2+1)^4$ oppure $(-a^2-1)^4$	17) $(1+b)^5$	18) $(2a-3b-1)^2=(-2a+3b+1)^2$
19) $(tx-x+2)^2$	20) $(3a^3-2a-1)^2$	21) $(a+1)^2(a-1)^2$

22) $\left(\frac{1}{2}y+1\right)^2$ 23) $\left(\frac{1}{2}y+1\right)\left(\frac{1}{2}y-1\right)$ 24) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}b\right)^2$ 25) $\left(1-\frac{1}{3}c\right)^3$ 26) $\left(s^2+\frac{1}{2}p-\frac{1}{3}\right)^2$

27) $(a^4+1)^3$ 28) $(a^2+1)^3(a+1)^3(a-1)^3$ 29) $(a^k+3)^2$ 30) $(y^{a+1}+1)(y^{a+1}-1)$

2. SCOMPOSIZIONE PER RACCOGLIMENTO DI UN FATTORE COMUNE (SI DICE PREFERIBILMENTE: "RACCOGLIMENTO *A* FATTOR COMUNE")

Del raccoglimento a fattor comune abbiamo già parlato (a pag. 106), dicendo che si tratta sostanzialmente dell'applicazione della *proprietà distributiva in senso inverso*, "a ritroso".

**Data una somma algebrica i cui termini siano dei prodotti,
se c'è un fattore che è comune a tutti questi prodotti, esso potrà essere "raccolto", ossia:
potrà essere scritto fuori da una parentesi, al cui interno si metterà
quella somma algebrica la quale, moltiplicata per il numero scritto fuori,
permette di riottenere l'espressione iniziale.**

La somma algebrica che finisce fra parentesi sarà, evidentemente, ricavabile da quella di partenza, privando ciascun prodotto del fattore raccolto (=dividendo ciascun prodotto per il fattore raccolto).

❑ Esempi:

$$5\cdot7+5\cdot8+5\cdot9=5\cdot(7+8+9)=5\cdot24=120$$
$$93-75+36-21=3\cdot(31-25+12-7)=3\cdot11=33$$
$$2^{12}-3\cdot2^{10}=2^{10}\cdot(2^2-3)=2^{10}\cdot1=1024$$

Riferendoci, ora, in special modo ai polinomi, diremo che

dato un polinomio, se ci si accorge che tutti i suoi termini hanno un fattore comune, questo, volendo, si potrà "raccogliere": si scriverà allora il fattore comune trovato, si aprirà una parentesi e all'interno della parentesi si scriverà quel polinomio che, se viene rimoltiplicato per il monomio che sta fuori, riproduce il polinomio di partenza.

❑ Due esempi: $ab+ac+ad=a(b+c+d)$; $35x-14y=7(5x-2y)$

In un polinomio, il massimo monomio che si può raccogliere è quello che
- **ha come coefficiente il massimo comun divisore (M.C.D.) DEI COEFFICIENTI**
- **e contiene nella sua parte letterale solo le LETTERE COMUNI a tutti i termini del polinomio, ciascuna presa UNA SOLA VOLTA e con L'ESPONENTE PIU' BASSO.**

Ecco una piccola rassegna di fattorizzazioni con questa tecnica:

a) $15x^4y-35x^3y^3+30x^3y^4z=5x^3y(3x-7y^2+6y^3z)$

b) $t^5+t^4=t^4(t+1)$

c) $6x-12y+9=3(2x-4y+3)$

d) $54x^4-36x^3+6x^2=6x^2(9x^2-6x+1)=6x^2(3x-1)^2$

e) $50x^2-2=2(25x^2-1)=2(5x+1)(5x-1)$

♥ Di fronte a QUALUNQUE esercizio di scomposizione in fattori, la PRIMA COSA che conviene domandarsi è SEMPRE: "SI PUO' RACCOGLIERE UN FATTORE COMUNE?"
E in caso affermativo, il raccoglimento a fattor comune è sempre il modo più "furbo" per avviare la scomposizione.

E' un SUG-GERI-MENTO DA AMICO!

Esempio: se mi vien dato da scomporre il polinomio $4x^4-40x^3+100x^2$,

io *potrei anche* scrivere $4x^4-40x^3+100x^2=(2x^2-10x)^2$

ma successivamente constaterei che la base del quadrato è ancora scomponibile (si può raccogliere $2x$), e quindi dovrei continuare, nel modo seguente:

$$4x^4-40x^3+100x^2=(2x^2-10x)^2=[2x(x-5)]^2=4x^2(x-5)^2$$

MOLTO MEGLIO, quindi, iniziare con il raccoglimento a fattor comune e scrivere:

$4x^4-40x^3+100x^2=4x^2(x^2-10x+25)=4x^2(x-5)^2$. Et voilà, senza complicazioni!

ESERCIZI (raccoglimento a fattor comune)

1) $3ax+2bx$
2) $x^4+5x^3+x^2$
3) $3x-6y+15$
4) $30a^4b-12a^3b^3$
5) $6x^3yz^3-2x^3z^5+2x^2y^2z^4$
6) t^3-t
7) $48a^2b^3+144a^2b^2c+108a^2bc^2$
8) $5n^2-45$
9) $t^{n+3}+t^{n+1}+4t^n$
10) $3ax^4y-6ax^2y^3+3ay^5$
11) $16x^4-8x^3+x^2$
12) $\frac{1}{7}a^2+\frac{2}{7}a+\frac{1}{7}$
13) $ab+a^2b^2$
14) $ab+ac+bc$
15) $60n^5-15n^3$
16) $x^4y^4-3x^3y^3t+3x^2y^2t^2-xyt^3$
17) $6x^4+12x^2+6$
18) $a^{3x+2}+2a^{2x+2}b^y+a^{x+2}b^{2y}$
19) $18bc^3d^3-24ac^2d^5$
20) $\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{2}ab+\frac{3}{4}b^2$
21) $\frac{3}{4}a^2-\frac{27}{4}b^2$

RISULTATI

1) $x(3a+2b)$
2) $x^2(x^2+5x+1)$
3) $3(x-2y+5)$
4) $6a^3b(5a-2b^2)$
5) $2x^2z^3(3xy-xz^2+y^2z)$
6) $t(t+1)(t-1)$
7) $12a^2b(2b+3c)^2$
8) $5(n+3)(n-3)$
9) $t^n(t^3+t+4)$
10) $3ay(x+y)^2(x-y)^2$
11) $x^2(4x-1)^2$
12) $\frac{1}{7}(a+1)^2$
13) $ab(1+ab)$
14) NON SCOMPONIBILE
15) $15n^3(2n+1)(2n-1)$
16) $xy(xy-t)^3$
17) $6(x^2+1)^2$
18) $a^{x+2}(a^x+b^y)^2$
19) $6c^2d^3(3bc-4ad^2)$
20) $\frac{3}{4}(a-b)^2$ oppure $3\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\right)^2$
21) $\frac{3}{4}(a+3b)(a-3b)$ oppure $3\left(\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}b\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}b\right)$

♥ GIANNINO E LA "FALSA SCOMPOSIZIONE"

Il professore ha proposto a Giannino il seguente polinomio da scomporre:

$$a^2+ab+4b^2 .$$

In realtà, l'insegnante ha sbagliato:
per distrazione, ha assegnato un polinomio che non è fattorizzabile!
Ma Giannino ci si mette di buona lena e alla fine scrive:

$$a^2+ab+4b^2=a(a+b)+4b^2$$

Eh no, Giannino!
Purtroppo questa NON è una scomposizione in fattori.
Sarebbe come dire che il numero 17 è scomponibile in $3\cdot 5+2$.
Falso, $3\cdot 5+2$ NON è una scomposizione in fattori,
perché l'operazione da eseguire per **ultima** è un'**addizione**
e **NON** una **moltiplicazione**.

3. SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO PER RACCOGLIMENTI PARZIALI

Consideriamo il polinomio

$$ax+ay+bx+by$$

Non si tratta di un prodotto notevole svolto, e non c'è alcun fattore che sia comune a tutti i termini.
Tuttavia, se prendiamo i primi due termini soltanto, vediamo che essi hanno in comune il fattore a;
raccogliendolo, si otterrebbe $a(x+y)$;
allo stesso modo, gli ultimi due termini hanno in comune il fattore b,
e, raccogliendolo, si otterrebbe $b(x+y)$;
quindi così facendo, in entrambe le scomposizioni parziali, comparirebbe uno stesso fattore:
il binomio $(x+y)$!
Dunque

$$\underbrace{ax+ay}+\underbrace{bx+by}=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$$

L'ultimo passaggio è consistito nel raccogliere, fra i due "pezzi" $a(x+y)$ e $+b(x+y)$, il binomio $(x+y)$.
In pratica, il "blocco" $(x+y)$ è stato "trattato" come un numero unico.

Si dice che la scomposizione $ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$ è stata eseguita "per **raccoglimenti parziali**".

Per convincerci della validità del procedimento, possiamo:

- svolgere il prodotto ottenuto $(x+y)(a+b)$
  e constatare che, in effetti, si riottiene proprio il polinomio di partenza
- pensare di sostituire, per un istante, il blocco $(x+y)$ con una singola lettera: poniamo ad esempio
  $x+y=z$ e avremo $ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=az+bz=z(a+b)=(x+y)(a+b)$

La scomposizione avrebbe potuto essere effettuata anche abbinando i termini in modo diverso:

$$\underline{ax}+ay\underline{+bx}+by=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$$

Di fronte a un esercizio di scomposizione per raccoglimenti parziali,
è SEMPRE possibile abbinare i termini in due modi differenti.
Non staremo ad evidenziare tutte le volte questo fatto, che, ripeto, è normale si verifichi SEMPRE.

Ecco qui di seguito altri esempi di scomposizione per raccoglimenti parziali.

Una scomposizione per raccoglimenti parziali richiede di procedere per tentativi:
si tratta di **suddividere il polinomio dato in più "pezzi" tali che,**
raccogliendo in ciascun "pezzo" un opportuno fattore,
♥ **si riesca a FAR COMPARIRE FRA PARENTESI SEMPRE LO STESSO POLINOMIO.**
Dopo questa prima fase di raccoglimenti "**parziali**", si effettuerà il raccoglimento "**totale**"
del polinomio che è stato fatto comparire, come fattore, in ciascun "pezzo".

a) $\underbrace{3a^2+3ax}\underbrace{+2a+2x}=3a(a+x)+2(a+x)=(a+x)(3a+2)$

b) $\underbrace{2ab-6a}\ \underbrace{-7b+21}_{\substack{\text{raccogliamo}\\ \text{il fattore}\\ \text{NEGATIVO}\\ -7}}=2a(b-3)-7(b-3)=(b-3)(2a-7)$

Qui è stato necessario raccogliere, fra gli ultimi due termini, un fattore NEGATIVO (-7)

c) $ax+4x-ay-4y=x(a+4)-y(a+4)=(a+4)(x-y)$

d) $6ax+2bx+3a+b=2x(3a+b)+1\cdot(3a+b)=(3a+b)(2x+1)$

♥ **Qui sopra abbiamo dovuto, fra gli ultimi due termini, raccogliere il fattore "banale"** $+1$.
Di norma, in casi come questo,
si apre semplicemente una parentesi, sottintendendo il moltiplicatore 1.
Ci si accontenta cioè di raggruppare tra parentesi i termini in gioco, scrivendo soltanto

$$6ax+2bx+3a+b=2x(3a+b)+(3a+b)=(3a+b)(2x+1)$$

e) $3ab+15a-b-5=3a(b+5)-1\cdot(b+5)=(b+5)(3a-1)$

♥ **Qui abbiamo dovuto, fra gli ultimi due termini, raccogliere il fattore -1.**
Di norma, in casi come questo, ci si limita a "METTERE IN EVIDENZA IL SEGNO $-$".
Vale a dire, **si scrive il segno "$-$" seguito da una parentesi nella quale finirà il polinomio con tutti i segni cambiati**.

$$3ab+15a-b-5=3a(b+5)\underbrace{-(b+5)}_{\substack{\text{si è "messo}\\ \text{in evidenza}\\ \text{il segno } - \text{"}}}=(b+5)(3a-1)$$

Riflettiamo: un segno "$-$" davanti equivale sempre a " $-1\bullet$ " (moltiplicazione per -1).
Infatti,
un segno "$-$" davanti a un numero ne indica l'opposto, cioè indica che quel numero va cambiato di segno;
e una moltiplicazione per -1 porta esattamente allo stesso effetto!
$-(b+5)=-1\cdot(b+5)$

f) $t^3-t^2-t+1=t^2(t-1)-(t-1)=(t-1)(t^2-1)=(t-1)(t+1)(t-1)=(t-1)^2(t+1)$

g) $xy^2-4xy+4x-3y^2+12y-12=x(y^2-4y+4)-3(y^2-4y+4)=(y^2-4y+4)(x-3)=(y-2)^2(x-3)$

oppure, abbinando i termini diversamente,

$\underline{xy^2}\underset{*}{-4xy}\underset{\bullet}{+4x}\underline{-3y^2}\underset{*}{+12y}\underset{\bullet}{-12}=y^2(x-3)-4y(x-3)+4(x-3)=(x-3)(y^2-4y+4)=(x-3)(y-2)^2$

h) $a^{15}+a^{13}+a^{11}+a^9=a^9(a^6+a^4+a^2+1)=a^9\left[a^4(a^2+1)+(a^2+1)\right]=a^9(a^2+1)(a^4+1)$

ESERCIZI (scomposizione per raccoglimenti parziali)

1) $ac+bc+3a+3b$
2) $6xy+5x-12y-10$
3) $a^2c+a^2d-b^2c-b^2d$
4) $3a^3+18a^2+4a+24$
5) $ax+ay-x-y$
6) $ax+ay+x+y$
7) $a^2+ab+ac+bc$
8) $xy-y^2-xz+yz$
9) $abcd-ab-cd+1$
10) t^3+2t^2-t-2
11) a^3+a^2+a+1
12) $14ax-6bx-7ay+3by$
13) $6ab+6cd-9ac-4bd$
14) $x^4+x^3-x^2-x$
15) $ax+4x-ay-4y$
16) $xy-x-y+1$
17) $ab+1+a+b$
18) $4a^3-8a^2-9a+18$
19) t^3-6t^2+t-6
20) $x^3y^3+x^2y^2+x^4y+xy^4$
21) $12ac^2-6ac-4c+2$
22) $a^{x+y}-3a^x-2a^y+6$
23) $e^{3t}-e^{2t}+e^t-1$
24) $x^{2a+b+c}+x^{a+b}+x^{a+c}+1$
25) $ax-ay+at+bx-by+bt$
26) $3a^2+3ac-3a^2c-4ab-4bc+4abc$
27) $ax-bx-ay+by-a+b$
28) $ax-2bx-2ay+4by+3az-6bz$
29) $18xw-15yw-12tx+10ty+20y-24x$
30) $b^{2x+y}-2b^{x+y}+b^y-b^{2x}+2b^x-1$
31) $ax+bx-x-ay-by+y-a-b+1$
32) $a^3+b^3+c^3-ab^2-a^2b-ac^2-a^2c+bc^2+b^2c$
33) $a^2-ab-ac+b+c-1=a^2-ab-ac+a-a+b+c-1=\ldots$

RISULTATI

1) $(a+b)(c+3)$
2) $(6y+5)(x-2)$
3) $(c+d)(a+b)(a-b)$
4) $(a+6)(3a^2+4)$
5) $(x+y)(a-1)$
6) $(x+y)(a+1)$
7) $(a+b)(a+c)$
8) $(x-y)(y-z)$
9) $(ab-1)(cd-1)$
10) $(t+2)(t+1)(t-1)$
11) $(a+1)(a^2+1)$
12) $(7a-3b)(2x-y)$
13) $(3a-2d)(2b-3c)$
14) $x(x+1)^2(x-1)$
15) $(a+4)(x-y)$
16) $(y-1)(x-1)$
17) $(b+1)(a+1)$
18) $(a-2)(2a+3)(2a-3)$
19) $(t-6)(t^2+1)$
20) $xy(x^2+y)(y^2+x)$
21) $2(2c-1)(3ac-1)$
22) $(a^y-3)(a^x-2)$
23) $(e^t-1)(e^{2t}+1)$
24) $(x^{a+c}+1)(x^{a+b}+1)$
25) $(x-y+t)(a+b)$
26) $(a+c-ac)(3a-4b)$
27) $(a-b)(x-y-1)$
28) $(a-2b)(x-2y+3z)$
29) $(6x-5y)(3w-2t-4)$
30) $(b^y-1)(b^x-1)^2$
31) $(a+b-1)(x-y-1)$
32) $(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)$
33) $(a-b-c+1)(a-1)$

Il PRIMO raccoglimento, negli esercizi, conviene effettuarlo con **coefficiente POSITIVO**

SUGGERIMENTO DA AMICO

4. SCOMPOSIZIONE DI UN TRINOMIO DI SECONDO GRADO $\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$

A) IL TRINOMIO "SPECIALE", ossia: quello con 1° coefficiente unitario $\boxed{x^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c}}$

PREMESSA
Consideriamo l'operazione seguente: $(x+5)(x+6)=x^2+6x+5x+30=x^2+\underbrace{11}_{5+6}x+\underbrace{30}_{5\cdot 6}$

Abbiamo moltiplicato due binomi della forma: $(x+\textit{un numero})(x+\textit{un altro numero})$

e abbiamo ottenuto come risultato un trinomio di 2° grado con 1° coefficiente unitario
(parleremo di trinomio "speciale"),
nel quale il coefficiente centrale è dato dalla **somma** dei due numeri in questione,
mentre il termine noto è uguale al loro **prodotto**.
Applicando il procedimento in senso inverso è possibile, in certi casi,
fattorizzare un trinomio "speciale" di 2° grado assegnato.

a) $x^2+16x+48$
Se riusciamo a trovare due numeri la cui **somma** sia 16 e il cui **prodotto** sia 48,
il trinomio dato sarà immediatamente scomposto.
I due numeri esistono, e sono il 4 e il 12.
Avremo dunque
$x^2+16x+48=(x+4)(x+12)$ (oppure $(x+12)(x+4)$: evidentemente, l'ordine non conta).
Svolgendo la moltiplicazione possiamo verificare la correttezza di quanto abbiamo scritto:
si ha proprio $(x+4)(x+12)=x^2\ \underline{+12x}\ \underline{+4x}+48=x^2+\underbrace{16}_{4+12}x+\underbrace{48}_{4\cdot 12}$, *OK*

b) $x^2-10x+21$
$s=-10,\ \ p=21$. I due numeri sono dunque -3 e -7. Perciò: $x^2-10x+21=(x-3)(x-7)$

c) $a^2-a-12=(a-4)(a+3)$ perché $s=-1,\ p=-12$ quindi i due numeri sono -4 e 3.

Riassumendo:

per scomporre un trinomio di 2° grado "speciale",
ossia con 1° coefficiente unitario,
cioè un trinomio della forma $x^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c}$,
si cercheranno due numeri che diano
i) per somma il coefficiente centrale (b)
ii) e per prodotto il termine noto (c).
Trovati i due numeri, la scomposizione sarà immediata:
$(\boldsymbol{x+\textit{il 1° numero}})(\boldsymbol{x+\textit{il 2° numero}})$

♥ *Questa scomposizione interviene in svariatissimi ambiti matematici.*
Ti accorgerai che compare continuamente negli esercizi!
... Ma è facile:
(la lettera + il primo numero)
moltiplicato
(la lettera + il secondo numero).
Se poi ti abitui, almeno all'inizio, a ricontrollare ogni volta, rieseguendo la moltiplicazione fra i due binomi ottenuti e riducendo i termini simili, per vedere se in effetti si riottene il trinomio di partenza, non sbaglierai mai!

Schematicamente:

dato il trinomio "speciale" x^2+bx+c
se n_1, n_2 sono tali che $n_1+n_2=b$ e $n_1\cdot n_2=c$,
allora
$$x^2+bx+c=(x+n_1)(x+n_2)$$
perché
$$(x+n_1)(x+n_2)=x^2+n_1x+n_2x+n_1n_2=x^2+\underbrace{(n_1+n_2)}_{b}x+\underbrace{n_1n_2}_{c}=x^2+bx+c$$

Qualche altro esempio:

d) $x^2+5x-24=(x+8)(x-3)$ $\quad s=5,\ p=-24\ \rightarrow\ 8,\ -3$

e) $y^2+7y+6=(y+1)(y+6)$ $\quad s=7,\ p=6\ \rightarrow\ 1,\ 6$

f) $b^2-b-6=(b-3)(b+2)$ $\quad s=-1,\ p=-6\ \rightarrow\ -3,\ 2$

g) $a^3+a^2-2a=a(a^2+a-2)=a(a+2)(a-1)$ $\quad s=1,\ p=-2\ \rightarrow\ 2,\ -1$

B) TRINOMIO "NON SPECIALE" $\boxed{\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c},\quad \mathbf{a}\neq 1}$

Un **trinomio di 2° grado "non speciale"** è un'espressione della forma $\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$, con $\mathbf{a}\neq 1$.
La fattorizzazione è più laboriosa rispetto a quella del trinomio "speciale", perché non basta un solo passaggio!
Innanzitutto si cercano due numeri la cui somma algebrica sia uguale al coefficiente centrale ($\mathbf{b}$) e il cui prodotto sia uguale al prodotto fra il primo coefficiente e l'ultimo ($\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$).
Tali due numeri serviranno a spezzare il termine centrale nella somma algebrica di due termini; dopodiché, si procederà per raccoglimenti parziali.

a) $3x^2+14x+8$

Si ha

$s=14,\quad p=3\cdot 8=24$

per cui i due numeri sono 12 e 2.

Quindi

$3x^2+14x+8=$

$=3x^2+12x+2x+8=$

$=3x(x+4)+2(x+4)=$

$=(x+4)(3x+2)$

PERCHÉ MAI i due numeri si scelgono in modo che la loro somma sia uguale al coefficiente centrale b e il loro prodotto sia uguale ad $a\cdot c$?

Beh, che la loro somma algebrica debba dare b è del tutto ovvio, dato che di questi due numeri ci si vuole servire per spezzare il termine centrale bx nella somma algebrica di due termini.
Il fatto invece che il loro prodotto debba dare $a\cdot c$ è assai meno banale.

Ma riflettiamo:
noi vogliamo determinare i due numeri in modo tale che, dopo lo spezzamento del termine centrale, si riesca ad operare per raccoglimenti parziali;
ora, una scomposizione per raccoglimenti parziali è effettuabile solo se c'è una certa regolarità nella successione dei coefficienti.
Ad esempio, di fronte alla situazione

$$3x^2+6x+8x+8$$

NON sarebbe assolutamente possibile procedere per raccoglimenti parziali!
Invece di fronte a

$$3x^2+12x+2x+8$$

raccoglimenti parziali "funziona" in quanto
3 è la quarta parte di 12 e contemporaneamente 2 è la quarta parte di 8 …
insomma, "funziona" perché i numeri $3, 12, 2, 8$
formano, nell'ordine, una PROPORZIONE!!! $3:12=2:8$

Quindi, i due numeri n_1, n_2 che cerchiamo dovranno essere tali che il trinomio ax^2+bx+c si possa riscrivere come $ax^2+n_1x+n_2x+c$
E INOLTRE CHE valga la proporzione $a:n_1=n_2:c$.

E **una proporzione è corretta se e solo se il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi**!!!
Perciò, affinché la proporzione sussista, dovrà essere $\underbrace{n_1\cdot n_2}_{\substack{\textit{prodotto}\\ \textit{dei}\\ \textit{medi}}} = \underbrace{a\cdot c}_{\substack{\textit{prodotto}\\ \textit{degli}\\ \textit{estremi}}}$

b) $6a^2-7a-5$

$s=-7,\quad p=6\cdot(-5)=-30\ \to\ \boxed{-10,\ 3}$

$6a^2-7a-5=6a^2-10a+3a-5=2a(3a-5)+(3a-5)=(3a-5)(2a+1)$

c) $20y^4-26y^3+6y^2=2y^2(10y^2-13y+3)$

$s=-13,\quad p=10\cdot 3=30\ \to\ \boxed{-10,\ -3}$

$20y^4-26y^3+6y^2=$

$=2y^2(10y^2-13y+3)=$

$=2y^2(10y^2-10y-3y+3)=2y^2[10y(y-1)-3(y-1)]=2y^2(y-1)(10y-3)$

C) VARIANTI DEL TRINOMIO "SPECIALE"

a) x^4-7x^2+12 (**TRINOMIO BIQUADRATICO**)

Esponenti raddoppiati; trinomio che è detto **"**BIQUADRATICO**"**, per la presenza di due quadrati: x^2 e $x^4=\left(x^2\right)^2$.

Se riscriviamo nella forma

$$\left(x^2\right)^2-7x^2+12$$

osserveremo chiaramente come **"al posto di x abbiamo x^2"**.
Basterà allora **comportarsi come se il ruolo di x venisse preso da x^2!**
E la scomposizione sarà immediata:

$$\left(x^2+\mathit{il}\ 1°\ \mathit{numero}\right)\left(x^2+\mathit{il}\ 2°\ \mathit{numero}\right)$$

$$\boxed{x^4-7x^2+12=\left(x^2-3\right)\left(x^2-4\right)}=\left(x^2-3\right)(x+2)(x-2)$$

Volendo, possiamo pensare a una sostituzione: poniamo $\boxed{x^2=t}$ e …

$$x^4-7x^2+12=$$
$$=\left(x^2\right)^2-7x^2+12=$$
$$\underset{x^2=t}{=}t^2-7t+12=$$
$$=(t-3)(t-4)=$$
$$=\left(x^2-3\right)\left(x^2-4\right)$$

b) $\boxed{x^6-5x^3-14=\left(x^3-7\right)\left(x^3+2\right)}$ Caso analogo al precedente: basta pensare di avere x^3 al posto di x

c) $a^2+9ab+20b^2$ (**TRINOMIO DI 2° GRADO OMOGENEO**)

Qui interviene **una seconda lettera, armoniosamente disposta**, cosicché il trinomio risulta OMOGENEO (= tutti i termini hanno lo stesso grado).
Per scomporre, basta per un istante pensare che la seconda lettera … non ci sia! Noi troveremo i due numeri, quindi scomporremo, e infine inseriremo la seconda lettera alla destra dei due numeri.

$$\boxed{a^2+9ab+20b^2=(a+4b)(a+5b)}$$

Se non ci fosse b, avremmo
$a^2+9a+20=$
$=(a+4)(a+5)$
Basta scrivere $4b$, $5b$ anziché 4, 5 e il gioco è fatto.
Esegui la moltiplicazione per controllare!

d) $\boxed{a^2b^2+ab-12=(ab+4)(ab-3)}$ Eccoci ritornati a una situazione in cui al posto di una singola lettera abbiamo un "blocco" (in questo caso, ab)

e) $\boxed{x^4-2x^2y^2-3y^4=\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-3y^2\right)}$ E' un caso "misto" (trinomio biquadratico omogeneo). Nelle situazioni più complicate di quelle "standard" ci si affida all'intuizione … e alla *verifica*, eseguita *rimoltiplicando*.

D) VARIANTI DEL TRINOMIO "NON SPECIALE"

Sono facilissime in quanto si opera esattamente come per il trinomio non speciale standard:
i) ricerca dei due numeri (somma = coefficiente centrale, prodotto = prodotto fra gli altri due coeff.);
ii) spezzamento del termine centrale;
iii) raccoglimenti parziali.

f) $2x^4+x^2-3=2x^4+3x^2-2x^2-3=x^2\left(2x^2+3\right)-\left(2x^2+3\right)=\left(2x^2+3\right)\left(x^2-1\right)=\left(2x^2+3\right)(x+1)(x-1)$

g) $48a^2-14ab+b^2=48a^2-6ab-8ab+b^2=6a(8a-b)-b(8a-b)=(8a-b)(6a-b)$

UN UNICO PROCEDIMENTO PER IL TRINOMIO "SPECIALE" E IL "NON SPECIALE"?

La fattorizzazione di un trinomio di 2° grado parte sempre dalla "ricerca dei due numeri"; il criterio di ricerca è però diverso a seconda che il trinomio sia "speciale" (= con 1° coeff. unitario) o "non speciale", e la procedura successiva è pure diversa (scomposizione immediata per il trinomio speciale, più passaggi per l'altro).

A dire il vero, **sarebbe possibile unificare i due procedimenti** e dire che, in entrambi i casi, si tratta di:
i) cercare 2 numeri che devono dare per somma il coeff. centrale e per prodotto il prodotto fra il 1° e l'ultimo coeff. (nel caso del trinomio speciale, tale prodotto andrà a coincidere con l'ultimo coefficiente);
ii) utilizzarli per spezzare il termine centrale nella somma algebrica di due termini;
iii) procedere per raccoglimenti parziali.

Ad esempio, il trinomio speciale $x^2+16x+48$, dopo aver trovato i due numeri, ossia 4 e 12, potrebbe essere scomposto facendo $x^2+16x+48=x^2+4x+12x+48=x(x+4)+12(x+4)=(x+4)(x+12)$.

Si capisce però che **tale procedimento, per il trinomio speciale, sarebbe più lungo**:
e data la frequenza con cui capita, in situazioni matematiche svariate, di dover scomporre un trinomio speciale, **vale decisamente la pena, per il trinomio speciale, di abituarsi a scomporlo in un solo passaggio.**

ESERCIZI (scomposizione di un trinomio di 2° grado, e varianti)

1) $x^2+11x+24$	2) $x^2-2x-15$	3) $x^2-9x+20$	4) x^2+x-12
5) $y^2-9y+18$	6) t^2-t-30	7) $a^2+18a+72$	8) $b^2-5b-24$
9) x^2+3x+2	10) x^2-3x+2	11) x^2+x-2	12) x^2-x-2
13) y^2-5y+6	14) y^2-y-6	15) y^2-7y+6	16) y^2-y+6
17) $e^2+102e+101$	18) $e^2-100e-101$	19) $x^2-40x+384$	20) $a^2+8a-128$
21) $x^2-24x+143$	22) $w^2-18w+81$	23) $2a^2-8a+6$	24) $a^4+10a^3+25a^2$
25) x^4-x^2-2	26) y^8-y^4-2	27) $a^2-ab-2b^2$	28) a^2b^2-ab-2
29) x^4-11x^2+28	30) x^6-5x^3+6	31) $x^2+xy-6y^2$	32) $x^{2n}-7x^n+12$
33) z^6+5z^3-14	34) $x^4-x^2y^2-12y^4$	35) $x^2+7ax+12a^2$	36) $a^{2k}-2a^kb-48b^2$
37) $6x^2-5x+1$	38) $8a^2-2a-3$	39) $6b^2+35b-6$	40) $3x^2+x-2$
41) $6t^2-15t+6$	42) $3x^4+5x^2-12$	43) $2a^2-3ab+b^2$	44) $5x^2y^2-6xy+1$
45) $129x^2+200x+71$	46) $4x^4-13x^2+3$	47) $6a^2-19ac+10c^2$	48) $2a^2x^2-5ax-7$
49) $6y^2-23y-29$	50) $9y^4+10y^2+1$	51) $12x^2-13xy+y^2$	52) $2a^2b^2+ab-1$
53) $43a^2-11a-32$	54) $3x^{10}-10x^5+3$	55) $12a^4-8a^2b+b^2$	56) $9x^2-12x+4$
57) $5t^{2k}+17t^k+6$	58) $4a^4-5a^2b^2+b^4$	59) $16m^4-8m^2+1$	60) $9k^4+12k^3+3k^2$

RISULTATI

1) $(x+3)(x+8)$	2) $(x-5)(x+3)$	3) $(x-4)(x-5)$	4) $(x+4)(x-3)$
5) $(y-3)(y-6)$	6) $(t-6)(t+5)$	7) $(a+6)(a+12)$	8) Rimoltiplica!
9) $(x+1)(x+2)$	10) $(x-1)(x-2)$	11) $(x+2)(x-1)$	12) $(x-2)(x+1)$
13) $(y-3)(y-2)$	14) $(y-3)(y+2)$	15) $(y-1)(y-6)$	16) Non scomponibile
17) $(e+1)(e+101)$	18) $(e+1)(e-101)$	19) $(x-24)(x-16)$	20) $(a+16)(a-8)$
21) $(x-11)(x-13)$	22) $(w-9)^2$	23) $2(a-1)(a-3)$	24) $a^2(a+5)^2$
25) $(x^2-2)(x^2+1)$	26) $(y^4-2)(y^4+1)$	27) $(a-2b)(a+b)$	28) $(ab-2)(ab+1)$
29) $(x+2)(x-2)(x^2-7)$	30) $(x^3-2)(x^3-3)$	31) $(x+3y)(x-2y)$	32) $(x^n-3)(x^n-4)$
33) $(z^3+7)(z^3-2)$	34) $(x+2y)(x-2y)(x^2+3y^2)$	35) $(x+3a)(x+4a)$	36) $(a^k-8b)(a^k+6b)$
37) $(2x-1)(3x-1)$	38) $(4a-3)(2a+1)$	39) $(b+6)(6b-1)$	40) $(x+1)(3x-2)$
41) $3(t-2)(2t-1)$	42) $(x^2+3)(3x^2-4)$	43) $(a-b)(2a-b)$	44) $(xy-1)(5xy-1)$
45) $(x+1)(129x+71)$	46) $(x^2-3)(2x+1)(2x-1)$	47) $(3a-2c)(2a-5c)$	48) $(ax+1)(2ax-7)$
49) $(y+1)(6y-29)$	50) $(9y^2+1)(y^2+1)$	51) $(12x-y)(x-y)$	52) $(2ab-1)(ab+1)$
53) $(a-1)(43a+32)$	54) $(x^5-3)(3x^5-1)$	55) $(6a^2-b)(2a^2-b)$	56) $(3x-2)^2$
57) $(t^k+3)(5t^k+2)$	58) $(a+b)(a-b)(2a+b)(2a-b)$	59) $(2m+1)^2(2m-1)^2$	60) $3k^2(k+1)(3k+1)$

IL PROBLEMA GENERALE DELLA FATTORIZZAZIONE DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO

Gli esercizi di questa pagina coinvolgono (a parte la singola eccezione del n. 16) trinomi "buoni buoni", che si lasciano tranquillamente fattorizzare nel prodotto di due binomi di 1° grado a coefficienti interi.

Il problema generale della fattorizzazione di un trinomio di secondo grado verrà risolto nel capitolo del Volume 2 riguardante le equazioni di secondo grado. Si vedrà allora che esiste una **formula**, la quale permette di scomporre un qualsivoglia trinomio di 2° grado assegnato, oppure eventualmente di riconoscere la sua non scomponibilità.

Si constaterà che la fattorizzazione di un trinomio di secondo grado può richiedere l'utilizzo di coefficienti irrazionali, anche se i coefficienti del trinomio erano interi: tanto per fare un esempio, il trinomio x^2-4x+1 si scompone in $(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$.

Si dimostrerà infine che certi trinomi, quali ad es. x^2-x+4, non sono in alcun modo fattorizzabili, a meno di ricorrere, per i coefficienti dei due fattori di 1° grado, ai cosiddetti "numeri complessi".

5. SCOMPOSIZIONE DI UNA DIFFERENZA DI QUADRATI NON BANALE

Sono piuttosto frequenti, e importanti nella pratica del calcolo,
situazioni nelle quali occorre fattorizzare una differenza di quadrati "non banale".
Dicendo "non banale" mi riferisco al fatto che le due espressioni elevate al quadrato
non sono entrambe dei semplici monomi, ma almeno una di esse è un polinomio.
Gli esempi che seguono illustrano come procedere in questi casi.

a) $x^2+2x-y^2+1=\left(x^2+2x+1\right)-y^2=\left(x+1\right)^2-y^2 \overset{\text{differenza quadrati}}{\underset{\text{somma basi} \times \text{diff. basi}}{=}} \left(x+1+y\right)\left(x+1-y\right)$

b) $a^2-b^2-2bc-c^2=a^2-\left(b^2+2bc+c^2\right)=a^2-\left(b+c\right)^2=\left[a+\left(b+c\right)\right]\cdot\left[a-\left(b+c\right)\right]=\left(a+b+c\right)\left(a-b-c\right)$

c) $t^4-16t^2+24t-9=t^4-\left(16t^2-24t+9\right)=$
$=\left(t^2\right)^2-\left(4t-3\right)^2=\left[t^2+\left(4t-3\right)\right]\left[t^2-\left(4t-3\right)\right]=$
$=\underbrace{(t^2+4t-3)}_{\downarrow}(t^2-4t+3)=(t^2+4t-3)(t-1)(t-3)$

non scomponibile
per tentativi (NOTA 1)

NOTA 1
Il trinomio t^2+4t-3 non è scomponibile per tentativi,
ma sarebbe scomponibile conoscendo l'apposita
formula di scomposizione, che porterebbe a ottenere
$t^2+4t-3=\left(t+2+\sqrt{7}\right)\left(t+2-\sqrt{7}\right)$

d) $t^4-4t^3+4t^2-64=$
$=\left(t^2-2t\right)^2-64=$
$=\underbrace{(t^2-2t+8)}_{\downarrow}(t^2-2t-8)=$

NON
scomponibile
(NOTA 2)

$=(t^2-2t+8)(t-4)(t+2)$

NOTA 2 - Per vedere se un trinomio di 2° grado assegnato ax^2+bx+c è fattorizzabile, basta calcolare la quantità b^2-4ac
(detta "il **discriminante**" o "il **delta**" del trinomio).

- Se b^2-4ac è un quadrato perfetto,
  il trinomio è fattorizzabile per tentativi elementari
- Se $b^2-4ac>0$, ma b^2-4ac *non* è un quadrato perfetto, il trinomio
  è fattorizzabile, ma non per tentativi elementari
- Se $b^2-4ac<0$, il trinomio non è fattorizzabile
  (a meno di ricorrere ai cosiddetti "numeri complessi")
- Se $b^2-4ac=0$, il trinomio è uguale al quadrato di un binomio,
  eventualmente moltiplicato per una costante.

Es.: sarà fattorizzabile il trinomio $6x^2-x-2$? Vediamo:
$b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 6\cdot(-2)=1+48=49$, e 49 è un quadrato perfetto.
Allora il trinomio è fattorizzabile per tentativi elementari.

e) $a^2+b^2+c^2-d^2-e^2-2ab-2ac+2bc-2de=$
$=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc-d^2-e^2-2de=\left(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc\right)-\left(d^2+e^2+2de\right)=$
$=\left(a-b-c\right)^2-\left(d+e\right)^2=\left(a-b-c+d+e\right)\left(a-b-c-d-e\right)$

IL "METODO DEL COMPLETAMENTO DEL QUADRATO"

E' un metodo che dobbiamo conoscere perché viene utilizzato, in matematica, in diversi ambiti rilevanti
(ad es., vedremo che interviene nella *costruzione della formula risolutiva delle equazioni di 2° grado*)

I) $\underbrace{x^2+2x}$ $-143=x^2+2x+1-144=\left(x+1\right)^2-144=\left(x+1+12\right)\left(x+1-12\right)=\left(x+13\right)\left(x-11\right)$

un buon inizio
per un quadrato
di binomio!!! ...
Se avessimo anche
un +1 finale ...

II) $9a^2-12a-437=9a^2-12a+4-441=\left(3a-2\right)^2-21^2=\left(3a-2+21\right)\left(3a-2-21\right)=\left(3a+19\right)\left(3a-23\right)$

III) $x^4+x^2+1=x^4+2x^2-x^2+1=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2+1+x\right)\left(x^2+1-x\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

IV) $\underset{\left(5a^2\right)^2}{25a^4}\boxed{-24a^2}\underset{2^2}{+4}=25a^4\boxed{-20a^2}\boxed{-4a^2}+4=\left(5a^2-2\right)^2-\left(2a\right)^2=\left(5a^2+2a-2\right)\left(5a^2-2a-2\right)$

doppio prodotto
($+20\,a^2-44\,a^2$
non avrebbe
"funzionato"...)

Gli ultimi due esempi mostrano come il metodo del completamento del quadrato possa consentire
(non sempre, ma almeno in determinati casi)
di fattorizzare un **trinomio biquadratico, "resistente"** alla scomposizione con altri metodi.

ESERCIZI (scomposizione di una differenza di quadrati non banale)

1) $a^2+2ab+b^2-49$ 2) $a^2-2ab+b^2-49$ 3) x^2-a^2-2a-1 4) x^2-a^2+2a-1
5) $x^2+2xy+y^2-4t^2$ 6) $49x^2-a^2-2ab-b^2$ 7) $25b^2-10b+1-4c^2$
8) a^2-b^2+6b-9 9) $x^2+y^2-z^2-2xy+2z-1$ 10) $a^2-b^2-c^2+2bc-2b+2c-1$
11) $18a^2+8b^2-24ab-2$ 12) $2xy-x^2-y^2+9$ 13) $9t^2-6t+1-a^2$
14) x^2-y^2-2y-1 15) a^4-a^2+4a-4 16) $x^2+y^2+1+2xy+2x+2y-z^2$
17) $b^2c^2-b^2-c^2-1+2bc+2b-2c$ 18) e^4-4e^2+4e-1
19) $e^4-4e^2-12e-9$ 20) $36e^4-e^2+2e-1$ 21) $a^{2t}-2a^t+1-b^2$
22) $a^{4k}-9a^{2k}+12a^k-4$ 23) $x^{16}-25x^8+40x^4-16$ 24) $25a^2+10ab+b^2-49c^2$
25) $y^{10}-y^6+4y^4-4y^2$ 26) $a^4+2a^3+a^2-9$ 27) $p^2(2p-1)^2-1$

Scomporre col **metodo del COMPLETAMENTO DEL QUADRATO**:

28) $c^2-6c-91$ in due modi:
   A. completamento del quadrato
   B. "trinomio speciale"

29) $x^2+40x+399$

30) $9y^2-6y-899$

31) $4x^4+4x^2-15$ in due modi:
   A. completamento del quadrato
   B. "trinomio non speciale" (variante)

32) $x^4+5x^2+9=x^4+6x^2-x^2+9=\ldots$

33) $x^4-31x^2+9=x^4-6x^2-25x^2+9=\ldots$

34) y^4-3y^2+1

35) $4t^4+11t^2+9$

36) $4a^4-37a^2b^2+9b^4$ addirittura in TRE modi!!!

37) $a^8+a^6+a^4$

Da http://betterlesson.com

Homework

Complete the square
for each expression.
Write the resulting expression
as a binomial squared.

$x^2-18x+\square$

$x^2+10x+\square$

$x^2-\frac{1}{2}x+\square$

RISULTATI

1) $(a+b+7)(a+b-7)$ 2) $(a-b+7)(a-b-7)$ 3) $(x+a+1)(x-a-1)$ 4) $(x+a-1)(x-a+1)$
5) $(x+y+2t)(x+y-2t)$ 6) $(7x+a+b)(7x-a-b)$ 7) $(5b-1+2c)(5b-1-2c)$
8) $(a+b-3)(a-b+3)$ 9) $(x-y+z-1)(x-y-z+1)$ 10) $(a+b-c+1)(a-b+c-1)$
11) $2(3a-2b+1)(3a-2b-1)$ 12) $(3+x-y)(3-x+y)$ 13) $(3t-1+a)(3t-1-a)$
14) $(x+y+1)(x-y-1)$ 15) $(a+2)(a-1)(a^2-a+2)$ 16) $(x+y+1+z)(x+y+1-z)$
17) $(c+1)(b-1)(bc-b+c+1)$ 18) $(e^2+2e-1)(e-1)^2$ 19) $(e^2+2e+3)(e-3)(e+1)$
20) $(3e-1)(2e+1)(6e^2-e+1)$ 21) $(a^t-1+b)(a^t-1-b)$ 22) $(a^{2k}+3a^k-2)(a^k-2)(a^k-1)$
23) $(x^2+1)(x+1)(x-1)(x^2+2)(x^2-2)(x^8+5x^4-4)$ 24) $(5a+b+7c)(5a+b-7c)$
25) $y^2(y^2+2)(y+1)(y-1)(y^4-y^2+2)$ 26) $(a^2+a+3)(a^2+a-3)$
27) $[p(2p-1)]^2-1=\ldots=(2p^2-p+1)(p-1)(2p+1)$
28) $(c+7)(c-13)$ 29) $(x+21)(x+19)$ 30) $(3y+29)(3y-31)$ 31) $(2x^2+5)(2x^2-3)$
32) $(x^2+x+3)(x^2-x+3)$ 33) $(x^2+5x-3)(x^2-5x-3)$
34) $(y^2+y-1)(y^2-y-1)$ 35) $(2t^2+t+3)(2t^2-t+3)$ 36) $(2a+b)(2a-b)(a+3b)(a-3b)$
37) $a^8+a^6+a^4=a^4(a^4+a^2+1)=a^4(a^4+2a^2-a^2+1)=\ldots=a^4(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

6. SCOMPOSIZIONE DI UNA SOMMA E DI UNA DIFFERENZA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO

A) DIFFERENZA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO DISPARI

Per fattorizzare una differenza di due potenze di ugual grado dispari,
si applicano le formule seguenti:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$
$$a^7-b^7=(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)$$
... *ecc.* ...

La validità di queste formule può essere verificata rieseguendo la moltiplicazione a secondo membro: si constaterà che si riottene esattamente l'espressione a primo membro.
Ad esempio: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3\cancel{+a^2b}\cancel{+ab^2}\cancel{-a^2b}\cancel{-ab^2}-b^3=a^3-b^3$, OK

Va detto che esiste anche *un metodo generale* per "costruire" tutta questa famiglia di formule (così come l'altra famiglia, che vedremo subito dopo, relativa alla *somma* di due potenze di ugual grado). Tale metodo generale presuppone, per poter essere compreso, la conoscenza della tecnica di fattorizzazione "alla Ruffini"; ce ne occuperemo perciò successivamente al paragrafo ad essa dedicato.

Esempi di applicazione:

a) $27x^3-125=(3x)^3-5^3=(3x-5)(9x^2+15x+25)$

b) $a^6-\dfrac{1}{8}=(a^2)^3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\left(a^2-\dfrac{1}{2}\right)\left(a^4+\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{4}\right)$

c) $32t^5-1=(2t)^5-1=(2t-1)(16t^4+8t^3+4t^2+2t+1)$

B) SOMMA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO DISPARI

Per fattorizzare una somma di due potenze di ugual grado dispari,
si applicano le formule che seguono:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$
$$a^7+b^7=(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$$
... *ecc.* ...

Verifichiamo, ad esempio, la formula per la scomposizione di una somma di cubi:
$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3\cancel{-a^2b}\cancel{+ab^2}\cancel{+a^2b}\cancel{-ab^2}+b^3=a^3+b^3$, OK

NOTA

♥ **I trinomi** $a^2\pm ab+b^2$
che "escono" dalla scomposizione di una somma o di una differenza di cubi
sono anche chiamati "i **falsi quadrati**",
perché "assomigliano" al quadrato di un binomio,
se non fosse per il fatto che mancano del doppio prodotto $2ab$,
rimpiazzato invece dal "prodotto semplice" ab.

♥ **Tali "falsi quadrati" in generale non sono scomponibili**;
lo sono soltanto eccezionalmente, e comunque a patto che gli esponenti in gioco siano "alti".
Capiterà di imbattersi in qualche caso di questo tipo più avanti.

Esempi di applicazione:

d) $125y^3+8=(5y)^3+2^3=(5y+2)(25y^2-10y+4)$

e) $t^5+100000=t^5+10^5=(t+10)(t^4-10t^3+100t^2-1000t+10000)$

f) $b^7+1=b^7+1^7=(b+1)(b^6-b^5+b^4-b^3+b^2-b+1)$

C) DIFFERENZA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO PARI

Una differenza di due potenze di ugual grado pari è spesso interpretabile in più modi diversi; tuttavia, fra le possibili interpretazioni, c'è anche quella di "vederla" come una differenza di quadrati. E' l'interpretazione più semplice, ed è senza dubbio quella che conviene privilegiare, in un'ottica di scomposizione in fattori, perché porta alle situazioni algebriche più comode.

Consideriamo il seguente esempio:

$x^6-64y^6=$
- **i)** $\left(x^3\right)^2-\left(8y^3\right)^2$ (L'INTERPRETAZIONE PIU' CONVENIENTE PER UNA SCOMPOSIZIONE!!!)
- **ii)** $\left(x^2\right)^3-\left(4y^2\right)^3$ interpretazione possibile, ma poi la scomposizione sarebbe laboriosa ...
- **iii)** $x^6-\left(2y\right)^6$ interpretazione possibile, ma poi la scomposizione sarebbe laboriosa ...

i) $$x^6-64y^6=\left(x^3\right)^2-\left(8y^3\right)^2=$$
$$\underset{\substack{\text{differenza}\\\text{di quadrati}}}{=}\left(x^3+8y^3\right)\left(x^3-8y^3\right)=$$
$$\underset{\substack{\text{somma e}\\\text{differenza}\\\text{di cubi}}}{=}\left(x+2y\right)\left(x^2-2xy+4y^2\right)\left(x-2y\right)\left(x^2+2xy+4y^2\right)$$

Se si interpreta come **differenza di quadrati**, tutto fila liscio come l'olio: la scomposizione risulta facilissima

ii) $$x^6-64y^6=\left(x^2\right)^3-\left(4y^2\right)^3=$$
$$\underset{\substack{\text{differenza}\\\text{di cubi}}}{=}\left(x^2-4y^2\right)\left(x^4+4x^2y^2+16y^4\right)=$$
$$=\left(x+2y\right)\left(x-2y\right)\left(x^4+8x^2y^2-4x^2y^2+16y^4\right)=$$
$$=\left(x+2y\right)\left(x-2y\right)\left[\left(x^2+4y^2\right)^2-4x^2y^2\right]=$$
$$=\left(x+2y\right)\left(x-2y\right)\left(x^2+4y^2+2xy\right)\left(x^2+4y^2-2xy\right)$$

Se si interpreta come **differenza di cubi**, la scomposizione è molto più difficoltosa: si ottiene un trinomio biquadratico omogeneo, che si riesce a scomporre soltanto col metodo del completamento del quadrato

iii) $$x^6-64y^6=x^6-\left(2y\right)^6=$$
$$=\left(x-2y\right)\left(x^5+2x^4y+4x^3y^2+8x^2y^3+16xy^4+32y^5\right)=$$
$$=\left(x-2y\right)\left[x^4\left(x+2y\right)+4x^2y^2\left(x+2y\right)+16y^4\left(x+2y\right)\right]=$$
$$=\left(x-2y\right)\left(x+2y\right)\left(x^4+4x^2y^2+16y^4\right)=$$
$$\underset{\substack{\text{come}\\\text{sopra}}}{=}\left(x-2y\right)\left(x+2y\right)\left(x^2+4y^2+2xy\right)\left(x^2+4y^2-2xy\right)$$

Se si interpreta come differenza di seste potenze, si ricorrerà alla formula (pag. 238)
$$a^6-b^6=\left(a-b\right)\left(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5\right)$$
La scomposizione è lunga e pesante: si effettuano dei raccoglimenti parziali, poi si applica il metodo del completamento del quadrato come nell'interpretazione precedente

D) SOMMA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO PARI

Una somma di due potenze di ugual grado pari NON è scomponibile, A MENO CHE si possa interpretare pure come somma di due potenze di ugual grado dispari.

a^2+b^2 NON SCOMPONIBILE	$a^{10}+b^{10}=\left(a^2\right)^5+\left(b^2\right)^5=\ldots$
a^4+b^4 NON SCOMPONIBILE	$a^{12}+b^{12}=\left(a^4\right)^3+\left(b^4\right)^3=\ldots$
$a^6+b^6=\left(a^2\right)^3+\left(b^2\right)^3=\left(a^2+b^2\right)\left(a^4-a^2b^2+b^4\right)$	$a^{14}+b^{14}=\left(a^2\right)^7+\left(b^2\right)^7=\ldots$
a^8+b^8 NON SCOMPONIBILE	$a^{16}+b^{16}$ NON SCOMP.

Alla fin dei conti, la "non scomponibilità" è limitata ai soli casi in cui l'esponente è una potenza di 2 e quindi, se scomposto in fattori primi, non contiene fattori dispari.

Esempio: $x^6+64y^6=\left(x^2\right)^3+\left(4y^2\right)^3\underset{\substack{\text{somma}\\\text{di cubi}}}{=}\left(x^2+4y^2\right)\left(x^4-4x^2y^2+16y^4\right)$

Ricapitolazione compatta delle formule

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$
$$a^5 \pm b^5 = (a \pm b)(a^4 \mp a^3b + a^2b^2 \mp ab^3 + b^4)$$
$$a^7 \pm b^7 = (a \pm b)(a^6 \mp a^5b + a^4b^2 \mp a^3b^3 + a^2b^4 \mp ab^5 + b^6)$$
$$\ldots$$

Quando si usa il *doppio segno*
in ambo i membri di un'uguaglianza
si intende che si devono leggere:
una prima volta, tutti i segni "sopra";
una seconda volta, tutti i segni "sotto"

Esempi vari sulla scomposizione di una somma o differenza di due potenze di ugual grado

- $375z^3 - 3 = 3(125z^3 - 1) = 3(5z-1)(25z^2 + 5z + 1)$

- $x^{13} - x = x(x^{12} - 1) = x(x^6+1)(x^6-1) = x\left[(x^2)^3 + 1\right](x^3+1)(x^3-1) =$
  $= x(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1) =$
  $\underset{\substack{riordinando,\\ solo\ per\\ eleganza}}{=} x(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)$

- $t^{13} - t^9 - t^6 + t^2 = t^2(t^{11} - t^7 - t^4 + 1) = t^2\left[t^7(t^4-1) - (t^4-1)\right] =$
  $= t^2(t^4-1)(t^7-1) = t^2(t^2+1)(t^2-1)(t-1)(t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1) =$
  $= t^2(t^2+1)(t+1)(t-1)^2(t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)$

- $a^{10} + 1024 = a^{10} + 2^{10} = (a^2)^5 + 4^5 = (a^2+4)(a^8 - 4a^6 + 16a^4 - 64a^2 + 256)$

ESERCIZI (scomposizione di una somma o differenza di due potenze di ugual grado)

1)	x^3-8	2)	x^3+8
3)	$8x^3-27y^3$	4)	$8x^3+27y^3$
5)	$\frac{1}{8}t^3-1$	6)	$\frac{1}{8}t^3+1$
7)	a^5-32	8)	a^5+32
9)	x^4-16	10)	x^5-y^{10}
11)	$1-a^{14}$	12)	$x^{13}+xy^3$
13)	x^6-y^6	14)	x^6+y^6
15)	x^8-y^8	16)	x^8+y^8
17)	t^6-64	18)	t^6+64
19)	a^3b^3-27	20)	a^3b^3+27
21)	$\frac{1}{8}a^3 \pm \frac{1}{27}b^3$	22)	$32b^5 \pm \frac{1}{32}$
23)	$a^{12}-1$	24)	$a^{16}-1$
25)	$a^{12}+1$	26)	$a^{16}+1$
27)	$54x^6+250$	28)	$8a^{3k}-b^{3n}$
29)	$81-h^4$	30)	$c-c^4$
31)	$81+h^4$	32)	α^9-1
33)	$8m^5+m^2$	34)	$a^{3k+4}-a$
35)	$1+\ell^5$	36)	$36b^2-49$
37)	$36b^2+49$	38)	$a^7-a^4-a^3+1$
39)	a^6-9a^3+8	40)	$8a^6+9a^3+1$

Dal sito www.purplemath.com:
The other two special factoring formulas
are two sides of the same coin:
the sum and difference of cubes.
These are the formulas:
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
Some people use the mnemonic "SOAP" for the signs;
the letters stand for
"Same" as the sign in the middle
of the original expression,
"Opposite" sign,
and "Always Positive".
$a^3 \pm b^3 =$
$= (a$ [same sign] $b)(a^2$ [opposite sign] ab [always positive] $b^2)$

RISULTATI

1) $(x-2)(x^2+2x+4)$
2) $(x+2)(x^2-2x+4)$
3) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$
4) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$
5) $\left(\frac{1}{2}t-1\right)\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+1\right)$
6) $\left(\frac{1}{2}t+1\right)\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t+1\right)$
7) $(a-2)(a^4+2a^3+4a^2+8a+16)$
8) $(a+2)(a^4-2a^3+4a^2-8a+16)$
9) $(x^2+4)(x+2)(x-2)$
10) $(x-y^2)(x^4+x^3y^2+x^2y^4+xy^6+y^8)$
11) $(1+a)(1-a)(1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6)(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)$
12) $x(x^4+y)(x^8-x^4y+y^2)$
13) $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
14) $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
15) $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
16) Non scomponibile
17) $(t+2)(t^2-2t+4)(t-2)(t^2+2t+4)$
18) $(t^2+4)(t^4-4t^2+16)$
19) $(ab-3)(a^2b^2+3ab+9)$
20) $(ab+3)(a^2b^2-3ab+9)$
21) $\left(\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2\mp\frac{1}{6}ab+\frac{1}{9}b^2\right)$
22) $\left(2b\pm\frac{1}{2}\right)\left(16b^4\mp4b^3+b^2\mp\frac{1}{4}b+\frac{1}{16}\right)$
23) $(a^2+1)(a^4-a^2+1)(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)$
24) $(a^8+1)(a^4+1)(a^2+1)(a+1)(a-1)$
25) $(a^4+1)(a^8-a^4+1)$
26) Non scomponibile
27) $2(3x^2+5)(9x^4-15x^2+25)$
28) $(2a^k-b^n)(4a^{2k}+2a^kb^n+b^{2n})$
29) $(9+h^2)(3+h)(3-h)$
30) $c(1-c)(1+c+c^2)$
31) Non scomponibile
32) $(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^6+\alpha^3+1)$
33) $m^2(2m+1)(4m^2-2m+1)$
34) $a(a^{k+1}-1)(a^{2k+2}+a^{k+1}+1)$
35) $(1+\ell)(1-\ell+\ell^2-\ell^3+\ell^4)$
36) $(6b+7)(6b-7)$
37) Non scomponibile
38) $(a+1)(a-1)^2(a^2+1)(a^2+a+1)$
39) $(a-1)(a^2+a+1)(a-2)(a^2+2a+4)$
40) $(a+1)(a^2-a+1)(2a+1)(4a^2-2a+1)$

Le successive pagine 238-239 mostreranno che sussistono le seguenti formule:

$a^n-b^n=$
$=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+b^{n-1})$

QUALUNQUE SIA *n* = 3, 4, 5, 6,…
Perciò

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

$a^6-b^6=(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$

...

$a^n+b^n=$
$=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-...+b^{n-1})$

SOLO CON *n* DISPARI,
mentre con *n pari*,
non esiste *nessuna* formula del tipo

$a^n+b^n=(a+b)(..........)$

Perciò

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

...

7. SCOMPOSIZIONE IN FATTORI COL METODO DI RUFFINI

Ricordiamo innanzitutto il **TEOREMA DEL RESTO** (pag. 116), che dice:

"il resto della divisione $\mathbf{P(x):(x-k)}$ è uguale a $\mathbf{P(k)}$, cioè al numero che si ottiene sostituendo il numero *k* al posto di *x* nel polinomio dividendo, e svolgendo i calcoli"

Indicato quindi con $Q(x)$ il quoziente della divisione $P(x):(x-k)$, varrà l'identità:

$$\boxed{\mathbf{P(x)=}}\ Q(x)\cdot(x-k)+R=\boxed{\mathbf{Q(x)\cdot(x-k)+P(k)}}$$

A questo punto un occhio attento può cogliere un fatto apparentemente banale,
ma che in realtà porta con sé delle conseguenze molto importanti:
nel caso risulti $\mathbf{P(k)=0}$, l'identità diventa semplicemente $\mathbf{P(x)=Q(x)\cdot(x-k)}$.

Mumble, mumble … ma allora … con questa osservazione abbiamo scoperto che, nel caso in cui risulti $\mathbf{P(k)=0}$, il polinomio $\mathbf{P(x)}$ è scomponibile in fattori!
E precisamente, la sua scomposizione è il prodotto $Q(x)\cdot(x-k)$,
essendo $Q(x)$ il quoziente della divisione $P(x):(x-k)$!!!

**Pertanto, se abbiamo un polinomio $\mathbf{P(x)}$ da scomporre in fattori,
e non siamo riusciti nel nostro intento con nessuna delle tecniche precedentemente apprese,
potremmo fare un ultimo tentativo per la scomposizione:**
♥ **se riusciamo a trovare un numero $\mathbf{k}$ tale che $\mathbf{P(k)=0}$,
ossia un numero *k* che sostituito al posto della variabile *x* renda il valore di $\mathbf{P(x)}$ uguale a zero,
allora il polinomio $\mathbf{P(x)}$ sarà scomponibile, e precisamente sarà scomponibile
nel prodotto $\mathbf{Q(x)\cdot(x-k)}$, essendo $\mathbf{Q(x)}$ il quoziente della divisione $\mathbf{P(x):(x-k)}$.**

Ad esempio, sia da scomporre il polinomio $P(x)=3x^3+5x^2-16x-12$.
Si può constatare che questo polinomio **resiste a tutti i tentativi di scomposizione** con i "vecchi" metodi.
L' "ultima spiaggia" per tentare di scomporlo starà dunque nel cercare un numero *k* tale che P(*k*)=0: in breve, nel cercare uno "zero" del polinomio.

Negli esercizi proposti sui manuali scolastici il polinomio P(*x*) ha quasi sempre coefficienti interi, e anche la ricerca di *k* si limita, per semplicità, al solo campo dei numeri interi, o, al più, dei numeri razionali.

In tal caso (ripetiamo: **polinomio P(*x*) a coefficienti interi; ricerca del "*k*" nel solo ambito dei razionali) si può dimostrare che lo "zero" *k*, ammesso che esista, si deve trovare necessariamente fra quei numeri frazionari (o, in particolare, interi), che hanno**
♪ **a numeratore, un divisore del termine noto del polinomio P(*x*)**
♫ **e a denominatore, un divisore del 1° coefficiente di P(*x*)**

Via dunque con gli **ESEMPI**.

a) Vediamo come fare nel caso del polinomio inizialmente considerato $P(x)=3x^3+5x^2-16x-12$

- I **divisori del T. N.** sono i numeri $\pm1\ \ \pm2\ \ \pm3\ \ \pm4\ \ \pm6\ \ \pm12$
- i **divisori del 1° COEFF.** sono i numeri $\pm1\ \ \pm3$
  quindi i "**possibili zeri razionali**"
  (in pratica: i "numeri con cui provare a sostituire, sperando di ottenere 0"), saranno:
  $\pm1\ \ \pm2\ \ \pm3\ \ \pm4\ \ \pm6\ \ \pm12\ \ \pm\frac{1}{3}\ \ \pm\frac{2}{3}\ \ \pm\frac{4}{3}$

Si vede, col calcolo, che risulta $P(2)=0$.
Allora $P(x)$ sarà scomponibile nel prodotto $Q(x)\cdot(x-2)$
essendo $Q(x)$ il quoziente della divisione $P(x):(x-2)$.
Andiamo perciò a calcolare tale quoziente mediante la Regola di Ruffini.

$$\left(3x^3+5x^2-16x-12\right):\left(x-2\right)\qquad \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 5 & -16 & -12 \\ 2 & & 6 & 22 & 12 \\ \hline & 3 & 11 & 6 & 0 \end{array}\quad \to\ Q(x)=3x^2+11x+6$$

In definitiva $\boxed{3x^3+5x^2-16x-12=\left(3x^2+11x+6\right)\left(x-2\right)}\underset{\substack{trinomio\\ non\ speciale}}{=}\ \dots\ =\left(3x+2\right)\left(x+3\right)\left(x-2\right)$

Il polinomio ha finalmente "ceduto": evviva! Siamo riusciti a scomporlo!!!

b) Sotto ora con un nuovo polinomio: $P(a)=6a^4+7a^3+6a^2+3a-2$

La timida Marinella si sente in imbarazzo di fronte alla difficoltà di questo argomento. Dài, Marinella, coraggio! La teoria è complicata, senza dubbio, ma in compenso l'applicazione pratica, con un po' di esercizio, non è niente di speciale.

Divisori del T. N. : $\pm 1 \quad \pm 2$

Divisori del 1° COEFF. : $\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 6$

Possibili zeri razionali: $\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm\frac{1}{2} \quad \pm\frac{1}{3} \quad \pm\frac{2}{3} \quad \pm\frac{1}{6}$

$P(1)=6+7+6+3-2\neq 0;$

$P(-1)=6-7+6-3-2=0,\ \ OK$

$$\left(6a^4+7a^3+6a^2+3a-2\right):\underbrace{(a+1)}_{a-(-1)} \qquad \begin{array}{c|cccc|c} & 6 & 7 & 6 & 3 & -2 \\ -1 & & -6 & -1 & -5 & 2 \\ \hline & 6 & 1 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

$$6a^4+7a^3+6a^2+3a-2=\underbrace{\left(6a^3+a^2+5a-2\right)}_{\substack{\text{e questo sarà ora}\\ \text{il nostro nuovo } P(a)}}(a+1)$$

A questo punto, per scomporre il nuovo polinomio $6a^3+a^2+5a-2$, che per comodità indicheremo ancora col simbolo $P(a)$, ricorreremo ancora al metodo di Ruffini.
I possibili zeri razionali sono rimasti gli stessi di prima.
Segnaliamo però che, come si potrebbe dimostrare (vuoi pensarci su?), "i numeri con cui si è già tentato in precedenza senza successo non potranno andar bene nemmeno ora";
quindi, essendo inutile il calcolo di $P(1)$, riprendiamo i nostri tentativi da $P(-1)$:

$P(-1)=-6+1-5-2\neq 0;\qquad P(2)=48+4+10-2\neq 0;\qquad P(-2)=-48+4-10-2\neq 0;$

$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\cancel{6}^3}{\cancel{8}_4}+\frac{1}{4}+\frac{5}{2}-2\neq 0;\quad P\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\cancel{6}^3}{\cancel{8}_4}+\frac{1}{4}-\frac{5}{2}-2\neq 0;\quad P\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\cancel{6}^2}{\cancel{27}_9}+\frac{1}{9}+\frac{5}{3}-2=0\ \ OK$

$$\left(6a^3+a^2+5a-2\right):\left(a-\frac{1}{3}\right) \qquad \begin{array}{c|ccc|c} & 6 & 1 & 5 & -2 \\ \frac{1}{3} & & 2 & 1 & 2 \\ \hline & 6 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\boxed{6a^4+7a^3+6a^2+3a-2}=\left(6a^3+a^2+5a-2\right)(a+1)=$$

$$=\left(6a^2+3a+6\right)\left(a-\frac{1}{3}\right)(a+1)=\cancel{3}\left(2a^2+a+2\right)\left(\frac{3a-1}{\cancel{3}}\right)(a+1)=\boxed{\left(2a^2+a+2\right)(3a-1)(a+1)}$$

c) Vogliamo infine fattorizzare $x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3$.

Qui ci troviamo di fronte a un polinomio IN DUE VARIABILI, OMOGENEO.
Se non ci fosse la seconda lettera, ossia la *y*, avremmo una situazione "standard" nella quale i numeri con cui "tentare" sarebbero $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$.
Invece c'è *y* come seconda lettera, e il polinomio è omogeneo.
Bene! Si tratterà semplicemente di comportarsi come se la variabile del polinomio fosse solo la *x*, e la *y* facesse invece parte dei coefficienti; e di effettuare i "tentativi" con i monomi $\pm y,\ \pm 2y,\ \pm 4y$.

$x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3=P(x)$

$P(y)\overset{\text{NOTA}}{=}y^3-3y^2\cdot y+4y\cdot y^2-4y^3=y^3-3y^3+4y^3-4y^3=-2y^3\neq 0;$

$P(-y)=(-y)^3-3(-y)^2y+4(-y)y^2-4y^3=-y^3-3y^3-4y^3-4y^3=-12y^3\neq 0;$

$P(2y)=(2y)^3-3(2y)^2\cdot y+4\cdot 2y\cdot y^2-4y^3=8y^3-12y^3+8y^3-4y^3=0\ \ OK$

$$\left(x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3\right):(x-2y) \qquad \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3y & 4y^2 & -4y^3 \\ 2y & & 2y & -2y^2 & 4y^3 \\ \hline & 1 & -y & 2y^2 & 0 \end{array}$$

$\left(x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3\right)=\left(x^2-xy+2y^2\right)(x-2y)$

NOTA
Il polinomio è pensato nella variabile x: il simbolo $P(x)$ *indica proprio questo fatto. In questo contesto, il simbolo* $P(y)$ *viene invece ad indicare "ciò che si ottiene prendendo il polinomio* $P(x)$ *e andando a sostituire y al posto della variabile x".*

Gli **ESERCIZI** sulle scomposizioni col metodo di Ruffini si trovano alla successiva **pagina 238**.

ESERCIZI (scomposizione col metodo di RUFFINI)

1) $x^3-6x^2+11x-6$ 2) $24x^3-26x^2+9x-1$ 3) y^3+2y^2-5y-6 4) $3a^3+2a^2+2a-1$
5) $t^4+10t^3+35t^2+50t+24$ 6) $4x^4-8x^3+9x^2-5x+1$ 7) x^3+3x-4 8) $a^5-4a^4+5a^3-a^2-2a+1$
9) $3w^3-5w^2-w+2$ 10) $x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ 11) $t^5-10t^4+35t^3-50t^2+24t$ 12) $c^5+c^4+4c^2$
13) $18x^3+21x^2+8x+1$ 14) $2a^3-4a^2-14a-8$ 15) $2b^3-5b^2+5b-3$ 16) $12z^3-72z^2+63z-15$
17) $x^3-x^2y-8xy^2+12y^3$ 18) $a^3-7ab^2+6b^3$ 19) $x^6+x^5y-x^4y^2-2x^3y^3-x^2y^4+xy^5+y^6$

RISULTATI

1) $(x-1)(x-2)(x-3)$ 2) $(2x-1)(3x-1)(4x-1)$ 3) $(y+1)(y-2)(y+3)$ 4) $(3a-1)(a^2+a+1)$
5) $(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)$ 6) $(2x-1)^2(x^2-x+1)$ 7) $(x-1)(x^2+x+4)$ 8) $(a-1)^3(a^2-a-1)$
9) $(3w-2)(w^2-w-1)$ 10) $(x+1)^2(x-2)^2$ 11) $t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)$ 12) $c^2(c+2)(c^2-c+2)$
13) $(2x+1)(3x+1)^2$ 14) $2(a+1)^2(a-4)$ 15) $(2b-3)(b^2-b+1)$ 16) $3(z-5)(2z-1)^2$
17) $(x-2y)^2(x+3y)$ 18) $(a-b)(a-2b)(a+3b)$ 19) $(x-y)^2(x+y)^2(x^2+xy+y^2)$

8. DIVISIBILITA'; FORMULE RELATIVE A UNA SOMMA O DIFFERENZA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO

Il numero 44 ***NON E'* divisibile** per 7. Infatti 44 diviso 7 fa 6 **COL RESTO DI 2**.
Invece 91 ***E'* divisibile** per 7. Infatti 91 diviso 7 fa 13 **CON RESTO 0**.

Analogamente, dati due polinomi nella stessa variabile A(x) e B(x),
si dice che A(x) è divisibile per B(x) se e solo se la divisione A(x):B(x) ha come resto 0.

Insomma, l'aggettivo "divisibile", in matematica, significa sempre "divisibile con resto 0".

Supponiamo ora che il polinomio divisore sia un binomio della forma $(x-k)$;
in questa situazione il "Teorema del Resto", affermando che
il resto di una divisione della forma $\mathrm{P}(x):(x-k)$ è uguale a $\mathrm{P}(k)$, ci fornisce un vero e proprio
"Criterio di divisibilità":
il polinomio $\mathrm{P}(x)$ è divisibile per il binomio $(x-k)$ se e solo se $\mathrm{P}(k)=0$.

Osserviamo che la "divisibilità" porta con sé la "possibilità di fattorizzazione":

- poiché 91 è divisibile per 7, si può scrivere $91=7\cdot 13$
- e se un polinomio P(x) è divisibile per $(x-k)$, allora si potrà fattorizzare in $(x-k)\cdot(\textit{quoziente})$.

Ciò premesso, domandiamoci:

una differenza o una somma di due potenze di ugual grado
- **è o non è divisibile per la differenza delle basi?**
- **è o non è divisibile per la somma delle basi?**

Insomma:
i) a^n-b^n *è o non è divisibile per* $(a-b)$?
ii) a^n+b^n *è o non è divisibile per* $(a-b)$?
iii) a^n-b^n *è o non è divisibile per* $(a+b)$?
iv) a^n+b^n *è o non è divisibile per* $(a+b)$?

Vediamo.

i) a^n-b^n *è o non è divisibile per* $(a-b)$?

Per rispondere, applicheremo il **"Criterio di divisibilità"**,
quindi penseremo il polinomio a^n-b^n come dipendente dalla variabile a,
e andremo a calcolare $\mathrm{P}(b)$, per verificare se è o non è uguale a zero.

$$a^n-b^n=\mathrm{P}(a)$$
$$\textit{Domanda}:\ a^n-b^n=\mathrm{P}(a)\ \textit{è o non è divisibile per}\ (a-b)?$$
$$\mathrm{P}(b)\underset{\text{NOTA}}{=}b^n-b^n=0,\quad \textit{quindi la risposta è}: SI'$$

Bene, abbiamo allora stabilito che

$$\boxed{a^n-b^n,\ \textit{qualunque sia}\ n,\ \textit{è sempre divisibile per}\ (a-b)}$$

NOTA: il polinomio P, ribadiamolo, è pensato nella variabile a: $\mathrm{P}=\mathrm{P}(a)$. Il simbolo P(b) indica dunque in questo contesto il numero che si ottiene sostituendo al posto della variabile (che è a), il numero b.

Ciò assicura che deve esistere una formula del tipo $a^n - b^n = (a-b)(.....)$
Cosa metteremo al posto dei puntini?
Ci metteremo il quoziente della divisione $\left(a^n - b^n\right):\left(a-b\right)$, da determinarsi con la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -b^n \\ b & & b & b^2 & b^3 & \ldots & b^{n-1} & b^n \\ \hline & 1 & b & b^2 & b^3 & \ldots & b^{n-1} & 0 \end{array}$$

Quindi: $\boxed{a^n - b^n = \left(a-b\right)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}\right)}$

ii) $a^n + b^n$ *è o non è divisibile per* $(a-b)$?

$a^n + b^n = \mathrm{P}(a)$

Domanda: $a^n + b^n = \mathrm{P}(a)$ *è o non è divisibile per* $(a-b)$?

$\mathrm{P}(b) = b^n + b^n = 2b^n \neq 0,$ *quindi la risposta è: NO*

$$\boxed{\begin{array}{l} a^n + b^n \text{ non è mai divisibile per } (a-b); \\ \text{non esiste alcuna fattorizzazione della forma } a^n + b^n = \left(a-b\right)\cdot\left(\ldots\right) \end{array}}$$

iii) $a^n - b^n$ *è o non è divisibile per* $(a+b)$?

$a^n - b^n = \mathrm{P}(a)$

Domanda: $a^n - b^n = \mathrm{P}(a)$ *è o non è divisibile per* $(a+b)$?

$$\mathrm{P}(-b) = \left(-b\right)^n - b^n = \left\langle \begin{array}{l} b^n - b^n = 0 \quad \text{se } n \text{ è PARI} \\ -b^n - b^n = -2b^n \neq 0 \quad \text{se } n \text{ è DISPARI} \end{array} \right. \quad \text{e perciò}$$

$\boxed{a^n - b^n \text{ è divisibile per } (a+b) \text{ quando } n \text{ è PARI, mentre NON lo è quando } n \text{ è DISPARI}}$.

Nel caso di n PARI, esisterà dunque una formula del tipo $a^n - b^n = (a+b)(\ldots)$ dove al posto dei $(\ldots)$ andrà messo il quoziente della divisione $(a^n - b^n):(a+b)$, determinabile con la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -b^n \\ -b & & -b & +b^2 & -b^3 & \ldots & -b^{n-1} & +b^n \\ \hline & 1 & \begin{array}{c} -b \\ \textit{esponente} \\ \textit{dispari,} \\ \textit{segno} - \end{array} & +b^2 & \begin{array}{c} -b^3 \\ \textit{esponente} \\ \textit{dispari,} \\ \textit{segno} - \end{array} & \ldots & \begin{array}{c} -b^{n-1} \\ \textit{esp. dispari} \\ (n \textit{ è pari!}), \\ \textit{segno} - \end{array} & 0 \end{array}$$

Quindi: $\boxed{\text{con } n \text{ PARI}, \ a^n - b^n = \left(a+b\right)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - b^{n-1}\right) \quad \left[\text{segni alterni}\right]}$

iv) $a^n + b^n$ *è o non è divisibile per* $(a+b)$?

$a^n + b^n = \mathrm{P}(a)$

Domanda: $a^n + b^n = \mathrm{P}(a)$ *è o non è divisibile per* $(a+b)$?

$$\mathrm{P}(-b) = \left(-b\right)^n + b^n = \left\langle \begin{array}{l} b^n + b^n = 2b^n \neq 0 \quad \text{se } n \text{ è PARI} \\ -b^n + b^n = 0 \quad \text{se } n \text{ è DISPARI} \end{array} \right. \quad \text{e perciò}$$

$\boxed{a^n + b^n \text{ è divisibile per } (a+b) \text{ quando } n \text{ è DISPARI, mentre NON lo è quando } n \text{ è PARI}}$

Nel caso di n DISPARI, esisterà dunque una formula $a^n + b^n = (a+b)(\ldots)$ dove al posto dei puntini andrà messo il quoziente della divisione $(a^n + b^n):(a+b)$, determinabile con la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & +b^n \\ -b & & -b & +b^2 & -b^3 & \ldots & +b^{n-1} & -b^n \\ \hline & 1 & \begin{array}{c} -b \\ \textit{esponente} \\ \textit{dispari,} \\ \textit{segno} - \end{array} & +b^2 & \begin{array}{c} -b^3 \\ \textit{esponente} \\ \textit{dispari,} \\ \textit{segno} - \end{array} & \ldots & \begin{array}{c} +b^{n-1} \\ +, \textit{ perchè} \\ n-1 \textit{ è pari} \\ \textit{in quanto} \\ n \textit{ è dispari} \end{array} & 0 \end{array}$$

Quindi: $\boxed{\text{con } n \text{ DISPARI}, \ \ a^n + b^n = \left(a+b\right)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1}\right) \quad \left[\text{segni alterni}\right]}$

9. SCOMPOSIZIONI “A BLOCCHI”

a)
$$\begin{aligned}&a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3+c^3=\\&=\left(a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3\right)+c^3=\\&=(a-2b)^3+c^3=\\&=\left[(a-2b)+c\right]\left[(a-2b)^2-(a-2b)\cdot c+c^2\right]=\\&=(a-2b+c)\left(a^2-4ab+4b^2-ac+2bc+c^2\right)\end{aligned}$$

Il polinomio $a-2b$ è stato qui utilizzato come “blocco”.
Avremmo anche potuto, volendo, inserire dei passaggi intermedi, con la sostituzione $a-2b=x$:
$$(a-2b)^3+c^3=x^3+c^3=(x+c)\left(x^2-x\cdot c+c^2\right)$$
Risostituendo a questo punto $a-2b$ al posto di x, il gioco è fatto:
$$\left[(a-2b)+c\right]\left[(a-2b)^2-(a-2b)\cdot c+c^2\right]=$$
$$=(a-2b+c)\left(a^2-4ab+4b^2-ac+2bc+c^2\right)$$

b)
$$\begin{aligned}&(x+y)^3-(x-y)^3=\\&=\left[(x+y)-(x-y)\right]\left[(x+y)^2+(x+y)(x-y)+(x-y)^2\right]=\\&=\left(\cancel{x}+y\cancel{-x}+y\right)\left(x^2\cancel{+2xy}\cancel{+y^2}+x^2\cancel{-y^2}+x^2\cancel{-2xy}+y^2\right)=\\&=2y\left(3x^2+y^2\right)\end{aligned}$$

E’ ovvio che avremmo potuto anche svolgere il calcolo “normalmente”, ottenendo:
$$\begin{aligned}&(x+y)^3-(x-y)^3=\\&=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+\\&-\left(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3\right)=\\&=\cancel{x^3}+3x^2y\cancel{+3xy^2}+y^3\cancel{-x^3}+3x^2y\cancel{-3xy^2}+y^3=\\&=6x^2y+2y^3=2y\left(3x^2+y^2\right)\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}&(5x+3)^4-(x+1)^4=\\&=\left[(5x+3)^2+(x+1)^2\right]\left[(5x+3)^2-(x+1)^2\right]=\\&=\left[25x^2+30x+9+x^2+2x+1\right](5x+3+x+1)(5x+3-x-1)=\\&=\left(26x^2+32x+10\right)(6x+4)(4x+2)=\\&=2\left(13x^2+16x+5\right)\cdot 2(3x+2)\cdot 2(2x+1)=\\&=8\left(13x^2+16x+5\right)(3x+2)(2x+1)\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}&(a+b+c)^2-8(a+b+c)+12=\\&\underset{a+b+c=t}{=}t^2-8t+12=(t-2)(t-6)=\\&=(a+b+c-2)(a+b+c-6)\end{aligned}$$

Qui abbiamo ritenuto di effettuare *esplicitamente* la “posizione” intermedia $a+b+c=t$.
D’altra parte, i passaggi intermedi di questo tipo si possono tranquillamente saltare, facendoli a mente o comunque “trattando”, nella propria mente, il polinomio $a+b+c$ come un “blocco” che viene manipolato come se si trattasse di una singola lettera.

e) $(a+b)^3-(a+b)^2+2$

Poniamo $a+b=t$ e avremo:
$$t^3-t^2+2$$
che potremo scomporre con Ruffini.
$$P(t)=t^3-t^2+2$$
$$P(-1)=-1-1+2=0,\quad OK$$

$\left(t^3-t^2+2\right):(t+1)$

	1	−1	0	2
−1		−1	2	−2
	1	−2	2	0

$$t^3-t^2+2=\left(t^2-2t+2\right)(t+1)$$
Quindi, andando a risostituire $a+b$ al posto di t, la nostra scomposizione sarà
$$\left[(a+b)^2-2(a+b)+2\right](a+b+1)=\left(a^2+2ab+b^2-2a-2b+2\right)(a+b+1)$$

10. SCOMPOSIZIONI IN CUI OCCORRE RACCOGLIERE UN POLINOMIO

a) $x^2+2x+2y-y^2=x^2-y^2+2x+2y=(x+y)(x-y)+2(x+y)=(x+y)(x-y+2)$

b) $a^3+b^3+a^2+b^2+2ab=\left(a^3+b^3\right)+\left(a^2+b^2+2ab\right)=$
$=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)+(a+b)^2=(a+b)\left(a^2-ab+b^2+a+b\right)$

c) $8(x-3)(x-5)^2-10(x-3)^2(x-5)=$
$=2(x-3)(x-5)\left[4(x-5)-5(x-3)\right]=$
$=2(x-3)(x-5)[4x-20-5x+15]=$
$=2(x-3)(x-5)(-x-5)=$
$=-2(x-3)(x-5)(x+5)$

d) $a^3-b^3-a^2-ab+2b^2=\left(a^3-b^3\right)-\left(a^2+ab-2b^2\right)=$
$=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)-(a+2b)(a-b)=(a-b)\left(a^2+ab+b^2-a-2b\right)$

ESERCIZI (scomposizioni nelle quali un polinomio è utilizzato come un "blocco",
o nelle quali occorre raccogliere un polinomio)

1) $a^3+(b+c)^3$
2) $x^3-y^3-3y^2-3y-1$
3) $(a+b+c+1)^4-(a+b+c+1)^2$
4) $(x+y)^2+5(x+y)+6$
5) $(x+y)^2+2z(x+y)+z^2$
6) $4(a+b-c)^2+4(a+b-c)+1$
7) $(2a+b)^3-(a+2b)^3$
8) $8(x-1)^3+27=(2x-2)^3+27$
9) $(x-5)^3+(x-5)^2$
10) $(x+y)^3(x-y)-(x+y)(x-y)^3$
11) $(a+1)(a+2)(a+3)+(a+2)(a+3)(a+4)$
12) $(a+b+1)^2-2a-2b-2$
13) $x^2(x+1)(x+2)+x(x+1)^2(x+2)+x(x+1)(x+2)^2$
14) $4a^3(a-1)^3+6a^4(a-1)^2$
15) x^2-y^2+x+y
16) $a^2-3ab+2b^2-a+2b$
17) $w^4+w^3-w^2-2w-1$
18) $t^4+t^3+t^2-1$
19) $ab^2-4a+3b+6$
20) $x^3-x^2+y^2-y^3$

RISULTATI

1) $(a+b+c)\left(a^2-ab-ac+b^2+2bc+c^2\right)$
2) $(x-y-1)\left(x^2+xy+x+y^2+2y+1\right)$
3) $(a+b+c+1)^2(a+b+c+2)(a+b+c)$
4) $(x+y+2)(x+y+3)$
5) $(x+y+z)^2$
6) $(2a+2b-2c+1)^2$
7) $(a-b)\left(7a^2+13ab+7b^2\right)$
8) $(2x+1)\left(4x^2-14x+19\right)$
9) $(x-5)^2(x-4)$
10) $4xy(x+y)(x-y)$
11) $(a+2)(a+3)(2a+5)$
12) $(a+b+1)(a+b-1)$
13) $3x(x+1)^2(x+2)$
14) $2a^3(a-1)^2(5a-2)$
15) $(x+y)(x-y+1)$
16) $(a-2b)(a-b-1)$
17) $(w+1)\left(w^3-w-1\right)$
18) $(t+1)\left(t^3+t-1\right)$
19) $(b+2)(ab-2a+3)$
20) $(x-y)\left(x^2+xy+y^2-x-y\right)$

11. ESERCIZI VARI sulla fattorizzazione (risultati alla pagina seguente)

1) a^3-361a
2) d^2+4d+3
3) $3d^2+4d+1$
4) m^3-2m^2-m+2
5) $a^2-2ab+b^2-1$
6) $a^2+4ab+4b^2$
7) $a^2+4ab+3b^2$
8) k^4-2k^2+1
9) e^4-25e^2+144
10) $ax+3a+x+3$
11) $w^8+w^6+w^4+w^2$
12) $c+1-d-dc$
13) x^4-10x^2+25
14) x^4-10x^2+9
15) x^4-7x^2+9
16) $6t^2+72t-648$
17) $xy+ab-ay-bx$
18) $a^2-2ab+b^2+2a-2b-x^2+1$
19) $h^3-9h^2+27h-27$
20) $h^3-3h^2-9h+27$
21) t^4-8t^2+15
22) $c^4-c^3-72c^2$
23) $a^{k+2}-a^{k+1}-2a^k$
24) $x^2y^2-4x^2-y^2+4$
25) c^2d+c^2-c-cd
26) $4x^2-4xy+y^2-12x+6y+9$
27) $16t^3+8t^2+4t+2$
28) a^4-8a^2+16
29) a^4-10a^2+16
30) a^4-12a^2+16
31) $343+z^3$
32) x^2+x^3-42x
33) $a^2-b^2+2bc-c^2$
34) $15-8t+t^2$
35) $1+cd+c+d$
36) $x^{10}-1024x^5$
37) $9b^4-b^2-4b-4$
38) $15t^2-8t+1$
39) $y^8-4y^6+4y^4-64$
40) $r^6-r^4-r^2+1$
41) a^4b^4-1
42) a^4b^4-ab
43) $4-a^2+2ab-b^2$
44) t^6-8t^3+15
45) $a^2+2ab+b^2-x^2-2x-1$
46) $a^2-8at+15t^2$
47) $ax^2-ay^2+bx+by$
48) $x^4+8x^2y^2+12y^4$
49) $a^3+13a^2+13a+1$
50) b^4-b^2+b-1
51) $x^6-3x^5+3x^4-x^3-x^2+2x-1$
52) $a^{15}-8a^{10}+15a^5$
53) $b^2+9bc+20c^2$
54) t^4+t^3+t+1
55) $a^2t^2-8at+15$
56) $a^2+b^2+2ab+a+b$
57) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-a-b$
58) $x^3+5ax^2-2a^2x-24a^3$
59) $x^4+3x^3y+x^2y^2+4y^4$
60) $6x^4-x^3y-25x^2y^2+4xy^3+4y^4$
61) Dimostra che, qualunque sia il numero naturale n, il numero n^3-n è sempre divisibile per 6.
62) Sia n un intero ≥ 3. Allora il numero n^5-5n^3+4n è sempre multiplo di 120: dimostralo.
63) Una fattorizzazione ci porta a stabilire che l'equazione $x^3-x^2-110x=0$ ha 3 soluzioni. Quali?
64) $321420^2-321419^2=?$
65) $\dfrac{7^{2013}-7^{2012}}{7^{2013}+7^{2012}}=?$
66) Esprimi il numero 2827 come differenza fra i quadrati di due numeri interi (entrambi non nulli).
67) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round, 2000
Un intero di tre cifre tutte uguali fra loro, è sempre divisibile per a) 7 b) 11 c) 13 d) 19 e) 37

SIMULAZIONI DI VERIFICHE; puoi vedere le correzioni cliccando sulle frecce

Per ciascuna verifica, il **tempo** è di **60'** ; **Punteggio**: punti **1** per ogni scomposizione esatta e completa; **0,5** per ogni scomposizione esatta ma incompleta.
la **sufficienza** si raggiunge con **punti 5**.

1 ⇨

1) a^2-a-30
2) $4a^2-5a+1$
3) x^3+x^2+x+1
4) x^4-13x^2+36
5) $a^4+b^4-2a^2b^2$
6) t^4-4t^2+4t-1
7) $x^2+y^2+2xy-4x-4y+4$
8) $a^3+a^2c-2ac^2-a^2b-abc+2bc^2$
9) $8x^3+12x^2-18x-27$
10) Col "metodo del completamento del quadrato": $x^2-2x-624$

2 ⇨

1) $x^2-x-110$
2) $2x^2+7x+3$
3) $4a^3-4a^2-a+1$
4) a^4-5a^2+4
5) a^4-81
6) $x^9+x^8+2x^5+2x^4+x+1$
7) $x^4-x^2-12x-36$
8) $a^2+b^2+c^2-d^2-2ab+2ac-2bc$
9) $8x^3-36x^2+54x-27$
10) Col "metodo del completamento del quadrato": $4x^2+4x-399$

3 ⇨

1) $4b^3-12b^2-b+3$
2) $125a^6-a^3$
3) $8x^6-63x^3-8$
4) $b^8-b^5-b^4+b$
5) y^4+5y^2+4
6) y^4+4y^2+4
7) y^4+3y^2+4
8) $x^5+xy+y+1$
9) $x^3-7x^2+16x-12$ (metodo di Ruffini)
10) $x^3-x^2y+2y^3$ (Ruffini con 2 lettere oppure …)

RISULTATI

1) $a(a+19)(a-19)$
2) $(d+1)(d+3)$
3) $(d+1)(3d+1)$
4) $(m+1)(m-1)(m-2)$
5) $(a-b+1)(a-b-1)$
6) $(a+2b)^2$
7) $(a+b)(a+3b)$
8) $(k+1)^2(k-1)^2$
9) $(e+3)(e-3)(e+4)(e-4)$
10) $(x+3)(a+1)$
11) $w^2(w^2+1)(w^4+1)$
12) $(1+c)(1-d)$
13) $(x^2-5)^2$
14) $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$
15) $(x^2+x-3)(x^2-x-3)$
16) $6(t-6)(t+18)$
17) $(x-a)(y-b)$
18) $(a-b+1+x)(a-b+1-x)$
19) $(h-3)^3$
20) $(h-3)^2(h+3)$
21) $(t^2-3)(t^2-5)$
22) $c^2(c-9)(c+8)$
23) $a^k(a+1)(a-2)$
24) $(x+1)(x-1)(y+2)(y-2)$
25) $c(d+1)(c-1)$
26) $(2x-y-3)^2$
27) $2(2t+1)(4t^2+1)$
28) $(a+2)^2(a-2)^2$
29) $(a^2-2)(a^2-8)$
30) $(a^2+2a-4)(a^2-2a-4)$
31) $(7+z)(49-7z+z^2)$
32) $x(x+7)(x-6)$
33) $(a+b-c)(a-b+c)$
34) $(t-3)(t-5)$
35) $(1+c)(1+d)$
36) $x^5(x-4)(x^4+4x^3+16x^2+64x+256)$
37) $(3b^2+b+2)(b-1)(3b+2)$
38) $(3t-1)(5t-1)$
39) $(y+2)(y-2)(y^2+2)(y^4-2y^2+8)$
40) $(r+1)^2(r-1)^2(r^2+1)$
41) $(a^2b^2+1)(ab+1)(ab-1)$
42) $ab(ab-1)(a^2b^2+ab+1)$
43) $(2+a-b)(2-a+b)$
44) $(t^3-3)(t^3-5)$
45) $(a+b+x+1)(a+b-x-1)$
46) $(a-3t)(a-5t)$
47) $(x+y)(ax-ay+b)$
48) $(x^2+2y^2)(x^2+6y^2)$
49) $(a+1)(a^2+12a+1)$ (Ruffini oppure … ⇨)
50) $(b-1)(b^3+b^2+1)$ (Ruffini oppure … ⇨)
51) $(x-1)^2(x^4-x^3-1)$ (Ruffini oppure … ⇨)
52) $a^5(a^5-3)(a^5-5)$
53) $(b+4c)(b+5c)$
54) $(t+1)^2(t^2-t+1)$
55) $(at-3)(at-5)$
56) $(a+b)(a+b+1)$
57) $(a+b)(a+b+1)(a+b-1)$
58) $(x-2a)(x+3a)(x+4a)$ (Ruffini)
59) $(x+2y)^2(x^2-xy+y^2)$ (Ruffini)
60) $(x-2y)(x+2y)(2x-y)(3x+y)$ (Ruffini)

61) $n^3-n=n(n+1)(n-1)$; ma presi tre qualsivoglia interi consecutivi, uno (e uno solo) di essi sarà divisibile per 3, e uno (almeno) di essi sarà pari; dunque il loro prodotto è certamente divisibile per 6

62) $n^5-5n^3+4n=(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ che è il prodotto di 5 interi consecutivi … quindi …

63) $x^3-x^2-110x=0;\quad x(x^2-x-110)=0;\quad x(x-11)(x+10)=0$. Ma un prodotto è uguale a 0 se e solo se (legge di annullamento del prodotto) si annulla almeno uno dei suoi fattori. Quindi il prodotto a 1° m. $x(x-11)(x+10)$ risulterà $=0$ nei tre casi: I) $x=0$ II) $x-11=0$ $(x=11)$ III) $x+10=0$ $(x=-10)$
Le 3 soluzioni dell'equazione proposta sono perciò: $0;\ 11;\ -10$

64) $(321420+321419)(321420-321419)=642839\cdot 1=642839$

65) Raccogliendo 7^{2012} sia a N che a D: ¾ = 0,75

66) $2827=11\cdot 257=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$. Il sistema $x-y=11;\ x+y=257$ porta a $x=134,\ y=123$

67) e): $[abc]=a\cdot 10^2+b\cdot 10+c;\ [aaa]=a\cdot 10^2+a\cdot 10+a=a\cdot(100+10+1)=a\cdot 111$. Ora, $111=3\cdot 37$

♣ Lawrence Spector, da New York City,
autore di un lavoro magistrale, il magnifico sito
www.themathpage.com,
tratta la fattorizzazione nel capitolo di Algebra
⇨
Le soluzioni dei tanti utili esercizi compaiono semplicemente portandosi col mouse sulla casella

Il sito
www.regentsprep.org
si occupa brevemente
di fattorizzazione
con semplici esercizi interattivi,
nel capitolo "*factoring*".