

GEOMETRIA

Cap. 1: INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA

1.1 - CONCETTI PRIMITIVI E CONCETTI DEFINITI

CONCETTI PRIMITIVI - Sono quei concetti talmente semplici, fondamentali ed essenziali, che è **impossibile darne una definizione a partire da concetti ancora più semplici**.

Tutt'al più, dei concetti primitivi si può tentare di suggerire l'idea, facendo ricorso ad analogie e differenze rispetto ad oggetti e fenomeni del mondo che ci sta attorno.

I concetti primitivi alla base della Geometria sono: **punto, retta, piano, movimento rigido**.

PUNTO - Intendiamo per "punto" l'ente geometrico di cui possiamo farci un'idea osservando un granellino di sabbia, oppure il piccolo segno lasciato dalla punta di una matita su un foglio.

Scrivendo questo, tuttavia, non possiamo pretendere di aver dato una definizione rigorosa del concetto di punto: ne abbiamo, semmai, tentato un approccio "ingenuo" e grossolano.

Il granellino di sabbia e la macchiolina di grafite hanno un - pur piccolo - volume, mentre quando pensiamo ad un punto geometrico dobbiamo figurarcelo come qualche cosa che NON ha volume: una posizione precisa nello spazio, non una piccola estensione di spazio. Ma ... cos'è lo "spazio" ???

... Dire che è "l'insieme di tutti i punti" sarebbe un circolo vizioso!

RETTA - Un raggio di luce o un filo teso suggeriscono l'idea di "retta". Vale la stessa osservazione fatta per il "punto": il concetto di retta non può essere definito in maniera rigorosa, e gli esempi fatti possono solo servire ad abbozzare un'immagine grossolana e imprecisa della "retta" geometrica, che va pensata priva di spessore, illimitata da entrambe le parti, e costituita da punti.

PIANO - Ecco un altro concetto primitivo, per rappresentare il quale si potrebbe ricorrere alla superficie di un lago che sia perfettamente calmo, o di una lavagna perfettamente liscia.

Ma il "vero" piano geometrico è illimitato in tutte le direzioni, e privo di spessore.



Fig. 3: piano π
(o piano ABC)

Per indicare un piano:

a) si usa una lettera ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \pi, \dots$) dell'**alfabeto greco** ➡

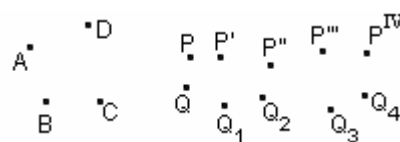


Fig. 1: alcuni punti

I punti si indicano con lettere maiuscole, eventualmente provviste di:

- "apici" (apostrofi, in alto a destra; si legge "P primo", "P secondo" ...)
- o "indici" (numerini, in basso a destra; qui si legge "Q uno", "Q due" ...)



Fig. 2: retta r (o retta AB)

Per indicare una retta si utilizza una lettera minuscola, oppure si scrivono (di seguito) i nomi di due punti, appartenenti alla retta stessa.

b) oppure, in alternativa, si scrivono uno di seguito all'altro i nomi di tre punti del piano stesso. Deve trattarsi però di tre punti **"non allineati"**, cioè non appartenenti a una stessa retta, altrimenti per essi passerebbe non un solo piano, ma infiniti, quindi si avrebbe ambiguità.

CONCETTI DEFINITI - Come dice la parola stessa, sono quei **concetti dei quali è possibile dare una definizione** precisa, in quanto **si riesce a descriverli ricorrendo a concetti più semplici (i concetti primitivi, oppure concetti definiti già precedentemente introdotti)**.

Ad esempio, sono concetti definiti: semiretta, segmento, semipiano, angolo, poligono, ecc.

Definizione di SEMIRETTA

Dicesi "**semiretta**" ciascuna delle due parti in cui una retta è divisa da un suo punto (figure 4a, 4b).

Tale punto si dice "**origine**" delle due semirette.

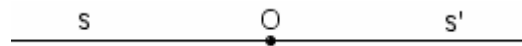


Fig. 4b: semiretta OP

Per indicare una semiretta si utilizzerà una lettera minuscola; oppure si scriveranno, uno dopo l'altro, i nomi di due punti della semiretta, il primo dei quali dovrà essere obbligatoriamente l'origine.

Ad es., la semiretta della fig. 4b potrebbe essere chiamata semiretta OP .

Definizione di SEGMENTO

Dicesi "**segmento**" quella parte di retta compresa fra due punti della retta stessa, che vengono chiamati gli "**estremi**" del segmento considerato (fig. 5).



Fig. 5: segmento $\overline{AB}$

Il "**cappello di segmento**" può essere omissso.

Volendo, un segmento si può pure indicare con una lettera minuscola: segmento a , segmento u , ...

Definizione di SEMIPIANO

Dicesi "**semipiano**" ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da una sua retta (fig. 6).

La retta in questione viene detta "**origine**", o "**retta origine**", dei due semipiani.

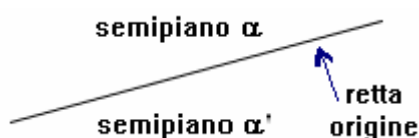


Fig. 6: due semipiani (si indicano con lettere greche)

1.2 - ASSIOMI E TEOREMI

PROPOSIZIONE:

sinonimo di “**affermazione**”,
“**frase che asserisce qualcosa**”.

Studia
con impegno
la
Geometria!



Oltre che elegante ed attraente di per sé,
nonché ricchissima di applicazioni,
essa è una palestra **formidabile** per
potenziare le tue capacità logiche generali.

“**ASSIOMA**” (o “**postulato**”): diciamo che gli “assiomi” sono
quelle proposizioni talmente semplici e ovvie che non possono essere dimostrate a partire da
affermazioni ancora più semplici, e pertanto vengono accettate per vere senza dimostrazione.

In realtà, la matematica moderna ha ampiamente rivisto questo modo di concepire gli “assiomi”,
finendo per assegnare al termine “assioma” il significato più generale di “affermazione col ruolo
di premessa in una teoria”, e facendo distinzione fra i due termini “assioma” e “postulato”.

Anche l’idea di “concetti primitivi” ha subito una radicale revisione critica.

Ma il discorso diventerebbe davvero troppo articolato e profondo; può andar bene, per ora, quanto detto.

Alla base della Geometria si pongono diversi assiomi. Ne elenchiamo alcuni; altri ne aggiungeremo in seguito.

- **Assioma: Lo spazio contiene infiniti piani**
- **Assioma: Un piano contiene infinite rette**
- **Assioma: Una retta contiene infiniti punti**
- **Assioma: Per due punti distinti passa una e una sola retta**
- **Assioma: Per 3 punti non allineati (cioè, non giacenti su di una stessa retta) passa uno e un solo piano**
- **Assioma: Se due punti di una retta appartengono a un dato piano, allora la retta giace su quel piano, nel senso che tutti i punti della retta appartengono a quel piano**

La Geometria trattata in queste lezioni si riferisce sostanzialmente alla mirabile, immortale opera intitolata
“**Elementi**”, redatta dal matematico **Euclide** di Alessandria intorno all’anno **300 a.C.**

Uno studio dei “fondamenti” della Geometria, che fosse condotto in modo logicamente impeccabile, metterebbe
in luce diverse questioni intellettualmente stimolanti, ma anche parecchio complicate.

Questa riflessione più accurata costringerebbe a riconfigurare tutto il discorso sugli “assiomi”, per rispondere a
esigenze di: 1) completezza; 2) “economia”; 3) “formalizzazione”; 4) apertura a possibili generalizzazioni.

Tuttavia, dal punto di vista didattico, queste esigenze sarebbero - a parere di chi scrive - inutilmente pesanti e
paralizzanti, per un primo approccio alla Geometria. Preferiamo dunque semplificare un poco la trattazione,
ritenendo che lo studente appassionato possa riprendere e perfezionare il discorso sui “Fondamenti” in una fase
successiva, magari interessandosi alle “**geometrie non euclidee**”, o alla revisione critica di **Hilbert** (1862-1943).

TEOREMA: proposizione che, contrariamente agli assiomi, può essere dimostrata,
cioè giustificata mediante un’opportuna sequenza di ragionamenti.

Nel corso della dimostrazione di un teorema è possibile sfruttare:

- ❑ **gli assiomi**
- ❑ **i teoremi già dimostrati in precedenza.**

In un teorema distinguiamo

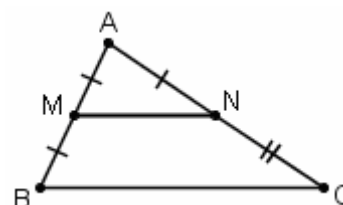
l’ “**ipotesi**” (abbreviazione: **HP**, dal greco *hypóthesis*) e la “**tesi**” (**TH**, *thésis*).

- ❑ L’ipotesi è l’insieme delle premesse da cui partiamo
(in altre parole **l’ipotesi è ciò che supponiamo di conoscere in partenza**),
- ❑ mentre **la tesi è ciò che vogliamo dimostrare.**

Ecco un esempio.

Teorema: In ogni triangolo, il segmento che congiunge i punti di mezzo di due lati è parallelo al terzo lato

- ❑ L’ **Ipotesi** (HP) è:
 - ho un triangolo ABC;
 - prendo il punto medio M di $\overline{AB}$ e il punto medio N di $\overline{AC}$;
 - traccio il segmento $\overline{MN}$
- ❑ La **Tesi** (TH) è: la retta MN è parallela alla retta BC



COROLLARIO: teorema che è **immediata conseguenza** di un teorema precedente o di un postulato.

Esempio

- ❑ **Teorema:** La somma dei tre angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto
- ❑ **Corollario:** I due angoli acuti di un triangolo rettangolo, sommati, danno un angolo retto

LEMMA: teorema che, indipendentemente dal fatto di essere o meno interessante di per sé,
è utile perché **consente di abbreviare la dimostrazione di un altro teorema successivo.**

1.3 - ANGOLI; CONGRUENZA; SOMMA DI SEGMENTI E DI ANGOLI

Definizione di ANGOLO

Dicesi “angolo”

ciascuna delle due parti di piano delimitate da due semirette (“lati” dell’angolo) uscenti dallo stesso punto (“vertice” dell’angolo).

Quindi due semirette aventi l’origine in comune non individuano un angolo solo, ma **DUE** angoli (vedi fig. 7a qui a destra).

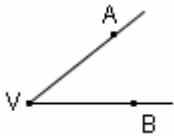


Fig. 7b

La fig. 7b qui a sinistra mostra **DUE** angoli:

si indicano con le scritture $\widehat{AVB}$ e $\widehat{AVB}_{\text{concavo}}$

Un angolo può anche essere indicato con una lettera dell’alfabeto greco minuscolo: α , β , γ , δ , ...

Clicca sulla freccia per l’alfabeto greco completo ➡

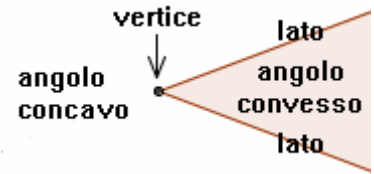


Fig. 7a: due angoli.

Quello concavo è tutta la parte di piano lasciata in bianco.

Definizione di ANGOLO PIATTO

Un **angolo** si dice “piatto”

se **i suoi lati sono uno il prolungamento dell’altro**

(sono due semirette non sovrapposte, aventi la stessa origine e giacenti sulla stessa retta).

Due semirette, che siano una il prolungamento dell’altra, individuano evidentemente **DUE** angoli piatti (fig. 8).

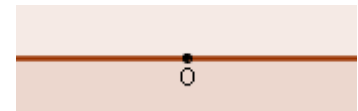


Fig. 8: due angoli piatti

Definizione di ANGOLO CONVESSO e ANGOLO CONCAVO

Un **angolo** (che non sia piatto) si dice “convesso” se **non contiene i prolungamenti dei suoi lati**, “concavo” se li contiene.

Ponendo la definizione in questo modo si riesce ad evitare di parlare di “angolo più piccolo” e “angolo più grande”, in quanto, per essere del tutto rigorosi, la nozione di “confronto fra due angoli” non è stata ancora introdotta (lo sarà tra breve).

Una possibile **definizione alternativa di angolo convesso** è la seguente:

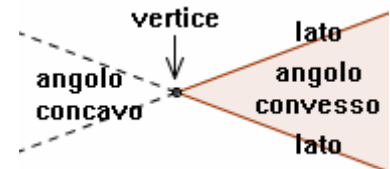
dati tre punti non allineati A, O, B (fig. 9b),

si dice angolo convesso $\widehat{AOB}$ l’intersezione (cioè, la parte comune) fra

i) il semipiano che ha per origine la retta OA e contiene B,

ii) e il semipiano che ha per origine la retta OB e contiene A.

- *Ombreggia o colora, in figura 9b, tali due semipiani: la parte che risulterà doppiamente ombreggiata sarà l’angolo convesso $\widehat{AOB}$*



L’angolo concavo è quello che contiene i prolungamenti dei suoi lati!

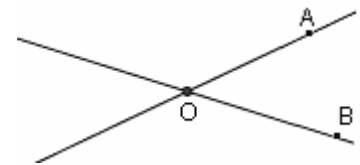


Fig. 9b

Definizione di ANGOLO GIRO e ANGOLO NULO:

sono quelli che **hanno per lati due semirette sovrapposte**.

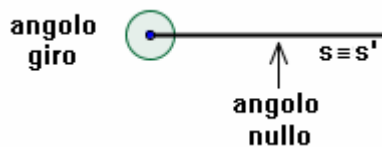


Fig. 10 qui a sinistra:

Un **angolo giro**

(notare che esso riempie tutto il piano!) e un **angolo nullo**.

Entrambi hanno per lati le semirette s, s' .

Il simbolo $\equiv$ significa “coincidente con”.

Definizione di

“CONGRUENZA” (ma noi diremo semplicemente “uguaglianza”) TRA FIGURE

Due figure (per “figura” si intende un qualunque insieme di punti nel piano, o nello spazio) si dicono “congruenti” (ma noi useremo semplicemente il termine “uguali”) se è possibile, tramite un “movimento rigido”, sovrapporre una di esse all’altra in modo che vengano a combaciare perfettamente.

Il concetto di “**movimento rigido**” è un **concetto primitivo**, non definibile:

potremmo tentare di descriverlo scrivendo che un “movimento rigido” è un movimento che “non deforma” la figura che viene mossa, ma in questo modo non potremmo pretendere di dare una vera e propria “definizione” di “movimento rigido”, in quanto non faremmo altro che ricondurci al concetto di “forma”, che non abbiamo precedentemente definito, e la cui definizione sarebbe estremamente problematica.

Il simbolo di “congruenza” sarebbe “ $\cong$ ”; ma noi useremo semplicemente “ $=$ ”.

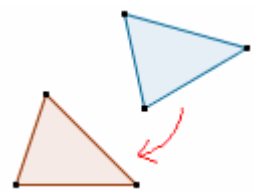


Fig. 11

Questi due triangoli sono “uguali”, “congruenti”, “sovrapponibili in modo perfetto tramite un opportuno movimento rigido”

Definizione di “segmenti consecutivi”

Due segmenti si dicono “consecutivi” se **hanno un estremo in comune** (e, a parte questo estremo, **non hanno in comune nessun altro punto**).
Ad es., i segmenti $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ della fig. 12 qui a fianco sono consecutivi.

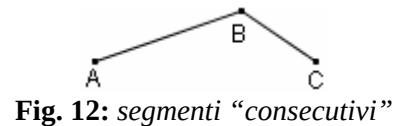
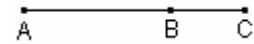


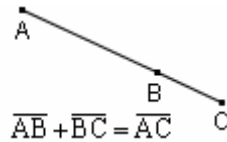
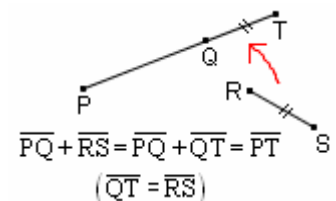
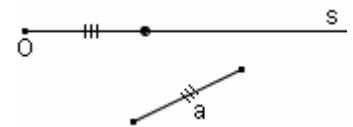
Fig. 12: segmenti “consecutivi”

Definizione di “segmenti adiacenti”

Due segmenti si dicono “adiacenti” se **sono consecutivi e inoltre giacciono sulla stessa retta** (come i segmenti $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ della fig. 13 qui a fianco).

Fig. 13: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ sono “adiacenti”**Somma e differenza di due segmenti**

- Dati due segmenti **adiacenti**, il segmento che ha per estremi i due loro estremi non sovrapposti, viene detto “la somma” dei due segmenti dati (vedi fig. 14).
- Considerati poi due segmenti **non adiacenti**, come $\overline{PQ}$ ed $\overline{RS}$ della fig. 15, per sommarli si costruirà, adiacente ad uno di essi (ad es. $\overline{PQ}$), un segmento uguale all’altro (NOTA).

← Fig. 14:
somma
di segmenti,
nel caso siano
adiacentiFig. 15 ↑ :
somma di due segmenti,
nel caso generaleFig. 16:
l’assioma del
trasporto del segmento

- E’ ora ovvio definire cosa si intenda per “**differenza**” fra due segmenti. Ad esempio, con riferimento alla fig. 14, è:

$$\overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AB}; \quad \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}.$$

Perciò possiamo dire che la differenza $a - b$

è quel segmento c tale che $c + b = a$

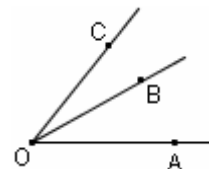
(la differenza fra due segmenti è quel segmento che, se venisse sommato col secondo, permetterebbe di riottenere il primo).

NOTA

Osserviamo che quanto scritto presuppone l’accettazione di un nuovo assioma, chiamato “**assioma del trasporto del segmento**” (fig. 16):
dati una semiretta s di origine O ed un segmento a , sulla semiretta esiste uno e un solo segmento avente un estremo in O e uguale (congruente, sovrapponibile) al segmento a .

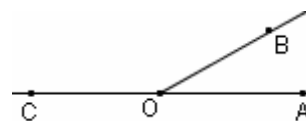
Definizione di “angoli consecutivi”

Due angoli si dicono “consecutivi” se **hanno il vertice e un lato in comune** (e, a parte questo lato, non hanno **nessun altro punto comune**)

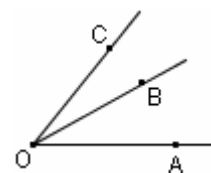
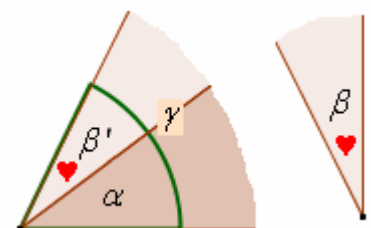
Fig. 17:
 $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$
sono
consecutivi**Definizione di “angoli adiacenti”**

Due angoli si dicono “adiacenti” se

- i) sono **consecutivi**
- ii) e inoltre i **lati non sovrapposti giacciono sulla stessa retta**

Fig. 18:
 $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$
sono adiacenti**Somma e differenza di due angoli**

- Dati due angoli **consecutivi**, l’angolo che ha per lati i loro due lati non sovrapposti, viene detto “**somma**” dei due angoli dati (fig. 19). Evidentemente, se due angoli sono adiacenti, allora la loro somma è un angolo piatto.
- Considerati ora due angoli **non consecutivi** come α , β di fig. 20, per sommarli si costruirà, consecutivo ad uno di essi (ad es. α), un angolo uguale all’altro. Analogamente a quanto fatto per i segmenti, si accetta, a questo proposito, l’ “**assioma del trasporto dell’angolo**”.
- E’ poi ovvio definire cosa si intenda per “**differenza**” fra due angoli. Ad esempio, con riferimento alla fig. 19, è $\widehat{AOC} - \widehat{AOB} = \widehat{BOC}$; $\widehat{AOC} - \widehat{BOC} = \widehat{AOB}$. Insomma, la differenza fra due angoli è quell’angolo che, sommato col secondo, permette di riottenere il primo.

Fig. 19:
 $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$ Fig. 20: $\alpha + \beta = \alpha + \beta' = \gamma$ ($\beta' = \beta$)

Confronto fra segmenti (coppia di figure 21a, 21b)

Per confrontare due segmenti a, b
(onde stabilire se $a < b$ oppure $a > b$ oppure $a = b$)
si sottopone uno di essi ad un movimento rigido
che lo sovrapponga parzialmente all'altro, in modo che
un estremo di a venga a coincidere con un estremo di b .
A questo punto, quello, fra i due segmenti,
che "scappa fuori" dall'altro, sarà il maggiore.

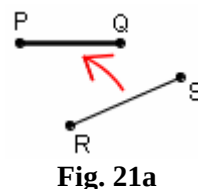


Fig. 21a

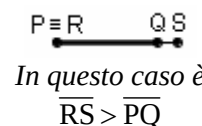


Fig. 21b

Confronto fra angoli (coppia di figure 21c, 21d)

Analogamente, per confrontare due angoli α, β
(onde stabilire se $\alpha < \beta$ oppure $\alpha > \beta$ oppure $\alpha = \beta$)
si sottopone uno di essi ad un movimento rigido
che lo sovrapponga parzialmente all'altro,
in modo che un lato di α venga a coincidere con un lato di β .
A questo punto, quello, fra i due angoli,
che "scappa fuori" dall'altro, sarà il maggiore.

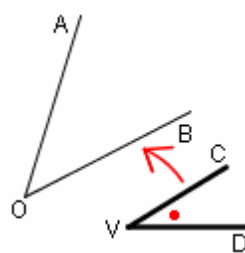


Fig. 21c

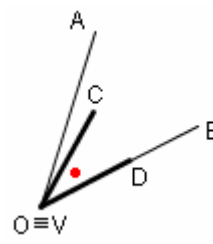
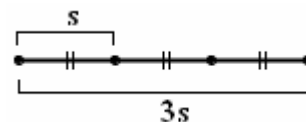


Fig. 21d

Assioma: la disuguaglianza fra segmenti gode della "proprietà transitiva": $(a < b \wedge b < c) \rightarrow a < c$.
Analogamente per la disuguaglianza fra angoli.

Multipli di un segmento

Sommando un segmento s con sé stesso (o con un segmento uguale a sé stesso),
più volte, si ottengono i cosiddetti "multipli" del segmento dato:
si tratta dei segmenti $s + s = 2s$, $s + s + s = 3s$, $s + s + s + s = 4s$, ...

Fig. 22: $s + s + s = 3s$ **Sottomultipli di un segmento**

I sottomultipli di un segmento sono la metà, la terza parte, la quarta parte, ...

del segmento dato. L' n -esima parte di un segmento s si indica col simbolo $\frac{1}{n}s$

ed è quel segmento a , tale che $na = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ addendi}} = s$.

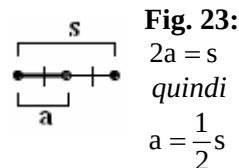


Fig. 23:

$2a = s$
quindi
 $a = \frac{1}{2}s$

Assioma della divisibilità indefinita dei segmenti:

dato un segmento s e un numero naturale non nullo qualsiasi n , esiste sempre il segmento $\frac{1}{n}s$.

Analogamente si definiscono i multipli e i sottomultipli di un angolo;
si accetta poi l'assioma della **divisibilità indefinita degli angoli**.

Definizione di angolo retto

E' la metà di un angolo piatto.

Gli angoli retti si segnano preferibilmente con un **quadrato**.

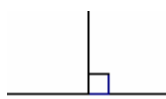


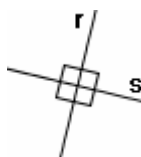
Fig. 24:

un angolo retto
(ed un altro, non segnato,
al suo fianco)

Definizione di rette perpendicolari

Due rette si dicono "**perpendicolari**", o anche "**ortogonali**",
se **incontrandosi formano 4 angoli retti**.

Il simbolo di perpendicolarità è una "T" rovesciata.

Fig. 25: $r \perp s$ **Misura degli angoli**

Si è deciso di assumere come unità di misura per gli angoli

la **trecentosessantesima parte dell'angolo giro**, chiamata "**angolo grado**" o semplicemente "**grado**".

Di conseguenza un angolo giro misurerà 360° , un angolo piatto 180° , un angolo retto 90° e un angolo nullo 0° .

Definizione di

angoli complementari, supplementari, esplementari

Due angoli si dicono:

- **complementari** se danno per somma un angolo retto ($= 90^\circ$)
- **supplementari** se danno per somma un angolo piatto ($= 180^\circ$)
- **esplementari** se danno per somma un angolo giro ($= 360^\circ$)

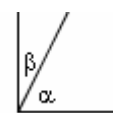


Fig. 26a:

$\alpha + \beta = 90^\circ$
quindi α, β sono
complementari

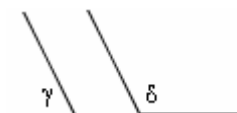


Fig. 26b:

$\gamma + \delta = 180^\circ$
quindi γ, δ sono
supplementari

Definizione di bisettrice di un angolo

Così viene chiamata la **semiretta che, partendo dal vertice,**
divide l'angolo stesso in due parti fra loro uguali.



Fig. 27:

un angolo e - tratteggiata -
la sua bisettrice

1.4 - ASSIOMI SU UGUAGLIANZE, DISUGUAGLIANZE, SOMME E DIFFERENZE

- L'uguaglianza (congruenza) fra figure geometriche gode delle seguenti tre proprietà (assiomi):

• **PROPRIETA' RIFLESSIVA**

Ogni figura è uguale a sé stessa: $\forall A, A = A$ (il simbolo $\forall$ significa “per ogni, per qualsiasi”)

• **PROPRIETA' SIMMETRICA**

Se una figura A è uguale ad una figura B , allora anche B è uguale ad A : $A = B \rightarrow B = A$

Useremo sovente la freccia $\rightarrow$ per schematizzare “SE ... ALLORA ...” (oppure “... IMPLICA ...”) o in certi casi “QUINDI, DI CONSEGUENZA”

• **PROPRIETA' TRANSITIVA**

Se una figura A è uguale ad una figura B , e la figura B a sua volta è uguale ad una figura C , allora A è uguale a C :

$(A = B \wedge B = C) \rightarrow A = C$ (in altre parole, due figure uguali ad una terza sono uguali fra loro).

- La somma di segmenti gode delle proprietà commutativa e associativa. Idem per la somma di angoli.

- **Somme, e differenze, di segmenti uguali sono uguali.** Vale a dire:

$$(a = b \wedge c = d) \rightarrow a + c = b + d; \quad (a = b \wedge c = d) \rightarrow a - c = b - d \quad (\text{qui si suppone } a > c)$$

Questo assioma può essere anche enunciato dicendo che

se due uguaglianze fra segmenti sono entrambe vere, allora addizionando

o sottraendo membro a membro tali due uguaglianze si ottiene ancora un'uguaglianza vera:

$$\begin{array}{r} a = b \\ c = d \\ \hline a + c = b + d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a = b \\ c = d \\ \hline a - c = b - d \end{array}$$



- Un assioma analogo al precedente vale per gli angoli; quindi:

somme (e differenze) di angoli uguali sono uguali; oppure, in altre parole: addizionando (o sottraendo) membro a membro due uguaglianze vere fra angoli si ottiene ancora un'uguaglianza vera.

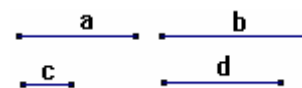
- Se quattro segmenti a, b, c, d sono tali che $a < b$ e $c < d$, allora $a + c < b + d$; e se quattro segmenti a, b, c, d sono tali che $a > b$ e $c > d$, allora $a + c > b + d$

In altre parole, sommando membro a membro due disuguaglianze vere (e aventi lo stesso verso, cioè: o entrambe col $<$, o entrambe col $>$) fra segmenti, si ottiene ancora una disuguaglianza vera (con lo stesso verso).

Osservazione: invece non è lecito SOTTRARRE membro a membro due disuguaglianze dello stesso verso,

nel senso che la disuguaglianza che così si otterrebbe non è sempre vera: può essere vera o falsa, a seconda dei casi.

Ad es., per la quaterna di segmenti della figura qui a fianco, sarebbe falsa.



Per i 4 segmenti a, b, c, d sopra raffigurati, risulta $a < b, c < d$.

Bene! E' vero ora che $a + c < b + d$,

mentre la disuguaglianza che si otterrebbe

sottraendo membro a membro, ossia $a - c < b - d$, è FALSA.

- Un assioma analogo al precedente vale per gli angoli.

- Addizionando, o sottraendo, uno stesso termine da entrambi i membri di una disuguaglianza vera, si ottiene ancora una disuguaglianza vera: $a < b \rightarrow a + c < b + c$; $a < b \rightarrow a - c < b - c$. Idem col $>$.

- Segmenti doppi di segmenti uguali sono uguali: $a = b \rightarrow 2a = 2b$

- Metà di segmenti uguali sono uguali: $a = b \rightarrow \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b$

- Più in generale: $a = b \rightarrow ma = mb$; $\frac{1}{n}a = \frac{1}{n}b$; $\frac{m}{n}a = \frac{m}{n}b$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$; la scrittura $\frac{m}{n}a$ significa $m \cdot \frac{1}{n}a$)

- Assiomi analoghi ai tre precedenti valgono per gli angoli. Quindi:

angoli doppi di angoli uguali sono uguali; metà di angoli uguali sono uguali;

e in generale, moltiplicando per uno stesso numero razionale positivo entrambi i membri di un'uguaglianza vera fra angoli, si ottiene ancora un'uguaglianza vera.

- Per i segmenti, leggendo prima i tre simboli “sopra” ($<$) poi i tre “sotto” ($>$): $a \leq b \rightarrow 2a \leq 2b$ e $\frac{1}{2}a \leq \frac{1}{2}b$;

più in generale, $a \leq b \rightarrow ma \leq mb$, $\frac{1}{n}a \leq \frac{1}{n}b$, $\frac{m}{n}a \leq \frac{m}{n}b$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$; la scrittura $\frac{m}{n}a$ significa $m \cdot \frac{1}{n}a$).

E assiomi analoghi valgono per gli angoli.

- “**Tricotomia**”: dati due segmenti a, b , si verifica una e una sola delle tre eventualità $a < b$, oppure $a = b$, o $a > b$. Analogamente per gli angoli.

- “**Principio di sostitutività**”: in una catena di uguaglianze (o di disuguaglianze), è sempre lecito sostituire al posto di un segmento, un altro segmento che si sa (per ipotesi, o per dimostrazione precedente) essere uguale al primo. Lo stesso vale anche per gli angoli.

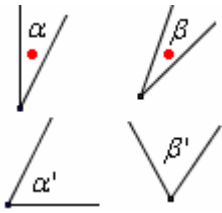
1.5 - DIMOSTRIAMO I PRIMI TEOREMI

TEOREMA

Se due angoli sono complementari di due angoli uguali (o, in particolare: dello stesso angolo), allora sono uguali.

Brevemente:

ANGOLI COMPLEMENTARI DI DUE ANGOLI UGUALI (O DELLO STESSO ANGOLO) SONO UGUALI



Ipotesi (HP):

$$\alpha = \beta$$

α' complementare di α

β' complementare di β

Tesi (TH):

$$\alpha' = \beta'$$

Dimostrazione

Poiché α' è complementare di α , si ha $\alpha + \alpha' = 90^\circ \rightarrow \boxed{\alpha' = 90^\circ - \alpha}$;

poiché β' è complementare di β , si ha

$$\beta + \beta' = 90^\circ \rightarrow \boxed{\beta' = 90^\circ - \beta} \quad \begin{matrix} \text{(per HP,} \\ \alpha = \beta) \end{matrix} = \boxed{90^\circ - \alpha}.$$

Quindi α' e β' sono uguali, perché entrambi uguali a $90^\circ - \alpha$.

Brevemente: $\alpha' \stackrel{\text{(HP: } \alpha + \alpha' = 90^\circ)}{=} 90^\circ - \alpha \stackrel{\text{(HP: } \alpha = \beta)}{=} 90^\circ - \beta \stackrel{\text{(HP: } \beta + \beta' = 90^\circ)}{=} \beta'$, **C.V.D.**

Osservazione: a ben guardare, nelle catene sopra scritte, quando si è rimpiazzato α con β , si è applicato il "Principio di sostitutività" (vedi pag. precedente).

Un altro "stile" per esporre la dimostrazione avrebbe potuto essere quello che riportiamo qui a destra $\rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} 90^\circ = 90^\circ & & \\ \alpha = \beta \quad \text{(HP)} & & \\ \hline \underbrace{90^\circ - \alpha}_{= \alpha'} & = & \underbrace{90^\circ - \beta}_{= \beta'} \\ \text{(HP: } \alpha + \alpha' = 90^\circ) & & \text{(HP: } \beta + \beta' = 90^\circ) \end{array}$$

Le lettere puntate **C.V.D.** stanno per **"Come Volevasi Dimostrare"**. Spesso la conclusione della dimostrazione di un teorema viene "siglata" così.

In modo del tutto analogo, semplicemente scrivendo sempre 180° al posto di 90° , si dimostra il seguente

TEOREMA

Se due angoli sono supplementari di due angoli uguali (o, in particolare: dello stesso angolo), allora sono uguali.

Brevemente:

ANGOLI SUPPLEMENTARI DI DUE ANGOLI UGUALI (O DELLO STESSO ANGOLO) SONO UGUALI

Definizione di angoli "opposti al vertice"

Si dicono "opposti al vertice" due angoli convessi tali che i lati dell'uno siano i prolungamenti dei lati dell'altro.

In pratica, quando due rette si tagliano, si formano quattro angoli, che sono a due a due opposti al vertice.

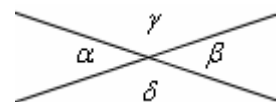
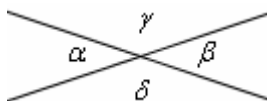


Fig. 29:

α e β sono opposti al vertice; così pure, lo sono γ e δ

TEOREMA: SE DUE ANGOLI SONO OPPOSTI AL VERTICE, ALLORA SONO UGUALI

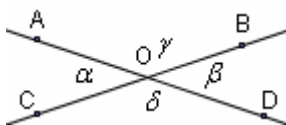


HP: α, β opposti al vertice

TH: $\alpha = \beta$

Dimostrazione

Conseguenza di un teorema già acquisito: α, β sono uguali perché supplementari dello stesso angolo γ . Oppure, senza scomodare teoremi precedenti:



$$\begin{aligned} \alpha &= \widehat{COA} = \widehat{COB} - \widehat{AOB} = \\ &= 180^\circ - \widehat{AOB} = \\ &= \widehat{AOD} - \widehat{AOB} = \widehat{DOB} = \beta \end{aligned}$$

Le CATENE sono molto usate nelle dimostrazioni. In una catena ben impostata ciascun "anello" deve essere ricavato A PARTIRE DALL' "ANELLO" CHE LO PRECEDE.

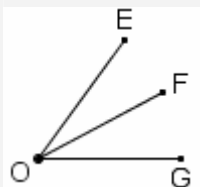
Nel seguito, noi ci limiteremo a fare della "geometria piana", ossia a studiare figure geometriche, o gruppi di figure, i cui punti giacciono tutti su di uno stesso piano.

1.6 - AIUTO PER IL RIPASSO (le risposte sono in fondo alla pagina ... tienile coperte!)

- 1) Si può dire che i due segmenti $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ in figura sono “consecutivi”?
E che sono “adiacenti”?



- 2) Due angoli adiacenti sono sempre supplementari? Due angoli supplementari sono sempre adiacenti?
3) Quanto misurano due angoli complementari, che siano uno il triplo dell'altro?
4) E' maggiore un angolo concavo o uno convesso?
5) Due angoli adiacenti sono sempre anche consecutivi?
Due angoli consecutivi sono sempre anche adiacenti?



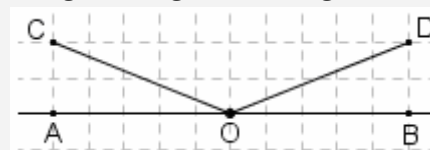
- 6) In figura, $E\hat{O}G - F\hat{O}G = ?$

- 7) Disegna il multiplo secondo 4
e il sottomultiplo secondo 4 del segmento in figura.



- 8) Il fatto che un segmento si possa suddividere in un numero a piacere di parti uguali è affermato dall'assioma cosiddetto della ...
9) Quanto misura l'esplementare del supplementare di un angolo di 30° ?
10) Cosa dice la proprietà transitiva della relazione “>” fra segmenti?
11) E' sempre lecito sommare membro a membro due disuguaglianze dello stesso verso fra segmenti?
E sottrarle membro a membro?
12) Cosa dice il “Principio di Sostituività”?
13) Esprimi schematicamente, usando il simbolo $\rightarrow$, l'assioma “metà di segmenti uguali sono uguali”

- 14) I due angoli $A\hat{O}C$, $B\hat{O}D$ in figura sono opposti al vertice?



- 15) Dimostra, schematicamente, che due angoli α' e β' rispettivamente complementari di due angoli α e β uguali fra loro, sono pure uguali fra loro.
16) L'ipotesi, in un teorema, è una supposizione che si fa, e, se la tesi è vera, allora vuol dire che era vera anche l'ipotesi. Giusto?
17) Possono due semirette distinte giacere sulla stessa retta, ma non essere una il prolungamento dell'altra?
18) C'è un assioma, che parla di una retta della quale due punti appartengono ad un piano.
Cosa afferma quell'assioma?
19) Non è esatto, perché è incompleto, affermare che “tre punti distinti individuano un piano”.
Cosa bisogna aggiungere?
20) Può un assioma avere un lemma? E avere un corollario?

RISPOSTE

- 1) No, perché hanno in comune anche altri punti, oltre all'estremo C; no: se non sono consecutivi, non possono essere nemmeno adiacenti 2) Sì; no 3) $22,5^\circ$ e $67,5^\circ$ ($22^\circ 30'$, $67^\circ 30'$) 4) Concavo 5) Sì; no 6) $E\hat{O}F$ (o $F\hat{O}E$)
7) 8 quadretti, $\frac{1}{2}$ quadretto 8) “divisibilità indefinita del segmento” 9) 210° 10) $a > b \wedge b > c \rightarrow a > c$
11) Sommarle, sì (se sono vere entrambe, si è certi di ottenere una disuguaglianza, con lo stesso verso, vera); sottrarle, no 12) “in una catena di uguaglianze, o di disuguaglianze, fra segmenti (angoli), è sempre lecito sostituire al posto di un segmento (angolo) un altro segmento (angolo) che si sa, per HP o per dim., essere uguale al primo”
13) $a = b \rightarrow \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b$ 14) No 15) $\alpha' + \alpha = 90^\circ \wedge \beta' + \beta = 90^\circ \wedge \alpha = \beta \rightarrow \alpha' = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \beta = \beta'$
16) Assolutamente no. In un teorema si fa vedere che, se vale l'ipotesi, allora sicuramente vale anche la tesi
17) Certamente: basta che non abbiano l'origine in comune! 18) Afferma che anche tutti gli altri punti di quella retta appartengono a quel piano 19) Bisogna aggiungere: “a patto che i punti in questione non siano allineati, cioè non giacciono sulla stessa retta” 20) Un lemma, no, perché significherebbe che l'assioma viene dimostrato a partire da quel lemma, mentre un assioma NON viene dimostrato (sarebbe, in questo caso, un teorema); un corollario, sì, perché un assioma può benissimo avere delle conseguenze immediate o quasi immediate

Cap. 2: I TRIANGOLI

2.1 - GENERALITA'

Una sequenza di segmenti
ciascuno consecutivo a quello che lo precede,
costituisce una “SPEZZATA”.
Sinonimo di “spezzata” è “POLIGONALE”.

- Una spezzata o poligonale può essere
- ✓ “non intrecciata” (come in fig. 29a)
 - ✓ o “intrecciata” (fig. 29b);
 - ✓ può essere “aperta” (fig. 29c)
 - ✓ o “chiusa” (fig. 29d)

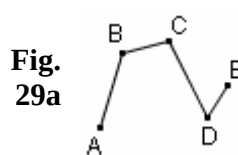


Fig. 29a

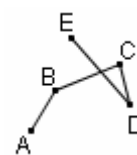


Fig. 29b

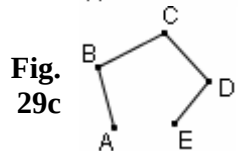


Fig. 29c

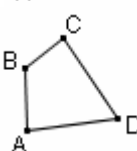


Fig. 29d

Si dice “POLIGONO” quella parte di piano che è delimitata
da una poligonale non intrecciata chiusa.

Noi considereremo quasi esclusivamente poligoni “convessi”; un poligono si dice invece “concavo” quando esiste almeno un segmento, con gli estremi appartenenti al poligono, che esca fuori dal poligono (figure 30a, 30b).

Un poligono con 3 lati (e quindi anche 3 angoli) si dice **triangolo**; se ha 4 lati, si dice **quadrilatero** (o quadrangolo). Si parla poi di: **pentagono**, **esagono**, **eptagono**, **ottagono**, **ennagono**, **decagono**, **undecagono**, **dodecagono**; poligono di 13, 14, 15, 16 ... ecc. lati.

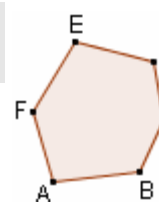


Fig. 30a:
ABCDEF
è convesso

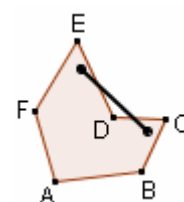


Fig. 30b:
ABCDEF
è concavo

Un **TRIANGOLO** si dice **ISOSCELE** se ha (almeno) due lati uguali.

Questi vengono detti “LATI OBLIQUI” o semplicemente “LATI”.

Il lato rimanente viene detto “BASE”.

Gli angoli aventi per vertici gli estremi della base

(nella figura qui a fianco, sono gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$:

quando non può esserci ambiguità, per indicare un angolo è consentito di utilizzare anche la sola lettera del suo vertice)

sono chiamati “ANGOLI ALLA BASE”, e l'angolo rimanente,

quello formato dai lati obliqui, è detto “ANGOLO AL VERTICE”.



Fig. 31a

ABC è isoscele,
perché $\overline{AC} = \overline{BC}$.

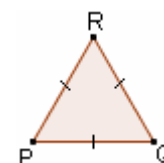


Fig. 31b

PQR è un
triangolo
equilatero,
perché
 $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RP}$

Un triangolo si dice **EQUILATERO** se ha tutti e tre i lati uguali.

Il triangolo equilatero è un caso particolare di triangolo isoscele:

può infatti considerarsi come un triangolo,

che è **isoscele in tre modi diversi**

(si può assumere come base uno qualsiasi dei tre lati).

In un triangolo:

a) si dice “**MEDIANA**”
un segmento che,
partendo da un vertice, va
a finire nel punto medio
(= punto di mezzo)
del lato opposto

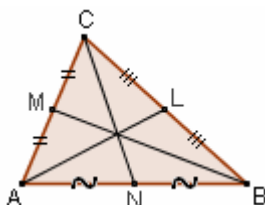


Fig. 32:
le tre mediane

b) si dice “**BISETTRICE**”
quella parte della bisettrice
di un angolo interno,
che è compresa
fra il vertice dell'angolo
e il lato opposto

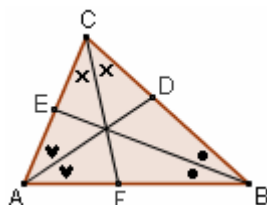


Fig. 33:
le tre bisettrici

c) si dice “**ALTEZZA**” un segmento
che parte da un vertice
e cade perpendicolarmente sul lato opposto,
o, eventualmente, sul suo prolungamento

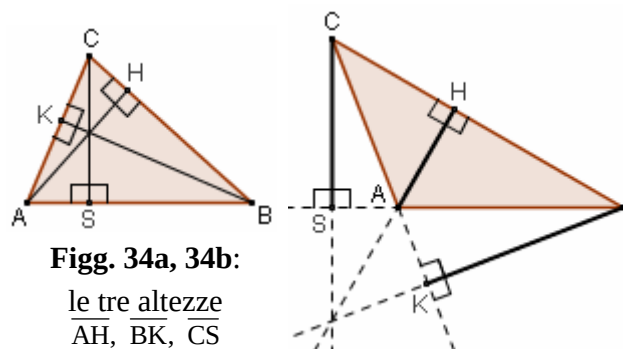


Fig. 34a, 34b:
le tre altezze
 $\overline{AH}$, $\overline{BK}$, $\overline{CS}$

Un triangolo ha tre mediane, tre bisettrici, tre altezze.

Curioso! Se si disegnano con cura le tre mediane, sembra proprio che queste passino per uno stesso punto. Idem per le bisettrici; idem per le altezze (o, nel caso del triangolo ottusangolo, i loro prolungamenti).

Sarà vero questo? Le mediane, ad esempio, passano realmente tutte e tre per uno stesso punto, oppure c'è soltanto una zona in cui passano “vicinissime”? Tu cosa ne dici?

A questa domanda saremo in grado di dare una risposta definitiva al capitolo 5.

2.2 - IL FREEWARE GEOGEBRA

C'è un delizioso programma per computer scaricabile legalmente *a costo zero* da Internet (è **freeware**, ossia software di cui l'autore permette l'uso gratuito, pur mantenendone la proprietà); esso dà la possibilità di **disegnare figure geometriche "dinamiche"** (ad esempio, trascinando col mouse un vertice di un triangolo del quale si siano tracciate le altezze, cambia la forma del triangolo con le altezze che *si mantengono perpendicolari* alle rispettive basi), di **tracciare grafici di funzioni**, di **visualizzare luoghi geometrici**, ecc.

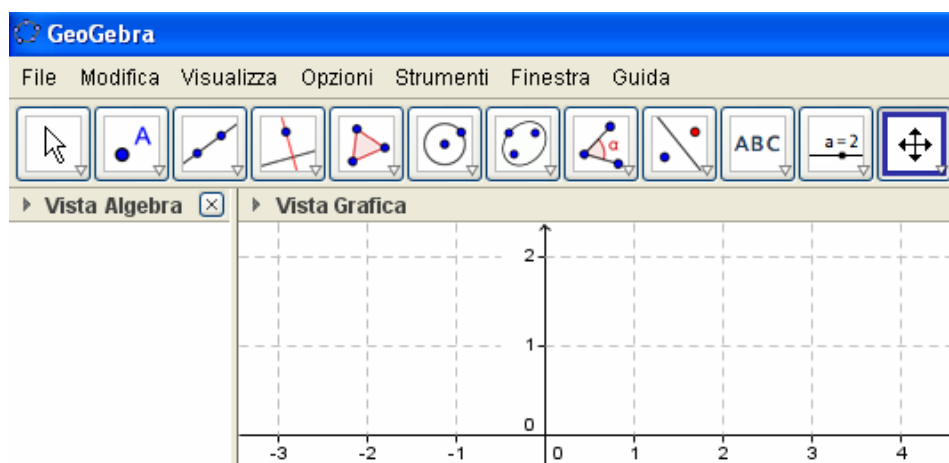
Il software si chiama **GeoGebra** ed è opera di un geniale austriaco di nome **Markus Hohenwarter**: a lui vada la gratitudine e l'ammirazione della comunità, che può liberamente utilizzare uno strumento efficiente, agile, leggiadro nella grafica e nei colori, senza pagare alcunché (con la possibilità, ma non l'obbligo, di versare un'offerta o di acquistare online le magliette e i cappellini col logo "GeoGebra").

Vai su www.geogebra.org
e scarica il programma sul tuo computer,
cliccando su **"Download"**;
al termine di queste semplici operazioni, sul desktop
comparirà la caratteristica **icona di GeoGebra**
raffigurante una curva chiusa per 5 punti.



Doppiocliccando l'icona, ecco che il programma si avvia e possiamo cominciare a divertirci.

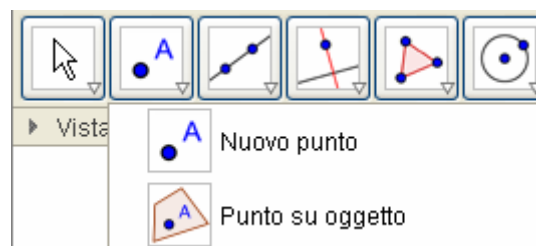
Vedremo subito
una schermata come quella
raffigurata qui a fianco;
la griglia all'interno
del riferimento cartesiano,
e il riferimento stesso,
possono essere fatti
comparire/scompare
cliccando
il tasto destro del mouse
in una posizione qualsiasi
dell'area "Vista Grafica",
e scegliendo
l'opzione desiderata.



Le icone in alto

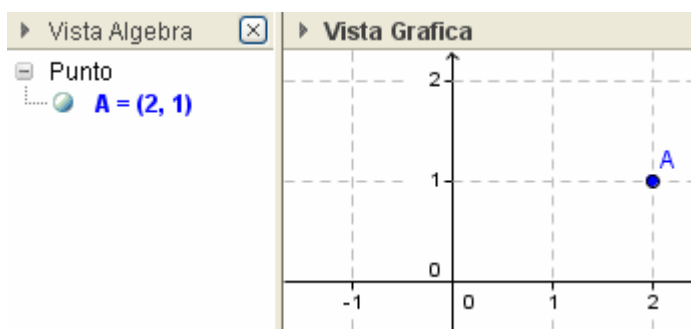
(con la freccia, il punto, la retta per due punti, la perpendicolare, eccetera)
sono tali che cliccandoci sopra
(più precisamente: cliccando **sul triangolino in basso a destra** di quel "tasto")
si apre una tendina con le varie possibilità che il tasto stesso ci offre.

Clicchiamo ad esempio
sulla seconda icona da sinistra, quella col punto,
e ci verrà proposta una lista con più possibili scelte;
selezioniamo **"Nuovo Punto"** e da quel momento,
quando, spostandoci col mouse sul "foglio da disegno",
faremo un "clic",
verrà creato un punto
a cui sarà automaticamente attribuito il nome "A".
Se facciamo altri clic ...
ne nasceranno altri punti, etichettati B, C, D, ecc.



E osserveremo che nella finestra "Vista Algebra"
verrà automaticamente generata
la lista di tutti gli "oggetti"
via via disegnati.

Accanto a ogni punto, nella stessa finestra,
**GeoGebra ci darà pure
le sue coordinate cartesiane**
(indipendentemente dal fatto
che gli assi del riferimento
siano visibili oppure siano stati nascosti).



Vogliamo **cambiare il nome di un determinato punto, o modificarne il colore, o le dimensioni?**

Facile: ci posizioneremo sul punto, cliccheremo il tasto destro del mouse, e vedremo comparire un menu a tendina che avrà una voce denominata "Proprietà". Basterà un clic su di essa per avere tutta una gamma di scelte a disposizione.

Proprietà ...

Disegniamo ora un triangolo:

clic sul quinto tasto da sinistra, poi tre clic sul foglio da disegno, più un ultimo clic sul primo fra i tre punti disegnati (per "chiudere" il triangolo), ed è fatta.



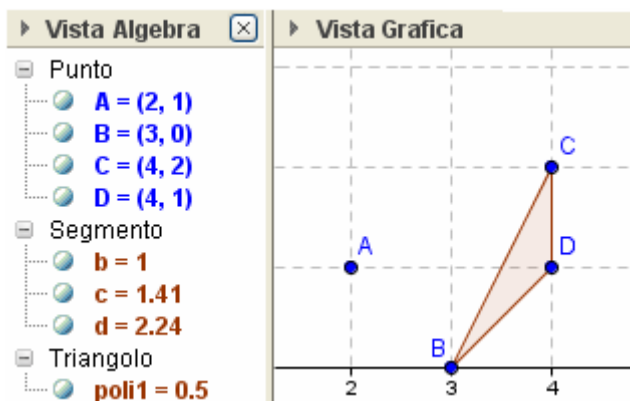
□ Osserviamo la finestra "Vista Algebra":

i tre lati del triangolo sono stati automaticamente etichettati

in modo "intelligente" ... nel senso che, se il triangolo era BCD, i lati opposti ai tre vertici sono stati denominati b, c, d, in conformità con un'abitudine diffusa

e molto utile in Geometria, quella di indicare i lati di un triangolo con le lettere minuscole, corrispondenti alle lettere maiuscole che indicano i vertici opposti.

Possiamo vedere, fra l'altro, che GeoGebra ha già provveduto ad evidenziare, in "Vista Algebra", oltre alle **coordinate dei tre vertici**, anche le **lunghezze dei lati**, e persino l'**area** del nostro triangolo!



Vogliamo, nel triangolo disegnato, tracciare un'altezza?

Guardiamo i tasti della barra in alto ...

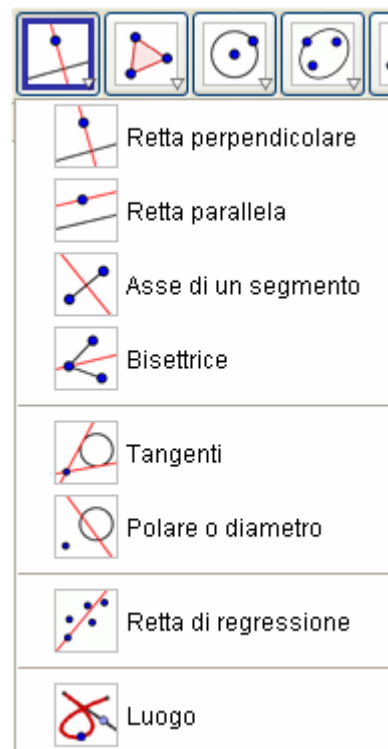
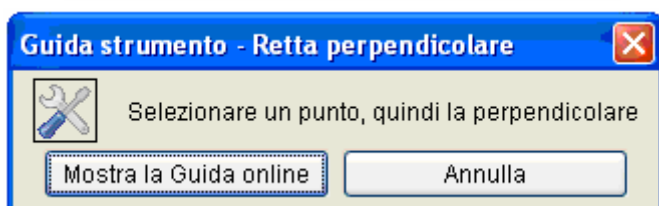
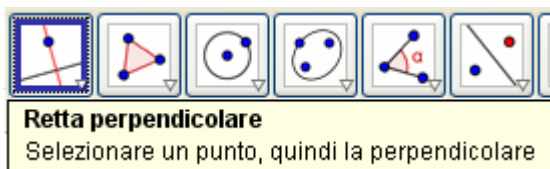
Quale, plausibilmente, farà al caso nostro?

Ovviamente, quello con la figura di una perpendicolare!

Clicchiamo allora su questo tasto (sul triangolino a destra in basso) e in effetti, nella tendina che si apre, troviamo l'opzione desiderata.

Come procedere, adesso?

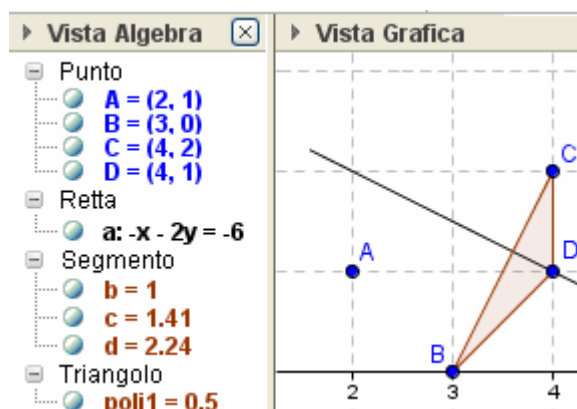
La risposta è estremamente intuitiva; tuttavia, se noi stiamo fermi, col puntatore del mouse, al di sopra dell'icona, oppure, dopo aver cliccato sull'opzione "Retta Perpendicolare", premiamo, sulla tastiera del computer, il "tasto funzione" F1, osserveremo che GeoGebra ci offre un **"Help" adeguato al contesto!**



Beh ... qui forse il messaggio, per essere più chiaro, avrebbe dovuto semmai menzionare non *"la perpendicolare"*, ma piuttosto *"la retta alla quale si vuole che giunga la perpendicolare"*.

Pazienza ... abbiamo comunque capito l'antifona: dobbiamo cliccare sul punto D e sulla retta su cui giace il segmento $\overline{BC}$, e con ciò la nostra perpendicolare verrà disegnata.

La brava "Vista Algebra" ci fornisce pure, immediatamente, l'equazione che corrisponde alla retta tracciata nel riferimento cartesiano (sia esso visibile o no) all'interno del quale stiamo lavorando.



Se a questo punto ci interessa non tanto la perpendicolare come retta, quanto quel “pezzo” di essa che va dal vertice al lato opposto, insomma:

il *segmento* che fa da altezza relativamente al lato $\overline{BC}$, dovremo procedere nel modo che segue:

- 1) Clic sul secondo tasto da sinistra, poi clic su “**Intersezione di due oggetti**”
- 2) Un clic sulla perpendicolare disegnata, un altro su $\overline{BC}$, ed ecco che compare il loro punto di intersezione (indicato con E nelle figure successive)
- 3) Clic sul terzo tasto da sinistra, poi clic su “Segmento tra due punti”
- 4) Clic su D, clic su E ed ecco che GeoGebra crea come suo “oggetto” il segmento $\overline{DE}$, che in questo momento è coperto dalla retta DE ma la cui misura è comparsa regolarmente nella finestra “Algebra”
- 5) Posizioniamo il mouse sulla retta DE, clicchiamo col destro, **togliamo il segno di spunta da “Mostra oggetto”** e l’oggetto in questione (= la retta perpendicolare) verrà nascosto (*nascosto*, reso invisibile, NON cancellato, altrimenti se ne andrebbero via anche il punto E e il segmento $\overline{DE}$ che da esso dipendono!) e quello che vedremo in figura sarà ciò che desideravamo, ossia il segmento che va da D fino a E, non più ricoperto dalla retta perpendicolare, che esiste ancora ma è stata resa invisibile all’occhio.

A te il piacere di scoprire come evidenziare gli angoli retti $\hat{DEB}$ e $\hat{DEC}$.

Sono certo che ce la farai senza ulteriori indicazioni, scegliendo il tasto opportuno e utilizzando l’ “Help” ottenibile ad esempio con la pressione di F1 sulla tastiera.

Vedrai alla fine che, essendo gli angoli in gioco conseguenza del tracciamento di una perpendicolare, GeoGebra li contrassegnerà col tipico “quadrato di angolo retto” (un angolo generico viene invece evidenziato con un archetto).

A questo punto, trascina col mouse uno dei vertici del triangolo BCD:

♪ **il triangolo si deformerà ...**

♪ **... ma l’altezza resterà altezza, nel senso che la sua perpendicolarità rispetto a $\overline{BC}$ si conserverà !!!**

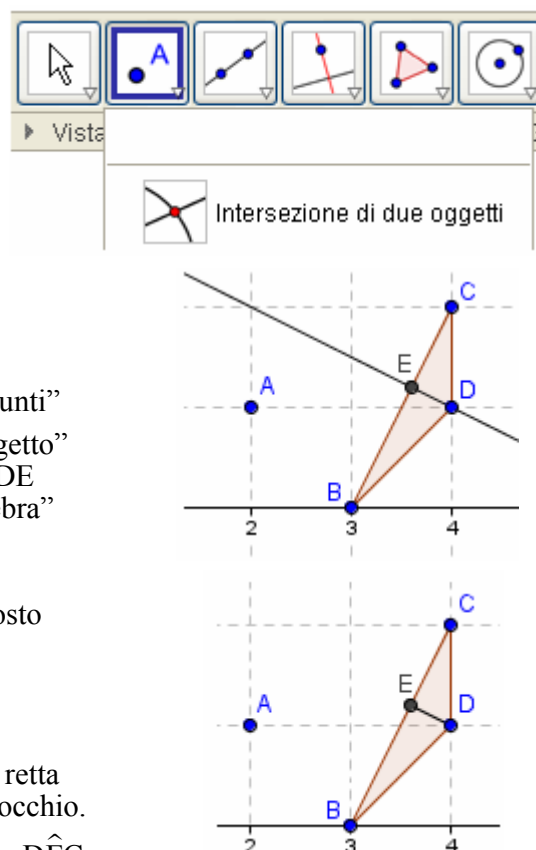
Avrai compreso che GeoGebra è un programma dall’ utilizzo facile, piacevole e intuitivo ...

Sta a te, se vuoi, impararne le tantissime funzionalità provando e riprovando ...

Fra l’altro, il **menu “Guida”** ti permette di reperire tutte le spiegazioni che vuoi ...



- ❑ Se hai sbagliato qualcosa o ti penti della scelta fatta e vuoi “tornare indietro”, la combinazione **Ctrl+Z** da tastiera **annulla l’ultima operazione (e può essere eseguita più volte)**.
Per eliminare un oggetto lo si può anche selezionare col mouse per poi premere “Canc” sulla tastiera.
- ❑ Interessante il ruolo del **tasto “Copia Formato”**! Prova a servirtene; ti piacerà la sua grande comodità per replicare le caratteristiche di un oggetto su di un altro.



ESERCIZI

- 1) Utilizza GeoGebra per disegnare un triangolo, con le sue tre altezze, le sue tre mediane e le tre bisettrici. Personalizza poi esteticamente il file con colori, etichette, spessori, scritte esplicative, ecc. ecc., che siano di tuo gradimento.
- 2) Traccia con GeoGebra due circonferenze, di centri O e C, e indica con A, B i punti in cui esse si intersecano. Disegna il quadrilatero OACB, e traccia (“Circonferenza per tre punti”) la circonferenza che passa per O, A e B, poi quella che passa per C, A e B.



2.3 - I “CRITERI DI UGUAGLIANZA”; IL TRIANGOLO ISOSCELE

TEOREMA (“1° Criterio di uguaglianza dei triangoli”)

Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo fra essi compreso, allora sono uguali.

1° Criterio

Questo teorema afferma, in pratica, quanto segue.

Se la compagna di banco mi dice: “non sapevo cosa fare e ho ritagliato da un foglio di carta un triangolo con un lato di 10 cm, un altro lato di 12 cm, e l'angolo compreso di 45°”;

e la Segretaria mi dice: “sulla mia scrivania ho un fermacarte triangolare, con un lato di 10 cm, un altro lato di 12 cm, e l'angolo compreso di 45°”

allora io con assoluta sicurezza, senza bisogno di sapere nient'altro, posso affermare che i due triangoli sono uguali in tutto e per tutto, cioè congruenti, cioè perfettamente sovrapponibili: in particolare, posso esser certo che i due triangoli hanno rispettivamente uguali anche il lato rimanente e i due angoli rimanenti, ossia quegli elementi sui quali non mi era stata data nessuna informazione.

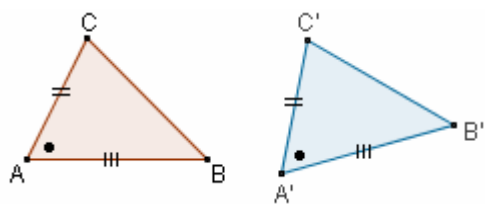
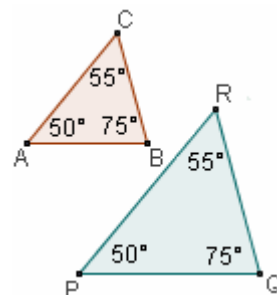
Per capire ancor meglio, facciamo un raffronto con la situazione seguente, che è invece **profondamente diversa**.

Di due triangoli, supponiamo di sapere che hanno i tre **angoli** rispettivamente uguali (ad es., sia l'uno che l'altro abbiano gli angoli che misurano: 50°, 75°, 55°).

Possiamo affermare con sicurezza che sono uguali, congruenti, sovrapponibili?

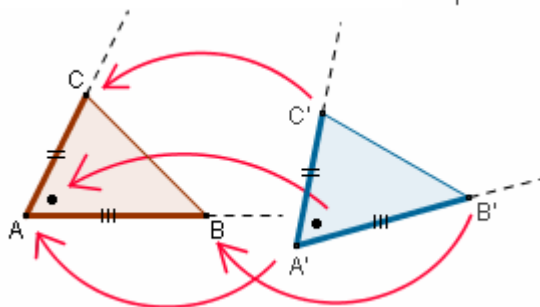
No di certo!!!

L'uguaglianza rispettiva dei tre angoli garantisce l'uguaglianza della “forma”, ma non la sovrapponibilità: infatti i due triangoli potrebbero essere uno l'ingrandimento dell'altro, come nella figura qui a fianco riportata.



IPOTESI: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$; $\overline{AC} = \overline{A'C'}$; $\hat{A} = \hat{A'}$

TESI: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$



DIMOSTRAZIONE

Immaginiamo di **spostare, con un movimento rigido, tutto l'angolo $\hat{A'}$**

(in questo modo ci porteremo dietro, in particolare, il triangolo $\triangle A'B'C'$), così da incastrare perfettamente tale angolo nell'angolo $\hat{A}$ (ciò è certamente possibile perché $\hat{A} = \hat{A'}$ per ipotesi). Realizziamo l'“incastrò” in modo che la semiretta $A'B'$ vada a posarsi sulla semiretta AB , e la semiretta $A'C'$ sulla AC .

Nell'istante in cui l'angolo $\hat{A'}$ “atterra” sull'angolo $\hat{A}$, con il punto A' che si posa sul punto A , la semiretta $A'B'$ che atterra sulla semiretta AB e la semiretta $A'C'$ che atterra sulla semiretta AC , avremo che:

- ✓ il punto B' andrà a sovrapporsi al punto B , in virtù dell'ipotesi $\overline{A'B'} = \overline{AB}$;
- ✓ e il punto C' andrà a sovrapporsi al punto C , in virtù dell'ipotesi $\overline{A'C'} = \overline{AC}$.

Insomma, il movimento rigido cui abbiamo sottoposto l'angolo $\hat{A'}$ e perciò il triangolo $\triangle A'B'C'$, ha portato: il punto A' sul punto A ; il punto B' sul punto B ; il punto C' sul punto C ; e pertanto ha fatto sovrapporre: il segmento $\overline{A'B'}$ al segmento $\overline{AB}$; il segmento $\overline{A'C'}$ al segmento $\overline{AC}$; il segmento $\overline{B'C'}$ al segmento $\overline{BC}$. Quindi il contorno del triangolo $\triangle A'B'C'$ si è sovrapposto perfettamente al contorno di $\triangle ABC$; e ne consegue, com'è evidente, che si sono sovrapposte in modo da combaciare anche le rispettive parti interne.

Resta così provato che $\triangle A'B'C'$ è perfettamente sovrapponibile, congruente, uguale, ad $\triangle ABC$, C.V.D.

OSSERVAZIONE

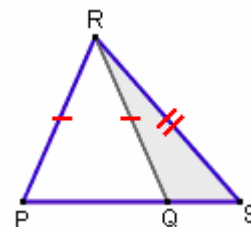
♥ **Nell'enunciato del Primo Criterio è essenziale specificare il fatto che l'angolo di cui si parla sia quello COMPRESO fra i due lati considerati.**

Infatti, se due certi triangoli hanno rispettivamente uguali due lati ed un angolo, ma l'angolo non è quello compreso, allora non è detto che i due triangoli siano per forza uguali: potrebbero anche non esserlo, come mostra la figura qui a fianco.

In essa, i due triangoli $\triangle PRS$, $\triangle RSQ$ hanno uguali due lati ed un angolo:

$\overline{RP} = \overline{RQ}$; $\overline{RS}$ in comune ($\overline{RS} = \overline{RS}$); $\hat{S}$ in comune ($\hat{S} = \hat{S}$);

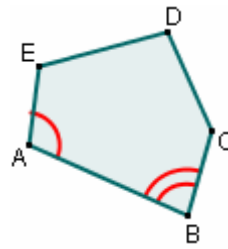
tuttavia, non sono affatto uguali. **L'angolo non è “quello compreso”!**



UNA QUESTIONE DI TERMINOLOGIA

In un poligono qualsiasi, i due angoli che hanno per vertici gli estremi di un certo lato vengono chiamati **“gli angoli adiacenti a quel lato”**.

Reciprocamente, si può dire che quel lato è **“il lato adiacente”** ai due angoli considerati.



Nella figura,

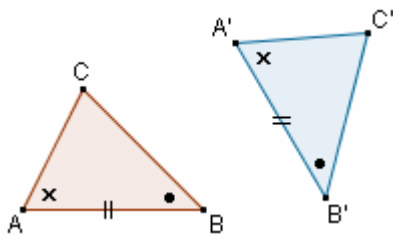
$\hat{A}$, $\hat{B}$ sono gli angoli “adiacenti” al lato $\overline{AB}$;

$\overline{AB}$ è il lato “adiacente” ai due angoli $\hat{A}$, $\hat{B}$ (anche: “compreso fra” tali angoli)

TEOREMA (“2° Criterio di uguaglianza dei triangoli”)

Se due triangoli hanno rispettivamente uguali un lato e i due angoli ad esso adiacenti, allora sono uguali.

2° Criterio



IPOTESI:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

$$\hat{A} = \hat{A'}$$

$$\hat{B} = \hat{B'}$$

TESI:

$$ABC = A'B'C'$$

DIMOSTRAZIONE

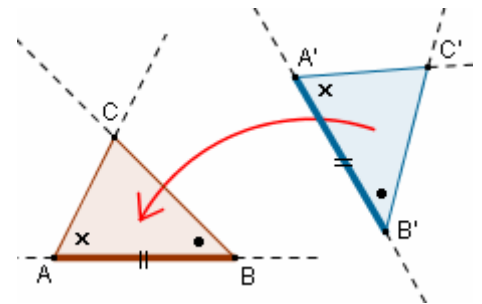
Immaginiamo di spostare, con un movimento rigido, il semipiano di origine $A'B'$ e contenente C' sul semipiano di origine $\overline{AB}$ e contenente C , in modo che il segmento $\overline{A'B'}$ vada a posarsi perfettamente su $\overline{AB}$ (ciò è certamente possibile perché $A'B' = AB$ per ipotesi).

Siccome per ipotesi è $\hat{A'} = \hat{A}$, la semiretta $A'C'$ sarà obbligata a sovrapporsi alla semiretta AC ; analogamente, in virtù dell'ipotesi $\hat{B'} = \hat{B}$, la semiretta $B'C'$ andrà per forza a posarsi sopra la semiretta BC .

Alla fine del movimento rigido, dove si trova C' ?

Beh, poiché C' (che apparteneva sia alla semiretta $A'C'$ che alla semiretta $B'C'$) è andato a finire sia sulla semiretta AC che sulla semiretta BC , necessariamente C' dovrà essere andato a coincidere con il punto C , che è l'unico punto comune a tali due semirette.

Alla fine del movimento rigido, troviamo quindi che i vertici del triangolo $A'B'C'$ sono ordinatamente sovrapposti ai vertici di ABC , e di conseguenza lo sono anche i lati dei due triangoli e le rispettive parti interne. Ciò dimostra la tesi.



APPROFONDIMENTO TEORICO

Un'analisi più “pignola” rivelerebbe che le “dimostrazioni” qui date del 1° e del 2° Criterio, non sono del tutto rigorose, in quanto in esse vengono utilizzate proprietà che appaiono, senza dubbio, condivisibili per intuizione, ma che tuttavia non sono state esplicitamente dichiarate attraverso assiomi in precedenza accettati.

In questo approccio più “severo”, dunque, il Primo e il Secondo Criterio andrebbero considerati come due nuovi ASSIOMI, anziché come due teoremi.

Segnalo poi la ulteriore possibilità di assumere come assioma il solo 1° Criterio, fornendo poi del 2° una dimostrazione “per assurdo” a partire dal 1°, come sceglie di fare qualche libro di testo.

OSSERVAZIONE “PRATICA”, MOLTO UTILE

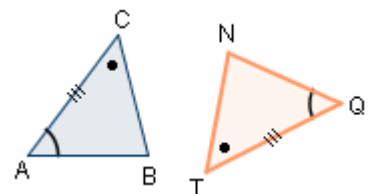
♥ In due triangoli dimostrati uguali, sono uguali gli elementi opposti ad elementi che sappiamo essere uguali: ossia, sono uguali i lati opposti ad angoli che sappiamo uguali, e sono uguali gli angoli opposti a lati che sappiamo uguali.

Esempio: nella figura possiamo osservare i due triangoli ABC e NQT che avendo uguali un lato e i due angoli ad esso adiacenti, sono uguali per il 2° Criterio. ... Bene! Possiamo a questo punto dire che:

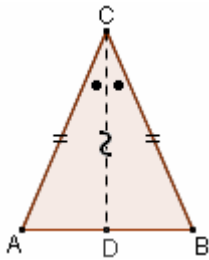
$$\overline{NQ} = \overline{AB} \quad (\text{opposti all'angolo indicato col puntino})$$

$$\overline{TN} = \overline{BC} \quad (\text{opposti all'angolo indicato con l'archetto})$$

$$\hat{N} = \hat{B} \quad (\text{opposti al lato indicato con i tre trattini})$$



TEOREMA - In un triangolo isoscele, gli angoli alla base sono uguali.



HP:
 $\overline{CA} = \overline{CB}$

TH:
 $\hat{A} = \hat{B}$

DIMOSTRAZIONE

Tracciamo la bisettrice dell'angolo al vertice $\hat{C}$ fino ad incontrare la base $\overline{AB}$ in D.

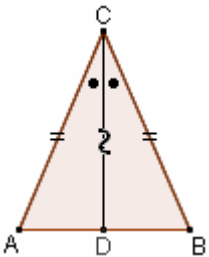
Confrontiamo ora i due triangoli CAD, CBD. Essi hanno:

- ✓ $\overline{CA} = \overline{CB}$ per HP;
- ✓ $\overline{CD}$ in comune, perciò uguale nei due triangoli ($\overline{CD} = \overline{CD}$);
- ✓ $\hat{ACD} = \hat{BCD}$ per costruzione.

Pertanto i due triangoli sono uguali per il 1° criterio; ne consegue, in particolare, $\hat{A} = \hat{B}$, **C.V.D.**

TEOREMA - In un triangolo isoscele, la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana e altezza relativa alla base.

Quindi in un triangolo isoscele bisettrice, mediana e altezza relative alla base coincidono.



HP:
 $\overline{CA} = \overline{CB}$
 $\hat{ACD} = \hat{BCD}$

TH:
 $\overline{AD} = \overline{DB}$; $CD \perp AB$ ($\hat{CDA} = \hat{CDB} = 90^\circ$)

DIMOSTRAZIONE

Come nella dimostrazione del teorema precedente, si confrontano i due triangoli CAD, CBD e li si dimostra uguali per il 1° Criterio.

Ne consegue, in particolare, che $\overline{AD} = \overline{DB}$ e con ciò la prima parte della tesi è dimostrata.

Ma dall'uguaglianza di CAD e CBD segue anche $\hat{CDA} = \hat{CDB}$; poiché ora questi ultimi due angoli sono pure supplementari (= danno per somma un angolo piatto), sarà $\hat{CDA} = \hat{CDB} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$, **C.V.D.**

APPROFONDIMENTO TEORICO

Abbiamo usato articoli determinativi ("la" bisettrice/mediana/altezza) dando per scontato che, in un triangolo, di bisettrice che parte da un dato vertice ce ne sia UNA SOLA, di mediana UNA SOLA, di altezza UNA SOLA.

A voler essere del tutto rigorosi, occorrerebbe invece *classificare*

i tre enunciati di **UNICITA'** della bisettrice, della mediana, e dell'altezza,

o dichiarandoli esplicitamente come assiomi, oppure, se possibile, dimostrandoli come teoremi.

In effetti, tali tre enunciati sono dimostrabili (i primi due, molto facilmente), quindi vanno pensati come teoremi.

- ❑ **Unicità della mediana:** è legata al fatto che il punto medio di un segmento dato è unico.
 Se infatti, per assurdo, un segmento assegnato AB avesse due distinti punti medi M, M', allora i segmenti AM e AM' dovrebbero essere uguali perché metà dello stesso segmento AB mentre non possono essere uguali perché hanno un estremo in comune e uno di essi "scappa fuori" dall'altro.



- ❑ **Unicità della bisettrice:** è dimostrabile con un ragionamento analogo a quello fatto per la mediana.

- ❑ **Unicità della perpendicolare (da un punto dato, ad una retta data):**

questo teorema è esposto nel prossimo capitolo, ma avrebbe potuto benissimo essere anticipato a questo livello, perché dipende esclusivamente dal "Teorema dell'angolo esterno in forma debole", che a sua volta richiede, per la sua dimostrazione, esclusivamente teoremi che al livello presente sono stati già dimostrati.

Osserviamo ancora che il nostro discorso dà pure per scontata l'**ESISTENZA** di mediana, bisettrice e altezza.

- ❑ L'**esistenza della mediana e della bisettrice** sono assicurate dagli **assiomi di divisibilità indefinita del segmento e dell'angolo**,
- ❑ mentre l'**esistenza dell'altezza può essere dimostrata** (il "**Teorema di esistenza della perpendicolare per un punto dato a una retta data**") è presentato nel capitolo successivo, ma avrebbe potuto benissimo essere anticipato a questo livello).

TEOREMA

Se un triangolo ha due angoli uguali, allora è isoscele
(precisamente, i due lati uguali sono quelli opposti agli angoli uguali).

OSSERVAZIONE

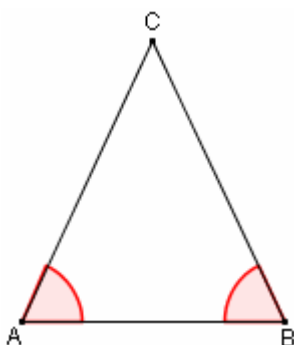
Si tratta del teorema **inverso**
di quello che diceva:

“In un triangolo isoscele,
gli angoli alla base sono uguali”.

**NON SEMPRE, se vale un teorema,
vale anche l'enunciato inverso!!!**

Ad es., è vero (lo dimostreremo a suo tempo) che
“se, in un quadrilatero, i lati sono tutti uguali,
allora le diagonali sono perpendicolari”

ma sarebbe FALSO affermare che
“se, in un quadrilatero, le diagonali sono perpendicolari,
allora i lati sono tutti uguali”



HP
 $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$

TH
 $\overline{CA} = \overline{CB}$

♥ Il teorema che stiamo esaminando
viene sovente enunciato dagli studenti
in modo maldestro:
“Se un triangolo ha *gli angoli alla base*
uguali, allora è isoscele”.
Eh no, così non va: se si parla fin dall'inizio di “angoli alla base”,
sembra che sia già noto *in partenza* che il triangolo è isoscele !!!



♥ NOTA - L'uso delle **CATENE**
è frequentissimo nelle dimostrazioni.

**In una catena ben impostata,
ciascun “anello” dev'essere ricavato
A PARTIRE DALL' “ANELLO” CHE
LO PRECEDE IMMEDIATAMENTE.**

**DIMOSTRAZIONE**

Costruzione:

tracciamo le bisettrici $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ degli angoli $\widehat{CAB}$ e $\widehat{CBA}$, che sono uguali per HP.
I **quattro angoli** $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$, $\widehat{B}_1$, $\widehat{B}_2$ che così si formano sono **tutti uguali fra loro**,
perché metà di angoli uguali, come possiamo illustrare con la catena seguente:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{CAB} = \frac{1}{2}\widehat{CBA} = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \quad (\text{NOTA in alto})$$

Confrontiamo ora i due triangoli ABE, BAD.

Essi hanno: $\overline{AB}$ in comune; $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$; $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$

quindi sono uguali per il 2° Criterio,

e in particolare avranno $\overline{BE} = \overline{AD}$ e $\widehat{AEB} = \widehat{BDA}$.

Dall'ultima uguaglianza segue $\widehat{CEB} = \widehat{CDA}$ perché **supplementari di angoli uguali**:

$$\widehat{CEB} = 180^\circ - \widehat{AEB} = 180^\circ - \widehat{BDA} = \widehat{CDA} \quad (\text{NOTA in alto})$$

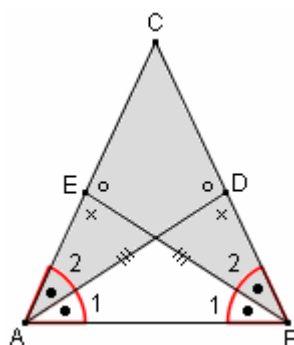
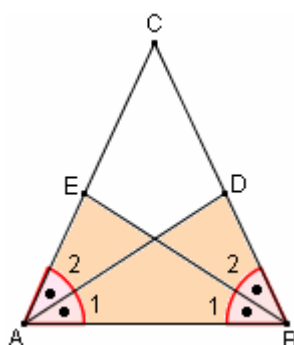
Se a questo punto **confrontiamo i due triangoli** ADC e BEC,

potremo affermare che sono uguali per il 2° Criterio:

hanno infatti

- $\overline{AD} = \overline{BE}$;
- $\widehat{CDA} = \widehat{CEB}$;
- $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$

Ma dall'uguaglianza dei due triangoli ADC e BEC segue, in particolare,
 $\overline{CA} = \overline{CB}$, cioè la tesi.

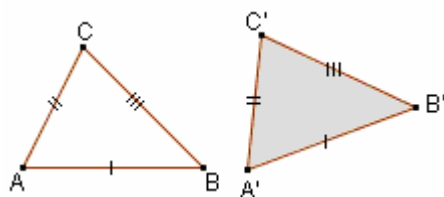
**TEOREMI (corollari di teoremi precedenti)**

- Se un triangolo è equilatero (= ha tutti e tre i lati uguali fra loro), allora è equiangolo (= ha tutti e tre gli angoli uguali fra loro).
- Se un triangolo è equiangolo, allora è equilatero.

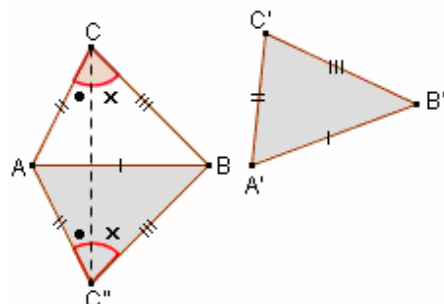
OSSERVAZIONE

I due teoremi (corollari) di cui sopra, che sono evidentemente uno l'inverso dell'altro,
potrebbero essere compendati nell'unico enunciato:

“Condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia equilatero, è che sia equiangolo”
oppure: “un triangolo è equilatero se e solo se è equiangolo”

TEOREMA ("3° Criterio di uguaglianza dei triangoli")**Se due triangoli hanno rispettivamente uguali i tre lati, allora sono uguali.****3° Criterio**

DIMOSTRAZIONE



$$\begin{array}{l} \text{HP} \quad \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \quad \quad \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \quad \quad \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \text{TH} \quad \angle ABC = \angle A'B'C' \end{array}$$

Sottoponiamo il triangolo A'B'C'**ad un movimento rigido con ribaltamento,**in modo da portare il segmento $\overline{A'B'}$ sul segmento $\overline{AB}$ (ricordiamo che i due segmenti sono uguali per ipotesi),con A' su A , B' su B e C' all'interno del semipiano di origine AB e *non* contenente C .Indichiamo con C'' la posizione che va così ad occupare il vertice C' .In questo modo, insomma, abbiamo costruito lo "stampo" ABC'' del triangolo $A'B'C'$, che adesso possiamo anche pensare di riportare, con un altro movimento rigido, al posto che occupava inizialmente.Tracciamo quindi la congiungente $\overline{CC''}$.Consideriamo il triangolo ACC'' : esso è isoscele (infatti $\overline{AC''} = \overline{A'C'} \stackrel{\text{HP}}{=} \overline{AC}$) e di conseguenza $\widehat{ACC''} = \widehat{AC''}C$.Anche il triangolo BCC'' è isoscele perché $\overline{BC''} = \overline{B'C'} \stackrel{\text{HP}}{=} \overline{BC}$; ne consegue $\widehat{BCC''} = \widehat{BC''}C$. Ma alloragli angoli $\widehat{ACB}$, $\widehat{AC''}B$ sono uguali perché somme di angoli uguali, come possiamo, volendo, illustrare...

♪ ... tramite una catena:

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACC''} + \widehat{BCC''} = \widehat{AC''}C + \widehat{BC''}C = \widehat{AC''}B$$

♪ ... oppure sommando membro a membro due uguaglianze:

$$\begin{array}{r} \widehat{ACC''} = \widehat{AC''}C \\ \widehat{BCC''} = \widehat{BC''}C \\ \hline \widehat{ACC''} + \widehat{BCC''} = \widehat{AC''}C + \widehat{BC''}C \\ \widehat{ACB} \qquad \qquad \widehat{AC''}B \end{array}$$

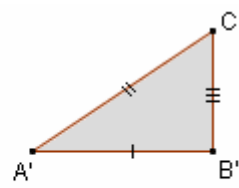
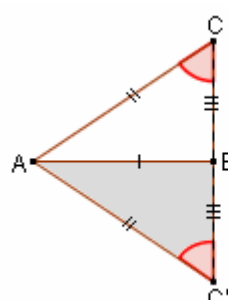
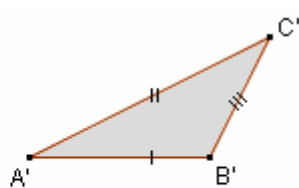
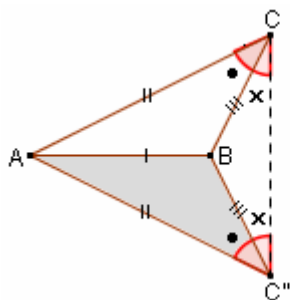
Osserva che,
come in ogni catena ben impostata,
ogni "anello" è ricavato
a partire dall' "anello" che lo precede!

Se ora confrontiamo i triangoli ABC e ABC'' , possiamo dire che sono uguali per il 1° Criterio!!! Cosicché è pure $ABC = A'B'C'$, perché ABC'' era lo "stampo" di $A'B'C'$: $ABC = ABC'' = A'B'C'$, **C.V.D. (forse ...)****... E INVECE NON E' FINITA! ...**

In questo modo, infatti, la dimostrazione NON è del tutto completata. E perché mai, dirai tu, caro lettore?

Il fatto è che in certi casi la congiungente $\overline{CC''}$ potrebbe non attraversare il segmento AB .

Allora il procedimento dimostrativo varierebbe un pochino:



$$\begin{array}{r} \widehat{ACC''} = \widehat{AC''}C \\ \widehat{BCC''} = \widehat{BC''}C \\ \hline \widehat{ACC''} - \widehat{BCC''} = \widehat{AC''}C - \widehat{BC''}C \\ \widehat{ACB} \qquad \qquad \widehat{AC''}B \end{array}$$

Se la congiungente $\overline{CC''}$
 passa all'esterno di AB ,
 si procede
 per **differenza**
 di angoli uguali
 anziché per somma...

... mentre nel caso particolarissimo in cui
 $\overline{CC''}$ passa per un estremo di AB , non è più
 necessaria né una somma, né una differenza;
 osservato che $\overline{AC''} = \overline{AC} \rightarrow \widehat{ACC''} = \widehat{AC''}C$, basta
 confrontare direttamente i triangoli ABC , ABC'' ,
 che risultano uguali per il 1° Criterio.

In **lingua Inglese**, i tre Criteri di uguaglianza dei triangoli hanno dei nomi davvero azzeccatissimi:

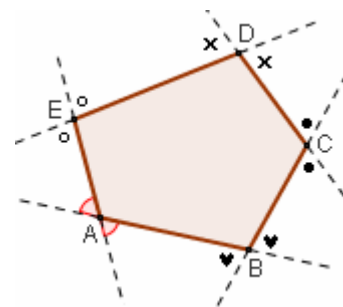
- ♥ The **Side-Angle-Side** Theorem (**SAS**): **1° Criterio**
- ♥ The **Angle-Side-Angle** Theorem (**ASA**): **2° Criterio**
- ♥ The **Side-Side-Side** Theorem (**SSS**): **3° Criterio**

2.4 - IL TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO IN FORMA DEBOLE

Gli "ANGOLI ESTERNI" di un poligono

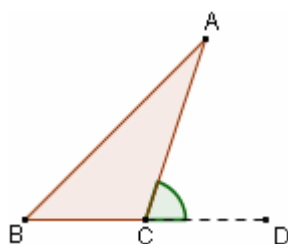
In un poligono qualsiasi, si dicono "angoli esterni" gli angoli adiacenti agli angoli interni.

Quindi, in un poligono, a ciascun angolo interno corrispondono DUE angoli esterni, uguali fra loro perché opposti al vertice (vedi figura).



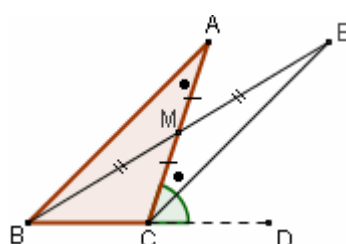
TEOREMA ("TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO in forma DEBOLE")

In un triangolo, ciascun angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ad esso non adiacenti.



HP
ABC triangolo;
 $\widehat{ACD}$ angolo esterno

TH
 $\widehat{ACD} > \widehat{A}$;
 $\widehat{ACD} > \widehat{B}$



A cosa è dovuto l'aggettivo "debole"?
Al fatto che questo teorema sarà poi seguito da un altro, il "teorema dell'angolo esterno in forma forte", per dimostrare il quale sono però necessari altri teoremi intermedi

DIM.

Effettuiamo le seguenti costruzioni (figura a destra): prendiamo il punto medio di $\overline{AC}$, indicandolo con M; tracciamo $\overline{BM}$ e prolunghiamo questo segmento di un segmento $\overline{ME} = \overline{BM}$; tracciamo la semiretta $\overline{CE}$.

Ora, la semiretta $\overline{CE}$ è interna all'angolo $\widehat{ACD}$: questo fatto è il punto chiave del ragionamento dimostrativo. Che la semiretta $\overline{CE}$ sia interna ad $\widehat{ACD}$ è osservabile dal disegno, e l'intuizione porta facilmente a convincersi che ciò continuerebbe a esser vero anche se il triangolo avesse una forma diversa.

Tuttavia, il fatto che $\overline{CE}$ sia interna all'angolo $\widehat{ACD}$ andrebbe, a rigore, DIMOSTRATO.

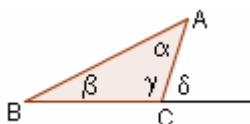
La dimostrazione utilizzerebbe due assiomi che noi per evitare appesantimenti eccessivi non abbiamo citato: l' "assioma dei semipiani" e un altro assioma riguardante le semirette aventi l'origine nel vertice di un angolo. Ci limitiamo a segnalare questo fatto, senza scendere nei particolari.

Bene! Essendo la semiretta $\overline{CE}$ interna all'angolo $\widehat{ACD}$, è $\widehat{ACD} > \widehat{ACE}$. Ma i due triangoli $\triangle BMA$, $\triangle EMC$ sono uguali per il 1° Criterio ($\overline{AM} = \overline{MC}$ e $\overline{BM} = \overline{ME}$ per costruzione, $\widehat{AMB} = \widehat{CME}$ perché opposti al vertice) e ne consegue, in particolare, che $\widehat{ACE} = \widehat{A}$.

Dunque, essendo $\widehat{ACD} > \widehat{ACE}$, è pure $\widehat{ACD} > \widehat{A}$ e la prima parte della tesi è dimostrata.

- Per la seconda parte ($\widehat{ACD} > \widehat{B}$) basterà prolungare $\overline{AC}$ dalla parte di C costruendo così il secondo dei due angoli esterni adiacenti all'angolo interno $\widehat{BCA}$ (che però sarà uguale ad $\widehat{ACD}$ in quanto suo opposto al vertice), poi prendere il punto medio N del lato $\overline{BC}$, tracciare la mediana $\overline{AN}$, prolungarla ecc. ecc.

COROLLARIO: In un triangolo, la somma di due angoli interni è sempre minore di un angolo piatto.



DIM. Per dimostrare che, ad esempio, $\alpha + \gamma < 180^\circ$, basta tener presente che, per il Teorema dell'Angolo Esterno, si ha $\delta > \alpha$ quindi $\alpha < \delta$; ma allora $\alpha + \gamma < \delta + \gamma = 180^\circ$. Per le altre somme $\alpha + \beta$ e $\beta + \gamma$, ci si servirà ogni volta dell'angolo esterno opportuno.

COROLL.: In un triangolo, non possono esserci due angoli retti, né due ottusi, né un retto e un ottuso.

DIM. Infatti, in ciascuno dei tre casi prospettati, la somma dei due angoli interni in questione uguaglierebbe o supererebbe un angolo piatto, il che è assurdo in virtù del corollario precedente.

COROLLARI:

- In un triangolo che abbia un angolo retto, i due angoli rimanenti sono acuti (= minori di 90°).
- In un triangolo con un angolo ottuso, i due angoli rimanenti sono acuti.

**LA CLASSIFICAZIONE
DEI TRIANGOLI
IN BASE AGLI ANGOLI**

Da quanto detto, si trae che un triangolo può avere esclusivamente:

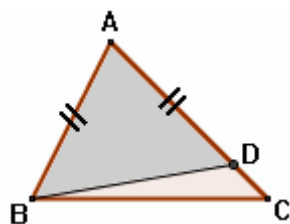
- I) un angolo ottuso e due acuti (triangolo "ottusangolo")
- II) un angolo retto e due acuti (triangolo "rettangolo")
- III) tre angoli acuti (triangolo "acutangolo").

Non possono verificarsi altri casi oltre a questi.

2.5 - DISUGUAGLIANZE FRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO

TEOREMA

Se un triangolo ha due lati disuguali, allora ha disuguali anche gli angoli ad essi opposti, e precisamente: a lato maggiore sta opposto angolo maggiore.



$$\begin{array}{ll} \text{HP} & \overline{AC} > \overline{AB} \\ \text{TH} & \hat{B} > \hat{C} \end{array}$$

**GLI ESERCIZI (NON FACILI ...)
SULLE DISUGUAGLIANZE
SONO ALLE PAGINE
334 E 335**

DIM.

Siccome per ipotesi è $\overline{AC} > \overline{AB}$,

se noi prendiamo, sulla semiretta AC, un segmento $\overline{AD} = \overline{AB}$,
il punto D cadrà ALL'INTERNO del segmento $\overline{AC}$.

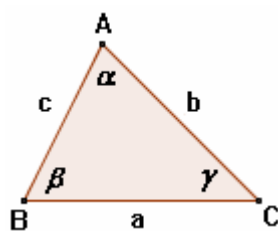
Ora:

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{B} = \hat{ABC} & > & \hat{ABD} & & \hat{ADB} & > & \hat{C} \quad \text{quindi} \quad \boxed{\hat{B} > \hat{C}}, \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \hat{ABD} & & \text{il triangolo} & & \text{teorema} & \\ & \text{è solo} & & \text{ABD} & & \text{dell'angolo} & \\ & \text{una parte} & & \text{è isoscele} & & \text{esterno,} & \\ & \text{di } \hat{B} = \hat{ABC} & & \text{sulla base } \overline{BD} & & \text{triangolo BDC} & \end{array}$$

C.V.D.

TEOREMA

Se un triangolo ha due angoli disuguali, allora ha disuguali anche i lati ad essi opposti, e precisamente: ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore.



$$\begin{array}{ll} \text{HP} & \beta > \gamma \\ \text{TH} & b > c \end{array}$$

OSSERVAZIONE

Nella figura, abbiamo adottato una simbologia che è molto comune, e UTILISSIMA, in Geometria: abbiamo indicato

- i vertici del triangolo con A, B, C ;
- gli angoli aventi questi vertici RISPETTIVAMENTE con α, β, γ ;
- i lati opposti a questi vertici RISPETTIVAMENTE con a, b, c :
a opposto ad A, b opposto a B, c opposto a C.

DIM.

L'ipotesi è $\beta > \gamma$; vogliamo dimostrare (tesi) che è $b > c$.

Per assurdo, o, se si preferisce, per esclusione:

♪ se fosse $b < c$, allora, per il teorema precedente, si dovrebbe avere $\beta < \gamma$, contro l'ipotesi;

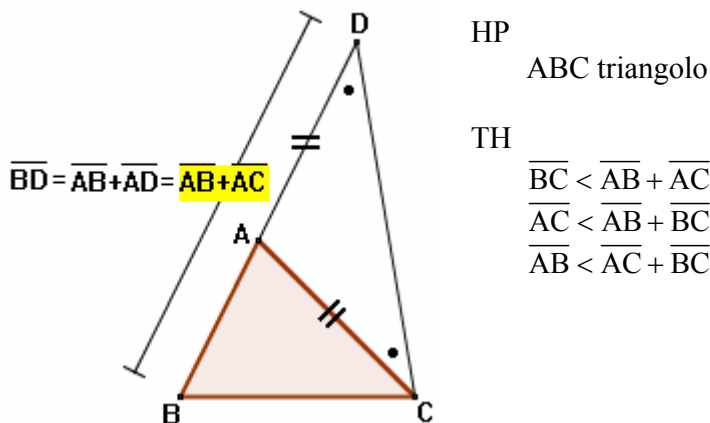
♪ se fosse $b = c$, allora il triangolo sarebbe isoscele e risulterebbe $\beta = \gamma$, contro l'ipotesi.

Non potendo essere né $b < c$, né $b = c$, dovrà per forza essere $b > c$,

C.V.D.

COROLLARI:

- In un triangolo rettangolo, il lato maggiore fra tutti è l'ipotenusa.
- In un triangolo ottusangolo, il lato maggiore è quello opposto all'angolo ottuso.

TEOREMA (“DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE”)**In un triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due.**

Nella dimostrazione di questo teorema emerge in modo particolarmente evidente

IL METODO “TOP-DOWN”

ossia, letteralmente,

“DALLA CIMA VERSO IL BASSO”.

Si parte dall’obiettivo da raggiungere, e ci si domanda:
di quali obiettivi intermedi avremmo bisogno per raggiungere questo obiettivo finale?
Poi il processo può essere eventualmente iterato (= ripetuto), applicandolo anche agli obiettivi intermedi.

DIM.

Dimostriamo che $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$;

per provare le altre due disuguaglianze si può procedere in modo analogo.

Vogliamo innanzitutto **COSTRUIRE** un segmento che sia uguale alla somma $\overline{AB} + \overline{AC}$, e lo faremo prolungando $\overline{AB}$, dalla parte di A, di un segmento $\overline{AD} = \overline{AC}$.

Avremo appunto $\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

A questo punto si tratta di dimostrare che $\overline{BC} < \overline{BD}$.

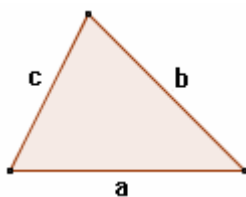
E a tale scopo, se riuscissimo a far vedere che nel triangolo BCD, fra i due angoli $\widehat{BCD}$ e $\widehat{D}$, il primo è maggiore del secondo, saremmo a posto in virtù del teorema precedente.

Ma ben facile provare che $\widehat{BCD} > \widehat{D}$!

Infatti $\widehat{BCD} > \widehat{ACD}$ perché $\widehat{ACD}$ è solo una parte di $\widehat{BCD}$;

e $\widehat{ACD} = \widehat{D}$ perché angoli alla base di un triangolo che è isoscele per costruzione.

La tesi è quindi dimostrata.

TEOREMA**In un triangolo, ciascun lato è maggiore della differenza degli altri due.**

HP E' dato un triangolo di lati a, b, c
(supponiamo per comodità di aver indicato con a il lato maggiore, con b l'intermedio, con c il minore; insomma, supponiamo $a \geq b \geq c$)

TH

I) $a > b - c$
II) $b > a - c$
III) $c > a - b$

DIM.

Le tre disuguaglianze della tesi seguono dalle tre disuguaglianze la cui verità è assicurata dal teorema precedente.

Questo, infatti, ci dice che :

$$a < b + c;$$

$$b < a + c;$$

$$c < a + b.$$

Prendiamo, ad esempio, $a < b + c$.

Se in questa disuguaglianza noi sottraiamo lo stesso segmento c da entrambi i membri, ne ricaveremo:

$$a - c < b + c - c \quad \text{ossia} \quad a - c < b,$$

quindi (leggendo come gli Arabi, da destra a sinistra), $b > a - c$, che è la tesi II).

Analogamente,

la tesi I) si può dedurre a partire da $b < a + c$ sottraendo c da entrambi i membri; e infine la tesi III) segue dalla $a < b + c$ sottraendo b da entrambi i membri.

Questo teorema è a volte denominato “della disuguaglianza triangolare inversa”. Riunendo i due enunciati di questa pagina, abbiamo che “in ogni triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza”.

2.6 - LE “COSTRUZIONI CON RIGA E COMPASSO”

In queste lezioni, noi abbiamo utilizzato e utilizzeremo la parola “costruzione” prevalentemente in quei casi in cui, di fronte a un teorema, ai fini del ragionamento dimostrativo non è sufficiente la figura di partenza, ma **occorre disegnare (“costruire”) un punto in più, o un segmento in più, o una retta in più, o un angolo in più**, ecc. ecc.

Tuttavia, in Geometria il termine “costruzione” è impiegato anche (*soprattutto*, direi) con un **significato più specifico**, ossia per indicare una **“precisa sequenza di operazioni grafiche mediante le quali è possibile ottenere, almeno in linea di principio, un determinato oggetto geometrico”**.

E in questo ambito, hanno particolare rilevanza le cosiddette “costruzioni con riga e compasso”.

L'argomento ha risvolti molto interessanti: vediamo meglio di cosa si tratta.

I TRE “PROBLEMI CLASSICI”

Abbiamo già accennato al fatto che i matematici greci antichi tendevano a “geometrizzare” ciò che noi, ai nostri tempi, siamo invece portati ad “aritmetizzare”, cioè ad affrontare in termini di operazioni numeriche (“*arithmós*” = numero).

Il problema delle **costruzioni con riga e compasso** ha interessato profondamente gli studiosi della Grecia classica: la sottigliezza e la profondità del pensiero greco inducevano lo studioso a porsi sempre il problema della “costruibilità”, al di là della mera “esistenza”, degli oggetti geometrici che erano via via oggetto di considerazione.

Cosa vuol dire esattamente “fare una costruzione con riga e compasso”?

Vuol dire pensare di utilizzare due **strumenti “ideali”, perfetti**, la riga per tracciare linee rette e il compasso per tracciare circonferenze di centro e raggio assegnati, compiendo, per la precisione, esclusivamente una o più fra le **5 operazioni** seguenti:

- 1) **dati due punti, tracciare la retta che passa per essi;**
- 2) **dati due punti, tracciare una circonferenza che ha come centro il primo e passa per il secondo;**
- 3) **determinare (se esiste) il punto di intersezione di due rette;**
- 4) **determinare (se esistono) i punti d'intersezione di una circonferenza e di una retta;**
- 5) **determinare (se esistono) i punti d'intersezione di due circonferenze.**

Insisto: queste operazioni vanno pensate realizzate “in astratto, senza tener conto di quella inevitabile imprecisione che l'uso di strumenti meccanici concreti porterebbe con sé”.

E puntualizzo pure che pensando ad una “riga” e ad un “compasso” non bisogna concepirli come strumenti “metrici” (da “*métron*” = misura).

La “riga” greca non è come un righello che porta i trattini dei centimetri e dei millimetri, il compasso non è un compasso ad apertura graduata: tant'è vero che, ad esempio, il problema della costruzione di un segmento che sia il doppio di un segmento assegnato va risolto tramite le operazioni precedentemente citate (in questo caso, servono la 1, la 2 e la 4) e NON immaginando di “misurare” il segmento per poi prolungarlo di un segmento di ugual misura. Non sono inoltre consentiti procedimenti cosiddetti di “inserzione”, cioè basati sull'uso del compasso, con data apertura, per trasportare un segmento uguale ad un segmento dato, “per tentativi”, all'interno di una determinata regione di piano.

♥ Il bello viene ora.

Sì, perché i Greci si accorsero presto che di alcuni problemi la risoluzione con riga e compasso, nel senso sopra precisato, sembrava essere particolarmente, tremendamente, insospettabilmente difficile.

Ci vollero più di due millenni per dimostrare, con principale protagonista il francese Galois (1^a metà del XIX secolo), che di tali problemi non si riusciva a venire a capo per il fatto che erano ... **impossibili !!!**

Ecco a quali problemi mi riferisco (sono noti come “**i tre problemi classici** della geometria”):

❑ DUPLICAZIONE DEL CUBO

Richiede di costruire con riga e compasso lo spigolo di un cubo che abbia volume doppio di un cubo dato. Sennonché, si può dimostrare che con riga e compasso non ci si può riuscire.

❑ TRISEZIONE DELL'ANGOLO

Il problema richiede, dato un qualsiasi angolo, di suddividerlo in tre angoli uguali.

Si dimostra però che non è, fatta eccezione per certi casi particolari, risolubile con riga e compasso.

❑ QUADRATURA DEL CERCHIO

Il problema richiede che, assegnato un cerchio, si costruisca il lato di un quadrato avente la stessa estensione. E' il più famoso fra i tre; di esso sono state presentate nei secoli tante “false soluzioni”; e menzionare la “quadratura del cerchio” è diventato un “modo di dire” per indicare una questione di improba difficoltà.

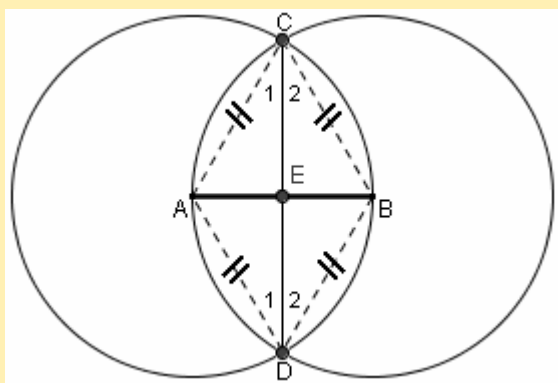
In realtà, la sua risoluzione con riga e compasso è ... *non* “difficile”, ma addirittura impossibile.

Lasciando alla tua iniziativa, se lo desideri, ulteriori approfondimenti, solo a titolo di esempio andiamo a presentare, in questa pagina e nella seguente, qualcuna fra le costruzioni più elementari.

ALCUNE SEMPLICI COSTRUZIONI GEOMETRICHE

Costruzione del punto medio di un segmento

Dato un segmento $\overline{AB}$, per costruirne il punto medio:



- si traccino le circonferenze di centro A e passante per B, e di centro B e passante per A;
- se ne determinino le intersezioni C, D;
- si tracci la retta che passa per esse;
- se ne determini l'intersezione E con la retta AB.

Bene, E è il punto medio cercato!

Infatti i quattro raggi $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ sono tutti uguali fra loro (ciascuno di essi è uguale ad $\overline{AB}$); dunque i due triangoli CAD e CBD sono uguali per il 3° Criterio, e isosceli; si ha perciò

$$\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \hat{D}_1 = \hat{D}_2.$$

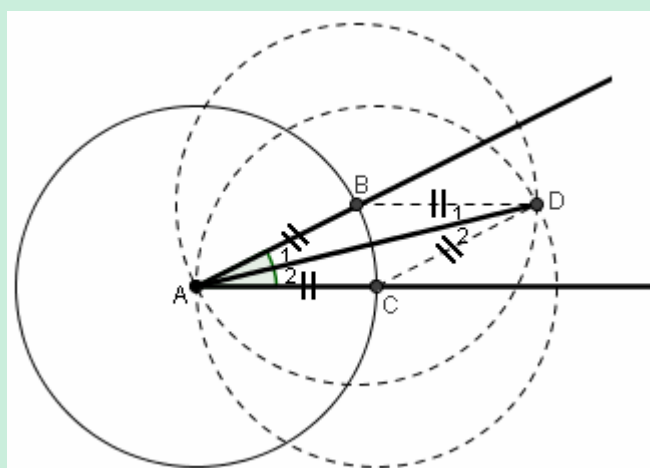
Ma anche il triangolo ABC è isoscele, con base $\overline{AB}$ (è addirittura equilatero, a dire il vero ...); essendo $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$, $\overline{CE}$ ne è bisettrice dell'angolo al vertice;

e in ogni triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana relativa alla base.

E' perciò $\overline{AE} = \overline{EB}$: resta dimostrato che E è il punto medio di $\overline{AB}$.

Costruzione della bisettrice di un angolo (minore di un angolo piatto)

Dato un angolo $\hat{A}$, per costruirne la bisettrice:



- si tracci una circonferenza di centro A e raggio qualsiasi;
- se ne determinino le intersezioni B, C coi lati dell'angolo;
- si traccino le due circonferenze, sempre aventi lo stesso raggio di prima, ma questa volta con centri in B e in C rispettivamente;
- si determini l'intersezione D (quella non coincidente con A) di tali due circonferenze.

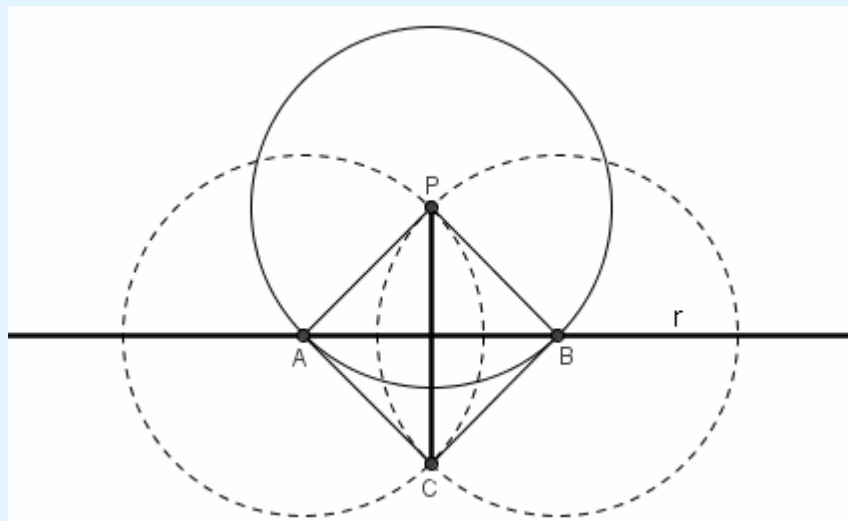
Bene, la congiungente AD è la bisettrice cercata!

Infatti i due triangoli ABD e ACD sono uguali per il 3° Criterio, e isosceli;

si ha perciò $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{D}_1 = \hat{D}_2$, in particolare $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.

Costruzione della perpendicolare da un punto dato ad una retta data (che non passa per il punto)

Dati una retta r e un punto P che non vi appartenga, per costruire la perpendicolare a r passante per P :



- si tracci una circonferenza di centro P e raggio qualsiasi, purché sufficientemente grande da far sì che r venga intersecata dalla circonferenza in due punti;
- se ne determinino le intersezioni A, B con r ;
- si traccino le due circonferenze, sempre aventi lo stesso raggio di prima, ma questa volta con centri in A e in B rispettivamente;
- si determini l'intersezione C (quella non coincidente con P) di tali due circonferenze.

A questo punto la congiungente PC è la perpendicolare desiderata ... dimostrarlo tu!

Costruzione della perpendicolare per un punto dato ad una retta data (che passa per il punto)

Provarci tu! Il metodo è simile a quello precedente, relativo al caso di un punto non appartenente alla retta.

OSSERVAZIONI

- 1) All'inizio del successivo capitolo su perpendicolari e parallele verrà indicata una procedura, per giungere alla determinazione di una perpendicolare, *diversa* da quella sopra riportata.

Questa scelta differente sarà dovuta soprattutto all'esigenza di utilizzare esclusivamente gli assiomi precedentemente introdotti, non andando quindi a "scomodare" proprietà che sono senz'altro molto intuitive, ma attengono alla circonferenza, di cui si tratterà espressamente soltanto nel Volume 2.

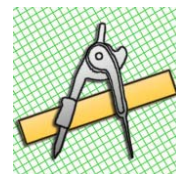
- 2) Costruzioni interessanti, ma non così semplici come quelle da noi sin qui presentate, ad es.:

- ☐ suddivisione di un segmento in un numero a scelta di parti uguali;
- ☐ tangenti a una circonferenza passanti per un punto dato;
- ☐ ecc. ecc.

richiedono, per la giustificazione, nozioni di geometria più avanzate rispetto al livello presente.

- ♣ Fra i tanti siti Internet dedicati alle costruzioni geometriche con riga e compasso, si può segnalare quello curato da C. Amerio, S. Dellavecchia e G. M. Dellavecchia, nel quale le varie costruzioni sono ben descritte mediante efficaci "animazioni":

www.libroattivo.com/sei/costruzionigeometriche/



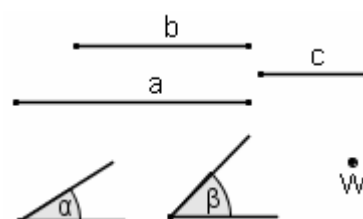
ESERCIZI

Per queste attività puoi servirti di una riga e di un compasso materiali, oppure degli strumenti equivalenti che offre GEOGEBRA.

La figura riporta tre segmenti a, b, c , due angoli α e β e un punto W . Costruire, con riga e compasso, un triangolo che abbia un vertice in W e

- I) due lati uguali ad a, b , l'angolo compreso uguale ad α
- II) un lato uguale ad a , gli angoli adiacenti a quel lato uguali ad α, β
- III) i tre lati uguali ad a, b, c rispettivamente.

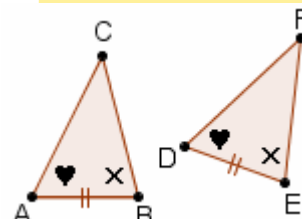
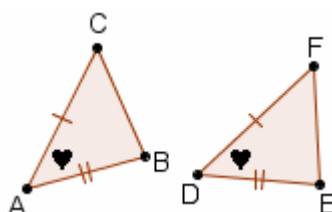
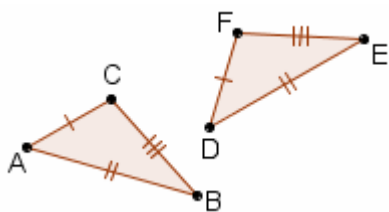
Il problema III) ha sempre soluzione o potrebbe essere impossibile?



2.7 - AIUTO PER IL RIPASSO, ESERCIZI (le risposte sono in fondo alla pagina ... tienile coperte!)

- 1) Pierino dice: “Questo triangolo ha gli angoli alla base uguali, quindi è isoscele”.
Per qual motivo il professore sta facendo una boccaccia?
- 2) Sulle 3 figure seguenti, appiccica correttamente le tre etichette SAS, ASA, SSS:

🎵 **ALTRI ESERCIZI
SUL CAPITOLO 2
A PARTIRE DA PAG. 328**



- 3) Sia il triangolo ABC che il triangolo DEF hanno: un angolo di 30° , un lato di 1 cm, un altro lato di 2 cm. Siamo sicuri che abbiano lo stesso perimetro?
- 4) Se due segmenti, non necessariamente fra loro uguali, si incrociano in modo che l'unico loro punto comune sia il punto medio di entrambi, il quadrilatero che ha per vertici le estremità di questi segmenti ha i lati a due a due uguali. Quali teoremi permettono di dimostrare questa affermazione?
- 5) In Geometria abbiamo usato il termine “adiacenti” per 3 volte, una con riferimento ai segmenti e 2 agli angoli. Spiega il contesto e il significato nei tre casi.
- 6) Nella tecnica delle costruzioni è sovente sfruttata la prerogativa del triangolo di essere “indeformabile”. Il triangolo della figura a fianco, nonostante i lati siano connessi fra loro da cerniere ai vertici, non si può “schiacciare” ottenendo un altro triangolo con gli stessi lati ma con gli angoli modificati. Quale dei tre Criteri ha a che fare con questa proprietà?
- 7) a) Pensa al teorema che afferma “Se un triangolo ha due angoli uguali, allora ha anche due lati uguali”. Qui sotto è elencata una serie di sette enunciati (assiomi o teoremi); sai dire quali, fra di essi, vengono utilizzati nel corso della dimostrazione del teorema considerato?
- | | |
|---|---|
| I) Se un triangolo ha due lati uguali allora ha anche due angoli uguali | V) Somme di angoli uguali sono uguali |
| II) Supplementari di angoli uguali sono uguali | VI) 1° Criterio di uguaglianza dei triangoli |
| III) Doppi di angoli uguali sono uguali | VII) 2° Criterio di uguaglianza dei triangoli |
| IV) Metà di angoli uguali sono uguali | |
- b) Stessa richiesta precedente, per il 3° Criterio di uguaglianza dei triangoli.
- 8) E' vero che se un angolo interno di un poligono misura 35° , l'angolo esterno corrispondente misurerà 325° ?
- 9) Con GeoGebra, disegna un triangolo e un angolo esterno. Crea come oggetti GeoGebra questo angolo esterno e uno degli angoli interni non adiacenti ad esso. Osserva le loro misure nella finestra Algebra per constatare che, comunque si deformi il triangolo, l'angolo esterno si mantiene sempre maggiore dell'interno ad esso non adiacente.
- 10) In GeoGebra, utilizzando lo strumento “Circonferenza dati centro e raggio”, costruisci un triangolo coi lati lunghi 2, 4 e 5.
- 11) Può un angolo esterno in un triangolo essere uguale a un angolo interno?
- 12) Perché si dice che il Teorema dell'Angolo Esterno da noi visto è un teorema “in forma debole”?
- 13) Quale teorema garantisce che non possa esistere un triangolo coi lati di 4, 7 e 12 centimetri?



Angolo



Circonferenza
dati
centro e raggio

RISPOSTE

- 1) Per via dell'esposizione maldestra. Parlando fin dall'inizio di “angoli alla base”, locuzione che ha senso solo se riferita ai triangoli isosceli, sembra che si sappia già da subito che il triangolo è isoscele. Pierino avrebbe dovuto dire, piuttosto: “Questo triangolo ha due angoli uguali, quindi è isoscele” 2) SSS (Side-Side-Side Theorem, 3° Criterio), SAS (Side-Angle-Side Theorem, 1° Criterio), ASA (Angle-Side-Angle Th., 2° Criterio) 3) No. I due triangoli non sono necessariamente uguali: potrebbero esserlo, ma anche non esserlo. Non si sa infatti se l'angolo di 30° è, in entrambi i triangoli, quello compreso fra i due lati di 1 cm e 2 cm, o no. In quest'ultimo caso, non sarebbe applicabile il 1° Criterio 4) Il teorema che dice che due angoli opposti al vertice sono fra loro uguali; il 1° Criterio 5) a) Due segmenti si dicono adiacenti quando hanno un estremo in comune e stanno uno sul prolungamento dell'altro; b) due angoli si dicono adiacenti quando hanno un lato in comune e i due lati non sovrapposti stanno uno sul prolungamento dell'altro; c) in un poligono, si dicono “angoli adiacenti a un lato” i due angoli interni coi vertici negli estremi di quel lato 6) Il 3° 7) a: II, IV, VII; b: I, V, VI 8) No: in un poligono a ciascun angolo interno corrispondono 2 angoli esterni, che sono adiacenti, quindi supplementari, rispetto all'angolo in questione. La risposta esatta è “ 145° ” (per ogni angolo esterno). 11) Sì, ma l'angolo interno dev'essere quello adiacente: saranno entrambi di 90° 12) Perché verrà poi rimpiazzato da un teorema più “dettagliato”, più “forte”, che ingloberà quello “vecchio” 13) Il teorema della “disuguaglianza triangolare”

Cap. 3: PERPENDICOLARI E PARALLELE

3.1 - RETTE PERPENDICOLARI

IL PROBLEMA DELL' ESISTENZA DELLA PERPENDICOLARE

Dati un punto P e una retta r , esiste sempre una retta che passi per P e sia perpendicolare a r ?

P

r

L'intuizione ci dice: "Senz'altro, sì".

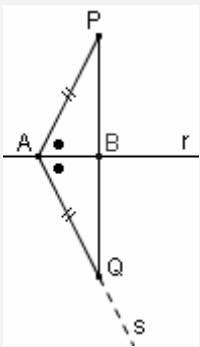
L' "esistenza della perpendicolare per un punto dato a una retta data" potrebbe quindi essere assunta come nuovo assioma.

Ma ciò non è necessario: infatti tale esistenza è **dimostrabile come teorema**. Vediamo in che modo.

TEOREMA (Esistenza della Perpendicolare per un punto dato a una retta data)

Dati un punto P e una retta r , esiste sempre una retta che passi per P e sia perpendicolare a r .

□ Primo caso: $P \notin r$



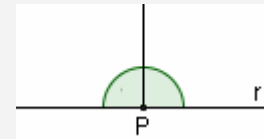
Prendiamo sulla r un qualsiasi punto A , e congiungiamo P con A .
Se fortuitamente accade che la retta PA risulti perpendicolare a r , siamo già a posto;
in caso contrario, costruiamo nel semipiano di origine r , e non contenente P , una semiretta s che formi un angolo $\widehat{sAr} = \widehat{PAr}$ (semiretta sicuramente esistente per l'assioma del trasporto dell'angolo) e su di essa prendiamo un segmento $\overline{AQ} = \overline{AP}$ (assioma del trasporto di un segmento).

Se a questo punto tracciamo la retta PQ , essa sarà perpendicolare a r !!!

Infatti il triangolo APQ è isoscele per costruzione, e il segmento AB (giacente su r),

che per costruzione fa da bisettrice per l'angolo al vertice $\widehat{PAQ}$, è, per un teorema noto, anche altezza, quindi è perpendicolare a PQ .

□ Secondo caso: $P \in r$



Se il punto P appartiene alla retta r , l'esistenza della perpendicolare a r per P è assicurata dall'assioma di divisibilità indefinita degli angoli, secondo cui un angolo si può suddividere in un numero a piacere n di parti uguali.

Infatti, in particolare, questo assioma assicura ($n=2$) l'esistenza della *bisettrice* di un angolo dato qualsiasi.

Ora, la bisettrice dell'angolo piatto che in figura abbiamo segnato con l'archetto, forma due angoli retti con r , quindi è perpendicolare ad r .

IL PROBLEMA DELL' UNICITA' DELLA PERPENDICOLARE

Dati un punto P e una retta r , di rette passanti per P e perpendicolari a r ce n'è una sola o ce n'è più d'una?

P

r

L'intuizione ci dice: "Senz'altro, una sola".

L' "unicità della perpendicolare per un punto dato a una retta data" potrebbe quindi essere assunta come nuovo assioma.

Ma ciò non è necessario: infatti tale unicità è **dimostrabile come teorema**. Vediamo in che modo.

TEOREMA (Unicità della Perpendicolare per un punto dato a una retta data)

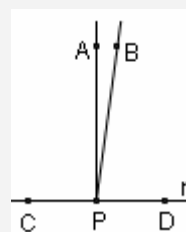
Dati un punto P e una retta r , la perpendicolare per P a r è unica.

□ Primo caso: $P \notin r$



Se, per assurdo, di perpendicolari da P a r ve ne fosse più d'una, allora il triangolo PHK individuato da due di queste perpendicolari e dalla retta r avrebbe due angoli retti ... ma un teorema già dimostrato (par. 2.4) afferma che in un triangolo più di un angolo retto non può esserci.

□ Secondo caso: $P \in r$



Se, per assurdo, di perpendicolari per P a r ve ne fosse più d'una, allora, dette PA , PB due di tali perpendicolari, l'angolo piatto $\widehat{CPD}$ avrebbe due distinte bisettrici, mentre sappiamo (par. 2.3) che la bisettrice di un angolo è unica.

3.2 - CENNI DI STORIA: EUDOSSO, EUCLIDE, ARCHIMEDE

Da “Appunti di storia dell’Analisi Infinitesimale” dello straordinario professor Pascal Dupont estraiamo, apportando brevissime aggiunte e qualche ritocco formale per motivi di impaginazione, queste considerazioni intorno a tre personalità che illuminarono col loro ingegno la scienza antica.

- Nella 1^a metà del V° secolo è attivo **EUDOSSO** di Cnido contemporaneo del sommo filosofo Platone. (...) Di Eudosso, astronomo, matematico che si occupò di tutti i problemi più discussi, vogliamo ricordare (...)

- ♪ la teoria delle proporzioni $\left\{ \begin{array}{l} \text{fra grandezze commensurabili} \\ \text{fra grandezze INcommensurabili} \end{array} \right.$
- ♪ il metodo di esaustione (Eudosso-Euclide-Archimede).

L’acutezza intellettuale di Eudosso, nell’affrontare lo spinoso e affascinante tema dell’*incommensurabilità* (di cui noi ci occuperemo nel Volume 2), è impressionante, e degna di ammirazione.

Due grandezze (ad es.: due segmenti) si dicono “*incommensurabili*” se non ammettono nessun sottomultiplo comune. Non è strano che possano esistere coppie di grandezze *incommensurabili*? Sì! E’ *molto* strano ... ma vero!!! Anzi ... sorpresa nella sorpresa ... presa una coppia di grandezze, è “*normale*” che siano *incommensurabili*, del tutto *eccezionale* che *non* lo siano!

- **EUCLIDE**, finissimo critico, profondo pensatore piuttosto che genio creatore, sistemò verso il 300 a.C. gran parte della matematica greca dei tre secoli precedenti (VI, V, IV), nei suoi celeberrimi “Elementi” (...).

L’opera è divisa in 13 libri;

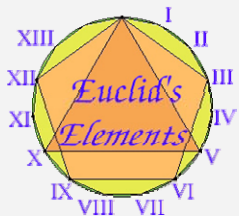
I°, II°, III°, IV°, VI°: *Geometria del piano*

V°: *Teoria generale delle grandezze* (applicazione nel VI°)

VII°, VIII°, IX°: *Aritmetica*

X°: *Classificazione delle grandezze incommensurabili*

XI°, XII°, XIII°: *Geometria solida*



Il lettore moderno, nel leggere gli “Elementi” di Euclide, deve tener presente la differenza di “mentalità”: i matematici greci antichi tendevano a “geometrizzare” ciò che noi invece istintivamente “aritmetizziamo”, cioè interpretiamo in termini numerici.

Indicazioni per **approfondimenti su Internet** riguardo agli “Elementi”: ➡

Ripetiamo che gli “Elementi” non devono essere pensati come una “creazione” di Euclide, ma una stupenda sistemazione (per quanto non priva di difetti) di pressoché tutta la matematica greca dal 600 al 300 a.C.

Il Libro I (...) si presenta più complesso, con:

Definizioni (Termini): I. Punto è ciò che non ha parti; II. Linea è lunghezza senza larghezza; ...

XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall’una e dall’altra parte, non s’incontrano fra loro da nessuna delle due parti

Postulati: Risulti postulato: I. che si possa condurre una linea retta da qualsiasi punto ad ogni altro punto; ... III. che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (= raggio); ...

♥ **V. che se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (= tali che la loro somma sia < di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (= la cui somma è < di due retti)**

Nozioni comuni (principi comuni a tutte le scienze; oggi chiamiamo *assiomi* i postulati e le nozioni comuni):

I. Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro; ... VIII. Ed il tutto è maggiore della parte

Proposizioni (48 proposizioni; con la 29^a ha inizio **la geometria euclidea vera e propria**, che si fonda cioè **sul V postulato**; la 47^a proposizione è l’enunciato - con dimostrazione - del Teorema di Pitagora).

- Pensiamo che si possa con tutta tranquillità condividere il parere di Enrico Rufini, per il quale “**ARCHIMEDE** (Siracusa, circa 287 a.C.; Siracusa, 212 a.C.)

fu il maggiore fra gli antichi matematici; a tal punto lo possedeva il furor delle muse”. (...)

Fino agli inizi del XX secolo Archimede veniva associato (in matematica pura) soprattutto al *metodo di esaustione*, che dev’essere valutato come impeccabile *metodo dimostrativo* e non già *metodo costruttivo*.

Quando io applico il metodo di esaustione ti dico: “Ecco qui un problema del quale conosco il risultato: ti dimostro che questo risultato è esatto, ma non chiedermi come ho fatto a trovare quel risultato”.

Ma, nel 1906, venne scoperto che, in parallelo al metodo di esaustione, Archimede usava un altro metodo, il *metodo sui teoremi meccanici* (...).

Dobbiamo perciò pensare che egli procedesse in due tempi: *prima* trovare euristicamente

(cioè: con procedimento intuitivo, approssimativo) il risultato; *poi* dimostrarlo rigorosamente.

Di Archimede ci sono pervenute le opere seguenti (ma altre si ritengono perdute):

Sull’equilibrio dei piani; *Sui galleggianti*; *Sulla misura del cerchio*; *Sulle spirali*; *Quadratura della parabola*; *Sui conoidi e sferoidi*; *Sulla sfera e sul cilindro*; *L’Arenario*; *Il libro dei lemmi*; *Il Metodo*.

3.3 - RETTE PARALLELE

LE DIMOSTRAZIONI “PER ASSURDO”

Il secondo COROLLARIO del Teorema dell'Angolo Esterno (pag. 287),
e il TEOREMA di Unicità della Perpendicolare per un punto dato a una retta data (pag. 294),
sono stati dimostrati tramite un ragionamento “PER ASSURDO”.

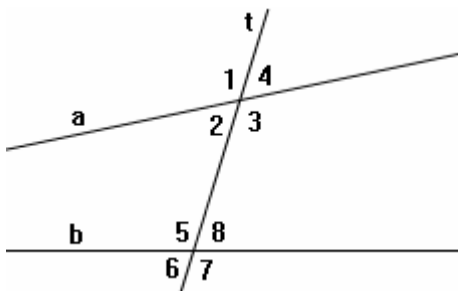
Una dimostrazione “**PER ASSURDO**” consiste nel **provare a negare la tesi, e nel far vedere che così facendo, si giunge a conclusioni che “non stanno in piedi” perché sono in contrasto**

- o con l'ipotesi,
- o con qualche assioma,
- o con qualche teorema già dimostrato in precedenza.

Ma se negando la tesi si perviene a conclusioni assurde, allora resta dimostrato che la tesi è vera!!!

ANGOLI FORMATI DA DUE RETTE CON UNA TRASVERSALE: TERMINOLOGIA

Quando due rette vengono tagliate da una “trasversale” (cioè, da una terza retta che le interseca entrambe) si formano 8 angoli, che a due a due prendono nomi particolari.



- ☐ **CORRISPONDENTI:** $\hat{1}$ e $\hat{5}$; $\hat{2}$ e $\hat{6}$; $\hat{3}$ e $\hat{7}$; $\hat{4}$ e $\hat{8}$
- ☐ **ALTERNI INTERNI:** $\hat{2}$ e $\hat{8}$, $\hat{3}$ e $\hat{5}$
- ☐ **ALTERNI ESTERNI:** $\hat{1}$ e $\hat{7}$, $\hat{4}$ e $\hat{6}$
- ☐ **CONIUGATI INTERNI:** $\hat{2}$ e $\hat{5}$, $\hat{3}$ e $\hat{8}$
- ☐ **CONIUGATI ESTERNI:** $\hat{1}$ e $\hat{6}$, $\hat{4}$ e $\hat{7}$

(alterni = da parti opposte rispetto alla trasversale;
coniugati = dalla stessa parte rispetto alla trasversale)

TEOREMA (T. D. P., ossia: “T. Diretto sul Parallelismo”)

Se due rette formano con una trasversale:

- 1) due angoli alterni interni uguali
- 2) oppure due angoli alterni esterni uguali
- 3) oppure due angoli corrispondenti uguali
- 4) oppure due angoli coniugati interni supplementari
- 5) oppure due angoli coniugati esterni supplementari

allora sono parallele.

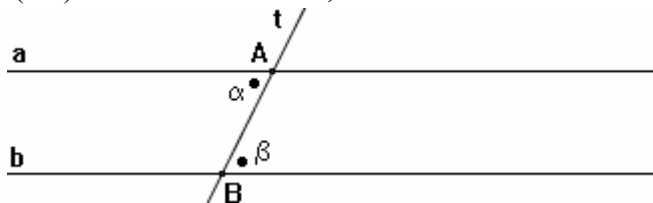
☐ OSSERVAZIONE

In pratica, abbiamo riassunto in un unico enunciato ben 5 teoremi. Ma una volta dimostrato il primo (“se due rette formano con una trasversale due angoli alterni interni uguali, allora sono parallele”), il più sarà fatto, perché i quattro rimanenti si riconurranno facilmente a quello.

DIMOSTRAZIONE di 1):

“se due rette formano con una trasversale due angoli alterni interni uguali, allora sono parallele”.

Supponiamo (HP) che due certe rette a, b formino con una trasv. t due angoli alterni interni uguali: $\alpha = \beta$.



•
P

Vogliamo dimostrare (TH) che le due rette a, b sono parallele.

Per assurdo.

Se a, b NON fossero parallele, allora si incontrerebbero in un punto, che per meglio fissare le idee ho chiamato P. Ma in questo modo si formerebbe un triangolo, ABP, avente un angolo esterno uguale ad un angolo interno ad esso non adiacente!

E ciò non può verificarsi, perché in un triangolo ciascun angolo esterno è sempre **MAGGIORE** di ciascun angolo interno non adiacente (Teorema dell'Angolo Esterno).

Perciò è assurdo supporre che le due rette non siano parallele:

bisognerà necessariamente ammettere che lo sono.

La tesi è dimostrata: $a \parallel b$.

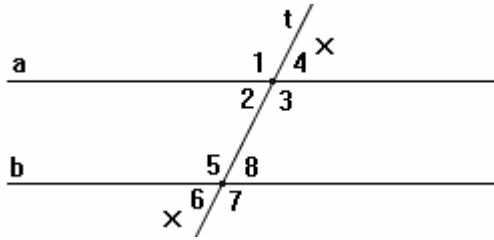
Per ora, adottiamo la seguente

DEFINIZIONE:

“due **RETTE** si dicono **PARALLELE** quando giacciono su uno stesso piano e non si incontrano mai, cioè non hanno nessun punto in comune”.

Successivamente (pag. 299) passeremo ad una definizione “estensiva” di parallelismo.

DIMOSTRAZIONE DI 2)



In questo paragrafo la freccia $\rightarrow$,
sovente da noi impiegata per schematizzare
“SE ... ALLORA ...” (oppure “... IMPLICA ...”)
va piuttosto letta
“QUINDI, DI CONSEGUENZA”

Supponiamo che due certe rette a, b formino con una trasversale t due angoli alterni esterni uguali (quelli indicati con la crocetta).

Allora i due angoli $\hat{2}$, $\hat{8}$ sono uguali perché opposti al vertice di angoli uguali (pr. transitiva dell'uguaglianza).

Se vogliamo illustrare “formalmente” questo fatto, possiamo utilizzare ...

□ ... una freccia di implicazione:

$$\hat{2} = \hat{4}; \quad \hat{8} = \hat{6}; \quad \hat{4} = \hat{6} \quad \rightarrow \quad \hat{2} = \hat{8}$$

opposti opposti HP proprietà
al vertice al vertice transitiva

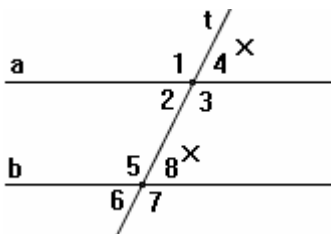
□ ... oppure una catena:

$$\hat{2} = \hat{4} = \hat{6} = \hat{8}$$

opposti HP opposti
al vertice al vertice

Ma così siamo ricaduti nel caso 1) (due angoli alterni interni uguali), e la tesi è dimostrata: $a \parallel b$

DIMOSTRAZIONE DI 3)



Supponiamo che due certe rette a, b formino con una trasversale t due angoli corrispondenti uguali (quelli indicati con la crocetta).

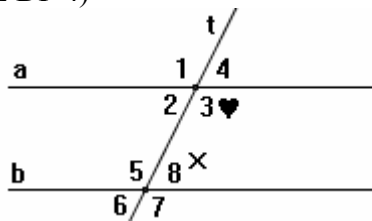
Allora i due angoli $\hat{2}$, $\hat{8}$ sono uguali perché $\hat{2}$ è opposto al vertice di un angolo che è uguale a $\hat{8}$ (proprietà transitiva dell'uguaglianza):

$$\hat{2} = \hat{4} = \hat{8}$$

opposti HP
al vertice

Si ricade nel caso 1) (due angoli alterni interni uguali),
e la tesi è dimostrata: $a \parallel b$

DIMOSTRAZIONE DI 4)



Supponiamo che due certe rette a, b formino con una trasversale t due angoli coniugati interni supplementari (quelli indicati con la crocetta e col cuoricino: $\hat{3} + \hat{8} = 180^\circ$).

Allora i due angoli $\hat{2}$, $\hat{8}$ sono uguali perché supplementari dello stesso angolo $\hat{3}$.

Se vogliamo illustrare “formalmente” questo fatto, possiamo utilizzare ...

□ ... una freccia di implicazione:

$$\hat{2} = 180^\circ - \hat{3}; \quad \hat{8} = 180^\circ - \hat{3} \quad \rightarrow \quad \hat{2} = \hat{8}$$

HP proprietà
transitiva

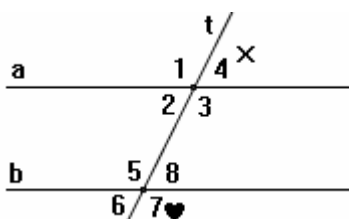
□ ... oppure una catena:

$$\hat{2} = 180^\circ - \hat{3} = \hat{8}$$

HP

Ma così siamo ricaduti nel caso 1) (due angoli alterni interni uguali), e la tesi è dimostrata: $a \parallel b$

DIMOSTRAZIONE DI 5)



Supponiamo che due certe rette a, b formino con una trasversale t due angoli coniugati esterni supplementari (quelli indicati con la crocetta e col cuoricino: $\hat{4} + \hat{7} = 180^\circ$)

Allora i due angoli $\hat{2}$, $\hat{8}$ sono uguali perché:

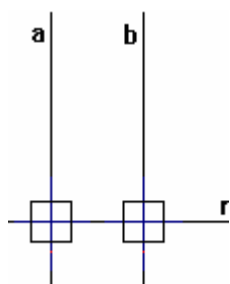
$$\hat{2} = \hat{4} = 180^\circ - \hat{7} = \hat{8}$$

opposti HP
al vertice

Si ricade nel caso 1) (due angoli alt. int. uguali), e la tesi è dimostrata: $a \parallel b$

COROLLARIO

Due rette, che siano perpendicolari ad una stessa retta, sono parallele fra loro.



DIM. Se $a \perp r$ e anche $b \perp r$, allora tanto a quanto b formano 4 angoli retti con r . Avremo dunque $a \parallel b$ perché, ad esempio, queste due rette formano con la trasversale r angoli corrispondenti uguali.

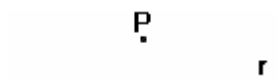
OSSERVAZIONE

Abbiamo solo “problemi di abbondanza” per provare la tesi: a ben guardare, uno qualsiasi dei 5 enunciati di cui consta il precedente Teor. Diretto sul Parallelismo potrebbe essere utilizzato per concludere che è $a \parallel b$.

Oppure ancora, potremmo ragionare per assurdo e dire: se a, b si incontrassero, allora si formerebbe un triangolo con due angoli retti; ma tale triangolo, come afferma un teorema precedente, non può esistere.

IL PROBLEMA DELL'ESISTENZA DELLA PARALLELA

Dati un punto P e una retta r , esiste sempre una retta che passi per P e sia parallela a r ?



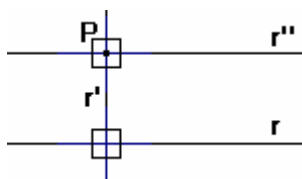
L'intuizione ci dice: “Senz'altro, sì”.

L' “esistenza della parallela per un punto dato a una retta data” potrebbe quindi essere assunta come nuovo assioma.

Ma ciò non è necessario: infatti tale esistenza è **dimostrabile come teorema**. Vediamo in che modo.

TEOREMA (Esistenza della Parallela per un punto dato a una retta data)

Dati un punto P e una retta r , esiste sempre una retta che passi per P e sia parallela a r .



DIM.

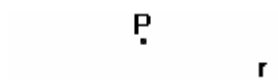
Infatti, se per P conduciamo

- la perpendicolare r' alla retta r ,
- poi la perpendicolare r'' alla retta r' ,

avremo che r'' ed r sono parallele, in quanto perpendicolari alla stessa retta r' .

IL PROBLEMA DELL'UNICITA' DELLA PARALLELA

Dati un punto P e una retta r , di rette passanti per P e parallele a r ce n'è una sola, o ce n'è più d'una?



L'intuizione ci dice: “Senz'altro, una sola”.

Storicamente furono fatti molti tentativi di dimostrare che questo asserto poteva essere derivato come conseguenza dagli assiomi precedentemente introdotti. Ma tutti questi tentativi fallirono.

Finalmente, nel XIX secolo, emerse con definitiva evidenza che l' “unicità della parallela” **NON può essere dimostrata come teorema a partire dalla famiglia degli assiomi antecedenti.**



L' “unicità della parallela per un punto dato a una retta data” è quindi UN NUOVO ASSIOMA. Esso viene denominato anche “postulato di Euclide”, in onore del grande padre della Geometria.

♥ **ASSIOMA (POSTULATO DI EUCLIDE, o Assioma dell'UNICITA' DELLA PARALLELA)**

**Dati un punto P e una retta r ,
NON ESISTE PIU' DI UNA parallela per P a r .**

OSSERVAZIONE

Il Postulato di Euclide, insieme con il teorema, prima dimostrato, secondo cui “dati un punto P e una retta r , esiste sempre una retta che passi per P e sia parallela a r ”, consente di affermare in definitiva che

“ dati un punto P e una retta r , esiste UNA E UNA SOLA parallela per P a r ”

TEOREMA (T. I. P., ossia: “Teorema Inverso sul Parallelismo”)

Se due rette sono parallele, allora formano con una qualsiasi trasversale:

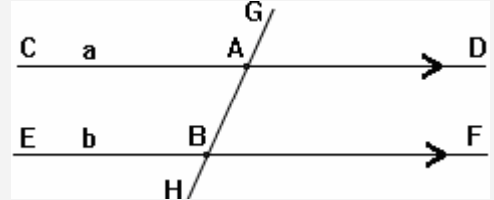
- 1) angoli alterni interni uguali
- 2) angoli alterni esterni uguali
- 3) angoli corrispondenti uguali
- 4) angoli coniugati interni supplementari
- 5) angoli coniugati esterni supplementari.

Anche qui, più precisamente, siamo di fronte a ben 5 teoremi, tutti riuniti in un unico enunciato. Oppure, possiamo dire di avere un unico teorema, con 5 tesi. Vediamola in questo modo: ci sono 5 tesi da dimostrare, a partire da una stessa ipotesi. Ma niente paura, perché, una volta dimostrata la tesi 1), le altre ne saranno conseguenze pressoché immediate.

IPOTESI: $a \parallel b$

TESI:

- 1) gli alterni interni sono uguali: $\widehat{CAB} = \widehat{FBA}$, $\widehat{DAB} = \widehat{EBA}$
- 2) gli alterni esterni sono uguali: $\widehat{GAC} = \widehat{HBF}$, $\widehat{GAD} = \widehat{HBE}$
- 3) i corrispondenti sono uguali: $\widehat{GAC} = \widehat{ABE}$, ecc. ecc.
- 4) i coniugati interni sono supplementari: $\widehat{CAB} + \widehat{EBA} = 180^\circ$
 $\widehat{DAB} + \widehat{FBA} = 180^\circ$
- 5) i coniugati esterni sono supplementari: $\widehat{GAC} + \widehat{HBE} = 180^\circ$
 $\widehat{GAD} + \widehat{HBF} = 180^\circ$



♥ Notare la **coppia di frecce** sul disegno: le utilizzeremo, talvolta (non sempre: tendono a “sporcare” la figura), per indicare il **parallelismo noto** tra due rette.

DIMOSTRAZIONE DELLA TESI 1)

La nostra HP è $a \parallel b$; la tesi è che gli alterni interni sono uguali. Cominciamo col provare che è $\widehat{CAB} = \widehat{FBA}$. Per assurdo: se questi due angoli non fossero uguali, allora si potrebbe tracciare, per il punto A, una retta a' , distinta dalla a , in modo che questa nuova retta formi un nuovo angolo $\widehat{LAB} = \widehat{FBA}$. Consideriamo ora le due rette a' , b .

Esse formano con la trasversale GH due angoli alterni interni uguali e perciò è $a' \parallel b$ in virtù del Teorema Diretto sul Parallelismo.

D'altra parte, per ipotesi, è pure $a \parallel b$.

Ma allora per il punto A passerebbero DUE rette distinte (a' , a) entrambe parallele alla stessa retta b .

E ciò è in contraddizione col Postulato di Euclide (Unicità della Parallela). Ricapitoliamo:

supponendo che i due angoli $\widehat{CAB}$, $\widehat{FBA}$ non fossero uguali, siamo giunti a una conclusione che è assurda, in quanto contraddice un assioma che abbiamo accettato. Resta perciò dimostrato che è $\widehat{CAB} = \widehat{FBA}$.

Ma da $\widehat{CAB} = \widehat{FBA}$ segue subito l'uguaglianza degli altri due alterni interni:

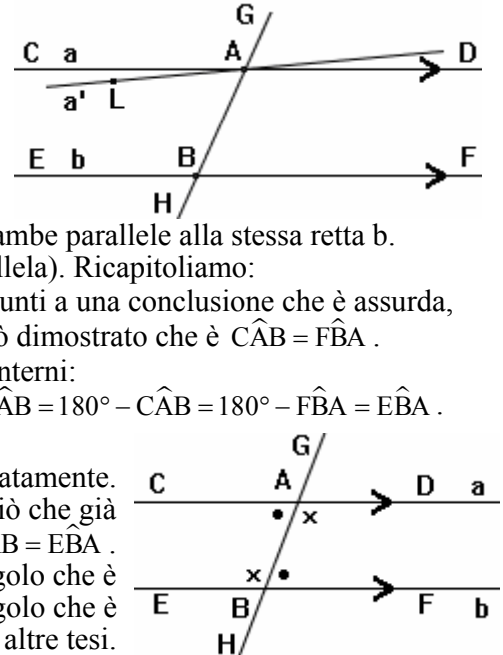
infatti essi sono supplementari di due angoli già dimostrati uguali: $\widehat{DAB} = 180^\circ - \widehat{CAB} = 180^\circ - \widehat{FBA} = \widehat{EBA}$.

DIMOSTRAZIONE DELLE TESI 2, 3, 4, 5)

A questo punto, le tesi 2), 3), 4) e 5) si deducono immediatamente.

Considera la figura qui a fianco: in essa è segnato ciò che già abbiamo acquisito, ossia le due uguaglianze $\widehat{CAB} = \widehat{FBA}$; $\widehat{DAB} = \widehat{EBA}$.

Se ora prendi la matita e vai a segnare col puntino ogni angolo che è opposto al vertice di un angolo “puntino”, e con la crocetta ogni angolo che è opposto al vertice di un angolo “crocetta”, avrai subito le altre tesi.

**SIGNIFICATO “ESTENSIVO” DELL’AGGETTIVO “PARALLELE”**

Per tutta una serie di ragioni, è conveniente allargare l'uso dell'aggettivo “parallele”, nel senso di convenire che, per due rette, anche la “coincidenza” vada pensata come caso particolare di “parallelismo”.

Aggiorniamo dunque la definizione di “parallelismo”, stabilendo che due rette complanari si possono dire “parallele” quando **non hanno alcun punto in comune, OPPURE ne hanno infiniti (= coincidono)**.

Puoi ora controllare che tutti i teoremi precedentemente stabiliti conservano la loro validità anche con questo significato più “largo” dell'aggettivo “parallele”.

TEOREMA (proprietà transitiva del parallelismo)

Se due rette sono entrambe parallele ad una terza retta, allora sono parallele fra loro.

DIM. Sia $a \parallel c$, $b \parallel c$. Dico che è anche $a \parallel b$.

Infatti, se per assurdo le due rette a , b non fossero parallele tra loro, si incontrerebbero in un punto P; ma allora per P passerebbero DUE distinte rette, entrambe $\parallel$ alla c , contro il postulato di Euclide. L'assurdo trovato dimostra la tesi.

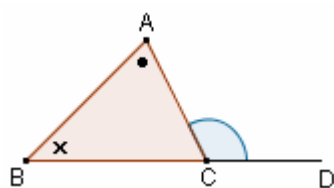
**TEOREMI (le dimostrazioni sono lasciate al lettore)**

Se due rette sono parallele, allora ogni retta del loro piano, che ne interseca una, taglierà anche l'altra
Se due rette sono parallele, allora ogni perpendicolare a una di esse sarà anche perpendicolare all'altra

3.4 - QUESTIONI RELATIVE AGLI ANGOLI DEI TRIANGOLI E DEI POLIGONI

TEOREMA (TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO IN FORMA FORTE)

In un triangolo, ogni angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ad esso non adiacenti.

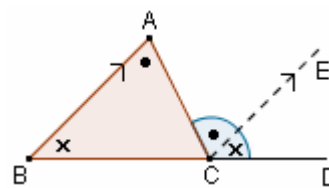


HP $\widehat{ACD}$ angolo esterno di ABC

TH $\widehat{ACD} = \widehat{A} + \widehat{B}$

DIMOSTRAZIONE

Per il vertice C dell'angolo esterno $\widehat{ACD}$ tracciamo la parallela CE al lato AB. Ora:
 $\widehat{ACE} = \widehat{A}$ perché alterni interni rispetto alle parallele AB, CE con la trasversale AC;
 $\widehat{ECD} = \widehat{B}$ perché corrispondenti rispetto alle parallele AB, CE con la trasversale BD.
 Dunque $\widehat{ACD} = \widehat{ACE} + \widehat{ECD} = \widehat{A} + \widehat{B}$, C.V.D.



Abbiamo messo le freccette per indicare il parallelismo. Comunque, queste freccette non sono "obbligatorie"!

Capito ora perché si dimostra prima un teorema dell'Angolo Esterno "debole" e solo più tardi uno "forte"? Perché il teorema DEBOLE serve per dimostrare i teoremi sulle RETTE PARALLELE, ed è tramite questi ultimi che si riesce poi a dimostrare il teorema FORTE.

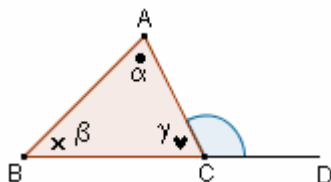
TEOREMA In un triangolo, la somma dei tre angoli interni è uguale a un angolo piatto (180°).

DIMOSTRAZIONE

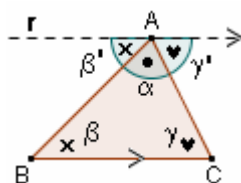
Si può dimostrare come corollario del teorema precedente:

$$\alpha + \beta + \gamma = \widehat{ACD} + \gamma = \widehat{BCD} = 180^\circ$$

teorema angolo est. "forte"



... oppure si può dimostrare come teorema a sé stante. Per un vertice qualsiasi (noi abbiamo preso il vertice A) si traccia la parallela r al lato opposto, dopodiché si ha:



$$\begin{aligned} \beta &= \beta' \quad (\text{alt. int., } r \parallel BC, \text{ trasv. } AB) \\ \gamma &= \gamma' \quad (\text{alt. int., } r \parallel BC, \text{ trasv. } AC) \\ \text{dunque } \alpha + \beta + \gamma &= \alpha + \beta' + \gamma' = 180^\circ \end{aligned}$$

COROLLARI

- I due angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari (cioè, danno per somma 90°)
- In un triangolo equilatero, ogni angolo è uguale alla terza parte di un angolo piatto ($= 60^\circ$)
- Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due angoli, avranno uguale anche l'angolo rimanente

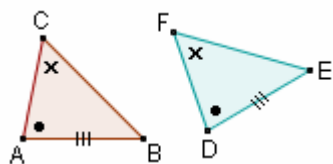
Quest'ultimo corollario si giustifica "per differenza rispetto a 180° ":

se, nei due tr. ABC e A'B'C', si ha $\widehat{A}' = \widehat{A}$ e $\widehat{B}' = \widehat{B}$, allora $\widehat{C}' = 180^\circ - \widehat{A}' - \widehat{B}' = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = \widehat{C}$

TEOREMA (Secondo Criterio Generalizzato di uguaglianza dei triangoli)

Se due triangoli hanno rispettivamente uguali un lato e due angoli, e i due angoli sono, nei triangoli, disposti allo stesso modo rispetto al lato uguale, allora quei due triangoli sono uguali.

Infatti, in tal caso, si potranno applicare: prima, il corollario precedente, poi, l'ordinario Secondo Criterio.



Prendiamo i due triangoli della figura: essi hanno rispettivamente uguali un lato e due angoli, e questi sono, nei due triangoli, disposti allo stesso modo rispetto al lato uguale (in entrambi i casi, uno dei due angoli è adiacente, l'altro opposto).

In virtù del corollario precedente, possiamo dire subito che $\widehat{B} = \widehat{E}$

(d'altronde, direttamente: $\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{D} - \widehat{F} = \widehat{E}$)

dopodiché potremo concludere che i due triangoli sono uguali per l'ordinario 2° Criterio, avendo rispettivamente uguali un lato e i due angoli ad esso adiacenti.

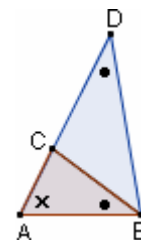
OSSERVAZIONE - E' davvero ESSENZIALE che i due angoli siano

"nei due triangoli, disposti allo stesso modo rispetto al lato uguale".

Consideriamo infatti la figura qui a destra:

In essa, i due triangoli ABC, ABD hanno rispettivamente uguali un lato ($\overline{AB}$, che è in comune) e due angoli ($\widehat{A}$ che è in comune; $\widehat{ABC} = \widehat{ABD}$), ma NON sono, evidentemente, uguali. Il fatto è che, nel triangolo ABC, i due angoli in questione sono I DUE ADIACENTI al lato $\overline{AB}$, mentre in ABD gli angoli sono UNO ADIACENTE, L'ALTRO OPPOSTO ad $\overline{AB}$.

Il teorema non è applicabile.

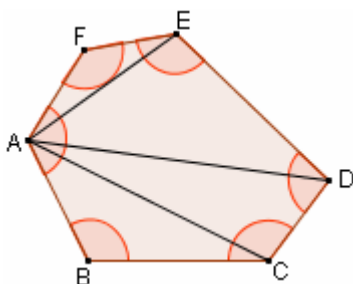


TEOREMA

La SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN POLIGONO convesso è uguale a tanti angoli piatti, quant'è il numero dei lati diminuito di 2.

Ad esempio, la somma degli angoli interni di un esagono è $(6-2) \cdot 180^\circ = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.
In generale, **la somma degli angoli interni di un poligono di n lati vale $(n-2) \cdot 180^\circ$.**

Per la dimostrazione, si può procedere in due modi. Quale preferisci?

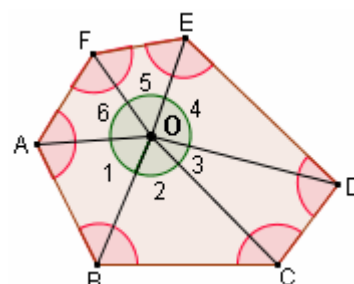


Ecco un esagono ABCDEF.

Se si prende un vertice qualsiasi (noi abbiamo preso A) e lo si congiunge con i vertici non consecutivi, si ottengono 4 triangoli (tanti quanti sono i lati che NON hanno un estremo in A, ossia $6-2 = 4$ triangoli).

Si può osservare che la somma degli angoli interni di ABCDEF è uguale alla somma degli angoli interni di tutti e 4 questi triangoli, dunque vale $(6-2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$.

In generale, se i lati fossero stati n anziché 6, avremmo ottenuto $(n-2) \cdot 180^\circ$.



Ecco un esagono ABCDEF.

Se si prende un punto interno qualsiasi O e lo si congiunge con i vertici, si ottengono 6 triangoli (tanti quanti sono i lati).

Si può osservare che la somma degli angoli interni di ABCDEF è uguale alla somma degli angoli interni di tutti e 6 questi triangoli, diminuita però dell'angolo giro di vertice O.

Dunque tale somma vale:

$$6 \cdot 180^\circ - 360^\circ = 6 \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ = (6-2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

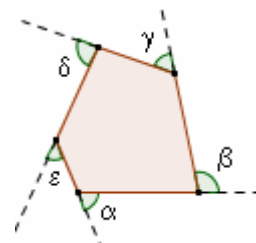
In generale, se i lati fossero stati n anziché 6, avremmo ottenuto $(n-2) \cdot 180^\circ$.

COROLLARIO La somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso vale 360° .

La SOMMA DEGLI ANGOLI ESTERNI DI UN POLIGONO

Poiché la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è $(n-2) \cdot 180^\circ$, la somma degli angoli ESTERNI di un poligono di n lati misurerà $n \cdot 180^\circ - (n-2) \cdot 180^\circ = \cancel{n \cdot 180^\circ} - \cancel{n \cdot 180^\circ} + 360^\circ = 360^\circ$.

S'intende, in questo discorso, di contare, per ciascun vertice del poligono, UN SOLO angolo esterno fra i due opposti al vertice e uguali fra loro.



Resta così dimostrato il seguente

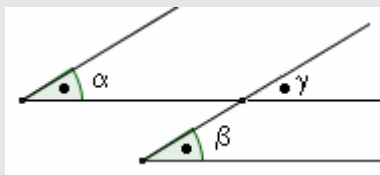
TEOREMA

Indipendentemente dal numero dei lati, la somma degli angoli ESTERNI di un poligono (prendendo un solo angolo esterno per ogni vertice) è sempre uguale ad un angolo giro (360°).

COPPIE DI ANGOLI COI LATI PARALLELI

TEOREMA

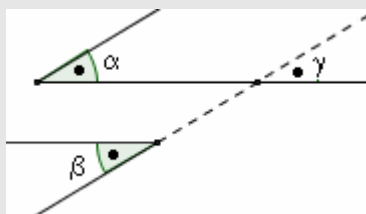
Due angoli coi lati paralleli e concordi, oppure paralleli e discordi, sono uguali. Invece due angoli che abbiano due lati paralleli e concordi, e gli altri due paralleli e discordi, sono supplementari.



α, β hanno i **lati $\parallel$ e concordi**.
 γ fa da "angolo ausiliario",
fa da "ponte" fra α e β :

$$\alpha = \gamma \quad \gamma = \beta$$

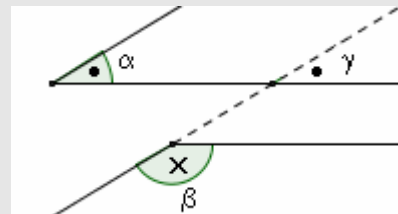
corrispondenti, due parallele con trasversale corrispondenti, due parallele con trasversale



α, β hanno i **lati $\parallel$ e discordi**.
 γ fa da "ponte"
per la dimostrazione:

$$\alpha = \gamma \quad \gamma = \beta$$

corrispondenti, due parallele con trasversale alterni esterni, due parallele con trasversale



α, β hanno **due lati $\parallel$ e concordi, e gli altri due $\parallel$ e discordi**.

$$\alpha = \gamma \quad \gamma = 180^\circ - \beta$$

corrispondenti, due parallele con trasversale coniug. esterni, due parallele con trasversale

3.5 - CENNI ALLE “GEOMETRIE NON EUCLIDEE”

Sembra davvero molto strano che
(pag. 294 e seguenti, “Perpendicolari e parallele”)

- a) l'**esistenza** della **perpendicolare** (per un punto dato a una retta data),
- b) l'**unicità** della **perpendicolare**,
- c) e l'**esistenza** della **parallela**,

possano essere **tutte** dimostrate come **teoremi**, e che invece

- d) l'**unicità della parallela**,

pur evidentissima all'intuizione, **NON si riesca a dimostrare**.

In effetti, i matematici tentarono *per secoli* di trasformare l'*assioma* dell'unicità della parallela (per un punto dato a una retta data) in *teorema*, ma **nessun tentativo di dimostrazione riuscì ad andare a buon fine**.

Capitò anche che qualche studioso ritenesse di poter cantare vittoria, e che successivamente altri matematici gli rovinassero la festa facendo vedere che era stato utilizzato, nel ragionamento, qualche enunciato ... del tutto equivalente alla proposizione da dimostrare!

Notevole fu il lavoro di **Gerolamo Saccheri**, che nel suo trattato *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus* del 1733 si propose di partire dalla negazione dell'unicità della parallela, deducendo da questa negazione parecchie conseguenze, nella speranza di giungere a una conclusione che fosse in contraddizione con gli altri assiomi: così facendo, egli ricavò svariati enunciati bizzarri e alla fine credette (sbagliando) di aver ottenuto la contraddizione desiderata; ma in realtà, emerse ad uno studio attento che non c'era alcun conflitto logico fra quanto egli aveva dedotto e la famiglia degli assiomi euclidei, privata di quello che lui aveva provato a negare.

Si cominciò allora, da parte di qualche esponente della comunità matematica, a sospettare che **forse dal negare l'unicità della parallela non potesse nascere nessuna contraddizione**, ma anzi si potesse costruire una “geometria” stramba e tuttavia in sé coerente, non contraddittoria dal punto di vista logico.

Tale idea fu sviluppata nella **prima metà del secolo XIX** da due studiosi, che lavorarono indipendentemente l'uno dall'altro, il russo Nikolai **Lobacevskij** (1793-1856) e l'ungherese Janos **Bolyai** (1802-1860); lo stesso Gauss, uno dei matematici più grandi di tutti i tempi, sostenne dopo aver letto il lavoro di Bolyai di avere intuito da sempre che quella era la strada giusta, ma di non aver pubblicato niente per evitare “le strida dei beoti”.

E finalmente nel 1868 l'italiano Eugenio **Beltrami** riuscì a escogitare un concreto “**modello di geometria non-euclidea IPERBOLICA = DELLA PLURALITA' DELLE PARALLELE**”, ossia, servendosi di una figura chiamata “pseudosfera”, riuscì a individuare una situazione nella quale, per determinate entità chiamate convenzionalmente “punti”, “rette” e “piani”, valevano tutti gli assiomi della geometria euclidea più un ulteriore assioma che rappresentava la **NEGAZIONE** del Postulato di Euclide, perché, dati un “punto” e una “retta”, per il “punto” risultavano passare **INFINITE DISTINTE PARALLELE** alla “retta” considerata.

Ma questo è *estremamente* significativo!

Il fatto che esista nella realtà almeno un modello di geometria non euclidea dimostra in modo incontrovertibile che negando il postulato di Euclide, e conservando gli altri assiomi, NON nasce contraddizione, quindi che il postulato di Euclide NON è dimostrabile come teorema a partire dalla famiglia degli altri assiomi.

In seguito **Riemann** ideò un esempio di **geometria non-euclidea “ELLITTICA”**, nella quale, dati un “punto” e una “retta”, per il “punto” non risultava passare **NESSUNA PARALLELA** alla “retta” considerata.

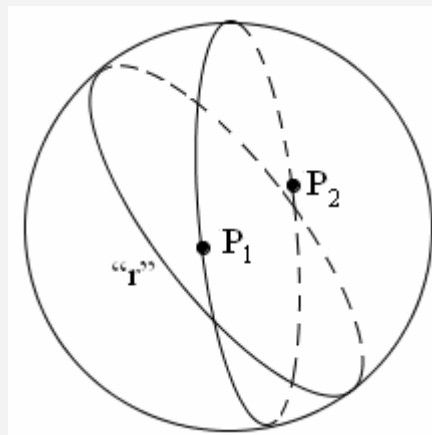
La geometria ellittica di Riemann non è difficile da descrivere.

Immaginiamo una sfera, e chiamiamo “piano” la sua superficie, “retta” ogni sua circonferenza massima, “punto” ogni entità costituita da una coppia di suoi punti diametralmente opposti.

Si vede chiaramente che, data una “retta” e un “punto”, per il “punto” non passa **NESSUNA “retta” parallela** alla “retta” considerata.

*I punti diametralmente opposti P_1, P_2
formano un'unica “entità-punto”, cui possiamo dare il nome “P”.*

*La figura mostra che per “P”
non esiste nessuna “retta” (=circonferenza massima)
che sia parallela alla “retta” indicata con “r”.*



E' normale, in una geometria *non* euclidea, che possano cambiare, rispetto alla geometria euclidea, quei teoremi i quali dipendono dall'assioma che li viene modificato.

Nella **geometria sferica** si intende per "angolo" quell'angolo euclideo che è formato dalle due rette euclidee le quali sono tangenti a due circonferenze massime ("rette" della geometria sferica) laddove queste si tagliano.

Vedi le figure qui accanto, tratte (salvo qualche ritocco) da Wikipedia.

Bene:

la somma dei tre "angoli" di un "triangolo" NON è, in questa interpretazione, di 180° .

D'altra parte, un'analisi attenta mostra che, tolto l'assioma di unicità della parallela, gli altri assiomi della geometria euclidea (opportunosamente "interpretati") sono veri in questo contesto.

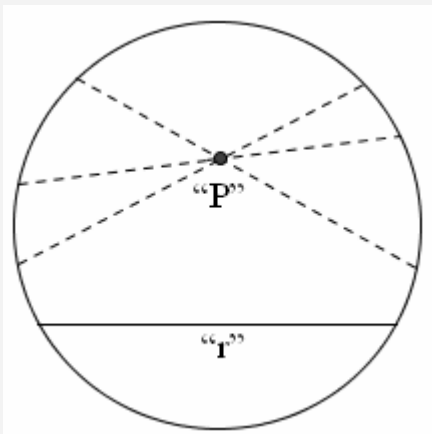
C'è tuttavia, nel caso della geometria *ellittica* di cui la geometria sferica è uno dei possibili modelli, qualche eccezione: la famiglia dei cosiddetti "assiomi dell'ordine", che nella Geometria ellittica non valgono, mentre valevano nella geometria *iperbolica* la quale dunque, ai fini del nostro discorso, è più significativa.

Ritornando alla geometria *iperbolica*, per la quale valgono invece, ribadiamolo, proprio **TUTTI** gli assiomi della geometria euclidea, **TRANNE** l'assioma dell'unicità della parallela, un suo modello facile da comprendere è il "**modello di Klein**" che andiamo qui di seguito ad esporre sommariamente, non entrando per brevità in troppi particolari ed approfondimenti.

Chiamiamo "piano" l'insieme dei punti interni ad una circonferenza, "punto" ogni punto interno alla circonferenza, "retta" ogni corda della circonferenza, pensata senza i due estremi.

Per questo "piano", questi "punti" e queste "rette" sono veri, come si può pazientemente controllare, tutti gli assiomi della normale geometria euclidea **TRANNE** l'assioma dell'unicità della parallela, che è invece sostituito da quest'altro:

data una "retta" e un "punto" fuori di essa, per quel "punto" passano INFINITE "rette" parallele alla retta in questione, che cioè non la intersecano.



Nella figura, ecco un "piano" di Klein, una "retta" e un "punto" fuori di essa. Sono anche disegnate, tratteggiate, tre fra le infinite "rette" che passano per quel "punto" e sono parallele a quella "retta".

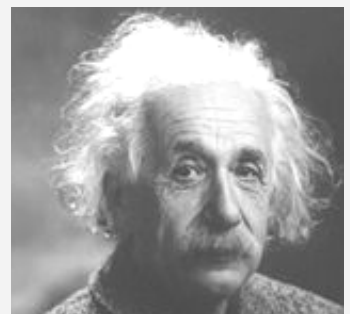
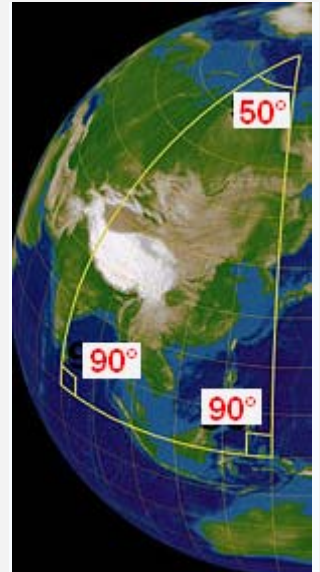
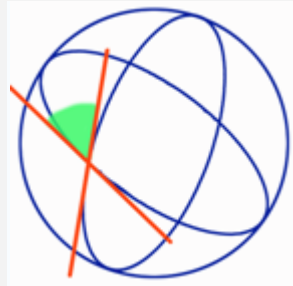
L'importanza delle geometrie non euclidee è enorme, anche in relazione a teorie interpretative del mondo fisico.

A questo proposito diciamo solo che la geometria iperbolica ha un ruolo essenziale nella Relatività Generale di Einstein.

"There are only two ways to live your life. One is as though nothing is a miracle. The other is as though everything is".

(Dubbiamente) attribuita ad Einstein.

Indubbiamente degna di rifletterci sopra ... Tu, cosa ne dici?

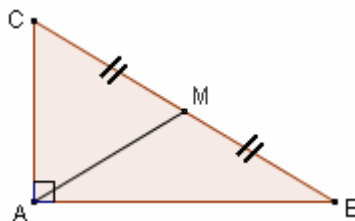


3.6 - ALCUNI TEOREMI SUL TRIANGOLO RETTANGOLO

TEOREMA

In un triangolo rettangolo, la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa.

DIM.



HP:

$$\widehat{CAB} = 90^\circ; \overline{BM} = \overline{MC}$$

TH:

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{BC} \quad (= \overline{BM} = \overline{MC})$$

Costruzione:
prolungo la mediana $\overline{AM}$ di un segmento $\overline{MD} = \overline{AM}$.
Congiungo D con B.

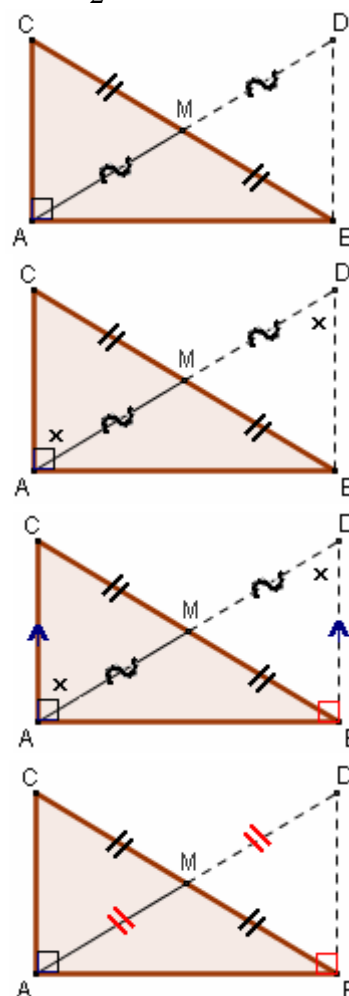
I due triangoli AMC e DMB sono uguali per il 1° Criterio:

$\overline{MC} = \overline{BM}$ per ipotesi,
 $\overline{AM} = \overline{MD}$ per costruzione,
 $\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$ perché opposti al vertice.
Quindi, in particolare, si ha $\widehat{CAM} = \widehat{D}$.

E poiché $\widehat{CAM}$ e $\widehat{D}$ sono in posizione di alterni interni rispetto alle due rette BD e AC con la trasversale AD, dal fatto che siano uguali si deduce che $BD \parallel AC$.
Ma allora, essendo $\widehat{CAB} = 90^\circ$, sarà retto anche $\widehat{DBA}$.

Se adesso confrontiamo i due triangoli ABC e ABD, vediamo che hanno $\widehat{CAB} = \widehat{DBA} = 90^\circ$; $\overline{AB}$ in comune;
 $\overline{AC} = \overline{BD}$ per l'uguaglianza $\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$
dunque sono uguali per il 1° Criterio e in particolare $\overline{BC} = \overline{AD}$.

$$\text{E perciò } \boxed{\overline{AM}} = \overline{MD} = \frac{1}{2} \overline{AD} = \boxed{\frac{1}{2} \overline{BC}} = \overline{BM} = \overline{MC}, \text{ C.V.D.}$$



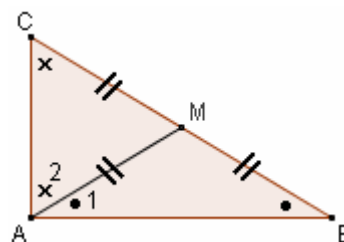
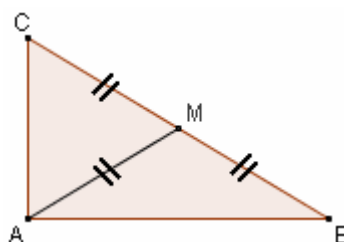
TEOREMA

Se in un triangolo la mediana relativa ad un lato è metà del lato stesso, allora quel triangolo è rettangolo (e il lato in questione ne è l'ipotenusa).

DIMOSTRAZIONE

I triangoli AMB, AMC sono isosceli per HP;
segue (vedi figura qui a fianco)
 $\widehat{A}_1 = \widehat{B}$, $\widehat{A}_2 = \widehat{C}$.

Ma la somma di tutti e quattro gli angoli $\widehat{A}_1, \widehat{B}, \widehat{A}_2, \widehat{C}$ dà 180° ;
quindi la somma $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2$
(che costituisce poi l'angolo $\widehat{A}$)
darà $180^\circ/2 = 90^\circ$.



HP: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{MC}$

TH: $\widehat{CAB} = 90^\circ$

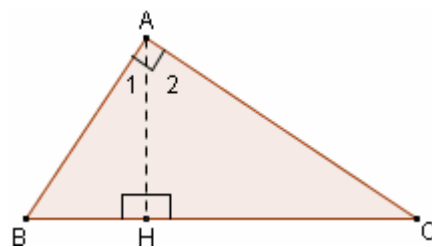
Schematicamente:

$$\begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} &= 180^\circ \\ \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{B} + \widehat{C} &= 180^\circ \\ \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 &= 180^\circ \\ 2\widehat{A}_1 + 2\widehat{A}_2 &= 180^\circ \\ 2(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2) &= 180^\circ \\ \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 &= 90^\circ \quad \text{C.V.D.} \end{aligned}$$

♥ Gli studenti tendono ad enunciare l'ultimo teorema in modo scorretto, dicendo che “se in un triangolo la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa, allora il triangolo è rettangolo”. ... Eh, no! Se si utilizza fin dall'inizio il termine “ipotenusa”, sembra che sia noto già in partenza che il triangolo è rettangolo!

TEOREMA

Se in un triangolo rettangolo si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa, questa lo suddivide in due triangoli, simili fra loro e con quello di partenza (due triangoli sono "simili" quando hanno gli angoli rispettivamente uguali).



HP

ABC rettangolo in $\hat{A}$
 $AH \perp BC$

TH

ABC, AHB, AHC
 hanno gli angoli
 rispettivamente uguali

DIM.

Il triangolo ABH è rettangolo in $\hat{H}$, dunque i suoi due angoli acuti $\hat{B}$ e $\hat{A}_1$ sono complementari.

Ma anche $\hat{A}_2$ è complementare di $\hat{A}_1$: dunque $\hat{A}_2 = \hat{B}$ perché complementari dello stesso angolo $\hat{A}_1$.

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\hat{A}_2} & \xrightarrow{=} & 90^\circ - \hat{A}_1 \xrightarrow{=} \boxed{\hat{B}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = & & \text{angoli acuti} \\ = \hat{BAC} = 90^\circ & & \text{del triangolo} \\ & & \text{rettangolo} \\ & & \text{AHB} \end{array}$$

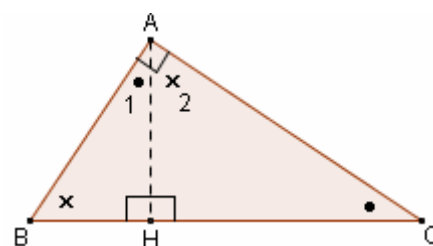
Analogamente, $\hat{A}_1 = \hat{C}$ perché complementari dello stesso angolo $\hat{A}_2$.

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\hat{A}_1} & \xrightarrow{=} & 90^\circ - \hat{A}_2 \xrightarrow{=} \boxed{\hat{C}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = & & \text{angoli acuti} \\ = \hat{BAC} = 90^\circ & & \text{del triangolo} \\ & & \text{rettangolo} \\ & & \text{AHC} \end{array}$$

La situazione è pertanto quella illustrata nella figura qui a fianco.

La tesi è dimostrata!

I tre triangoli ABC, AHB, AHC hanno gli angoli rispettivamente uguali (ognuno dei tre ha un angolo retto, un angolo "pallino" e un angolo "crocetta"): sono dunque "simili".

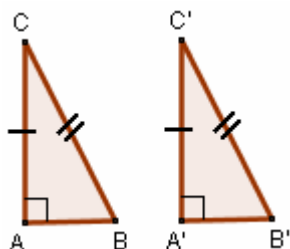
**TEOREMA ("Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli")**

Se due triangoli rettangoli hanno rispettivamente uguali l'ipotenusa e un cateto, allora sono uguali.

OSSERVAZIONE

Notare che in questo teorema si suppone l'uguaglianza di due lati e di un angolo, ma quest'ultimo ... non è l'angolo compreso.

Si tratta perciò di un teorema *nuovo*, non coincidente con nessuno dei tre Criteri di uguaglianza già noti.



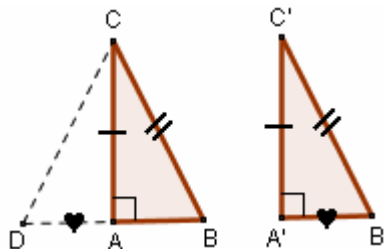
HP

$$\hat{BAC} = \hat{B'A'C'} = 90^\circ$$

$$\overline{BC} = \overline{B'C'}, \overline{AC} = \overline{A'C'}$$

TH

$$ABC = A'B'C'$$



♥ Nei testi in Inglese, questo enunciato è denominato "the Hypotenuse-Leg Theorem".

Side = lato
 Leg = cateto

DIM.

Prolunghiamo il segmento $\overline{AB}$, dalla parte di A, di un segmento $\overline{AD} = \overline{A'B'}$.

Confrontando adesso i due triangoli ADC, A'B'C', vediamo che sono uguali per il Primo Criterio (l'angolo $\hat{DAC}$ è evidentemente retto perché supplementare dell'angolo retto $\hat{BAC}$).

Ma allora è, in particolare, $\overline{DC} = \overline{B'C'}$; era poi $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ per ipotesi, per cui si ha $\overline{DC} = \overline{BC}$. Dunque il triangolo BDC è isoscele; perciò $\overline{CA}$, che ne è altezza relativa alla base, farà anche da mediana: $\overline{AD} = \overline{AB}$.

Ma AD era stato costruito uguale ad A'B'; ne consegue $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

E a questo punto, se andiamo a confrontare i due triangoli ABC e A'B'C', li possiamo dire uguali per il Primo Criterio (o per il Terzo, indifferentemente).

La tesi è dimostrata.

3.7 - AIUTO PER IL RIPASSO, ESERCIZI (le risposte sono alla fine ... tienile coperte!)

1) Una dimostrazione “per assurdo” si effettua
(metti una crocetta sull’affermazione giusta)

- a) provando a negare l’ipotesi
- b) facendo vedere che la tesi è conseguenza dell’ipotesi
- c) provando a negare la tesi
- d) provando a negare sia l’ipotesi che la tesi

🎵 **ALTRI ESERCIZI
SUL CAPITOLO 3
A PARTIRE
DA PAGINA 336**

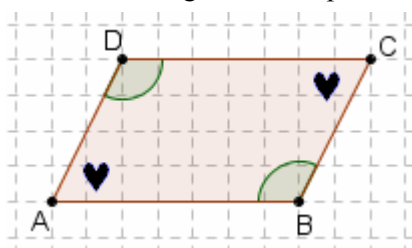
2) Metti una crocetta su quei teoremi nel cui ragionamento dimostrativo viene utilizzato il Postulato di Euclide:

- a) Teorema dell’angolo esterno in forma debole
- b) Teorema diretto sul parallelismo (la tesi è che le due rette siano parallele ...)
- c) Teorema inverso sul parallelismo (la tesi è che certi angoli sono uguali e certi altri supplementari ...)
- d) Teorema che esprime la proprietà transitiva del parallelismo
- e) Teorema dell’angolo esterno in forma forte

3) Metti una crocetta su quegli enunciati che sono dimostrabili come teoremi:

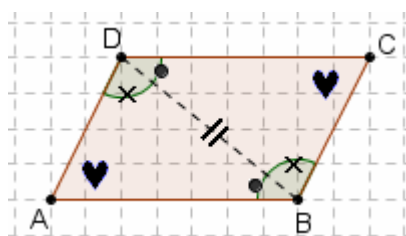
- a) Esistenza della perpendicolare per un punto dato a una retta data
- b) Unicità della perpendicolare per un punto dato a una retta data
- c) Esistenza della parallela per un punto dato a una retta data
- d) Unicità della parallela per un punto dato a una retta data

4) A Pierino viene richiesto di dimostrare che
se un quadrilatero ha gli angoli opposti uguali, allora ha anche i lati opposti uguali.
Pierino fa il disegno, scrive ipotesi e tesi, indica l’ipotesi sulla figura ...



$$\begin{array}{ll} \text{HP} & \widehat{BAD} = \widehat{BCD} \\ & \widehat{ABC} = \widehat{ADC} \\ \text{TH} & \overline{AB} = \overline{DC} \\ & \overline{AD} = \overline{BC} \end{array}$$

... e dice: provo a fare una costruzione.
Traccio una diagonale (BD).
Ora, i due triangoli ABD e CDB
sono uguali per il 2° Criterio
perché hanno un lato in comune,
e gli angoli adiacenti a quel lato
uguali perché alterni interni.
Segue, in particolare, la tesi!



... Ma il professore piange
sommessamente in un angolo.
Perché mai?

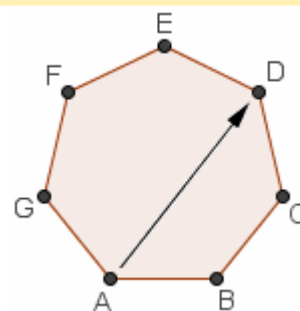


*Errori simili sono fra le
occasioni più frequenti
per cui i professori
possono piangere
quando correggono
le verifiche di Geometria.*

5) Impegnativo, ma ottimo per il ripasso della teoria.

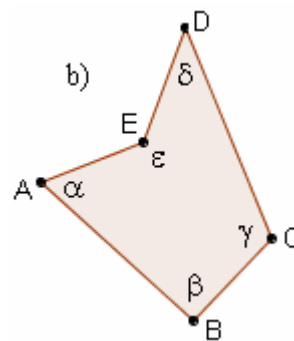
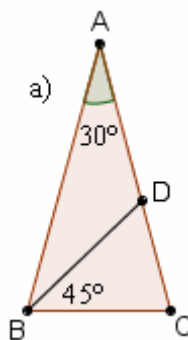
Nello schema qui a fianco, disegna una freccia dal punto X al punto Y qualora
l’enunciato X intervenga (direttamente) nella dimostrazione dell’enunciato Y

- A: Teorema dell’Angolo Esterno in forma debole
- B: Teorema dell’Angolo Esterno in forma forte
- C: Teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo
- D: Se due rette formano con una trasversale due angoli alterni interni uguali,
allora sono parallele
- E: Se due rette sono parallele, allora formano con ogni trasversale
angoli alterni (interni ed esterni) uguali, corrispondenti uguali, eccetera
- F: Proprietà transitiva del parallelismo
- G: Postulato di Euclide

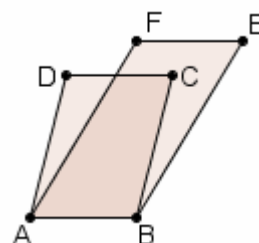


*Ad es., ci vuole una freccia
da A verso D perché
nella dimostrazione di D
si utilizza A*

- 6) Il Teorema dell'Angolo Esterno in forma *debole* afferma che in ogni triangolo, ciascun angolo esterno è sempre maggiore di ciascun angolo interno ad esso non adiacente.
Viene successivamente dimostrato il Teorema dell'Angolo Esterno in forma *forte*, il quale dice che in ogni triangolo, ciascun angolo esterno è uguale alla somma dei due interni non adiacenti.
Ora, se è *uguale alla somma* ... ne consegue che è *maggiore di ciascuno di essi*.
Ma allora, perché non si parte direttamente dimostrando il Teorema dell'Angolo Esterno in forma *forte*, per poi dedurne quello in forma *debole* come conseguenza?
- 7) Quanto misura la somma degli angoli interni di un ottagono?
- 8) Se la somma degli angoli interni di un poligono vale 17640° , quanti lati ha quel poligono?
- 9) Nella figura a) il triangolo ABC è isoscele sulla base $\overline{BC}$, e l'angolo al vertice $\hat{A}$ misura 30° , mentre $\hat{CBD} = 45^\circ$.
Quanto misura $\hat{BDC}$? Il triangolo ABD è anch'esso isoscele?
- 10) La somma degli angoli interni di un pentagono concavo come quello rappresentato in figura b) vale 3 angoli piatti, esattamente come se il poligono fosse convesso.
E' richiesto di dimostrarlo utilizzando il metodo seguente: dopo aver congiunto A con D, si imposta la catena $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = (\hat{A} - \hat{DAE}) + \beta + \gamma + (\hat{D} - \hat{ADE}) + \dots = \text{ecc.}$

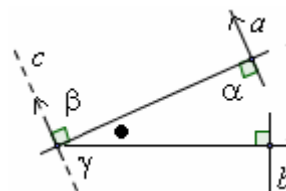


- 11) Dimostra il teorema che dice "in due triangoli uguali le altezze relative a due lati rispettivamente uguali sono uguali" utilizzando il 2° Criterio Generalizzato.
- 12) Dimostra che un triangolo che abbia uguali fra loro due altezze è isoscele.
- 13) I due quadrilateri ABCD, ABEF nella figura riportata qui a destra $\rightarrow$ sono parallelogrammi, ossia hanno i lati opposti a due a due paralleli (anche se sul disegno le frecce di parallelismo, utili ma non obbligatorie quando si sa che due rette sono parallele, non sono state messe).
Come si può giustificare l'uguaglianza $\hat{EBC} = \hat{FAD}$?
- 14) Dimostra che due rette, che siano rispettivamente perpendicolari ai due lati di un angolo acuto, si incontrano senz'altro (non possono, cioè, essere parallele) e formano, intersecandosi, due angoli uguali a quello iniziale e due angoli ad esso supplementari.



RISPOSTE

- 1) c 2) c, d 3) a, b, c
- 4) Quel disgraziato di Pierino parla di angoli alterni interni e sostiene che sono uguali; ma ♥ di due angoli alterni interni, si può affermare che sono uguali **quando si sa (per HP, o per dim. precedente) che le due rette sono parallele!** Pierino ha commesso un errore piuttosto frequente, e GRAVE, in Geometria: dedurre che due angoli sono uguali per il semplice fatto che sono in posizione di alterni interni! ... Eh no, evidentemente non basta!!!
- 5) $A \rightarrow D$; $B \rightarrow C$ (volendo); $D \rightarrow E$; $E \rightarrow B$ e (in una delle due modalità) C ; $G \rightarrow E$ ed F
- 6) Perché il teorema "forte" non si può dimostrare se non si dimostra, prima di esso, il teorema "debole"; infatti il t. debole serve per dimostrare i teoremi sulle parallele, tramite i quali viene poi dimostrato il t. forte.
- 7) 1080° 8) 100 lati
- 9) $\hat{ACB} = \hat{ABC} = (180^\circ - \hat{A}) / 2 = (180^\circ - 30^\circ) / 2 = 150^\circ / 2 = 75^\circ$; $\hat{BDC} = 180^\circ - \hat{CBD} - \hat{BCD} = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$
Oppure: per il Teorema dell'Angolo Est. in forma forte, $\hat{BDC} = \hat{ABD} + \hat{A} = (75^\circ - 45^\circ) + 30^\circ = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$
Il triangolo ABD ha un angolo di 30° e un altro di $75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$ per cui, avendo 2 angoli uguali, è isoscele.
- 10) $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = (\hat{A} - \hat{DAE}) + \beta + \gamma + (\hat{D} - \hat{ADE}) + (360^\circ - \hat{AED}) = \hat{A} + \beta + \gamma + \hat{D} + 360^\circ - \hat{DAE} - \hat{ADE} - \hat{AED} = (\hat{A} + \beta + \gamma + \hat{D}) + 360^\circ - (\hat{DAE} + \hat{ADE} + \hat{AED}) = 360^\circ + 360^\circ - 180^\circ = 540^\circ$
- 12) Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli ...
- 13) Il modo più rapido e brillante è di osservare che hanno i lati paralleli e concordi (pag. 301); altrimenti, si prolunga $\overline{AB}$ dalla parte di B; angoli corrispondenti rispetto a due $\parallel$ sono uguali, poi si ragiona per differenza
- 14) Che le due rette non possano essere parallele, lo si dimostra con un ragionamento per assurdo, che si può effettuare in diversi modi. Ad esempio, si può tracciare per il vertice dell'angolo la parallela c alla retta a ; l'angolo β sarà retto perché alterni interni (con rette parallele) rispetto all'angolo retto α ; ma allora non potrà essere retto l'angolo γ , quindi la retta b non potrà essere parallela alla retta c .
Perciò b non è parallela ad a : se lo fosse, infatti, sarebbe parallela pure a c .
Al secondo quesito si risponde facilmente ricordando che la somma degli angoli di un quadrilatero è 360° ...



Cap. 4: DISTANZE, LUOGHI GEOMETRICI, QUADRILATERI PARTICOLARI

4.1 - DISTANZE E PROIEZIONI

DISTANZA FRA DUE PUNTI

Dicesi “distanza” fra due punti, il segmento che li unisce.



La “distanza” fra A e B è il segmento $\overline{AB}$

OSSERVAZIONE

A dire il vero, di fronte alla parola “distanza”, noi siamo portati istintivamente a pensare ad un **numero** piuttosto che ad un **segmento**: “la distanza fra Milano e Torino è di 140 km”, “la distanza fra i banchi durante la verifica scritta dev’essere di almeno 1 metro”, ecc.

Insomma, spontaneamente la parola “distanza” ci suggerisce l’idea di “misura”, che è un’idea dal contenuto più “aritmetico” (dal greco “arithmós” = numero) che geometrico (“gê” = terra, “métron” = misura).

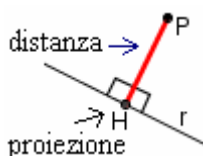
In effetti, l’uomo moderno tende ad “aritmetizzare” (= pensare in termini numerici) piuttosto che a “geometrizzare”, come erano invece portati a fare i matematici dell’antichità classica e fra essi Euclide.

Tuttavia, nel nostro contesto, la parola “distanza” andrà interpretata nel senso della definizione data (distanza = segmento), anche se non è affatto “vietato” allo studente di pensare, se lo desidera, alla “misura” di questa distanza, fatta rispetto a una qualsivoglia unità di misura fissata. Il concetto di “misura”, per inciso, è oggetto di un apposito capitolo, più avanzato, della geometria (Volume 2); capitolo che riserva interessanti sorprese, dovute alla singolare scoperta delle cosiddette “grandezze incommensurabili”.

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA PROIEZIONE DI UN PUNTO SU UNA RETTA

Dicesi “distanza di un punto P da una retta r”, il segmento di perpendicolare $\overline{PH}$ condotto da P alla retta r.

Il punto H (punto di intersezione fra r e la perpendicolare condotta a r da P, ovvero “piede” di tale perpendicolare), viene anche detto “proiezione di P su r”.



La “distanza” di P da r è il segmento di perpendicolare $\overline{PH}$ condotto da P a r.

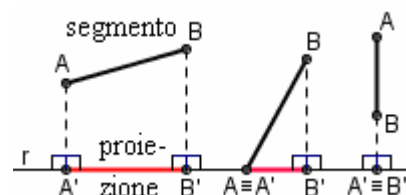
Il punto H è detto “proiezione di P su r” o anche “piede della perpendicolare” condotta da P a r.

La distanza di un punto da una retta è un segmento; la proiezione di un punto su una retta è un punto. Nel caso particolare in cui P appartenesse alla retta r, la proiezione di P su r verrebbe a coincidere con P.

PROIEZIONE DI UN SEGMENTO SU UNA RETTA

Dicesi “proiezione” di un segmento $\overline{AB}$ sopra una retta r, il segmento che ha per estremi le proiezioni, su r, dei due estremi di $\overline{AB}$.

Nelle tre figure, la “proiezione” di $\overline{AB}$ su r è il segmento $\overline{A'B'}$, dove A' è la proiezione di A su r, B' è la proiezione di B su r.



La proiezione di un segmento su una retta è quindi un altro segmento (giacente sulla retta).

Nel caso particolare in cui il segmento $\overline{AB}$ stia su di una retta perpendicolare a r, come nella terza figura, la proiezione di $\overline{AB}$ su r si riduce ad un punto (visto come segmento dagli estremi coincidenti, “segmento nullo”).

TEOREMA

La distanza di un punto P da una retta r è il minore di tutti i segmenti aventi un estremo in P e l’altro estremo su r.



Dimostrazione

Infatti, detta H la proiezione di P su r e detto Q un qualsiasi punto di r distinto da H, basterà considerare il triangolo PHQ, rettangolo in H, e ricordare che in un triangolo rettangolo ogni cateto è minore dell’ipotenusa, per concludere che $PH < PQ$, c.v.d.

DISTANZA FRA DUE RETTE PARALLELE

Dicesi distanza fra due rette parallele, la distanza di un punto qualsiasi di una qualsiasi delle due rette, dall’altra retta.

Osserviamo che la definizione è corretta, per il fatto che non dipende dal particolare punto o dalla particolare retta considerata.

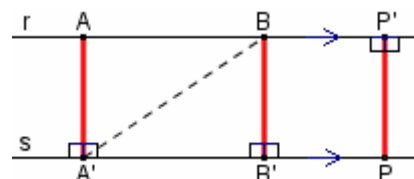
Con riferimento alla figura, si ha infatti che $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{PP'}$ ecc.

Come dimostrarlo? Semplice! Facciamo vedere ad esempio che $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.

A tale scopo, congiungiamo A' con B e confrontiamo $\triangle A'AB$ con $\triangle A'B'B$.

- $\overline{A'B}$ è in comune;
- $\widehat{A'BA} = \widehat{B'AB}$ perché alterni interni rispetto a due parallele con trasversale;
- $\widehat{A'AB} = \widehat{BB'A} = 90^\circ$ ($\widehat{A'AB}$ è retto perché, date due parallele, ogni perpendicolare all’una è $\perp$ anche all’altra).

Quindi i due triangoli in questione sono uguali per il 2° Criterio Generalizzato: segue appunto $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.



4.2 - LUOGHI GEOMETRICI

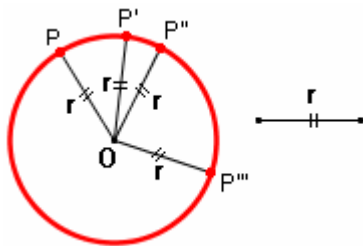
Definizione di “LUOGO GEOMETRICO”

Si dice “luogo geometrico”
l'insieme di tutti e soli i punti che godono di una determinata proprietà geometrica.

Esempi

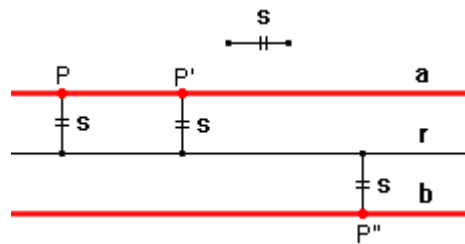
1)

Il luogo geometrico dei punti del piano, la cui distanza da un punto fissato O è uguale ad un segmento assegnato r , è chiamato “circonferenza”.



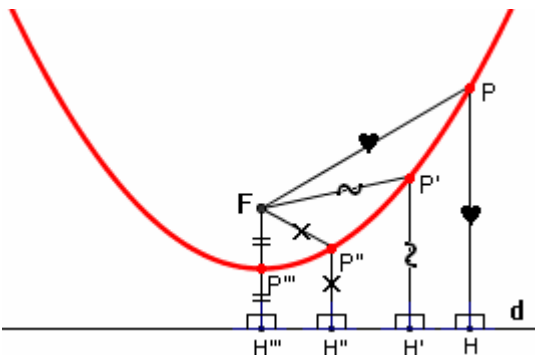
2)

Il luogo geometrico dei punti del piano, la cui distanza da una retta fissata a è uguale ad un segmento fissato s , è costituito da due rette parallele.



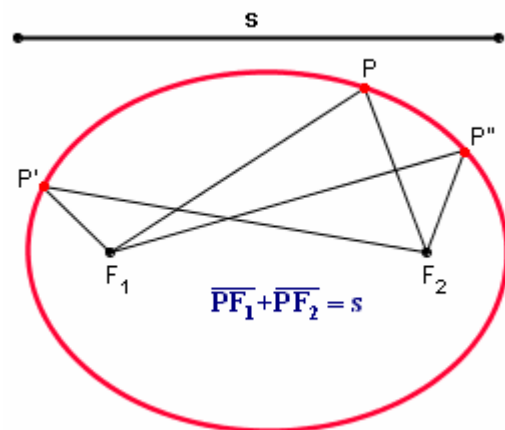
3)

Il luogo dei punti P del piano, equidistanti (= aventi ugual distanza) da un punto fisso F (detto “fuoco”) e da una retta fissa d (detta “direttrice”), è una curva chiamata “parabola”.



4)

Il luogo dei punti P del piano, per i quali è costante la somma $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ delle distanze da due punti fissi F_1, F_2 (detti “fuochi”) è una curva chiamata “ellisse”.



APPROFONDIMENTO LOGICO/LINGUISTICO

Siamo partiti scrivendo che
si dice “luogo geometrico” l'insieme di
TUTTI E SOLI i punti che godono di una determinata proprietà geometrica.
In questa definizione, cosa vuol dire, precisamente, “TUTTI E SOLI”?

Dunque: noi abbiamo un certo insieme I di punti, e abbiamo una certa proprietà geometrica G .
Affermare che I è il **luogo** dei punti che godono della proprietà G significa sostenere DUE cose:

♪ **SOLO** i punti che godono della proprietà G appartengono a I , ossia:

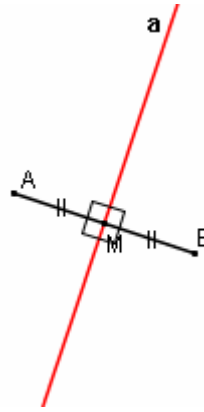
- se un punto NON gode della proprietà G , allora NON può appartenere a I oppure, volendo (è equivalente, in termini logici):
- se un punto appartiene a I allora gode della proprietà G

♪ **TUTTI** i punti che godono della proprietà G appartengono a I , che è poi come dire:
se un punto gode della proprietà G , allora appartiene a I

L'ASSE DI UN SEGMENTO

DEFINIZIONE

Si dice “asse” di un segmento la perpendicolare a quel segmento condotta per il suo punto medio.



L'asse di un segmento, ossia la perpendicolare a quel segmento nel suo punto medio:

$$a \perp AB, \\ \overline{AM} = \overline{MB}$$

L'ASSE DI UN SEGMENTO, VISTO COME LUOGO GEOMETRICO

L'asse di un segmento può anche essere visto come *luogo geometrico*. Vale infatti il seguente

TEOREMA

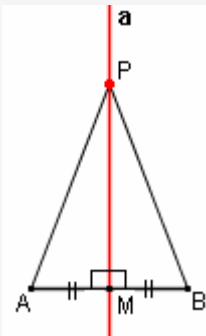
L'asse di un segmento è il luogo dei punti del piano, aventi la proprietà di essere equidistanti dagli estremi del segmento stesso.

I) PRIMA PARTE della dimostrazione: vogliamo dimostrare che

se un punto appartiene all'asse di un segmento, allora è equidistante dagli estremi di quel segmento.

Sia dunque $\overline{AB}$ un segmento, a il suo asse, e sia $P \in a$.

Tracciate le distanze $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ del punto P dagli estremi di $\overline{AB}$, vogliamo far vedere che $\overline{PA} = \overline{PB}$



HP: a asse di $\overline{AB}$ ($a \perp \overline{AB}$, $\overline{AM} = \overline{MB}$)
 $P \in a$

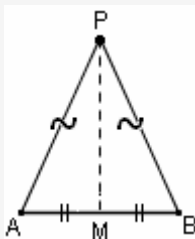
TH: $\overline{PA} = \overline{PB}$

Semplicissimo. I due triangoli PMA , PMB sono uguali per il 1° Criterio; segue la tesi.

II) SECONDA PARTE della dimostrazione: vogliamo dimostrare che

se un punto è equidistante dagli estremi di un segmento, allora appartiene al suo asse.

Sia dunque $\overline{AB}$ un segmento, P un punto equidistante dai suoi estremi: $\overline{PA} = \overline{PB}$.
 Vogliamo far vedere che P appartiene all'asse di $\overline{AB}$.



HP: $\overline{PA} = \overline{PB}$

TH: P appartiene all'asse di $\overline{AB}$

Congiungiamo P col punto medio M di $\overline{AB}$.

Ci basterà far vedere che risulta $\overline{PM} \perp \overline{AB}$.

Ma è facilissimo!

Il triangolo ABP è isoscele per ipotesi,

quindi $\overline{PM}$, che per costruzione è mediana relativa alla base, fa anche da altezza.

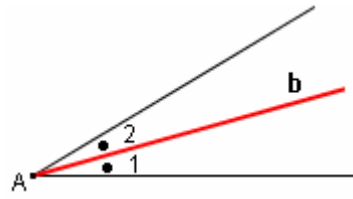
La tesi è dimostrata.

LA BISETTRICE DI UN ANGOLO

Abbiamo a suo tempo introdotto la nozione di “bisettrice di un angolo” tramite la seguente

DEFINIZIONE

Si dice bisettrice di un angolo la semiretta che, partendo dal vertice, divide l'angolo in due parti uguali.



La bisettrice di un angolo, ossia la semiretta che lo “biseca”, che lo taglia in metà:
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

LA BISETTRICE DI UN ANGOLO, VISTA COME LUOGO GEOMETRICO

Ora, la bisettrice può anche essere vista come *luogo geometrico*. Vale infatti il seguente

TEOREMA

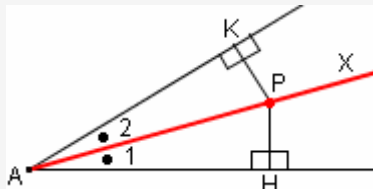
La bisettrice di un angolo è il luogo dei punti dell'angolo, aventi la proprietà di essere equidistanti dai lati dell'angolo.

I) PRIMA PARTE della dimostrazione:

se un punto appartiene alla bisettrice di un angolo, allora è equidistante dai lati di quell'angolo.

Sia dunque $\hat{A}$ un angolo, e sia P un punto appartenente alla sua bisettrice.

Tracciate le due distanze $\overline{PH}$, $\overline{PK}$ del punto P dai lati di $\hat{A}$, vogliamo far vedere che $\overline{PH} = \overline{PK}$.



HP: AX bisettrice di $\hat{A}$ ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$)

$P \in AX$

$PH \perp AH$; $PK \perp AK$

TH: $\overline{PH} = \overline{PK}$

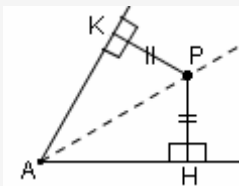
Basta confrontare i due triangoli PHA , PKA .

Essi hanno $\overline{AP}$ in comune, $\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$ e $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ per ipotesi; quindi sono uguali per il 2° Criterio Generalizzato. Segue la tesi.

II) SECONDA PARTE della dimostrazione:

se un punto di un angolo è equidistante dai lati dell'angolo stesso, allora appartiene alla sua bisettrice.

Prendiamo all'interno di un angolo $\hat{A}$ un punto P , che sia equidistante dai lati dell'angolo stesso, poi tracciamo la semiretta AP proponendoci di dimostrare che fa da bisettrice per l'angolo $\hat{A}$.



HP: $\overline{PH} = \overline{PK}$ ($PH \perp AH$; $PK \perp AK$)

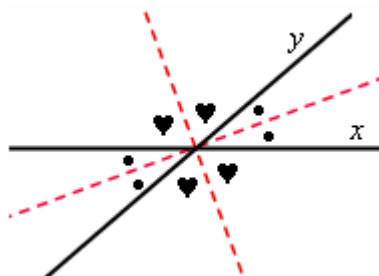
TH: P appartiene alla bisettrice dell'angolo $\hat{A}$,
 cioè, tracciata la semiretta AP , si ha $\hat{PAH} = \hat{PAK}$

I triangoli PAH , PAK sono uguali per il Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli (ipotenusa $\overline{AP}$ in comune, $\overline{PH} = \overline{PK}$ per ipotesi).

Segue la tesi.

OSSERVAZIONE

Il luogo dei punti del piano, equidistanti da due rette incidenti x , y , è costituito da una coppia di rette, che bisecano i quattro angoli, a due a due opposti al vertice, formati da x e y .

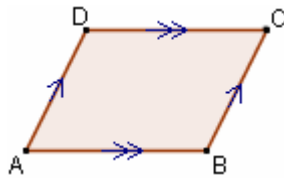


Quando si parla di “bisettrice” di un angolo, a volte si specifica, o si deve capire dal contesto, che ci si intende riferire a tutta la “**retta bisettrice**”, cioè a quella retta che contiene le due semirette bisettrici dell'angolo in questione e del suo opposto al vertice.

4.3 - PARALLELOGRAMMI IN GENERALE

DEFINIZIONE

Si dice
“**parallelogrammo**”
un **quadrilatero**
coi **lati opposti**
paralleli.

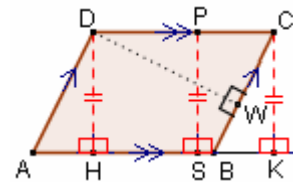


$DC \parallel AB$
 $BC \parallel AD$

Le **coppie di freccette**, o di **doppie freccette**,
servono per ribadire:
“noi sappiamo che queste due rette
sono **parallele fra loro**”.

♥ **Non sono “obbligatorie”**, tali freccette;
sono però utili, per fissare le idee,
QUANDO GIÀ SI SA,
per ipotesi o per dimostrazione precedente,
che le rette in questione sono parallele.

In un parallelogrammo, si dice “**altezza**” la distanza fra due
lati opposti, assunti come “**basi**”. La figura qui a fianco mostra
un parallelogrammo ABCD e tre segmenti ($\overline{DH}$, $\overline{PS}$, $\overline{CK}$),
ognuno dei quali ha il diritto di essere chiamato “**altezza**” per
il parallelogrammo relativamente alla coppia di basi $\overline{AB}$, $\overline{DC}$.
Le altezze di un parallelogrammo, relative ad una data coppia
di basi, sono tutte uguali fra loro (distanze di due parallele).
Di norma, è comunque più frequente che un’altezza
venga tracciata a partire da uno dei quattro vertici.

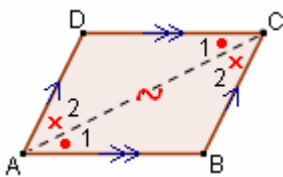


Tre fra le infinite altezze,
tutte uguali fra loro, relative
alla coppia di basi $\overline{AB}$, $\overline{DC}$

La figura
mostra
anche
un’altezza
($\overline{DW}$)
relativa
alla coppia
di basi
 $\overline{BC}$, $\overline{AD}$

TEOREMA

**In ogni parallelogrammo,
i lati opposti sono uguali.**



HP
ABCD parallelogrammo

TH
 $\overline{AB} = \overline{DC}$; $\overline{AD} = \overline{BC}$

DIM.

Tracciamo la diagonale $\overline{AC}$
e confrontiamo $\triangle ABC$, $\triangle ADC$.

Essi sono uguali per il 2° Criterio avendo:

$\overline{AC}$ in comune

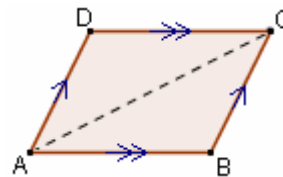
$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (alt. int., $DC \parallel AB$ per HP, trasv. $\overline{AC}$)

$\hat{A}_2 = \hat{C}_2$ (alt. int., $BC \parallel AD$ per HP, trasv. $\overline{AC}$).

Segue la tesi.

TEOREMA

**In ogni parallelogrammo,
gli angoli opposti sono uguali.**



HP
ABCD parallelogrammo

TH
 $\hat{A} = \hat{C}$; $\hat{B} = \hat{D}$

DIM.

Come per il Teorema precedente, si traccia la diag. $\overline{AC}$
e si confrontano $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ dimostrandoli uguali.

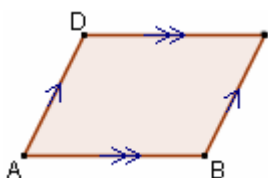
Segue $\hat{B} = \hat{D}$;

è poi $\hat{A} = \hat{C}$ perché somme di angoli
che abbiamo già dimostrati uguali

(oppure, la tesi $\hat{A} = \hat{C}$ potrebbe essere provata
tracciando l’altra diagonale $\overline{BD}$ e confrontando
i due triangoli in cui il quadrilatero ne viene spezzato).

TEOREMA

**In ogni parallelogrammo,
gli angoli adiacenti a ciascun lato
sono supplementari.**



HP
ABCD parallelogrammo

TH
 $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$; $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$;
 $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$; $\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$

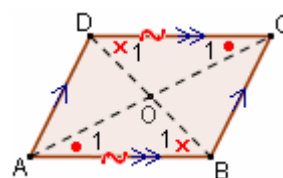
DIM.

Semplicissimo!

Basta ricordare che
date due rette parallele ed una trasversale che le taglia,
gli angoli coniugati interni sono supplementari.

TEOREMA

**In ogni parallelogrammo,
le diagonali si tagliano
scambievolmente per metà.**



HP
ABCD parallelogrammo

TH
 $\overline{AO} = \overline{OC}$; $\overline{BO} = \overline{OD}$

DIM.

Confrontiamo $\triangle AOB$, $\triangle COD$.

Essi sono uguali per il 2° Criterio avendo:

$\overline{AB} = \overline{DC}$ perché già abbiamo dimostrato che in un
parallelogrammo i lati opposti sono uguali;

$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (alterni interni, $DC \parallel AB$ per HP, trasv. $\overline{AC}$)

$\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (alterni interni, $DC \parallel AB$ per HP, trasv. $\overline{BD}$)

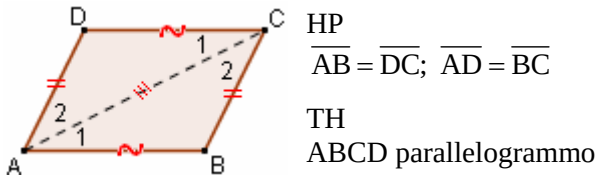
Segue la tesi.

*I quattro teoremi precedenti esprimevano altrettante PROPRIETA' DEI PARALLELOGRAMMI;
i quattro teoremi che seguono esprimono invece*

**CONDIZIONI SUFFICIENTI PER POTER CONCLUDERE
CHE UN QUADRILATERO E' UN PARALLELOGRAMMO**

TEOREMA

**Se un quadrilatero ha i lati opposti uguali,
allora è un parallelogrammo.**



DIM.

Tracciamo la diagonale AC
e confrontiamo i due triangoli ABC, ADC:
essi sono uguali per il 3° Criterio.

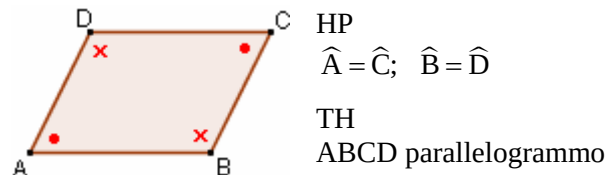
In particolare, si ha $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$;
ma essendo questi due angoli alterni interni
rispetto alle due rette DC e AB con la trasv. AC,
segue $DC \parallel AB$.

Sempre dall'uguaglianza dei due triangoli
ABC, ADC, si trae $\hat{A}_2 = \hat{C}_2$;
ma essendo questi due angoli alterni interni
rispetto alle due rette BC e AD con la
trasversale AC, segue $BC \parallel AD$.

Perciò il quadrilatero ABCD
ha i lati opposti paralleli:
la tesi è dimostrata.

TEOREMA

**Se un quadrilatero ha gli angoli opposti uguali,
allora è un parallelogrammo.**



DIM.

E' noto che la somma degli angoli interni
di ogni quadrilatero vale 360° .

Ma per HP gli angoli del nostro quadrilatero
sono uguali a 2 a 2

(due angoli "puntino" e due angoli "crocetta"); quindi
la somma "puntino" + "crocetta" darà $360^\circ/2 = 180^\circ$:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{D} + \hat{A} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$2\hat{A} + 2\hat{D} = 360^\circ$$

$$2(\hat{A} + \hat{D}) = 360^\circ$$

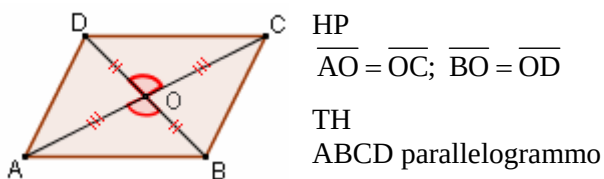
$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$$

Ma $\hat{A}$ e $\hat{D}$ sono in posizione di coniugati interni
rispetto alle due rette AB e DC con la trasversale AD;
essendo supplementari, ne consegue $DC \parallel AB$.

Si ha poi $\hat{A} + \hat{B} = \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$, da cui $BC \parallel AD$.

TEOREMA

**Se un quadrilatero ha le diagonali
che si tagliano scambievolmente per metà,
allora è un parallelogrammo.**



DIM.

I due triangoli AOB, COD sono uguali
per il 1° Criterio: infatti hanno

$\angle AOB = \angle COD$ perché opposti al vertice;

$AO = OC$ per ipotesi;

$BO = OD$ per ipotesi.

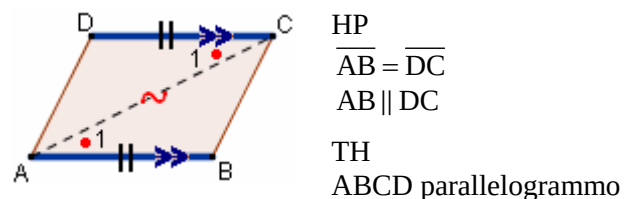
Dall'uguaglianza dei due triangoli considerati
discende in particolare che $DC = AB$.

Confrontando analogamente i triangoli AOD, BOC,
li si dimostra uguali per il 1° Criterio
e se ne trae in particolare che $BC = AD$.

ABCD ha i lati opposti a 2 a 2 uguali:
è dunque un parallelogrammo,
in virtù di un teorema dimostrato in precedenza.

TEOREMA

**Se un quadrilatero ha
due lati opposti uguali e paralleli,
allora è un parallelogrammo.**



DIM.

Tracciamo la diagonale AC

e confrontiamo i due triangoli ABC, ADC: essi hanno

$\overline{AC}$ in comune;

$\overline{AB} = \overline{DC}$ per ipotesi;

$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ perché angoli alt. int. formati dalle due rette
AB e DC, parallele per HP, con la trasv. AC.

Dunque è $\angle ABC = \angle ADC$ per il 1° Criterio;
se ne deduce, in particolare, che $\overline{BC} = \overline{AD}$.

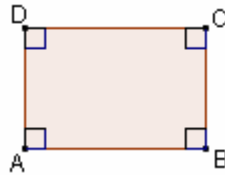
Ma allora il quadrilatero ABCD
ha i lati opposti a due a due uguali:
è dunque un parallelogrammo,
in virtù di un teorema precedentemente acquisito.

4.4 - PARALLELOGRAMMI PARTICOLARI

IL RETTANGOLO

DEFINIZIONE

Si dice “rettangolo”
un quadrilatero
coi quattro angoli tutti retti.



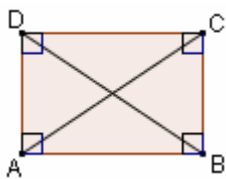
$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$$

OSSERVAZIONI SULLA DEFINIZIONE

- Il rettangolo, dunque, avendo gli angoli opposti uguali, è un parallelogrammo (è un caso particolare di parallelogrammo).
- Avremmo anche potuto dire che il rettangolo è “un parallelogrammo coi quattro angoli retti”: in questo modo avremmo dato una definizione, diciamo così, “sovrabbondante”, ma comunque sempre equivalente a quella da noi scelta.
- Se di un quadrilatero noi sappiamo che ha TRE angoli retti, potremo immediatamente concludere che si tratta di un rettangolo: infatti la somma degli angoli di un quadrilatero dà, com'è noto, 360° , e se tre angoli sono di 90° ($90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$), il rimanente sarà obbligato a misurare $360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$.
- Se di un PARALLELOGRAMMO si sa che ha un angolo retto, allora si può subito concludere che si tratta di un rettangolo. Infatti l'angolo opposto sarà pure retto (in un parallelogrammo gli angoli opposti sono uguali), e i due angoli rimanenti saranno retti anch'essi perché supplementari di un angolo retto (in un parallelogrammo gli angoli adiacenti a uno stesso lato sono supplementari).

TEOREMA

In un rettangolo, le diagonali sono uguali.



HP
ABCD rettangolo
TH
 $\overline{AC} = \overline{BD}$

DIM.

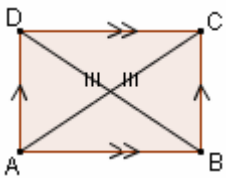
Basta confrontare i due triangoli ABD e ABC i quali hanno:
 $\overline{AB}$ in comune;
 $\overline{AD} = \overline{BC}$ perché lati opposti di un parallelogrammo;
 $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$.

Dunque tali due triangoli sono uguali per il 1° Criterio; segue la tesi.

OSSERVAZIONE - Poiché in ogni parallelogrammo, quindi anche in un rettangolo, le diagonali si tagliano scambievolmente per metà, da questo teorema segue subito che in un rettangolo i 4 segmenti che le diagonali determinano tagliandosi, sono tutti uguali fra loro (metà di segmenti uguali).

TEOREMA

Se un parallelogrammo ha le diagonali uguali, allora è un rettangolo.



HP
ABCD parallelogrammo
 $\overline{AC} = \overline{BD}$
TH
ABCD rettangolo

DIM.

Confrontiamo i due triangoli ABD e ABC.

Essi hanno:

$\overline{AB}$ in comune;

$\overline{BD} = \overline{AC}$ per ipotesi;

$\overline{AD} = \overline{BC}$ perché lati opposti di un parallelogrammo.

Dunque sono uguali per il 3° Criterio e in particolare è $\hat{A} = \hat{B}$.

Ma $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono pure supplementari

(angoli di un parallelogrammo, adiacenti a uno stesso lato, o, se si vuole: angoli coniug. int. di due parallele con trasv.):

quindi si ha $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ e simultaneamente $\hat{A} = \hat{B}$,

$$\text{da cui } \hat{A} = \hat{B} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Il parallelogrammo ABCD ha perciò due angoli retti; anche gli altri due (= i rispettivi opposti) saranno quindi retti. ABCD è di conseguenza un rettangolo, C.V.D.

Dimostrazione alternativa.

In ogni parallelogrammo le diagonali si tagliano scambievolmente per metà.

Ma allora, in un parallelogrammo che abbia le diagonali uguali, queste intersecandosi determinano quattro segmenti tutti uguali fra loro (metà di segmenti uguali).

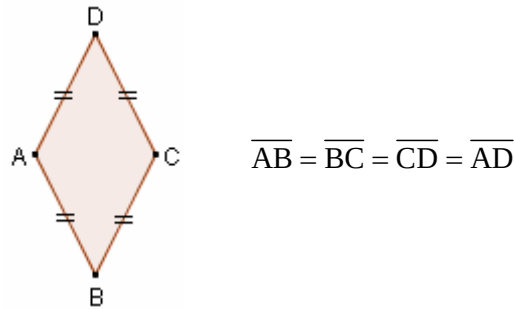
Ricordi il teorema secondo cui ogni triangolo nel quale la mediana relativa a un lato sia metà del lato stesso, è rettangolo?

Applicandolo ad ABD, si ha subito $\hat{A} = 90^\circ$...

IL ROMBO

DEFINIZIONE

Si dice “**rombo**”
un **quadrilatero**
coi quattro lati tutti uguali fra loro.

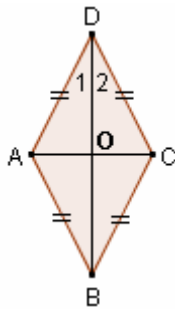


OSSERVAZIONI SULLA DEFINIZIONE

- Il rombo, dunque, avendo i lati opposti uguali, è un parallelogrammo (è un caso particolare di parallelogrammo).
- Avremmo anche potuto dire che il rombo è “un parallelogrammo coi quattro lati uguali fra loro”: in questo modo avremmo dato una definizione, diciamo così, “sovrabbondante”, ma comunque sempre equivalente a quella da noi scelta.
- Se di un parallelogrammo noi sappiamo che ha due lati consecutivi uguali, potremo immediatamente concludere che si tratta di un rombo: infatti, poiché in ogni parallelogrammo i lati opposti sono uguali, per un parallelogrammo l’aver due lati consecutivi uguali comporta di avere tutti e quattro i lati uguali.

TEOREMA

**In un rombo,
le diagonali sono
perpendicolari,
e bisettrici
degli angoli
interni.**



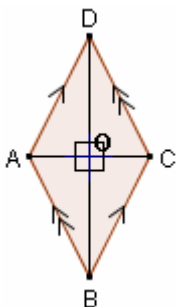
HP
ABCD rombo
($\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$)
TH
a) $AC \perp BD$
b) $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ ecc.

DIMOSTRAZIONE

Il triangolo ADC è isoscele ($\overline{AD} = \overline{CD}$) per HP; ma $\overline{DO}$ è mediana relativa alla base AC, perché in un parallelogrammo le diagonali si tagliano scambievolmente per metà e quindi è $\overline{AO} = \overline{OC}$. Ora, è noto che in un triangolo isoscele la mediana relativa alla base è anche altezza e bisettrice. La tesi è dimostrata.

TEOREMA

**Se un parallelogrammo
ha le diagonali perpendicolari,
allora è un rombo.**



HP
ABCD parallelogrammo
 $AC \perp BD$
TH
ABCD rombo
($\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$)

DIM.

I due triangoli AOD, COD sono uguali per il 1° Criterio in quanto hanno:

$\overline{OD}$ in comune,

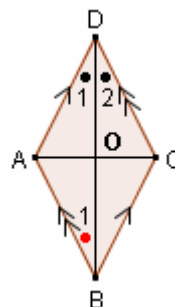
$\overline{AO} = \overline{OC}$ perché in ogni parallelogrammo le diag. si tagliano scambievolmente per metà,

$\hat{DOA} = \hat{DOC} = 90^\circ$ per ipotesi

Si ha perciò $\overline{AD} = \overline{DC}$ e il parallelogrammo ABCD, avendo due lati consecutivi uguali, li avrà tutti e quattro uguali: è dunque un rombo, C.V.D.

TEOREMA

**Se un parallelogrammo ha una diagonale
che fa da bisettrice per uno degli angoli
interni, allora è un rombo.**



HP
ABCD parallelogrammo
 $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$
TH
ABCD rombo
($\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$)

DIM.

$\hat{B}_1 = \hat{D}_2$ = $\hat{D}_1$ = $\hat{B}_2$
alterni interni,
DC $\parallel$ AB
per ipotesi,
trasv. BD

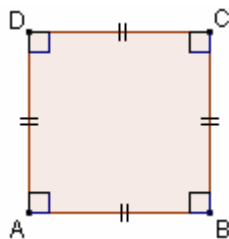
Poiché $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$, il triangolo ABD è isoscele: $\overline{AB} = \overline{AD}$ e perciò il parallelogrammo ABCD, avendo due lati consecutivi uguali, li avrà tutti e 4 uguali.

Si tratta perciò di un rombo, C.V.D.

IL QUADRATO

DEFINIZIONE

Si dice “quadrato”
un quadrilatero
coi quattro angoli retti
e i quattro lati uguali.



$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$$

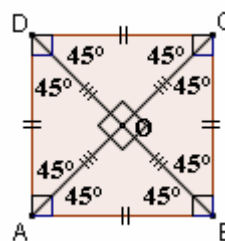
Quindi un quadrato è sia un caso particolare di rettangolo, che un caso particolare di rombo:

è un parallelogramma avente la proprietà di essere contemporaneamente rettangolo e rombo ...

... e pertanto “eredita” tutte le proprietà del rettangolo, più tutte le proprietà del rombo!

Dunque **in un quadrato le diagonali sono**

- uguali
- perpendicolari
- e bisettrici degli angoli



Questa figura
riassume TUTTE
LE BELLE PROPRIETÀ
DEL QUADRATO:
nota gli angoli di 45° ,
i quattro segmenti uguali
 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$,
i quattro triangoli
rettangoli isosceli uguali
 $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCD = \triangle ODA$.

VERO O FALSO? (E' richiesta, ovviamente, la giustificazione della risposta!)

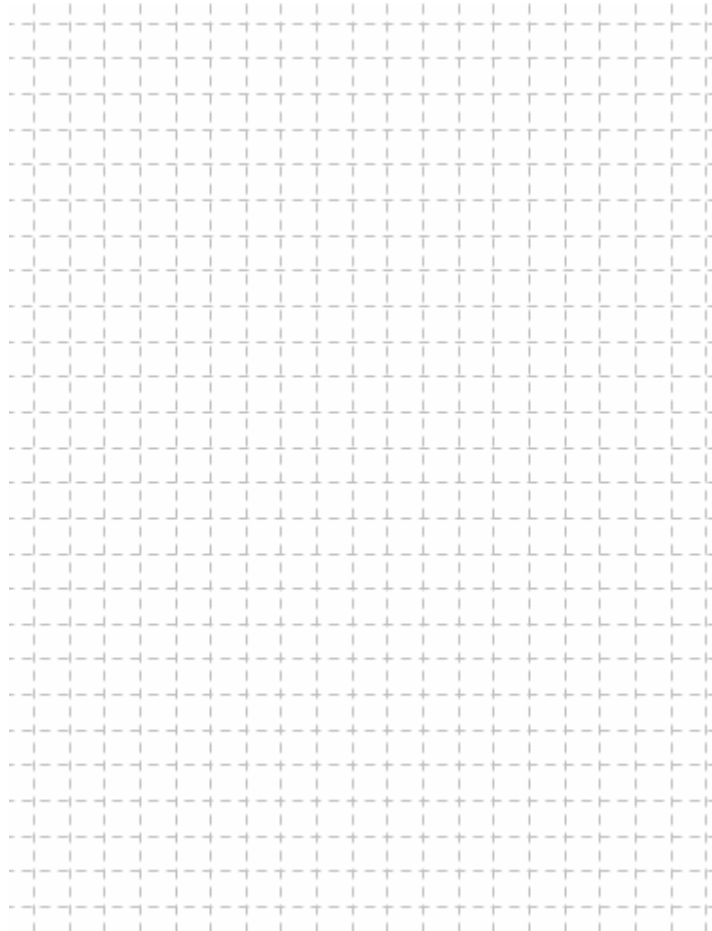
C'è appositamente uno spazio quadrettato nella pagina, per i tuoi disegni. Osserva che

di fronte a un'affermazione di carattere generale,

- ♪ per giustificare la VERITA' occorre fare un **RAGIONAMENTO GENERALE** (è esattamente come dimostrare un teorema);
- ♪ per giustificare la FALSITA', basta riuscire a fornire anche un solo **CONTROESEMPIO**, ossia un caso particolare nel quale l'affermazione non vale.



- 1) Se si sa che un quadrilatero ha due angoli retti, allora si può concludere che è un rettangolo.
- 2) Un quadrilatero in cui le diagonali, tagliandosi reciprocamente, formano quattro segmenti uguali, è un rettangolo.
- 3) Un quadrilatero con le diagonali perpendicolari e che si tagliano scambievolmente per metà è un rombo.
- 4) Un quadrilatero coi quattro lati uguali e le diagonali uguali è un quadrato.
- 5) Un quadrilatero con le diagonali perpendicolari e due lati consecutivi uguali è un rombo.
- 6) Un quadrilatero con due lati paralleli e due angoli retti è un rettangolo.
- 7) Un rettangolo in cui le diagonali sono bisettrici degli angoli, è un quadrato.



Vai alle **GIUSTIFICAZIONI DELLE RISPOSTE:** ➡

RISPOSTE: 1F2V3V4V5F6F7V

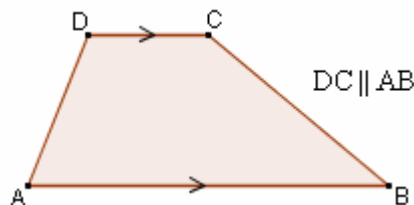
4.5 - TRAPEZI

DEFINIZIONE

Si dice **“trapezio”**
un quadrilatero avente
due lati opposti paralleli
(NOTA).

I due lati paralleli
si dicono **“basi”**
del trapezio,
gli altri due lati
sono detti **“lati obliqui”**.

NOTA - Alcuni testi specificano, nella definizione di trapezio, che “gli altri due lati opposti non devono essere paralleli”. Noi non abbiamo richiesto questa condizione, quindi secondo la nostra impostazione i parallelogrammi ... sono casi particolari di trapezi.

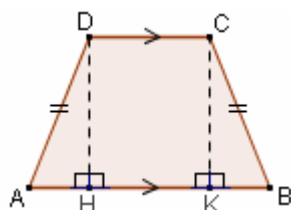


In un trapezio si dice **“altezza”** la distanza fra le rette delle basi (ad esempio, nelle figure sottostanti, $\overline{CK}$)

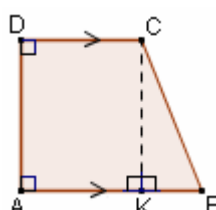
Un trapezio (che non si riduca a un parallelogrammo) si dice ...

... isoscele

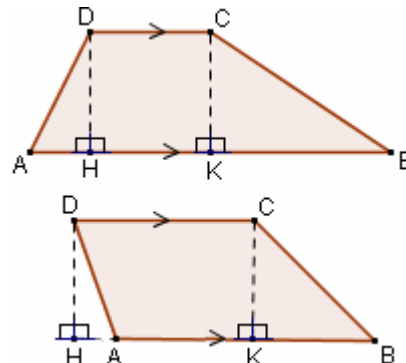
se ha i due lati obliqui
uguali fra loro

**... rettangolo**

se uno dei due lati obliqui
è perpendicolare alle basi

**... scaleno**

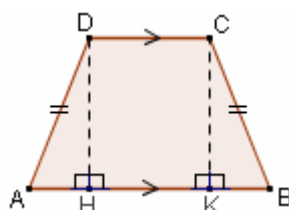
se i due lati obliqui
sono disuguali.



Un'altezza in un trapezio può essere tracciata a partire da qualsiasi punto di una delle rette su cui giacciono le basi. E però abituale (e utile in relazione a svariati problemi) tracciare in particolare quelle che partono dagli estremi della base minore.

TEOREMA

**In un trapezio isoscele,
le proiezioni
dei due lati obliqui
sulla base maggiore
sono uguali.
Inoltre gli angoli adiacenti
a ciascuna base sono uguali.**



HP

ABCD trapezio isoscele
($DC \parallel AB$, $\overline{AD} = \overline{BC}$)
 $DH \perp AB$, $CK \perp AB$

TH

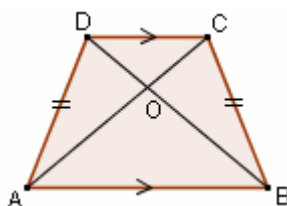
$\overline{AH} = \overline{KB}$; $\hat{A} = \hat{B}$, $\hat{ADC} = \hat{BCD}$

DIM.

Se confrontiamo i due triangoli AHD e BKC, vediamo che sono uguali per il Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli. Segue $\overline{AH} = \overline{KB}$ e $\hat{A} = \hat{B}$. E' poi anche $\hat{ADC} = \hat{BCD}$ perché supplementari di due angoli uguali.

TEOREMA

**In un trapezio isoscele,
le diagonali sono uguali
e si tagliano in parti
rispettivamente uguali.**



HP

ABCD trapezio isoscele
($DC \parallel AB$, $\overline{AD} = \overline{BC}$)

TH

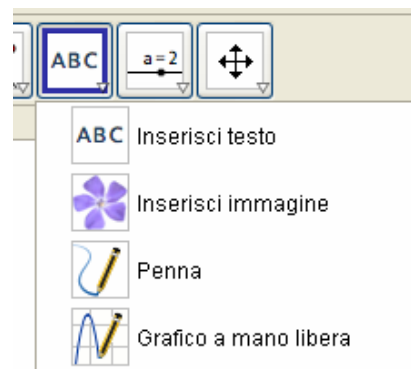
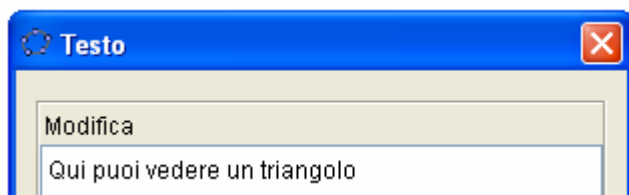
$\overline{AC} = \overline{BD}$; $\overline{AO} = \overline{BO}$, $\overline{CO} = \overline{DO}$

DIM.

Se confrontiamo i due triangoli ADB e ACB, vediamo che sono uguali per il 1° Criterio. Infatti è $\overline{AD} = \overline{BC}$ per ipotesi, $\overline{AB}$ in comune, ed è anche $\hat{A} = \hat{B}$ perché è noto, da un teorema precedente, che in un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascuna base sono uguali. Segue subito $\overline{AC} = \overline{BD}$. Ma segue anche $\hat{ABD} = \hat{BAC}$: dunque il triangolo AOB ha $\overline{AO} = \overline{BO}$. E' infine $\overline{CO} = \overline{DO}$ perché differenze di segmenti uguali: $\overline{CO} = \overline{AC} - \overline{AO} = \overline{BD} - \overline{BO} = \overline{DO}$.

4.6 - TESTI DINAMICI IN GEOGEBRA

Se sul foglio GeoGebra sul quale stai lavorando vuoi inserire un testo, magari per descrivere la figura tracciata, ti basterà semplicemente cliccare sul terzultimo pulsante in alto, poi sull'opzione "Inserisci testo" della tendina che si apre (→) ... dopodiché, quando cliccherai su di una posizione qualunque del foglio da disegno, ti si aprirà una finestrella nella quale potrai inserire il tuo testo:



Cliccando infine su "OK", il testo digitato comparirà sul foglio. →

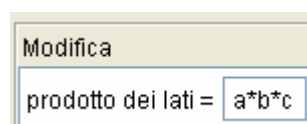
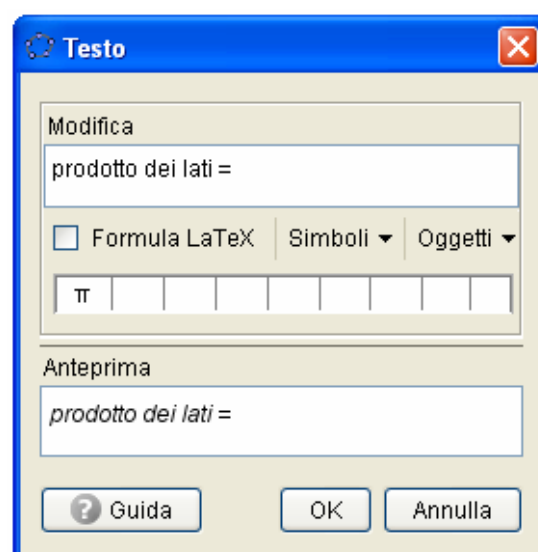
E' molto interessante la possibilità, che GeoGebra offre, di creare testi "dinamici".

Cosa vuol dire? Facciamo un esempio.

Supponi di aver disegnato un triangolo ABC; allora nella finestra "Vista Algebra" saranno automaticamente comparse le misure dei tre lati del triangolo, lati che GeoGebra avrà provveduto a denominare a, b, c (ogni lato viene indicato con la lettera minuscola corrispondente alla lettera maiuscola del vertice opposto). Nella stessa finestra "Algebra" potrai altresì vedere le coordinate cartesiane dei punti A, B, C, e persino l'area del triangolo.

Bene; se ora tu volessi ad esempio far comparire sul foglio il prodotto delle misure dei tre lati del tuo triangolo, potresti ad esempio fare così:

- Attivi, come spiegato sopra, l'opzione "Inserisci testo"
- Nella finestrella che si apre, scrivi *prodotto dei lati* =
- Poi clicchi su "Oggetti"
- e nel menu a tendina che appare scegli "casella vuota"
- Compare un rettangolino all'interno del quale scriverai $a*b*c$ (NOTA)



NOTA:

- ❑ l'asterisco è l'indicatore di moltiplicazione;
- ❑ il simbolo per la divisione è /,
- ❑ quello di potenza è ^
- ❑ e la radice quadrata si indica con *sqrt* (da square root) oppure con $^{(1/2)}$

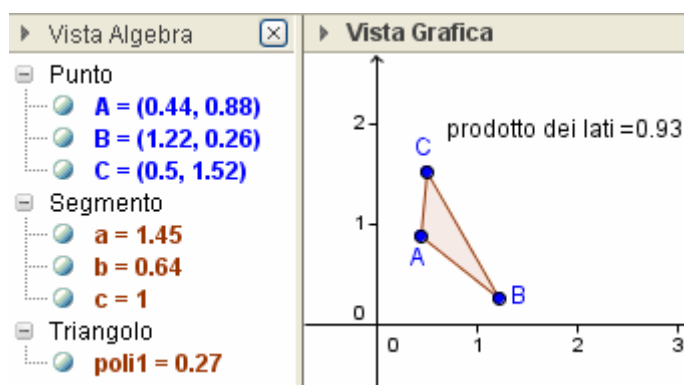
- Cliccando infine su OK il gioco sarà fatto.

L'effetto sarà di far comparire sul foglio da disegno la scritta *prodotto dei lati* = seguita dal VALORE del prodotto delle misure dei tre segmenti a, b, c !!!

OSSERVAZIONE

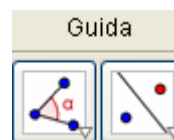
Quello illustrato non è l'unico modo di procedere, per ottenere un "testo dinamico".

La Guida di Geogebra potrà suggerirti delle varianti.



Naturalmente, se la figura viene deformata trascinandone un vertice, il prodotto dei lati muta e questa variazione si potrà vedere in tempo reale sul foglio. L'effetto è assai carino, e tutto ciò consente esperimenti molto vari e istruttivi.

Comunque,
la Guida in linea di GeoGebra
chiarisce, al bisogno, qualsiasi dubbio.



ESERCIZI

- 1) Disegna un pentagono, poi definisci i suoi angoli interni come oggetti GeoGebra. Fai comparire sul foglio da disegno la somma di questi 5 angoli; constaterai che si mantiene costantemente uguale a tre angoli piatti (540°), comunque venga deformato il pentagono, e anche nel caso questo diventi concavo.

- 2) Disegna un triangolo rettangolo, poi i quadrati costruiti sui cateti e il quadrato costruito sull'ipotenusa. Fai comparire sul foglio da disegno

- la misura dell'area di quest'ultimo quadrato,
- e la somma delle misure delle aree dei due quadrati più piccoli.

Questo esercizio è una bella verifica "sperimentale" del teorema di Pitagora:

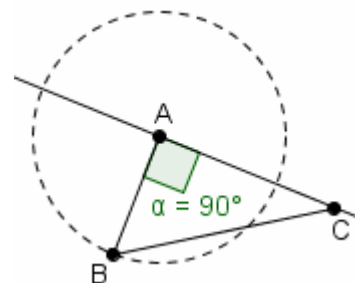
"Guarda che cosa astrusa ... la somma dei quadrati dei cateti mi dà il quadrato dell'ipotenusa".

Vuoi un suggerimento per disegnare correttamente i quadrati?

Usa delle circonferenze!

Mi spiego. Ad esempio, con riferimento alla figura qui a fianco, un modo per riportare sul prolungamento di $\overline{CA}$ un segmento uguale ad $\overline{AB}$, così da poter poi procedere nella costruzione del quadrato di lato $\overline{AB}$, consiste nel tracciare la circonferenza di centro A e passante per B, per poi intersecarla con la retta CA.

E' pur vero che te la potresti cavare MOLTO più rapidamente con il tasto "Poligono regolare" ... Cercalo, e provaci! ☺



- 3) Disegna un parallelogramma e fa calcolare da GeoGebra la sua area in due modi, prendendo come base prima un lato, poi il suo consecutivo.
- 4) Il quadrilatero che ha per vertici i punti medi dei lati di un altro quadrilatero, ha area uguale alla metà dell'area di quest'ultimo. Imposta il foglio GeoGebra in modo da evidenziare questo fatto.
- 5) La bella "formula di Erone" $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ a, b, c misure dei lati; p SEMIperimetro permette di calcolare l'area di un triangolo conoscendone le misure a, b, c dei tre lati. In essa, p indica il SEMIperimetro (metà del perimetro).
Disegna sul tuo foglio di lavoro GeoGebra un triangolo, poi inserisci una scritta dinamica che ne faccia comparire l'area calcolata con Erone. Ovviamente, se avrai fatto le cose per bene, il valore dovrà coincidere con quello che già automaticamente compare nella finestra "Vista Algebra". Occhio alle parentesi: ne dovrai inserire parecchie, tutte tonde, "annidate" una nell'altra in modo opportuno.

4.7 - LUOGHI IN GEOGEBRA

GeoGebra ci permette di disegnare *luoghi geometrici*, tramite uno dei pulsanti che compaiono cliccando sull'icona recante la figura di una perpendicolare [figura qui a destra in alto].

Per disegnare un luogo occorre aver determinato **un punto A "su un oggetto"** [figura qui a destra in basso], ossia vincolato a variare su di una linea (retta, o segmento, o circonferenza ...) e successivamente **un punto B la cui posizione dipenda da A**.

Al variare di A sulla linea, varierà dunque pure la posizione di B ...

... Bene, **il luogo (= l'insieme) delle posizioni assunte da B, allorché A varia sulla linea alla quale è vincolato, si ottiene, con GeoGebra, cliccando sullo strumento "Luogo", poi facendo clic, successivamente, prima su B e poi su A.**

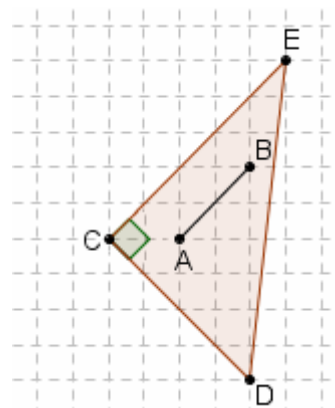


Qualche bell'attività di questo tipo è proposta nel successivo paragrafo di "Aiuto per il ripasso", nonché fra gli esercizi di ricapitolazione (a pagina 349).

4.8 - AIUTO PER IL RIPASSO, ESERCIZI (alcune risposte sono alla fine ... tienile coperte!)

🎵 ALTRI ESERCIZI SUL CAPITOLO 4 A PARTIRE DA PAGINA 342

- 1) Proietta il segmento $\overline{AB}$ nella figura qui a destra sui lati del triangolo CDE (AB e CE sono parallele, l'angolo di vertice C è retto)
- 2) Disegna inoltre una retta, per C, tale che la proiezione del segmento $\overline{CE}$ su questa retta sia uguale alla metà del segmento stesso.
- 3) L'asse della base di un triangolo isoscele passa per il punto di incontro delle altezze relative ai due lati obliqui. Perché?
- 4) Qual è il luogo dei punti P del piano per i quali risulta $\hat{APB} = 90^\circ$, essendo $\overline{AB}$ un segmento fissato? (Indicazione: congiungi P col punto medio M di $\overline{AB}$...)
- 5) Il punto di intersezione degli assi dei due cateti di un triangolo ABC rettangolo in A coincide col punto medio M dell'ipotenusa $\overline{BC}$. Perché?
- 6) Come è possibile determinare in modo preciso un punto, che sia equidistante da 3 punti A, B, C non allineati?
- 7) Dato un triangolo ABC, come è possibile determinare esattamente un punto, al suo interno, che sia equidistante dalle tre rette su cui giacciono i lati del triangolo?



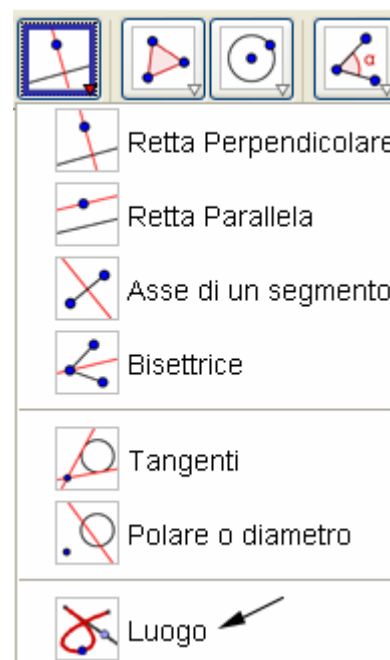
- 8) Con GeoGebra, tracciata una retta d e fissato fuori di essa un punto F, disegna il luogo dei punti equidistanti da d e da F.

I passi sono i seguenti:

- a) parti da H, punto su d
("Nuovo punto", ti avvicini col mouse a d, a un certo momento GeoGebra evidenzierà con tratto più marcato la retta d, e allora tu farai "clic" creando, così, un punto che sarà vincolato ad appartenere a quella retta);
- b) traccia la perpendicolare per H alla retta d;
su questa perpendicolare, determina il punto P equidistante da d e da F, intersecando tale perpendicolare con ... ;
- c) ordina infine a GeoGebra di tracciare il luogo delle posizioni di P, al variare di H.



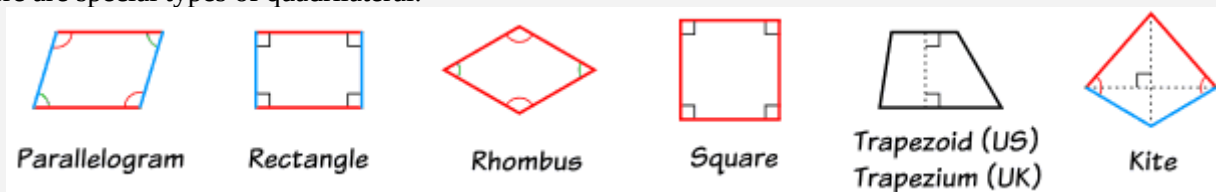
Luogo: Clicca prima sul punto che genera il luogo e poi sul punto che varia su una linea



- 9) Con GeoGebra, disegna due punti F' e F'' .
Traccia un segmento $\overline{AB} > F'F''$, poi la circonferenza di centro F' e raggio $\overline{AB}$.
Su questa circonferenza prendi un punto Q. Congiungi Q con F' e F'' ,
traccia l'asse di $F''Q$ e chiama P il punto in cui tale asse interseca il segmento $\overline{QF'}$.
Spiega perché vale l'uguaglianza $\overline{PF''} = \overline{PQ}$
e perché la somma $\overline{PF'} + \overline{PF''}$ si mantiene costante al variare di Q sulla circonferenza.
Fa sì che GeoGebra tracci il luogo delle posizioni di P, al variare di Q, non prima di aver cercato di prevedere che curva uscirà (va a rivedere la pagina 309, dove vengono presentati alcuni esempi di luoghi geometrici).

Da www.mathsisfun.com

There are special types of quadrilateral:

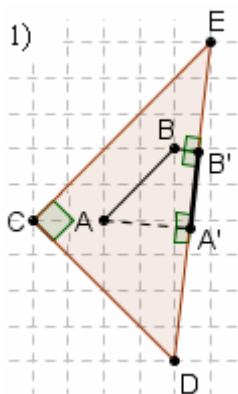


Some types are also included in the definition of other types!

For example a square, rhombus and rectangle are also parallelograms.

- 10) Accertati di conoscere bene le proprietà del parallelogrammo, le condizioni che permettono di concludere con certezza che un dato quadrilatero sia un parallelogrammo, e le relative dimostrazioni.
Di quali proprietà gode il rettangolo, “in più” rispetto ai “normali” parallelogrammi?
E il rombo? E il quadrato?
- 11) Se due segmenti hanno in comune il loro punto medio, e non giacciono sulla stessa retta, si può essere certi che i loro estremi siano vertici di un parallelogrammo?
- 12) Disegna un parallelogrammo ABCD, e per il punto O in cui si tagliano le sue due diagonali traccia una retta che vada a intersecare una coppia di lati opposti in E ed F rispettivamente. Dimostra che O è il punto medio di $\overline{EF}$.
- 13) Disegna un parallelogrammo ABCD e prolunga il lato $\overline{DC}$ di un segmento $\overline{CE} = \overline{DC}$. Dimostra ora che pure ABEC è un parallelogrammo.
- 14) Si traccia una circonferenza con centro nel punto di intersezione di due rette. Spiega perché i 4 punti in cui la circonferenza taglia le due rette sono vertici di un rettangolo. Quel rettangolo, poi, è addirittura un quadrato nel caso in cui le due rette siano ...
- 15) I punti medi dei lati di un quadrato sono vertici di un altro quadrato: dimostrarlo.
- 16) Dimostra che in un trapezio isoscele con la base minore uguale al lato obliquo, le diagonali sono bisettrici degli angoli alla base; e che se in un trapezio le diagonali sono bisettrici degli angoli alla base, allora la base minore è uguale a ciascuno dei lati obliqui.
- 17) In un rettangolo, se si tracciano gli assi dei quattro lati, essi passeranno per lo stesso punto. Come si può giustificare questa affermazione?
- 18) Qual è il luogo dei centri (= punti di intersezione delle diagonali) di tutti i parallelogrammi che hanno per base comune un segmento fissato $\overline{AB}$, e un'altezza fissata?
- 19) Dimostra che in un trapezio isoscele l'asse di una delle basi fa da asse anche per l'altra, e tale asse comune passa per il punto di intersezione delle diagonali del trapezio.
- 20) Dimostra che la proiezione di un segmento su di una retta non può essere maggiore del segmento stesso.
- 21) Da www.algebra.com:
 - a) In parallelogram ABCD, angle $\hat{A}$ is $7x + 4$ (degrees) and angle $\hat{B}$ is 162° . Find the value of x .
 - b) In an isosceles trapezoid, one diagonal is labeled $3x - 8$ and the other diagonal is labeled 22. What is the value of x ?
 - c) The opposite sides of a parallelogram are represented by $2x + 10$ and $3x - 20$. Find the length of the third side represented by $4x - 1$.
 - d) In parallelogram SONG, $SO = 2x + 4$, $ON = 3x - 6$, $NG = 4x - 16$. Explain why SONG is a rhombus.

ALCUNE RISPOSTE



La proiezione di $\overline{AB}$
su $\overline{CD}$ si riduce a un
punto, quella su $\overline{CE}$
è uguale ad $\overline{AB}$.

- 2) La retta deve formare un angolo di 60° con $\overline{CE}$ (2 possibilità) 3) Perché si dimostra che il punto di incontro di suddette altezze è equidistante dagli estremi della base, quindi appartiene all'asse di questa 4) La mediana relativa all'ipotenusa in un triangolo rettangolo è sempre uguale a metà dell'ipotenusa stessa; quindi la lunghezza di PM è fissa e il luogo richiesto è una circonferenza (privata, se si vuole, degli estremi di un diametro) 5) Tale punto medio M è equidistante dagli estremi di AB , perché ... quindi appartiene al suo asse. Analogamente per AC . 6) Si tracciano gli assi di AB e di BC (o di AB e AC , o di AC e BC): la loro intersezione è il punto cercato 7) Si tracciano le bisettrici di due degli angoli interni: la loro intersezione è il punto cercato 8) ... con l'asse del segmento $\overline{HF}$ 9) $\overline{PF'} = \overline{PQ}$ perché ogni punto dell'asse di un segmento è equidistante dagli estremi; $\overline{PF'} + \overline{PF''} = \overline{PF'} + \overline{PQ} = \overline{F'Q} = \text{costante}$ 11) Sì: nel quadrilatero, le diagonali si tagliano scambievolmente per metà, quindi ... 14) Il quadrilatero ha le diagonali che si bisecano scambievolmente, quindi è un parallelogrammo; avendole poi uguali è addirittura un rettangolo. ... perpendicolari 17) Il punto d'intersezione delle diagonali, in un rettangolo, è equidistante da tutti i vertici, quindi appartiene all'asse di ciascun lato 18) E' formato da due rette parallele ... 21) a) $7x + 4 = 180 - 162$; $x = 2$
b) $3x - 8 = 22$; $x = 10$ c) $2x + 10 = 3x - 20 \rightarrow x = 30 \rightarrow 4x - 1 = 4 \cdot 30 - 1 = 119$
d) $SO = NG$; $2x + 4 = 4x - 16$; $x = 10$; $SO = NG = 24$; $ON = 3x - 6 = 30 - 6 = 24$
per cui tutti i lati di questo parallelogrammo sono uguali: in effetti, è un rombo

Cap. 5: FASCIO DI PARALLELE, PUNTI NOTEVOLI

5.1 - FASCIO DI RETTE PARALLELE

DEFINIZIONE

Si dice “fascio di rette parallele” l'insieme delle rette parallele ad una retta data.

La figura mostra alcune fra le parallele di un fascio (che sono, evidentemente, **infinite**: non possiamo disegnarle tutte!)

Nota che non abbiamo messo le **freccette di parallelismo**: ribadiamolo, **non sono obbligatorie**!

TEOREMA sul fascio di parallele (PICCOLO TEOREMA DI TALETE)

Se un fascio di parallele viene tagliato da due trasversali, a segmenti uguali su una trasversale corrispondono segmenti uguali sull'altra.

IPOTESI

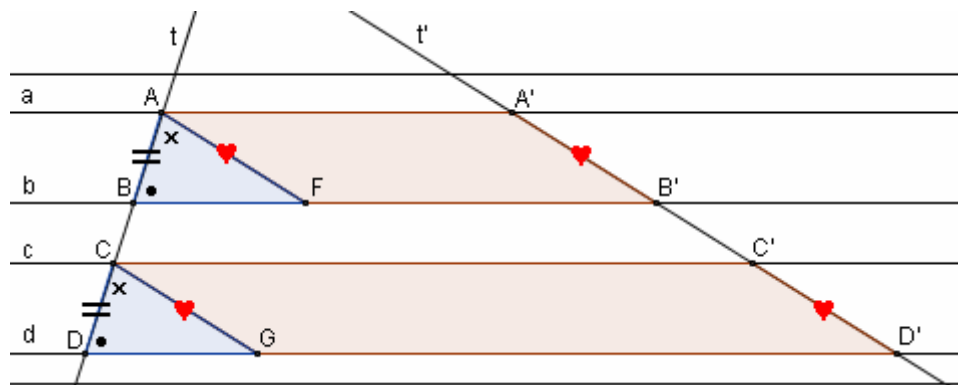
$a \parallel b \parallel c \parallel d$

$AB = CD$

TESI

$A'B' = C'D'$

♥ Da questo capitolo in avanti, di norma **OMETTEREMO IL “CAPPELLO DI SEGMENTO”**



DIMOSTRAZIONE

Conduciamo dai punti A e C le parallele alla retta t' , che taglino rispettivamente la retta b in F e la retta d in G.

Le due rette tracciate, AF e CG, essendo entrambe parallele alla retta t' , sono parallele tra loro.

Confrontando ora i due triangoli AFB, CGD, si può dire che:

$AB = CD$ per ipotesi;

$\widehat{ABF} = \widehat{CDG}$ perché corrispondenti rispetto alle due parallele b, d, tagliate dalla trasversale t;

$\widehat{BAF} = \widehat{DCG}$ perché corrispondenti rispetto alle due parallele AF e CG tagliate da t.

I due triangoli considerati sono perciò uguali per il Secondo Criterio; di conseguenza, è $AF = CG$.

Ma poiché i due quadrilateri $AA'B'F$, $CC'D'G$ sono parallelogrammi,

e in ogni parallelogrammo i lati opposti sono uguali, si avrà $A'B' = AF$ e $C'D' = CG$.

Dalle tre uguaglianze $AF = CG$, $A'B' = AF$, $C'D' = CG$ segue in definitiva $A'B' = AF = CG = C'D'$, c.v.d.

NOTA

Questo enunciato sarà successivamente “inglobato” nel “GRANDE teorema di Talete”, che dirà:

“quando un fascio di parallele viene tagliato da due trasversali, i segmenti staccati dalle parallele sulle trasversali sono proporzionali”.

5.2 - PUNTI MEDI E PARALLELE

TEOREMA

Se per il punto medio di un lato di un triangolo si conduce la parallela ad un altro lato, questa andrà a tagliare in metà il lato rimanente.

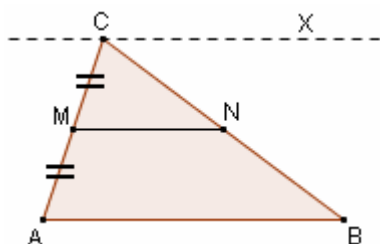
IPOTESI

$$AM = MC$$

$$MN \parallel AB$$

TESI

$$BN = NC$$



DIMOSTRAZIONE

Questo enunciato è facilmente deducibile a partire dal teorema precedente.

Infatti, se per il vertice C si traccia la parallela CX ad AB,

si vede che CX, MN ed AB possono essere pensate come tre parallele di un fascio, rispetto al quale AC e BC sono trasversali.

Ed essendo per ipotesi, sulla prima trasversale, $AM = MC$, sarà dunque, sull'altra trasversale, $BN = NC$, c.v.d.

TEOREMA

In un triangolo, la congiungente i punti medi di due lati è parallela al terzo lato e uguale alla sua metà.

IPOTESI

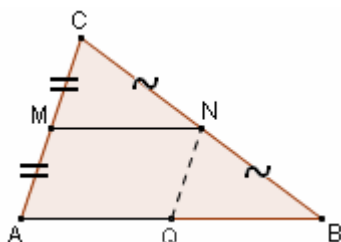
$$AM = MC$$

$$BN = NC$$

TESI

I) $MN \parallel AB$

II) $MN = \frac{1}{2} AB$



DIMOSTRAZIONE

I)

M ed N sono i punti medi dei due lati AC e BC, rispettivamente.

Per far vedere che la congiungente MN è parallela ad AB, ragioniamo nel modo seguente.

Supponiamo di tracciare, a partire dal punto M, la parallela ad AB.

Occhio, noi non sappiamo ancora che questa parallela coincide con MN!!! ...

... ma ci proponiamo di dimostrarlo.

Il fatto è che la parallela ad AB condotta da M deve, per il teorema precedente,

andare a tagliare in metà il lato BC, quindi deve passare per N, poiché N è per ipotesi il punto medio di BC.

Ma ciò significa che la parallela in questione si trova sovrapposta alla retta MN, coincide con MN!

E ciò dimostra dunque che MN è parallela ad AB.

II)

Per dimostrare, ora, che il segmento MN è la metà di AB, tracciamo, per N, la parallela al lato AC, fino ad incontrare AB in Q.

NQ è, quindi, la parallela ad un lato del triangolo ABC, condotta dal punto medio di un altro lato ($BN = NC$ per ipotesi);

in virtù del teorema precedente, tale parallela taglierà in metà il lato rimanente AB.

Si ha pertanto $AQ = QB$.

Ma AQNM è un parallelogrammo, per cui $MN = AQ$; in definitiva, è $MN = AQ = QB = \frac{1}{2} AB$, c.v.d.

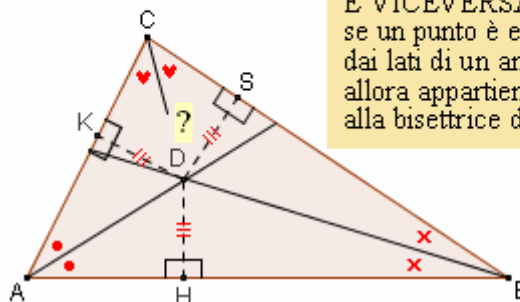
5.3 - PUNTI NOTEVOLI DI UN TRIANGOLO

TEOREMA

In un triangolo, le bisettrici dei tre angoli interni passano tutte per uno stesso punto (tale punto viene chiamato INCENTRO).

La figura mostra:
un triangolo ABC ,
la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$,
la bisettrice dell'angolo $\hat{B}$ e ...
... UN PEZZO della bisettrice dell'angolo $\hat{C}$,
con accanto un bel "punto interrogativo".
Certo, perché la questione che ci poniamo è:
ma questa terza bisettrice, passerà anch'essa
per il punto nel quale si incontrano le prime due?
Mumble, mumble ...

Occorre ricordare che
ogni punto della bisettrice
è equidistante
dai lati dell'angolo,
E VICEVERSA
se un punto è equidistante
dai lati di un angolo,
allora appartiene
alla bisettrice di questo



Dimostrazione

Tracciamo DUE SOLTANTO delle tre bisettrici,
ad esempio quelle dei due angoli $\hat{BAC}$ e $\hat{ABC}$.

Esse si taglieranno certamente (NOTA); chiamiamo, per fissare le idee, D il loro punto di intersezione.
Vogliamo far vedere che anche la rimanente bisettrice (quella dell'angolo $\hat{ACB}$) passa per D.

Tracciamo a tal fine le distanze del punto D dai tre lati del triangolo: siano DH, DK, DS tali distanze.

Poiché D è un punto della bisettrice dell'angolo $\hat{BAC}$, D è equidistante dai lati di tale angolo:
vale a dire, si ha $DK = DH$.

Poiché però D appartiene anche alla bisettrice dell'angolo $\hat{ABC}$,

D è equidistante anche dai lati di quest'ultimo angolo: $DH = DS$.

Ne consegue che $DK = DS$; ma ciò significa che D è equidistante dai lati dell'angolo $\hat{ACB}$,
e pertanto che **D appartiene alla bisettrice dell'angolo $\hat{ACB}$.**

Perciò anche tale terza bisettrice, qualora venisse tracciata completamente, passerebbe per D, c.v.d.

NOTA

Infatti, poiché la somma $\hat{BAC} + \hat{ABC}$ è $< 180^\circ$, a maggior ragione sarà $< 180^\circ$ la somma delle metà di questi due angoli; perciò le due bisettrici tracciate non possono essere parallele, perché non formano con la trasversale AB angoli coniugati interni supplementari.

TEOREMA

In un triangolo, gli assi dei tre lati passano per uno stesso punto (chiamato CIRCOCENTRO).

La figura mostra: un triangolo ABC ,
l'asse del lato AB , l'asse del lato AC e ...

UN PEZZO dell'asse del lato BC ,
affiancato da un bel "punto interrogativo".

Infatti ci stiamo domandando:
ma questo terzo asse, passerà anch'esso
per il punto nel quale si incontrano i primi due?
Chissà???

Dimostrazione

Analoga a quella relativa alle bisettrici.

Tracciamo gli assi dei due lati AB e AC .

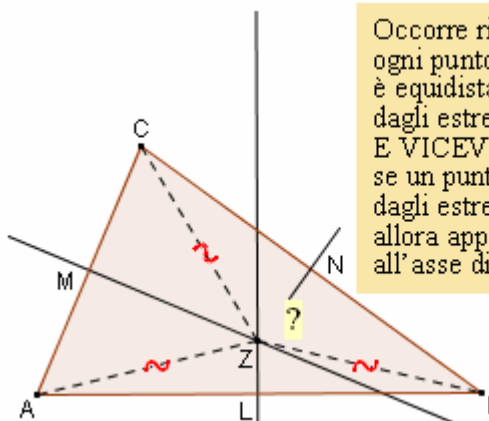
Tali due assi, essendo perpendicolari a due rette che si tagliano, si taglieranno anch'essi (lo si può facilmente dimostrare per assurdo):
sia dunque Z il loro punto d'intersezione.

Z appartiene all'asse di AB , quindi è equidistante dagli estremi di AB ($ZA = ZB$);

ma **Z appartiene pure all'asse di AC , per cui $ZA = ZC$.**

Ne consegue che $ZB = ZC$, quindi che Z è equidistante dagli estremi del segmento BC ,
e pertanto che **Z appartiene all'asse di BC .**

Di conseguenza anche tale TERZO ASSE dovrà passare per il punto Z in cui si tagliavano i primi due, c.v.d.



Occorre ricordare che
ogni punto dell'asse
è equidistante
dagli estremi del segmento,
E VICEVERSA
se un punto è equidistante
dagli estremi di un segmento,
allora appartiene
all'asse di questo

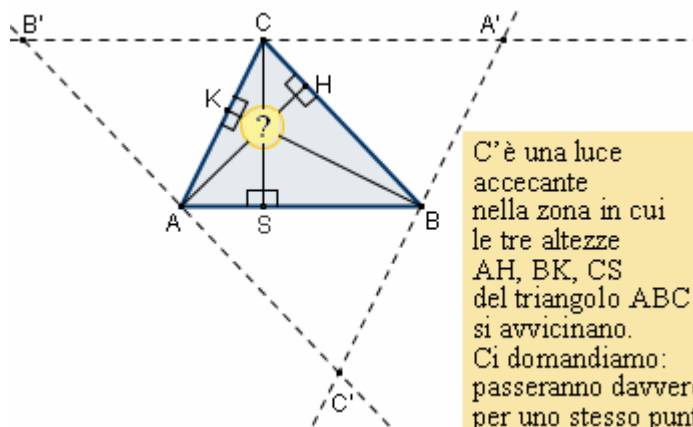
TEOREMA

In un triangolo, le tre altezze passano tutte per uno stesso punto (detto ORTOCENTRO).

Dimostrazione

Sia ABC un triangolo, e siano AH , BK , CS le sue tre altezze. Mi propongo di dimostrare che AH , BK , CS passano tutte per uno stesso punto. A tale scopo, effettuo la seguente costruzione: traccio per i tre vertici A , B , C le parallele ai lati opposti BC , AC , AB , indicando con A' , B' e C' i punti in cui tali rette a due a due si intersecano. Considero poi i quadrilateri $ABCB'$ e $ABA'C$: sono due parallelogrammi, per cui si ha $B'C = AB$ e $AB = CA'$.

Ne consegue che $B'C = CA'$ (cioè, che C è il punto medio del segmento $B'A'$). Inoltre CS , essendo perpendicolare ad AB , è pure perpendicolare alla sua parallela $B'A'$. In definitiva, CS è perpendicolare a $B'A'$ nel suo punto medio, quindi è l'asse di $B'A'$!!! E in modo analogo, si dimostra che AH e BK sono gli assi di $B'C'$ e di $C'A'$ rispettivamente. Ma allora **le tre rette AH , BK e CS , che fanno da altezze per il triangolo di partenza ABC , fanno contemporaneamente da assi per l'altro triangolo $A'B'C'$.** E un teorema già dimostrato ci assicura che in ogni triangolo gli assi dei tre lati passano tutti per un medesimo punto !!!



C' è una luce accecante nella zona in cui le tre altezze AH , BK , CS del triangolo ABC si avvicinano. Ci domandiamo: passeranno davvero per uno stesso punto?

TEOREMA

In un triangolo, le mediane dei tre lati passano tutte per un medesimo punto.

Tale punto (detto BARICENTRO) ha inoltre la proprietà di dividere ciascuna mediana in due parti tali che quella contenente il vertice è doppia dell'altra.

Dimostrazione

Sia ABC un triangolo, siano AM e BN due delle sue tre mediane, e sia O il punto di intersezione di queste (NOTA: che due mediane di un triangolo non possano essere parallele, ma debbano invece necessariamente intersecarsi, è un fatto intuitivo che potrebbe, volendo, essere visto come conseguenza di un assioma, l' "assioma dell'angolo convesso", da noi non esplicitato per brevità).

Vogliamo dimostrare che per O passa anche la mediana rimanente.

La struttura logica della dimostrazione è piuttosto inconsueta.

Prendiamo i punti medi D , E dei segmenti AO e BO .

Nel triangolo ABO , DE è la congiungente i punti medi di due lati, quindi è parallela al terzo lato e uguale alla sua metà: $DE \parallel AB$, $DE = \frac{1}{2} AB$.

Similmente, per lo stesso motivo, nel triangolo ABC avremo $NM \parallel AB$, $NM = \frac{1}{2} AB$.

Quindi DE ed NM , lati opposti del quadrilatero $DEM N$, sono segmenti PARALLELI (in quanto $\parallel$ alla stessa retta AB) e UGUALI (entrambi uguali a metà del segmento AB), per cui **$DEM N$ è un parallelogrammo.** E siccome **in un parallelogrammo le diagonali si tagliano scambievolmente per metà**, avremo $DO = OM$ e $NO = OE$.

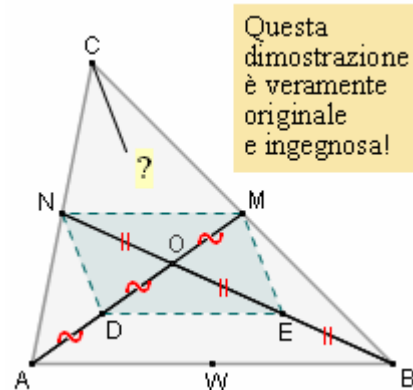
In definitiva, risulta $AD = DO = OM$ e $NO = OE = EB$.

Ma in questo modo abbiamo scoperto qualcosa di molto interessante:

le due mediane tracciate, nell'attraversarsi, si sono tagliate vicendevolmente in due parti, delle quali quella contenente il vertice è doppia dell'altra.

Ora, se al posto delle due mediane AM e BN avessimo considerato UN'ALTRA COPPIA DI MEDIANE, evidentemente avremmo potuto trarre la stessa conclusione! E quindi, **se andassimo ora a disegnare la terza mediana, quest'ultima, nell'attraversare la mediana AM , la dividerebbe in due parti, tali che quella contenente il vertice sia doppia dell'altra.**

Ma allora la mediana che parte dal vertice C dovrà necessariamente passare anch'essa per O , perché è evidente (e sarebbe dimostrabile con facilità) che non esiste alcun altro punto, oltre al punto O , dotato della proprietà di dividere AM in due parti delle quali quella contenente A sia doppia dell'altra.

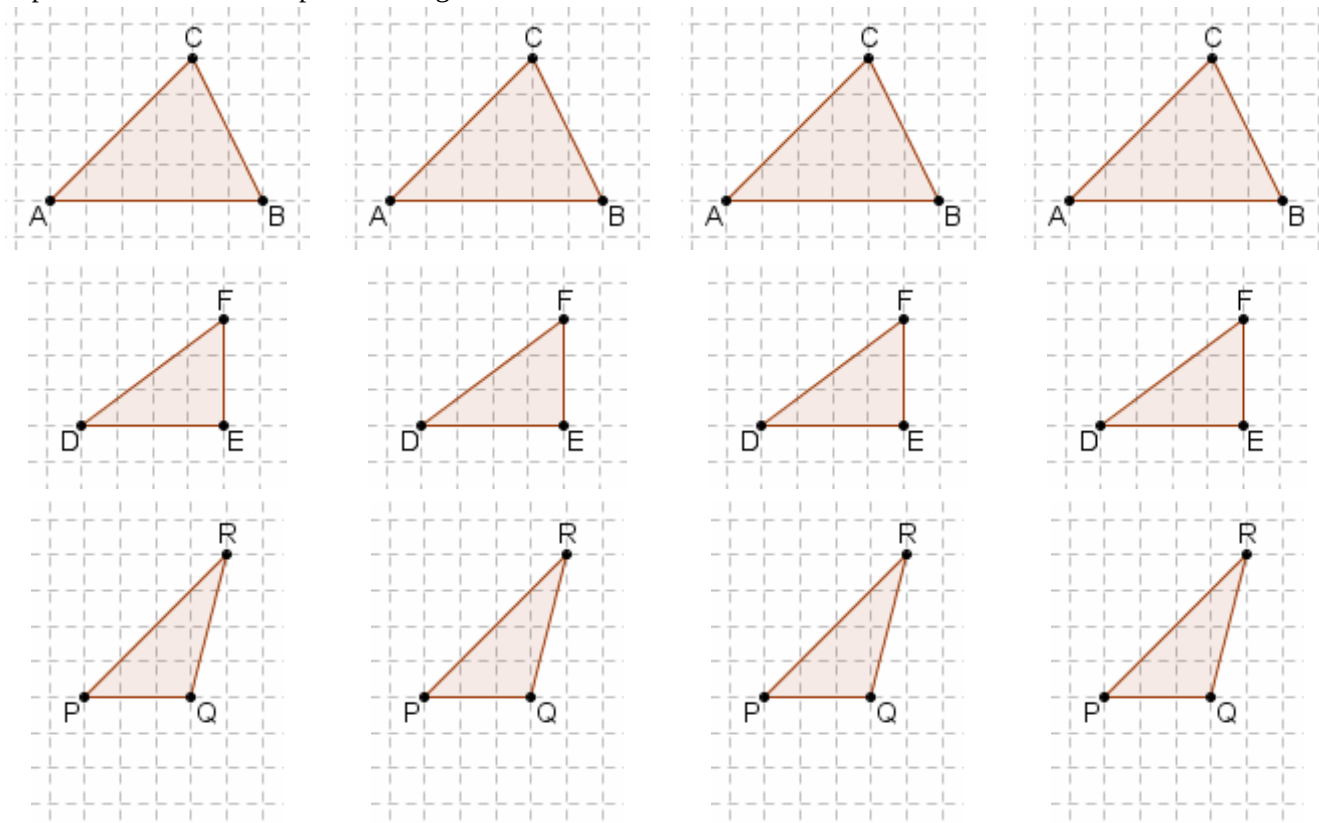


Questa dimostrazione è veramente originale e ingegnosa!

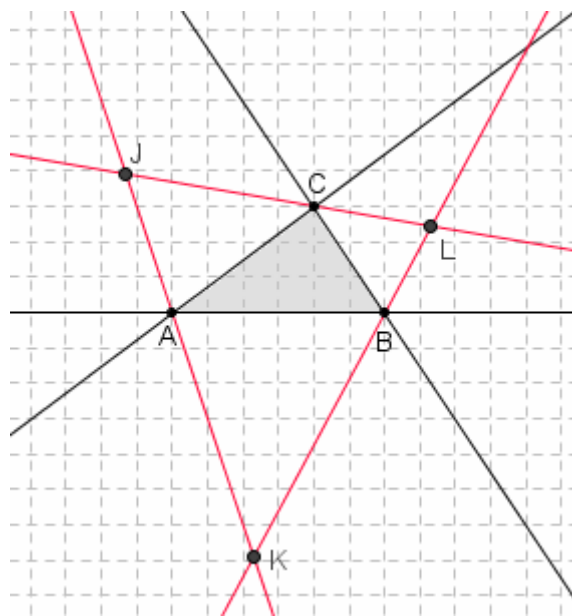
5.4 - AIUTO PER IL RIPASSO, ESERCIZI (alcune risposte sono alla fine ... tienile coperte!)

- Quali fra i punti notevoli seguenti sono SEMPRE interni al triangolo?
a) incentro b) circocentro c) ortocentro d) baricentro
- Serviti delle figure seguenti per trovare, in matita, l'incentro, poi il circocentro, poi l'ortocentro, poi il baricentro dei rispettivi triangoli:

🎵 **ALTRI ESERCIZI**
SUL CAPITOLO 5
A PARTIRE DA PAGINA 346



- Un triangolo ha 3 angoli interni e 6 esterni (si dice "angolo esterno", in un poligono, un angolo adiacente ad un angolo interno). Gli angoli esterni sono a due a due uguali in quanto opposti al vertice, e quando due angoli sono opposti al vertice, per questa coppia di angoli si può parlare di "retta bisettrice", perché la semiretta che fa da bisettrice per uno di essi, se prolungata dalla parte del vertice, va a tagliare in due parti uguali anche l'altro (dimostralo: è facilissimo!)
Ciò premesso, la figura qui a fianco riportata mostra un triangolo e i suoi 3 *ex-centri*. Un *ex-centro* è il punto di intersezione delle due rette che sono bisettrici di due coppie di angoli esterni opposti al vertice. Serviti della figura per dimostrare che passa per ogni *ex-centro* anche la bisettrice di uno degli angoli interni, quindi che per ogni *ex-centro* passano TRE bisettrici.



- Dimostra che
 - i punti medi dei lati di un rettangolo sono vertici di un rombo
 - i punti medi dei lati di un rombo sono vertici di un rettangolo
 - le parallele alle diagonali di un rettangolo passanti per i vertici formano, incrociandosi, un rombo
 - le parallele alle diagonali di un rombo passanti per i vertici formano, incrociandosi, un rettangolo.
- Dimostra che in un triangolo equilatero, incentro, circocentro, ortocentro e baricentro coincidono.
- Il baricentro divide ciascuna mediana in due parti tali che la più piccola è ... dell'intera mediana. L'incentro è equidistante da ... mentre il circocentro è equidistante da ...

Dal sito www-groups.dcs.st-and.ac.uk riportiamo qualche stralcio della biografia di

Talete di Mileto

... Thales seems to be the first known Greek philosopher, scientist and mathematician although his occupation was that of an engineer. ... However, none of his writings survives so it is difficult to determine his views or to be certain about his mathematical discoveries.

Indeed it is unclear whether he wrote any works at all ...

Proclus, the last major Greek philosopher, who lived around 450 AD, wrote:

[Thales] first went to Egypt and thence introduced this study [geometry] into Greece.

He discovered many propositions himself, and instructed his successors in the principles underlying many others; his method of attacking problems had greater generality in some cases and was more in the nature of simple inspection and observation in other cases.

There is a difficulty in writing about Thales and others from a similar period. Although there are numerous references to Thales which would enable us to reconstruct quite a number of details, the sources must be treated with care since it was the habit of the time to credit famous men with discoveries they did not make.

... Certainly Thales was a figure of enormous prestige, being the only philosopher before Socrates to be among the Seven Sages. ...

It is reported that Thales predicted an eclipse of the Sun in 585 BC. The cycle of about 19 years for eclipses of the Moon was well known at this time but the cycle for eclipses of the Sun was harder to spot since eclipses were visible at different places on Earth. Thales's prediction of the 585 BC eclipse was probably a guess based on the knowledge that an eclipse around that time was possible. ...

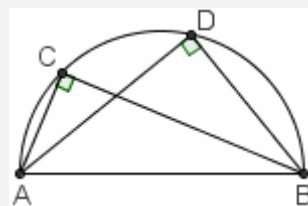
There are several accounts of how Thales measured the height of pyramids.

Diogenes Laertius ... : ***[Thales] even succeeded in measuring the pyramids by observation of the length of their shadow at the moment when our shadows are equal to our own height.***

This appears to contain no subtle geometrical knowledge, merely an empirical observation that at the instant when the length of the shadow of one object coincides with its height, then the same will be true for all other objects. ... Plutarch however recounts the story in a form which, if accurate, would mean that Thales was getting close to the idea of similar triangles ...

Thales is credited with five theorems of elementary geometry:

- ❑ A circle is bisected by any diameter.
- ❑ The base angles of an isosceles triangle are equal.
- ❑ The angles between two intersecting straight lines are equal.
- ❑ Two triangles are congruent if they have two angles and one side equal.
- ❑ An angle in a semicircle (figura qui a fianco) is a right angle.



... Our knowledge of the philosophy of Thales is due to Aristotle who wrote in his Metaphysics:

Thales of Miletus taught that 'all things are water'.

Thales believed that the Earth floats on water and all things come to be from water. For him the Earth was a flat disc floating on an infinite ocean. ... Again the importance of Thales' idea is that he is the first recorded person who tried to explain such phenomena by rational rather than by supernatural means. ...

Sembra proprio che Talete fosse dotato di un fine senso dell'umorismo.

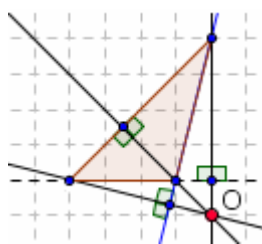
Tre citazioni a questo proposito dalle "Vite dei filosofi" di Diogene Laerzio:

- ❑ "... Altri dicono che non era sposato e che aveva adottato il figlio di una sorella. Avendogli qualcuno domandato perché non volesse aver figli, rispose: 'Per l'amore che porto ai piccoli'. Narrano poi che alla madre che voleva spingerlo a sposarsi rispondesse: 'Non è ancora tempo'; e più avanti in età, alle sue insistenze, replicasse: 'Non è più tempo' "
- ❑ "... Diceva che tra la morte e la vita non v'è alcuna differenza. Qualcuno gli obiettò: 'E perché non muori, allora?'. E Talete: 'Proprio perché non c'è nessuna differenza' "
- ❑ "A chi chiedeva che cosa fosse nato prima, la notte o il giorno, rispondeva: 'La notte, ... un giorno prima.' "

ALCUNE RISPOSTE

1) a, d

2) In un triangolo rettangolo, l'ortocentro coincide col vertice dell'angolo retto e il circocentro col punto medio dell'ipotenusa.
L'ortocentro O di PQR: →

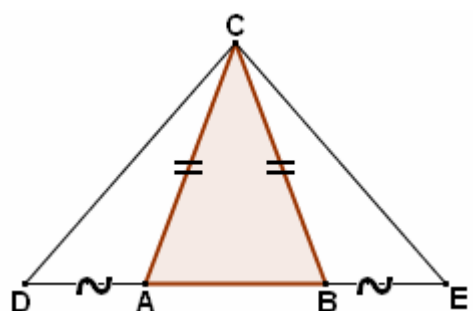


- 3) Ogni punto della bisettrice di un angolo è equidistante dai lati dell'angolo stesso ... e viceversa, se un punto di un angolo è equidistante dai lati di quell'angolo, allora appartiene alla sua bisettrice ...
- 6) ... 1/3 dell'intera mediana;
... dalle tre rette dei lati del triangolo;
... dai tre vertici del triangolo

GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 2

1) (Esercizio svolto)

Sui due prolungamenti della base $\overline{AB}$ di un triangolo isoscele ABC si prendano due segmenti uguali $\overline{AD} = \overline{BE}$.
Dimostrare che il triangolo CDE è anch'esso isoscele.



Si segna SUBITO sul disegno ciò che è noto per IPOTESI !!!

HP
(=IPOTESI)

$$\overline{CA} = \overline{CB}$$

$$\overline{AD} = \overline{BE}$$

(NOTA)

TH
(=TESI)

$$\overline{CD} = \overline{CE}$$

NOTA

A rigore, occorrerebbe anche specificare, nell'ipotesi, che $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ si trovano sui PROLUNGAMENTI di $\overline{AB}$.

Per indicare questo, si potrebbe scrivere, ad esempio, $\widehat{DAB} = \widehat{ABE} = 180^\circ$.

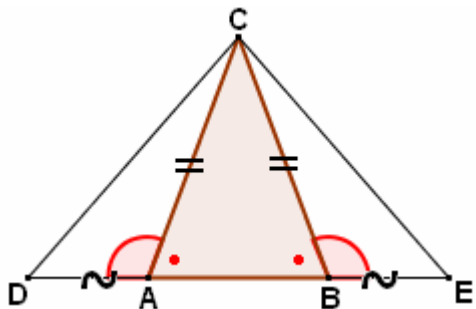
Tuttavia, per brevità, si possono lasciare sottintese precisazioni di questo genere.

DIMOSTRAZIONE

Innanzitutto, poiché per HP il triangolo ABC è isoscele sulla base $\overline{AB}$, si ha $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$ (in un triangolo isoscele, gli angoli alla base sono uguali).

Allora i due angoli $\widehat{CAD}$, $\widehat{CBE}$ sono uguali perché supplementari di angoli uguali:

$$\widehat{CAD} = 180^\circ - \widehat{CAB} = 180^\circ - \widehat{CBA} = \widehat{CBE}.$$



Convieni segnare sul disegno, se si ritiene possa essere utile, ciò che progressivamente viene dedotto!!!

Confrontiamo ora i due triangoli CAD , CBE .

Essi hanno:

$$\overline{CA} = \overline{CB} \text{ per HP;}$$

$$\overline{AD} = \overline{BE} \text{ per HP;}$$

$$\widehat{CAD} = \widehat{CBE}$$

quindi sono uguali per il 1° Criterio.

In particolare, avranno $\overline{CD} = \overline{CE}$,
C.V.D.

(ossia: Come Volevasi Dimostrare)

Ti consiglio di
scrivere sempre l'ipotesi e la tesi.

**SUL DISEGNO, TI CONVERRÀ'
SEGNARE IMMEDIATAMENTE
CIO' CHE E' NOTO PER IPOTESI**



(marcherai con simboli uguali i segmenti e gli angoli che sai per ipotesi essere uguali, indicherai con quadratini gli angoli che sai per ipotesi essere retti, ecc. ecc.)

La tesi, invece, è meglio non segnlarla:
essa è il tuo obiettivo ultimo,
esprime qualcosa che non "possiedi" ancora,
qualcosa che ti è richiesto di "conquistare"
con ragionamenti vari.

Soltanto al termine potrai finalmente dire:
Evviva! Ci sono riuscito! La tesi è dimostrata!
E a questo punto, se lo desideri,
la rimarcherai vittoriosamente in figura.

**APPENA DEDUCI QUALCOSA
CHE TI SEMBRA RILEVANTE,
EVIDENZIALO SUBITO IN MATITA!**



Nel nostro esempio, è molto importante marcare (lo abbiamo fatto con la coppia di pallini) che sono uguali gli angoli alla base del triangolo isoscele ABC , perché vederne **raffigurata visivamente** l'uguaglianza è una "spinta" a dedurre l'uguaglianza dei due angoli al loro fianco (uguali perché supplementari di angoli uguali: e noi lo andiamo immediatamente a indicare coi due archetti). Adesso, il fatto che i triangoli CAD e CBE siano uguali ci è suggerito dal disegno! (2 lati e l'angolo compreso, 1° Criterio)

Un'ultima raccomandazione:
**evita accuratamente di tracciare una figura
che esprima un caso particolare.**



Nel nostro esempio, sarebbe un caso particolare se il triangolo ABC venisse disegnato equilatero, oppure se i due prolungamenti della base fossero presi uguali ai lati obliqui, ecc.)

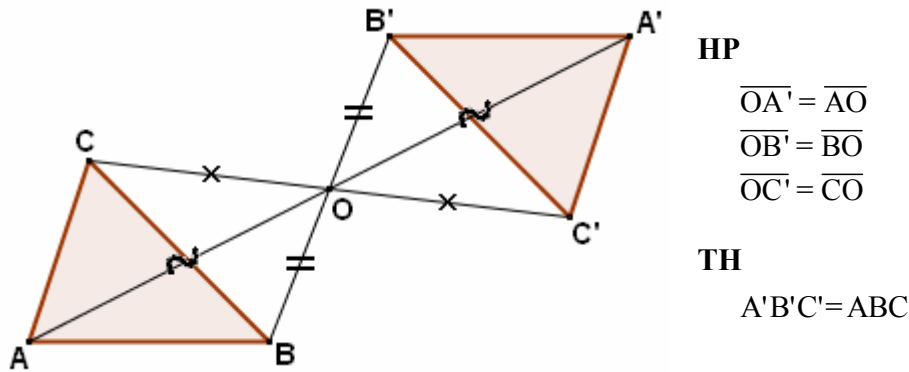
Beninteso: il teorema, essendo valido sempre, mantiene la sua validità anche nei vari casi particolari, ma utilizzando una figura che esprima un caso particolare c'è il pericolo di essere indotti a fare dei ragionamenti che "funzionano", appunto, solo in quel caso specifico, ma non in generale.

2) (Esercizio svolto)

Dato un triangolo ABC e un punto qualunque O fuori di esso,
si traccino i tre segmenti AO , BO e CO

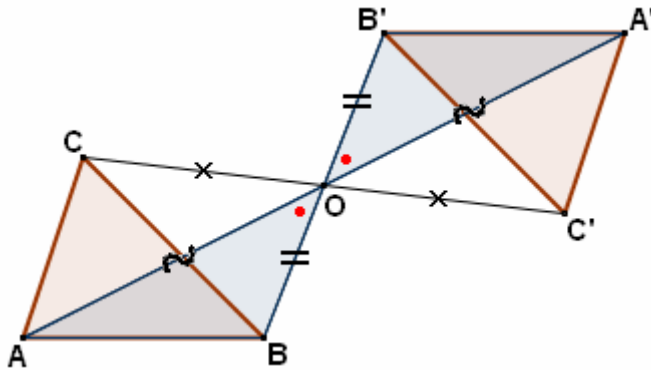
e li si prolunghi, rispettivamente, di tre segmenti $\overline{OA'} = \overline{AO}$, $\overline{OB'} = \overline{BO}$, $\overline{OC'} = \overline{CO}$.

- Dimostrare che il triangolo $A'B'C'$ è uguale al triangolo ABC
- Questo teorema resterebbe valido anche se il punto O fosse interno al triangolo ABC ?



a) DIMOSTRAZIONE

Confrontiamo i due triangoli OAB , $OA'B'$.

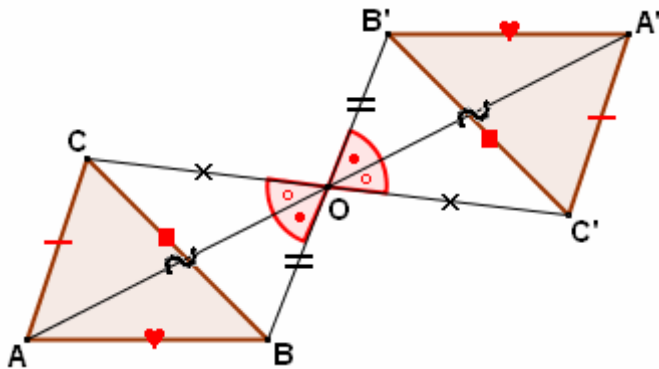


Essi hanno: $\overline{AO} = \overline{OA'}$ per HP; $\overline{BO} = \overline{OB'}$ per HP; $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ perché opposti al vertice quindi sono uguali per il 1° Criterio. In particolare, avranno $\boxed{\overline{AB} = \overline{A'B'}}$.

Allo stesso modo,

confrontando i due triangoli OAC e $OA'C'$, si dimostra che $\boxed{\overline{AC} = \overline{A'C'}}$

e confrontando i due triangoli OBC e $OB'C'$, si dimostra che $\boxed{\overline{BC} = \overline{B'C'}}$



A questo punto, andando a confrontare i due triangoli ABC e $A'B'C'$, possiamo dire che sono uguali per il 3° Criterio (hanno infatti i tre lati rispettivamente uguali).

La tesi è dimostrata.

- Sì, il teorema resta valido anche se O è interno ad ABC , e la dimostrazione è identica.

SE VUOI LAVORARE BENE ... RICAPITOLIAMO:

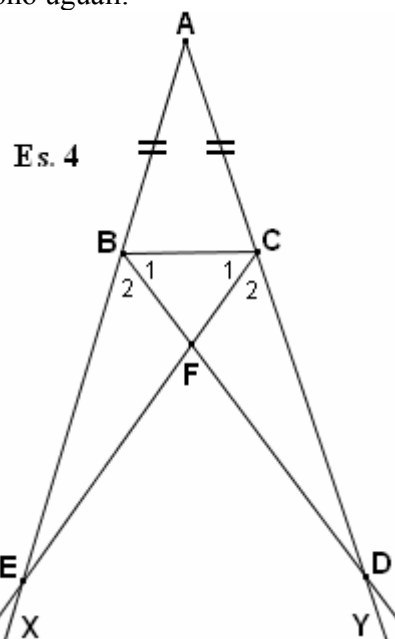
- ♪ **Segna sempre sulla figura ciò che dice l'ipotesi**
(marcando con simboli uguali i segmenti o gli angoli che si sa essere uguali, indicando con un quadratino gli angoli che si sa essere retti, ecc. ecc.)
- ♪ **... E quando riesci a dedurre qualche affermazione intermedia interessante, ti conviene sempre segnare anche quella sul disegno prima di proseguire!**
- ♪ **Evita accuratamente di tracciare una figura che esprima un caso particolare**
(ad es., se l'ipotesi parla di un triangolo isoscele, meglio non disegnarlo equilatero; se parla di un angolo generico, meglio non farlo retto, ecc.)

3) Dimostra che in un triangolo isoscele le mediane relative ai lati uguali sono uguali.

4) **(Vedi figura)**

In un triangolo isoscele ABC , di base $\overline{BC}$,
si traccino i prolungamenti BX e CY (NOTA)
dei due lati obliqui $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e poi si tracci:
la bisettrice dell'angolo $\widehat{XBC}$, che tagli la semiretta CY in D ,
e la bisettrice dell'angolo $\widehat{YCB}$, che tagli BX in E .
Dimostrare che $\overline{BD} = \overline{CE}$ e che, detto F
il punto di intersezione di BD e CE , è pure $\overline{BF} = \overline{CF}$.

NOTA: I punti X e Y servono semplicemente per dare un nome alle due semirette che rappresentano i prolungamenti dei due lati obliqui: pertanto, tali punti X e Y non vanno presi in posizioni particolari, ma possono stare, su quelle semirette, dove si desidera.

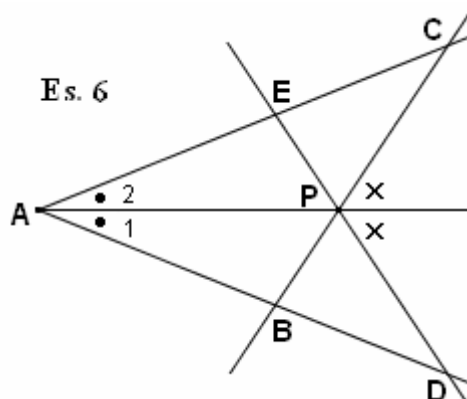


5) Se due triangoli hanno rispettivamente uguali
due lati e la mediana relativa a uno di essi,
allora sono uguali (all'inizio della frase
è sottinteso, evidentemente: "Dimostrare che ...").

6) **(Vedi figura)**

Per un punto P della bisettrice di un angolo $\widehat{A}$ si tracciano
due rette formanti angoli uguali con la bisettrice stessa
(sono quelli indicati con le crocette in figura).
Una di queste rette taglia i lati dell'angolo
rispettivamente in B e in C , l'altra taglia i medesimi lati
rispettivamente in D e in E . Dimostrare che si ha:

$$\text{I) } \overline{PB} = \overline{PE} \quad \text{II) } \overline{PD} = \overline{PC} \quad \text{III) } \overline{BC} = \overline{DE}$$



7) Il quadrilatero $ABCD$ è un "**deltoide**", ossia ha
la proprietà di avere due lati consecutivi uguali fra loro,
e gli altri due pure uguali fra loro: $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{CD} = \overline{DA}$.
Dimostra che le sue diagonali sono perpendicolari.

8) Dimostra che se in un triangolo una mediana è anche altezza, allora il triangolo è isoscele.

9) Dimostra che se in un triangolo una bisettrice è anche altezza, allora il triangolo è isoscele.

10) Dimostra che se in un triangolo una bisettrice è anche mediana, allora il triangolo è isoscele
[Questo teorema, rispetto ai due precedenti, è più difficile da dimostrare,
perché non si può applicare nessuno dei tre Criteri di uguaglianza.

Ti do un'indicazione. Sia ABC il triangolo, e sia CM la mediana-bisettrice.

Prolunga CM dalla parte di M di un segmento $\overline{MD} = \overline{CM}$, poi congiungi D con A e con B ;
fai quindi delle considerazioni sui vari triangoli che compaiono ora in figura ...]

11) Dimostra che in due triangoli uguali le mediane relative a due lati rispettivamente uguali sono uguali.

12) Dimostra che in due triangoli uguali le bisettrici relative a due lati rispettivamente uguali sono uguali.

13) Spiega perché, a questo livello dello studio della Geometria, se tentiamo di dimostrare che

"in due triangoli uguali le altezze relative a due lati rispettivamente uguali sono uguali"

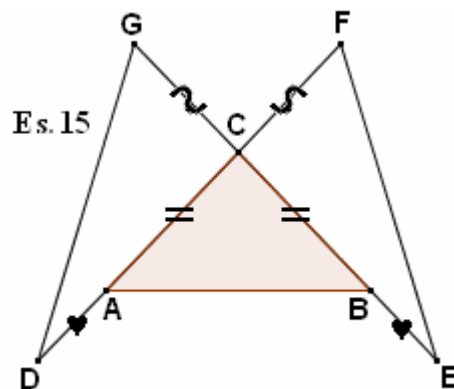
non ci può venire in aiuto nessuno dei tre Criteri di Uguaglianza dei Triangoli sin qui studiati.

... Ci si può però riuscire prolungando ogni altezza di un segmento ad essa uguale e congiungendo ...

14) In un triangolo isoscele le mediane relative ai lati uguali si tagliano in parti rispettivamente uguali.

15) ☼ (Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 332)

E' dato il triangolo ABC, isoscele sulla base $\overline{AB}$.
Si prolunghino i due lati obliqui $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$:
dalla parte della base, di due segmenti uguali $\overline{AD} = \overline{BE}$,
e dalla parte del vertice di due altri segmenti uguali fra loro
(ma non necessariamente coi precedenti) $\overline{CF} = \overline{CG}$.
Dimostrare che le due congiungenti $\overline{DG}$, $\overline{EF}$ sono uguali.

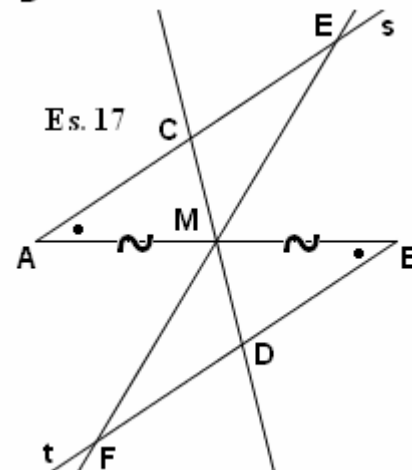


16) ☼ (Dimostrazione guidata a pag. 332)

Dimostrare che congiungendo i punti medi
dei tre lati di un triangolo isoscele,
si ottiene un nuovo triangolo isoscele.

17) ☼ (Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 332)

Sia $\overline{AB}$ un segmento e M il suo punto medio.
Da A e da B, da parte opposta rispetto ad AB,
si traccino due semirette, s e t,
che formino angoli uguali con AB.
Per M si traccino due rette qualsiasi,
la prima delle quali tagli s in C e t in D,
la seconda tagli s in E e t in F.
Dimostrare che:
 $\overline{AC} = \overline{BD}$; $\overline{CE} = \overline{DF}$

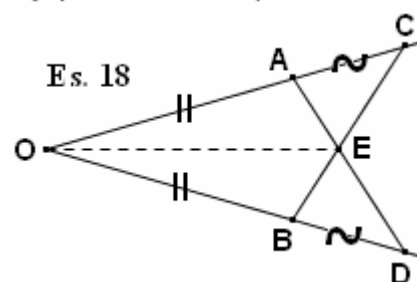


18) ☼ (Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 333)

Sui lati di un angolo qualunque di vertice O
si prendano rispettivamente i segmenti
 $\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{OC} = \overline{OD}$;
si indichi con E il punto in cui si intersecano
le congiungenti $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.
Dimostrare che:

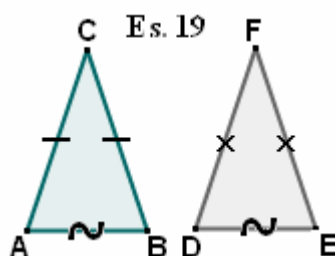
I) $\overline{AD} = \overline{BC}$ II) $\overline{EA} = \overline{EB}$

III) il punto E sta sulla bisettrice dell'angolo dato $\hat{O}$.



19) ☼ (Vedi figura;
dim. guidata a pag. 333)

Due triangoli isosceli
sono uguali
se hanno uguali
le basi
e i perimetri



HP $\overline{CA} = \overline{CB}$, $\overline{FD} = \overline{FE}$;
 $\overline{AB} = \overline{DE}$; $2p(ABC) = 2p(DEF)$

TH $ABC = DEF$

♥ Il simbolo più usato
per indicare il perimetro è $2p$;
 p si riserva invece di norma al
SEMIperimetro (= $\frac{1}{2}$ del perimetro).
Il perché è spiegato a pag. 335.

20) ☼ (Dimostrazione guidata a pag. 333)

Sui lati $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ del triangolo equilatero ABC si prendano tre segmenti uguali $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$.
Dimostrare che il triangolo DEF è pure equilatero.

21) Se in un triangolo isoscele ABC si tracciano le bisettrici dei due angoli alla base $\hat{B}$ e $\hat{C}$,
allora, detto D il loro punto di incontro, la congiungente DA biseca l'angolo al vertice
(per "bisecare" si intende "tagliare in due parti uguali")

22) Se un quadrilatero ABCD ha i lati opposti a due a due uguali ($\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$) allora ha pure
gli angoli opposti a due a due uguali ($\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$): dimostrarlo (Psst: occorre tracciare una ...)

23) Il teorema seguente appare a prima vista simile al 5), ma è decisamente più complicato.

Dimostra che se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e la mediana relativa al terzo lato,
allora sono uguali. [Indicazione: prolunga ciascuna delle due mediane di un segmento ad essa uguale;
congiungi l'estremo libero di ciascun prolungamento con le estremità del lato cui la
mediana si riferisce; e utilizza, in successione: il 1° Criterio, il 3°, nuovamente il 1°]

☀ **DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)**

15) DIM.

⇒ I due triangoli DCG ed ECF hanno:

$$\begin{aligned}\overline{CG} &= \overline{CF} \text{ per } \dots\dots\dots; \\ \widehat{DCG} &= \widehat{ECF} \text{ perché } \dots\dots\dots; \\ \overline{CD} &= \overline{CE} \text{ perché } \dots\dots\dots \text{ (NOTA).}\end{aligned}$$

Quindi essi sono uguali per il ;
in particolare, $\overline{DG} = \overline{EF}$, c.v.d.

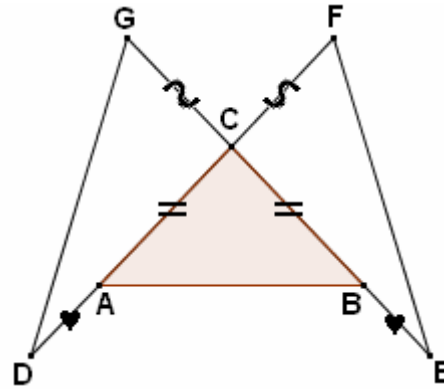
NOTA

Se si vuole **illustrare più in dettaglio**
quest'ultima affermazione, si potrà utilizzare:

a) una **catena**: $\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD} = \dots\dots + \dots\dots = \overline{CE}$

b) oppure una **somma membro a membro di due uguaglianze**:

$$\begin{array}{r} \overline{CA} = \dots\dots \\ \overline{AD} = \dots\dots \\ \hline \overline{CA + AD} = \dots\dots + \dots\dots \\ \overline{CD} \qquad \qquad \overline{CE} \end{array}$$



HP

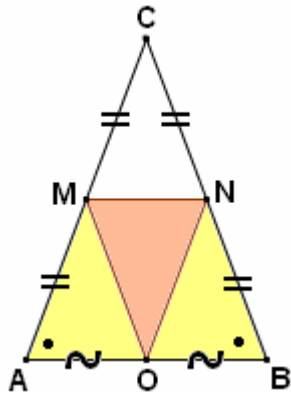
$$\begin{aligned}\overline{CA} &= \overline{CB} \\ \overline{AD} &= \overline{BE} \\ \overline{CF} &= \overline{CG}\end{aligned}$$

TH

$$\overline{DG} = \overline{EF}$$

16)

⇒



HP

$$\overline{AC} = \overline{BC}$$

$$\begin{array}{l} \overline{AM} = \overline{MC} \\ \overline{BN} = \overline{NC} \end{array} \text{ (NOTA)}$$

$$\overline{AO} = \overline{OB}$$

TH

$$\overline{OM} = \overline{ON}$$

NOTA :
sulla figura, abbiamo segnato direttamente
 $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{BN} = \overline{NC}$, "anticipando"
il semplice ragionamento secondo cui
metà di segmenti uguali sono uguali

DIM. Osserviamo innanzitutto che i 4 segmenti $\overline{AM}$, $\overline{MC}$, $\overline{BN}$, $\overline{NC}$
sono **TUTTI uguali fra loro (e non soltanto uguali a due a due)**, perché

$$\text{In dettaglio, infatti, possiamo scrivere } \overline{AM} = \overline{MC} = \frac{1}{2} \dots\dots = \frac{1}{2} \dots\dots = \overline{BN} = \overline{NC}.$$

Confrontiamo ora i due triangoli AOM e BON.

Essi hanno: $\overline{AM} = \overline{BN}$; $\overline{AO} = \overline{OB}$ per ; $\widehat{A} = \widehat{B}$ perché

Quindi AOM e BON sono uguali per il , e in particolare $\overline{OM} = \overline{ON}$, c.v.d.

17) DIM.

⇒ I) Confrontiamo i due triangoli AMC e BMD:

$\widehat{A} = \widehat{B}$ per ;
 $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$ perché
(segna la loro uguaglianza
con due simboli identici in figura!);

$$\overline{AM} = \overline{MB} \text{ per } \dots\dots\dots$$

Quindi è $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$ per il ;
in particolare, $\overline{AC} = \overline{BD}$.

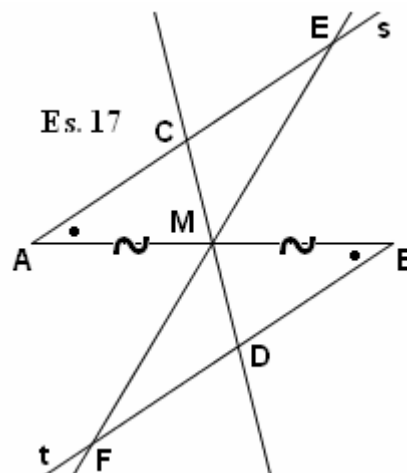
II) Dall'uguaglianza di AMC e BMD
prima dimostrata segue, fra l'altro, che
 $\overline{CM} = \overline{MD}$ e $\widehat{ACM} = \widehat{BDM}$

(segna queste uguaglianze sulla figura!)

Quindi, confrontando ora ECM e FDM, avremo

- $\overline{CM} = \overline{MD}$
- $\widehat{ECM} = \widehat{FDM}$ perché : la catena illustrativa è $\widehat{ECM} = 180^\circ - \dots\dots = 180^\circ - \dots\dots = \widehat{FDM}$
- $\widehat{EMC} = \widehat{FMD}$ perché

Pertanto $\widehat{ECM} = \widehat{FDM}$ per il e, in particolare, $\overline{CE} = \overline{DF}$. La dimostrazione è completata.



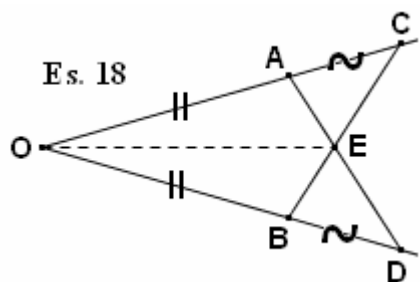
HP

$$\dots\dots\dots$$

TH

$$\begin{array}{l} \text{I) } \overline{AC} = \overline{BD} \\ \text{II) } \overline{CE} = \overline{DF} \end{array}$$

18)



Es. 18

HP

$$\overline{OA} = \overline{OB}, \overline{OC} = \overline{OD}$$

(in figura, per comodità, abbiamo già segnato $\overline{AC} = \overline{BD}$: “differenze di segmenti uguali sono uguali”; questa annotazione grafica permette anche, insieme all'altra relativa a $\overline{OA} = \overline{OB}$, di “ricostruire” immediatamente, per somma, l'uguaglianza nota $\overline{OC} = \overline{OD}$)

TH

I) $\overline{AD} = \overline{BC}$

II) $\overline{EA} = \overline{EB}$

III) il punto E sta sulla bisettrice di $\hat{O}$,
vale a dire, congiunto O con E, si ha $\widehat{EOA} = \widehat{EOB}$

DIM.

I) Confrontiamo OAD, OBC:

$$\overline{OA} = \overline{OB} \text{ (per);}$$

$$\overline{OD} = \overline{OC} \text{ (per);}$$

 $\hat{O}$ in comune.

Quindi $\widehat{OAD} = \widehat{OBC}$ (per il), e, in particolare, $\overline{AD} = \overline{BC}$.

II) Innanzitutto dall'uguaglianza di OAD e OBC segue anche (*segna subito sulla figura!!!*)

$$\widehat{BDE} = \widehat{ACE} \text{ e } \widehat{OAE} = \widehat{OBE}.$$

Ma se $\widehat{OAE} = \widehat{OBE}$, allora anche $\widehat{CAE} = \widehat{DBE}$ perché :

la catena illustrativa è $\widehat{CAE} = 180^\circ - \dots = \dots = \widehat{DBE}$ (*segna sulla figura!!!*).

Quindi, confrontando i due triangoli AEC e BED, si ha che:

$$\widehat{ACE} = \widehat{BDE}; \widehat{CAE} = \widehat{DBE}; \overline{AC} = \overline{BD} \text{ perché : } \overline{AC} = \dots = \dots = \overline{BD}.$$

Di conseguenza, $\widehat{AEC} = \widehat{BED}$ per il e, in particolare, $\overline{EA} = \overline{EB}$.

III) OAE ed OBE sono uguali per il : infatti

$\overline{OE}$ è ; $\overline{OA} = \overline{OB}$ per ; $\overline{EA} = \overline{EB}$ come già dimostrato (*l'avevi segnato in figura?*).

Dall'uguaglianza dei due triangoli considerati segue, in particolare, $\widehat{EOA} = \widehat{EOB}$, c.v.d.

19)



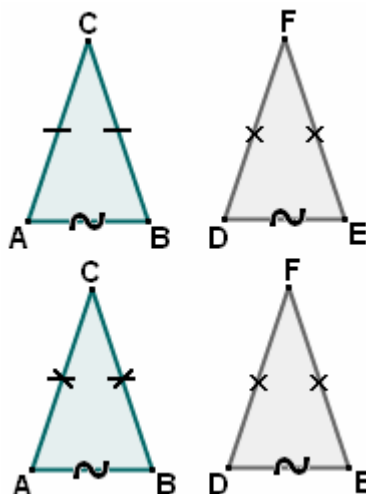
DIM.

Se sono uguali i perimetri e le basi,
saranno uguali anche i lati obliqui!

Infatti

$$\begin{aligned} \overline{CA} = \overline{CB} &= \\ = \frac{2p(ABC) - \dots}{2} &= \frac{2p(DEF) - \dots}{2} = \\ = \overline{FD} = \overline{FE} \end{aligned}$$

Annotate dunque
tali uguaglianze sulla figura, $\rightarrow$
potremo concludere che
i due triangoli considerati
sono uguali per il , c.v.d.



HP

$$\overline{CA} = \overline{CB}$$

$$\overline{FD} = \overline{FE}$$

$$\overline{AB} = \overline{DE}$$

$$2p(ABC) = 2p(DEF)$$

TH

$$ABC = DEF$$

20)



DIM.

Prima di tutto, si osserva che $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$
perché

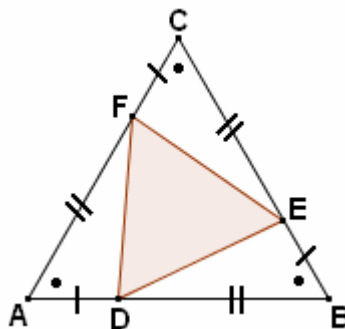
Inoltre, i tre segmenti $\overline{DB}$, $\overline{EC}$, $\overline{FA}$
sono uguali perché ;
infatti, schematicamente:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{BC} = \overline{CA} \\ \overline{AD} &= \overline{BE} = \overline{CF} \\ \overline{AB - AD} &= \dots = \overline{CA - CF} \\ \overline{DB} &= \dots = \overline{FA} \end{aligned}$$

Confrontiamo allora *simultaneamente* i tre triangoli ADF, BED e CFE.

Essi hanno $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$, $\overline{FA} = \overline{DB} = \overline{EC}$, , quindi sono uguali per il

e in particolare si ha $\overline{FD} = \overline{DE} = \overline{EF}$, C.V.D.



HP

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$$

TH

$$\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$$

GEOMETRIA: ESERCIZI SULLE DISUGUAGLIANZE

Ti proporrò ora, come esercizi, **alcuni teoremi in cui la tesi è rappresentata da una disuguaglianza**.

Ovviamente, per la dimostrazione dovrai

ricordare quei teoremi noti che riguardano disuguaglianze fra segmenti o fra angoli;

ad esempio:

- "in un triangolo, a lato maggiore sta opposto angolo maggiore, e viceversa";
- "in un triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza";
- "in un triangolo, ciascun angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni ad esso non adiacenti" (Teorema dell' Angolo Esterno in forma debole);
- ...

Molto sovente, in esercizi di questo tipo, occorrerà

applicare le **proprietà delle disuguaglianze fra segmenti o angoli**,

che abbiamo fissato come assiomi all'inizio del nostro studio della Geometria.

Le richiamiamo qui di seguito.

- Sommando membro a membro due disuguaglianze vere (e aventi lo stesso verso, cioè: o entrambe col $<$ o entrambe col $>$) si ottiene ancora una disuguaglianza vera:

$$a < b \wedge c < d \rightarrow a + c < b + d \quad (\text{ovviamente, lo stesso vale se al posto di "<" scriviamo ">"...})$$
 - Invece *non* è lecito *sottrarre* membro a membro due disuguaglianze equiverse: voglio dire, la disuguaglianza cui si perverrebbe potrebbe essere, a seconda dei casi, o vera o falsa!
- Moltiplicando, o dividendo, per uno stesso numero positivo ambo i membri di una disuguaglianza vera, si perviene ancora ad una disuguaglianza vera:

$$a < b \rightarrow 2a < 2b; \quad (\text{lo stesso vale se al posto di "<" scriviamo ">"})$$

$$a < b \rightarrow \frac{a}{2} < \frac{b}{2}; \quad (\text{non staremo più a ripeterlo!})$$

...

$$a < b \rightarrow ma < mb;$$

$$a < b \rightarrow \frac{1}{n}a < \frac{1}{n}b;$$

$$a < b \rightarrow \frac{m}{n}a < \frac{m}{n}b$$
- Addizionando, o sottraendo, uno stesso termine da entrambi i membri di una disuguaglianza vera, si ottiene ancora una disuguaglianza vera:

$$a < b \rightarrow a + c < b + c$$

$$a < b \rightarrow a - c < b - c$$

Dall'ultimo assioma citato si possono dedurre facilmente

♪ la cosiddetta "**regola del trasporto**":

"nell'ambito di una disuguaglianza, è lecito trasportare un termine di somma algebrica da un membro all'altro, cambiandolo però di segno"

$$d + e < f \rightarrow d < f - e \quad \left(d \not\leftarrow \boxed{+e} < f \boxed{-e} \right)$$

♪ il "**principio di cancellazione**":

"nell'ambito di una disuguaglianza, se uno stesso termine (addendo di somma algebrica) compare tanto a primo quanto a secondo membro, è lecito cancellarlo"

$$g + h < i + h \rightarrow g < i \quad \left(g \not\leftarrow \boxed{+h} < i \not\leftarrow \boxed{+h} \right)$$

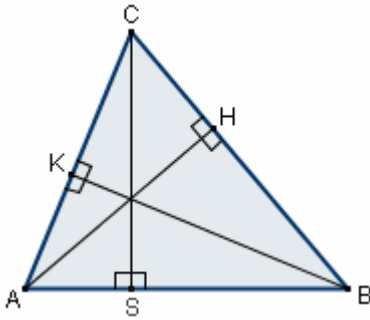
Ecco ora una rassegna di **esercizi**.

Sono **difficili**, è vero!!! Non scoraggiarti!

Proprio perché impegnativi, possono essere particolarmente appassionanti.

1) (Esercizio svolto)

In un triangolo la somma delle tre altezze è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro



IPOTESI

 $AH \perp BC, BK \perp AC, CS \perp AB$

TESI

I) $AH + BK + CS < 2p$

II) $AH + BK + CS > p$

♥ Per motivi di praticità, omettiamo, in questa pagina, il “cappello di segmento”, che sappiamo non “obbligatorio”

DIMOSTRAZIONE

- I) $AH < AB$ (triangolo rettangolo AHB: in un tr. rett. ciascun cateto è minore dell'ipotenusa)
 $BK < BC$ (tr. rett. BKC)
 $CS < AC$ (tr. rett. CSA)

$$\overline{AH + BK + CS} < \overline{AB + BC + AC} \quad \text{c.v.d.}$$

- II) $AH > AB - BH$ (tr. ABH: in un triangolo un lato è maggiore della diff. degli altri due)
 $AH > AC - CH$ (tr. ACH)
 $BK > BC - CK$ (tr. BCK)
 $BK > AB - AK$ (tr. ABK)
 $CS > AC - AS$ (tr. ACS)
 $CS > BC - BS$ (tr. BCS)

$$\begin{aligned} 2AH + 2BK + 2CS &> AB - BH + AC - CH + BC - CK + AB - AK + AC - AS + BC - BS = \\ &= AB + AC + BC + AB + AC + BC - (BH + CH + CK + AK + AS + BS) = \\ &= 2AB + 2AC + 2BC - (BC + AC + AB) = \\ &= 2AB + 2AC + 2BC - BC - AC - AB = \\ &= AB + AC + BC \end{aligned}$$

Quindi

$$2(AH + BK + CS) > AB + AC + BC \rightarrow AH + BK + CS > \frac{AB + AC + BC}{2} \quad \text{c.v.d.}$$

ALTRI ESERCIZI

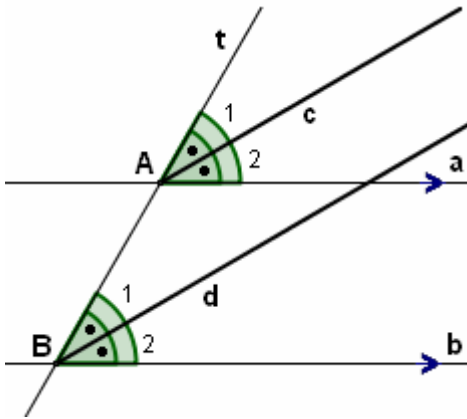
- 2) In ogni triangolo, ciascuna mediana è minore della semisomma (= metà della somma) dei due lati che hanno con essa un estremo in comune
(prolungare la mediana di un segmento uguale alla mediana stessa, poi congiungere ...)
- 3) In ogni triangolo la somma delle tre mediane è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro
(utilizzare il teorema precedente)
- 4) ⇨ (difficile!) In un triangolo ABC, se O è un punto interno, si ha $\overline{OB} + \overline{OC} < \overline{AB} + \overline{AC}$
- 5) Se in un triangolo ABC si congiungono i vertici con un punto interno O, la somma $OA + OB + OC$ è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro
- 6) In un triangolo ABC sia AD la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$ (il punto D sta sul lato BC); dimostrare che $AB > BD, AC > CD$
- 7) In un triangolo ABC, se O è un punto interno, si ha $\widehat{BOC} > \widehat{BAC}$
- 8) In ogni quadrilatero, la somma delle diagonali è maggiore del semiperimetro e minore del perimetro

In Geometria, generalmente si preferisce indicare il **perimetro** con **2p**; il simbolo **p** è invece, di norma, impiegato per indicare il **SEMIperimetro** (= la metà del perimetro). Questa scelta si deve al fatto che se si indicasse il *perimetro* con p, il *semiperimetro* dovrebbe essere indicato con p/2, e le tante formule geometriche che contengono non il perimetro ma il semiperimetro, si troverebbero così a presentare fastidiosi denominatori.

GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 3

1) (Esercizio svolto)

Dimostra che le bisettrici di due angoli corrispondenti, formati da due rette parallele con una trasversale, sono anch'esse parallele.



HP

$a \parallel b$ (sulla figura abbiamo messo le “freccette di parallelismo” proprio per evidenziare questo fatto)

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (c bisettrice di $\hat{tAa}$)

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (d bisettrice di $\hat{tBb}$)

TH

$c \parallel d$

NOTA

Notazioni come $\hat{tAa}$, $\hat{tBb}$ per indicare gli angoli sono “disinvolute”, ma comode (si “approfitta” di lettere già presenti in figura, per evitare di introdurre altre lettere) e per questo comunemente accettate.

DIM.

In figura, abbiamo evidenziato con il “doppio archetto” i due angoli corrispondenti $\hat{tAa}$, $\hat{tBb}$ da noi considerati per evidenziarne l’uguaglianza:

$\hat{tAa}$ e $\hat{tBb}$ sono uguali proprio perché corrispondenti rispetto a due *parallele* con trasversale.

Ma allora i quattro angoli $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{B}_1$, $\hat{B}_2$

sono **TUTTI E QUATTRO** uguali fra loro, e non soltanto uguali a due a due, in quanto sono metà di angoli uguali:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{1}{2} \hat{tAa} = \frac{1}{2} \hat{tBb} = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \text{ (li abbiamo indicati tutti e quattro con il “pallino”).}$$

Essendo, in particolare, $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$,

dato che questi due angoli sono in posizione di corrispondenti rispetto alle due rette c , d con la trasversale t , ne discende che $c \parallel d$,

C.V.D.

OSSERVAZIONE

MOLTO istruttivo!!!

Vediamo dunque che

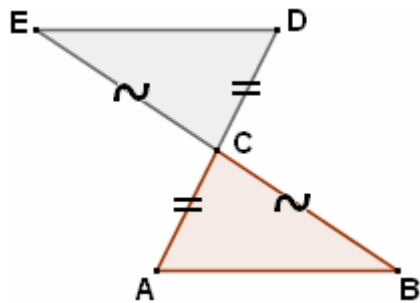
nella dimostrazione di questo teorema ci siamo serviti

- **prima, del Teorema Inverso sul Parallelismo** (“se due rette sono parallele, allora formano con ogni trasversale angoli corrispondenti uguali”),
- **poi, del Teorema Diretto** (“se due rette formano con una trasversale due angoli corrispondenti uguali, allora sono parallele”)

2) (Esercizio svolto)

Preso un triangolo ABC , si prolunga il lato $\overline{AC}$ di un segmento $\overline{CD} = \overline{AC}$ e il lato $\overline{BC}$ di un segmento $\overline{CE} = \overline{BC}$.

Si chiede di dimostrare che la congiungente DE è parallela ad AB .



HP
 $\overline{CD} = \overline{AC}$
 $\overline{CE} = \overline{BC}$
 TH
 $DE \parallel AB$

♥ NOTA

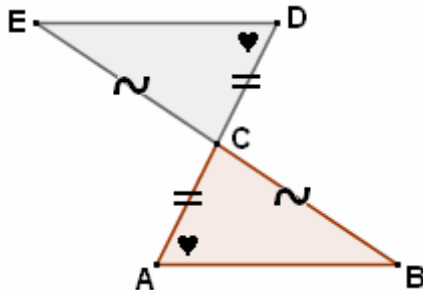
Abbiamo scritto $DE \parallel AB$, senza il “cappello”, perché l’idea di parallelismo si riferisce in modo più “naturale” alle rette (anche ai segmenti, ma solo in quanto parti di rette).
 Nessun problema, comunque: anche scrivere $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ sarebbe stato corretto.

DIM.

I due triangoli DEC e ABC sono uguali per il 1° Criterio

($\overline{CD} = \overline{AC}$ e $\overline{CE} = \overline{BC}$ per ipotesi, $\widehat{ECD} = \widehat{BCA}$ perché opposti al vertice).

Ne consegue, in particolare, $\widehat{D} = \widehat{A}$ (vedi figura qui sotto):



... e poiché questi angoli sono in posizione di alterni interni rispetto alle due rette DE , AB con la trasversale AD , dal fatto che siano uguali si trae

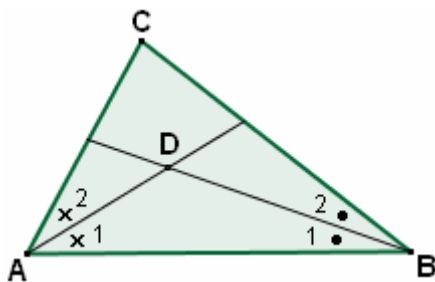
$DE \parallel AB$

C.V.D.

3) (Esercizio svolto)

L’angolo ottuso formato da due bisettrici di un triangolo,

è uguale alla metà del terzo angolo del triangolo, più un angolo retto.



HP
 $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2, \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$

TH
 $\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{C} + 90^\circ$

DIM.

Si può provare la tesi semplicemente impostando una catena (vedi l’importante osservazione nel riquadro qui a destra →):

$$\begin{aligned} \widehat{ADB}_{ADB} &= 180^\circ - (\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1) = \\ &= 180^\circ - \left(\frac{1}{2}\widehat{A} + \frac{1}{2}\widehat{B} \right) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B})_{ABC} = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{C}) = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{C} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{C} \quad \text{C.V.D.} \end{aligned}$$

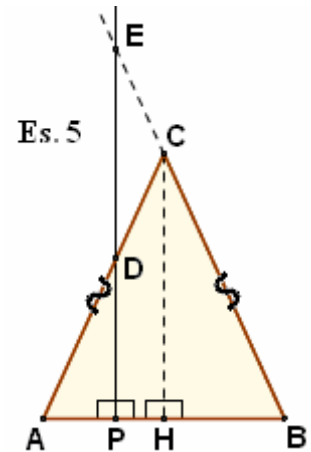
CATENE



L’uso delle CATENE è frequentissimo ed efficacissimo nelle dimostrazioni.

♥ In una catena ben impostata ciascun “anello” deve essere ricavato A PARTIRE DALL’ “ANELLO” CHE LO PRECEDE IMMEDIATAMENTE (non, quindi, fare riferimento ad altri anelli lontani ...)

- 4) In un triangolo ABC , si tracciano le bisettrici dei due angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$, indicando con D il loro punto di intersezione.
Per D si traccia poi la parallela ad AB , indicando con E, F i suoi punti di intersezione con AC e con BC rispettivamente.
Si chiede di dimostrare che $EF = AE + BF$.



- 5) ☀ (Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 340)
Considerato un triangolo ABC , isoscele sulla base AB , si prende su AB un punto arbitrario P e per P si traccia la perpendicolare ad AB , che interseca le rette dei due lati obliqui in D e in E rispettivamente.
Dimostrare che il triangolo CDE è isoscele
[Indicazione: tracciare l'altezza CH]

- 6) Dimostra che le bisettrici di due angoli coniugati interni, formati da due rette parallele con una trasversale, sono fra loro perpendicolari.

- 7) ☀ (Dimostrazione guidata a pag. 340)

Se sui due lati obliqui CA, CB di un triangolo isoscele ABC si prendono due punti P e Q tali che $CP = CQ$, allora la congiungente PQ è parallela alla base AB del triangolo.

- 8) Preso un triangolo ABC , si prolunga il lato AC di un segmento $CD = BC$ e il lato BC di un segmento $CE = AC$.
Si chiede di dimostrare che le congiungenti AE e BD sono parallele.

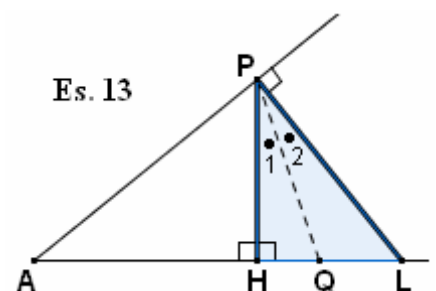
- 9) In un triangolo isoscele, la parallela alla base condotta per il vertice fa da bisettrice per ciascuno dei due angoli esterni, adiacenti all'angolo al vertice.

- 10) Se in un triangolo isoscele si traccia la bisettrice di uno qualsiasi dei due angoli esterni, adiacenti all'angolo al vertice, tale bisettrice risulta parallela alla base del triangolo.

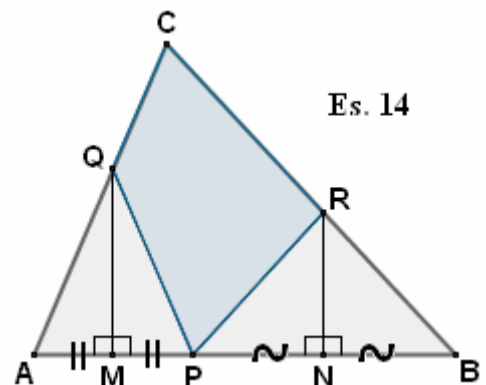
- 11) In un triangolo isoscele ABC , di base AB , traccia l'altezza AK relativa al lato BC e dimostra che $\hat{ACB} = 2\hat{BAK}$.

- 12) Sia ABC un triangolo, rettangolo in C .
Traccia l'altezza CH relativa all'ipotenusa, poi le bisettrici dei due angoli $\hat{ACH}$ e $\hat{ABC}$.
Dimostra che tali due bisettrici si tagliano perpendicolarmente.

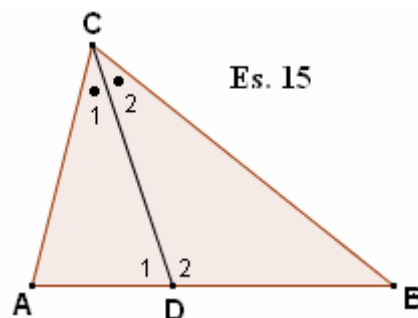
- 13) Sia $\hat{A}$ un angolo acuto, e sia P un punto di uno dei suoi lati.
Per P si conducono:
la perpendicolare all'altro lato dell'angolo, che lo incontra in H ;
e la perpendicolare ad AP , che taglia l'altro lato dell'angolo in L .
Dimostra che, se si traccia la bisettrice dell'angolo $\hat{HPL}$ e si indica con Q il punto in cui tale bisettrice interseca il segmento HL , il triangolo APQ è isoscele.



- 14) In un triangolo acutangolo ABC , si prende un punto qualunque P sul lato AB , e si indicano con M, N i punti medi dei due segmenti AP e PB .
La perpendicolare ad AB condotta per M interseca AC in Q ;
la perpendicolare ad AB condotta per N interseca BC in R .
Dimostra che l'angolo $\hat{QPR}$ è uguale all'angolo $\hat{ACB}$.



- 15) Sia ABC un triangolo, con $\hat{A} > \hat{B}$. Tracciata la bisettrice dell'angolo $\hat{C}$, dimostra che questa va a formare col lato $\overline{AB}$ due angoli, la cui differenza è uguale alla differenza $\hat{A} - \hat{B}$.



Es. 15

- 16) In un triangolo ABC , rettangolo in A , si congiunge il piede H dell'altezza $\overline{AH}$ relativa all'ipotenusa coi punti medi M ed N dei due cateti $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Dimostra che il perimetro del quadrilatero $AMHN$ è uguale alla somma dei due cateti di ABC .

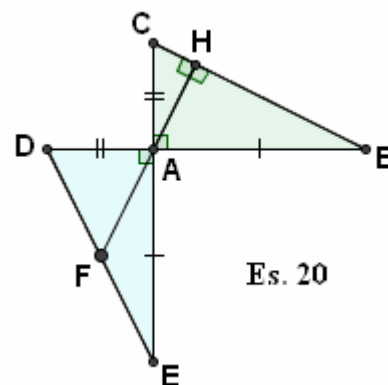
- 17) Se in un triangolo ABC , rettangolo in A , si tracciano la mediana $\overline{AM}$ relativa all'ipotenusa e poi la bisettrice dell'angolo $\hat{AMC}$, tale bisettrice risulterà parallela al cateto $\overline{AB}$.

- 18) In un triangolo ABC , tracciate le altezze $\overline{AH}$ e $\overline{BK}$, risulta $\overline{AK} = \overline{BH}$. Dimostra che ABC è un triangolo isoscele.

- 19) Nel quadrilatero $ABCD$, i due lati $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ sono fra loro uguali, e i due angoli $\hat{B}$, $\hat{D}$ sono entrambi retti. Dimostra che le diagonali di questo quadrilatero sono fra loro perpendicolari.

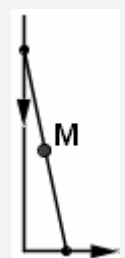
- 20) ☀ (Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 340)

E' dato un triangolo ABC , rettangolo in A . Si prolungano: il cateto $\overline{AB}$, dalla parte di A , di un segmento $\overline{AD} = \overline{AC}$ e il cateto $\overline{AC}$, dalla parte di A , di un segmento $\overline{AE} = \overline{AB}$; dopodiché si traccia, nel triangolo ABC , l'altezza $\overline{AH}$ relativa all'ipotenusa e infine si prolunga il segmento $\overline{AH}$, dalla parte di A , fino ad incontrare $\overline{DE}$ in F . Dimostrare che F è il punto medio di $\overline{DE}$.



Es. 20

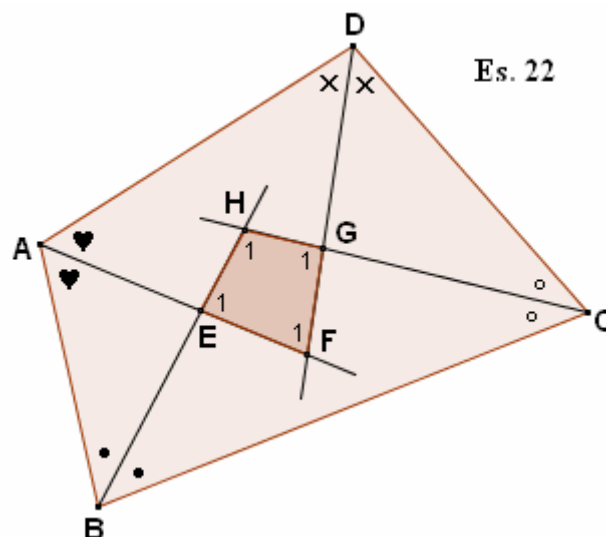
- 21) ➡



LA SCALA CHE SCIVOLA

Una scala, appoggiata ad un muro, scivola in maniera tale che l'estremità superiore, abbassandosi, sta sempre a contatto con la parete, mentre la parte inferiore si allontana dal muro strisciando sul pavimento. La scala passa così da verticale ad orizzontale. In figura è evidenziato un punto M ad esattamente metà della lunghezza della scala. La domanda è: che traiettoria descrive questo punto, mentre la scala compie il movimento dalla verticalità all'orizzontalità? Le tue conoscenze sui triangoli rettangoli dovrebbero permetterti di rispondere correttamente.

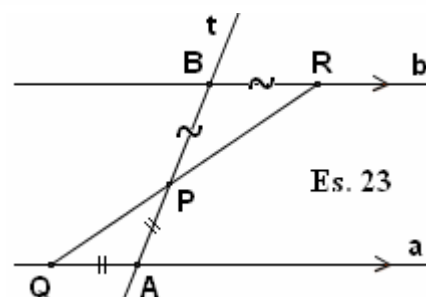
- 22) Dimostra che le bisettrici degli angoli di un quadrilatero qualsiasi formano un quadrilatero che ha gli angoli opposti supplementari (la tesi è: $\hat{E}_1 + \hat{G}_1 = \hat{F}_1 + \hat{H}_1 = 180^\circ$)



Es. 22

- 23) ➡ (Occhio! Qui è molto facile incorrere in errori logici ...)

Due parallele a , b sono tagliate da una trasversale t , che le interseca in A e in B rispettivamente. Fissato un punto qualsiasi P sul segmento $\overline{AB}$, sulla retta a si prenda un segmento $\overline{AQ} = \overline{AP}$ e sulla retta b si prenda un segmento $\overline{BR} = \overline{BP}$, in modo che Q ed R si trovino da parti opposte rispetto alla retta t . Dimostrare che i due segmenti $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ stanno uno sul prolungamento dell'altro.



Es. 23

- 24) Se i punti Q ed R di cui si parla nel n. 23 stessero invece dalla stessa parte rispetto alla trasversale t , quanto misurerebbe l'angolo formato dai due segmenti $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$? Dimostra la tua affermazione.

☀ **DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)**

5) DIM.

⇒ Costruzione: tracciamo l'altezza $\overline{CH}$ del triangolo isoscele ABC , relativa alla base $\overline{AB}$. Essa, per un teorema noto, risulterà anche dell'angolo al vertice $\widehat{ACB}$: sarà dunque $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (segnalo immediatamente in figura con due simboli identici!) Ora, le due rette EP , CH sono fra loro, perché alla stessa retta AB (segna subito in figura con le freccette questo parallelismo!) e perciò:

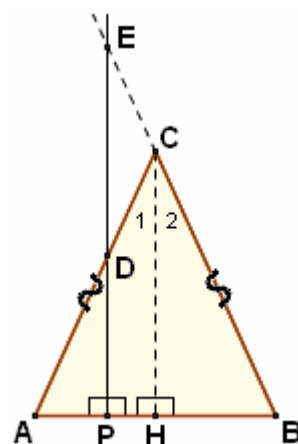
$\widehat{DEC} = \widehat{C}_2$ (perché rispetto alle due parallele e con la trasversale)

$\widehat{EDC} = \widehat{C}_1$ (perché rispetto alle due parallele e con la trasversale)

(Psst ... Hai segnato in figura le nuove uguaglianze ottenute?)

Dunque $\widehat{DEC} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \widehat{EDC}$.

Il triangolo DCE ha quindi due angoli uguali: ma se un triangolo ha due angoli uguali, allora è (i lati uguali sono, precisamente, quelli opposti agli angoli uguali); si ha perciò $\overline{CE} = \overline{CD}$ c.v.d.



HP
 $\overline{CA} = \overline{CB}$
 $EP \perp AB$

TH
 $\overline{CE} = \overline{CD}$

7) DIM.

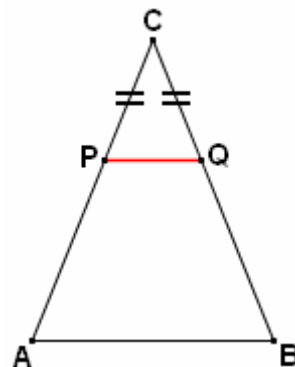
⇒ $\widehat{A} = \widehat{B}$ perché ; $\widehat{CPQ} = \widehat{CQP}$ perché ; ma in ogni triangolo, la somma dei tre angoli interni dà , quindi $\widehat{CPQ} = \widehat{CQP} \stackrel{PQC}{=} \frac{180^\circ - \dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \stackrel{ABC}{=} \widehat{A} = \widehat{B}$

Vale a dire, i quattro angoli $\widehat{CPQ}$, $\widehat{CQP}$, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$

sono **tutti e quattro** uguali fra loro, non solo uguali a due a due

(segniamolo subito sulla figura! quattro simboli identici!);

in particolare, è $\widehat{CPQ} = \widehat{A}$, e allora le due rette PQ e AB , formando con la trasversale AC due angoli , sono parallele, c.v.d.



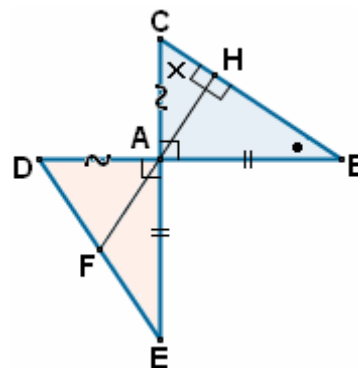
HP
 $\overline{CA} = \overline{CB}$
 $\overline{CP} = \overline{CQ}$

TH
 $PQ \parallel AB$

20) DIM.

⇒ Innanzitutto un triangolo rettangolo, quando si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa, viene da questa spezzato in due triangoli che sono fra loro (e col triangolo di partenza).

Con riferimento ad ABC , si hanno le uguaglianze angolari che andiamo a illustrare in figura (due angoli "pallino": $\widehat{B}$ e e due angoli "crocetta": $\widehat{C}$ e) →



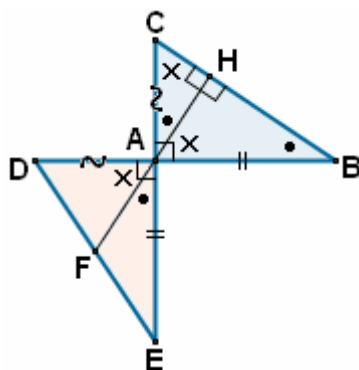
HP
 $\widehat{CAB} = 90^\circ$
 $\overline{AD} = \overline{AC}$
 $\overline{AE} = \overline{AB}$
 $AH \perp BC$

TH
 $\overline{DF} = \overline{FE}$

Dopodiché, per via della presenza di angoli

....., avremo un'altra coppia "pallino", "crocetta".

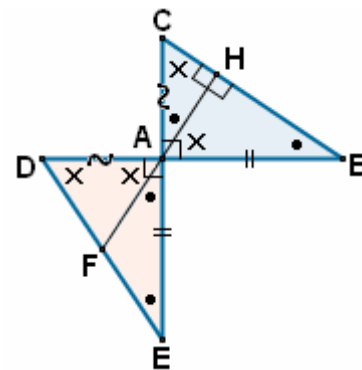
→



Ma i due triangoli ABC e AED sono uguali per il , per cui

$\widehat{E} = \dots\dots\dots$, $\widehat{D} = \dots\dots\dots$ e di conseguenza possiamo collocare sulla figura un altro "pallino" e un'altra "crocetta".

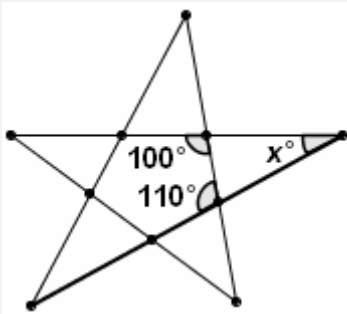
→



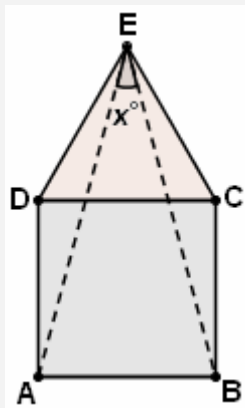
Ciò mostra in definitiva che i due triangoli FAD , FAE , avendo ciascuno due angoli uguali, sono

per cui si ha $\overline{DF} \stackrel{FAD}{=} \dots\dots\dots \stackrel{FAE}{=} \overline{FE}$ c.v.d.

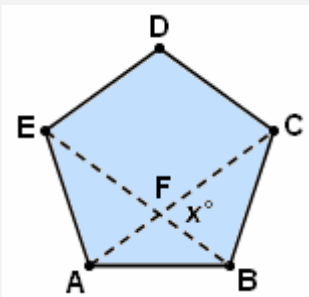
Angles' Corner



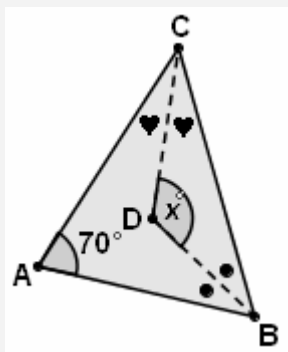
1) Quanto vale x ?



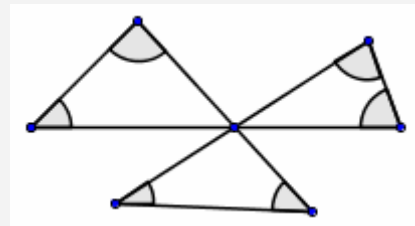
2)
La figura mostra un quadrato (4 lati uguali, 4 angoli retti) sormontato da un triangolo equilatero. Quanto vale l'angolo $\widehat{AEB}$?



3)
ABCD è un pentagono "regolare", cioè con tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali. Quanto misura $\widehat{BFC}$?



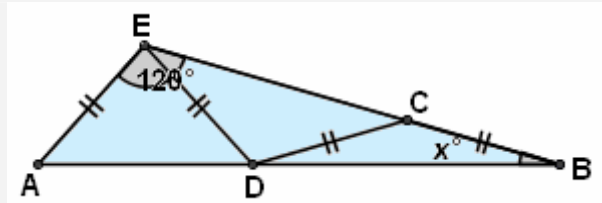
4)
Un triangolo ABC e le bisettrici BD, CD di due degli angoli interni. Se il terzo angolo misura 70° , quanto vale x ?



5) (Kangourou 2005)

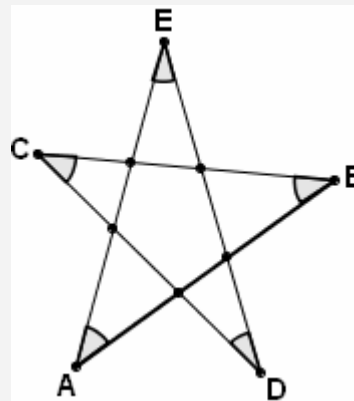
Qual è la somma dei sei angoli nella figura qui sopra?

a) 300° b) 450° c) 360° d) 600° e) 380°



6) Nella figura sovrastante si ha $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$.

Sapendo che $\widehat{AEB} = 120^\circ$, determina la misura di $\widehat{ABE}$



7)
Stabilisci quanto vale la somma degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, $\widehat{E}$ di una "stella a 5 punte" come quella qui a fianco raffigurata.

RISPOSTE Per evitare che si possa "sbirciare", le sette risposte sono date mediante altrettante equazioni. La soluzione di un quesito è il valore di x che si trova risolvendo l'equazione.

1) $\frac{x}{2} - 4 = \frac{x}{6} + 6$ 2) $x^2 = (x - 40)^2 + 40(x - 10)$ 3) $113 + 4(x - 100) = 1$ 4) $\frac{x}{5} - (x - 101) = 1$

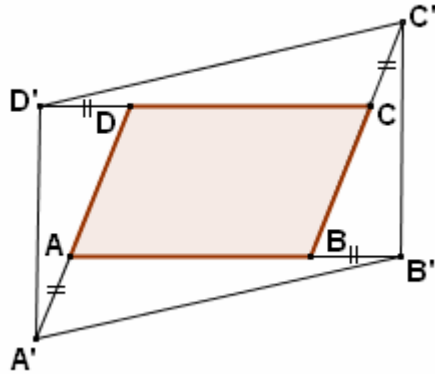
5) $x - 20^2 = 3 \cdot 10^2 + 2^2 \cdot 5 - x$ 6) $(x + 5)(x - 5) = (x - 20)^2 + 175$ 7) $2(3x - 90) = x + 720$

GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 4

1) (Esercizio svolto)

In un parallelogrammo si prolungano tutti e quattro i lati di uno stesso segmento (e nel medesimo senso: vedi figura).

Dimostra che il quadrilatero avente per vertici gli estremi liberi dei quattro prolungamenti, è anch'esso un parallelogrammo.



HP

$ABCD$ parallelogrammo
 $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'}$

TH

$A'B'C'D'$ parallelogrammo

DIM.

Innanzitutto, in ogni parallelogrammo i lati opposti sono uguali:
 quindi

$\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ (segna queste uguaglianze sulla figura!!!)

Se dunque andiamo a confrontare i due triangoli $AA'B'$ e $CC'D'$, possiamo dirli uguali per il 1° Criterio:

$\overline{AA'} = \overline{CC'}$ per ipotesi,

$\overline{AB'} = \overline{CD'}$ perché somme di segmenti uguali ($\overline{AB'} = \overline{AB} + \overline{BB'} = \overline{DC} + \overline{DD'} = \overline{CD'}$),

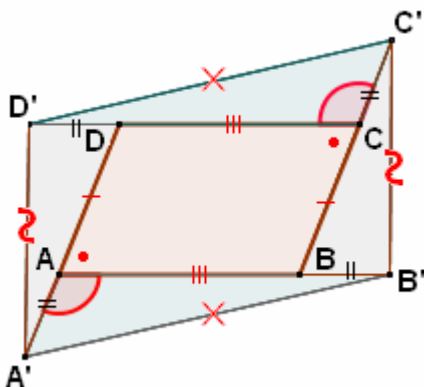
$\widehat{A'AB'} = \widehat{C'CD'}$ perché supplementari di angoli uguali

($\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$ perché angoli opposti di un parallelogrammo),

oppure perché angoli coi lati paralleli e discordi.

Da $AA'B' = CC'D'$ segue, in particolare, $\overline{A'B'} = \overline{D'C'}$.

Analogamente, confrontando i due triangoli $DD'A'$ e $BB'C'$, si trae $\overline{A'D'} = \overline{B'C'}$.



Ma allora possiamo dire che
 il quadrilatero $A'B'C'D'$
 è un parallelogrammo
 perché ha i lati opposti
 a due a due uguali,

C.V.D.

IL METODO “TOP-DOWN”



Nell'elaborare la dimostrazione di un teorema sovente viene spontaneo applicare quella strategia di ragionamento che è nota come **metodo “TOP-DOWN”**, ossia, letteralmente, **“DALLA CIMA VERSO IL BASSO”**.

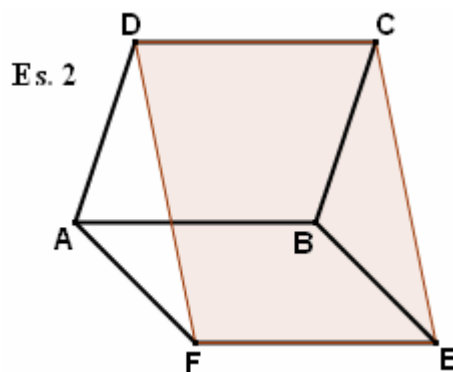
Si parte dall'obiettivo da raggiungere, e ci si domanda: di quali obiettivi intermedi avremmo bisogno per raggiungere questo obiettivo finale?

Poi il processo può essere eventualmente iterato (= ripetuto), applicandolo anche agli obiettivi intermedi.

In questo caso, abbiamo pensato:
 se riuscissimo a dimostrare che in $A'B'C'D'$
 i lati opposti sono a due uguali, allora saremmo a posto;
 ma quali considerazioni ci occorrono per provare
 che i lati opposti di $A'B'C'D'$ sono a due a due uguali? ...

- 2) ➡ Due parallelogrammi ABCD, ABEF hanno il lato AB in comune (e si trovano da parte opposta rispetto al lato comune). Dimostra che il quadrilatero DCEF è anch'esso un parallelogrammo.

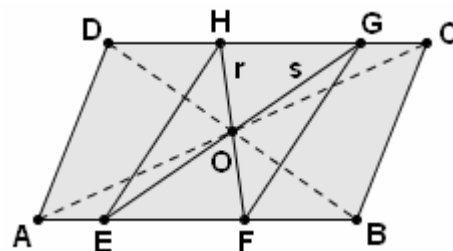
Il teorema varrebbe anche qualora ABCD, ABEF si trovassero dalla stessa parte rispetto ad AB?



- 3) Disegna un parallelogrammo ABCD; per il vertice B traccia la parallela alla diagonale AC; chiama P, Q i punti di intersezione di questa parallela con le rette dei lati AD e DC. Dimostra ora che sono fra loro uguali i due triangoli APB e CBQ.

- 4) ☼ (Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 345)

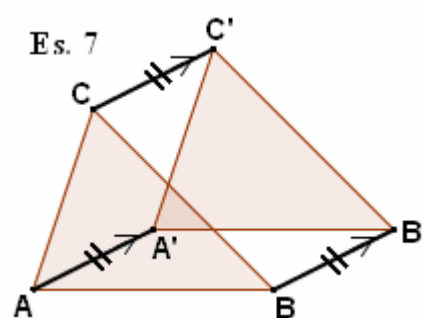
Per il punto di intersezione delle diagonali di un parallelogrammo si tracciano due rette, che vanno a intersecare una coppia di lati opposti. Dimostra che i quattro punti in cui tali rette incontrano i lati del parallelogrammo iniziale, sono vertici di un altro parallelogrammo.



- 5) ☼ (Dimostrazione guidata a pag. 345)

Sia ABCD un parallelogrammo. Prendi sulla diagonale AC due punti E, F tali che sia $\overline{AE} = \overline{CF}$. Si chiede di dimostrare che pure il quadrilatero EBFD è un parallelogrammo.

- 6) Se dai due vertici opposti B, D di un parallelogrammo ABCD si tracciano le perpendicolari BH, DK alla diagonale AC (H e K stanno su AC), il quadrilatero BHDK è anch'esso un parallelogrammo.
- 7) Preso un triangolo qualsiasi ABC, a partire dai tre vertici A, B, C si tracciano tre segmenti AA', BB', CC' uguali fra loro, paralleli ed equiversi (= aventi il medesimo verso). Dimostra che il triangolo A'B'C' è uguale ad ABC.



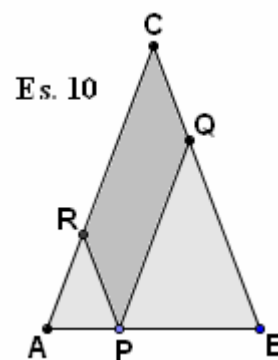
- 8) Se, dato un parallelogrammo ABCD, si tracciano le bisettrici dei due angoli opposti A e C indicando con E, F i punti in cui tali bisettrici vanno a intersecare le rette DC e AB, allora anche il quadrilatero AFCE è un parallelogrammo.

- 9) Dimostra che un quadrilatero è certamente un parallelogrammo qualora le bisettrici di due angoli opposti siano parallele fra loro, e lo stesso simultaneamente accada per le bisettrici degli altri due angoli opposti.

Serviti di GeoGebra per evidenziare come non basti la condizione su due soli angoli opposti, ma ci vogliano pure gli altri due, per la tesi

- 10) ☼ (Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 345)

E' dato un triangolo ABC, isoscele sulla base AB. Da un punto P preso arbitrariamente su AB si tracciano: la parallela ad AC, che incontri BC in Q; e la parallela a BC, che incontri AC in R. Dimostrare che il perimetro del parallelogrammo PQCR è uguale alla somma $AC + BC$.

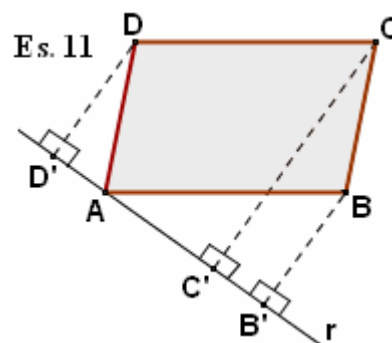


- 11) ☼ (Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 345)

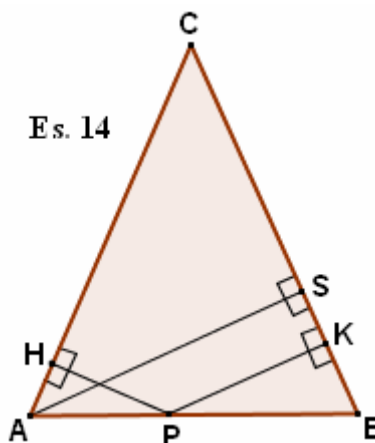
Per il vertice A di un parallelogrammo ABCD si traccia una retta r, che abbia in comune con ABCD il solo punto A. Siano B', C', D' le proiezioni dei tre punti B, C, D su r. Dimostrare che $\overline{CC'} = \overline{BB'} + \overline{DD'}$

[Indicazione: tracciare dal punto B la perpendicolare a ...]

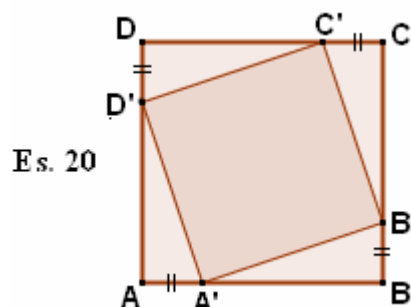
Come si modificherebbe la tesi se la retta r passante per A attraversasse il parallelogrammo, anziché essergli esterna?



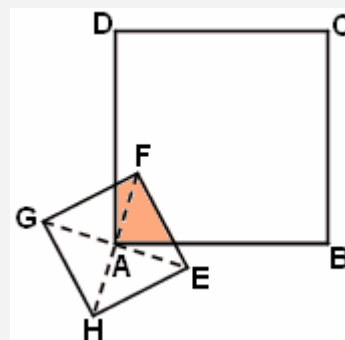
- 12) $\Rightarrow$ Tracciando le bisettrici degli angoli di un parallelogrammo qualsiasi, si ottiene un rettangolo.
- 13) Tracciando le bisettrici degli angoli di un rettangolo, si ottiene un quadrato.
- 14) E' dato un triangolo ABC, isoscele sulla base $\overline{AB}$.
Sia P un punto preso arbitrariamente su $\overline{AB}$.
Dette PH e PK le distanze di P dai lati $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ rispettivamente,
e tracciata l'altezza $\overline{AS}$ relativa al lato $\overline{BC}$,
dimostrare che $\overline{AS} = \overline{PH} + \overline{PK}$ (vedi figura)
[Indicazione: tracciare dal punto P...]
- 15) Si disegna un rombo ABCD, si prende un compasso e si tracciano due circonferenze di ugual raggio (minore del lato del rombo), puntando il compasso su due vertici opposti e chiamando E, F, G, H i punti in cui le circonferenze in gioco tagliano i lati di ABCD. Il quadrilatero di vertici E, F, G, H sar  allora un rettangolo: dimostrarlo.
- 16) $\Rightarrow$ Sia ABC un triangolo isoscele sulla base $\overline{BC}$.
Per un punto P della base traccia la perpendicolare alla base stessa, e indica con D, E i punti in cui tale perpendicolare incontra un lato obliquo, e, rispettivamente, il prolungamento dell'altro lato obliquo.
Dimostra che la somma $\overline{PD} + \overline{PE}$   uguale al doppio dell'altezza $\overline{AH}$ del triangolo.
- 17) In un rombo prendi, su di una diagonale, due punti che abbiano ugual distanza dagli estremi di questa. Dimostra che congiungendo tali due punti con le estremit  dell'altra diagonale, si ottiene ancora un rombo.
- 18) Dimostra che se il punto di incontro delle diagonali di un rombo viene proiettato sui quattro lati, i quattro punti cos  ottenuti sono vertici di un rettangolo.
- 19) $\Rightarrow$ Sia ABCD un rettangolo; si traccino le sue diagonali $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$; sia O il punto in cui queste si tagliano. Preso poi su $\overline{AB}$ un punto P, si traccino da P: la parallela a $\overline{BD}$, fino ad incontrare $\overline{AC}$ in Q, e la parallela ad $\overline{AC}$, fino ad incontrare $\overline{BD}$ in R. Dimostra che il perimetro di PQOR   uguale ad una diagonale del rettangolo.



- 20) In un quadrato ABCD si prendono (vedi figura) rispettivamente sui quattro lati $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, quattro segmenti uguali fra loro $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'}$. Dimostra che anche $A'B'C'D'$   un quadrato.
- 21) $\Rightarrow$ Per il punto di intersezione delle diagonali di un quadrato si tracciano due rette perpendicolari fra loro. Dimostra che i quattro punti in cui tali rette intersecano i lati del quadrato iniziale, sono vertici di un altro quadrato.
- 22) Se un trapezio ha le diagonali uguali, allora   isoscele.
- 23) $\Rightarrow$ Si tracciano le bisettrici degli angoli alla base di un triangolo isoscele ABC di base $\overline{AB}$, e si indicano con D, E le intersezioni di tali bisettrici rispettivamente con $\overline{BC}$ e con $\overline{AC}$. Dimostra che ABDE   un trapezio isoscele, col lato obliquo uguale alla base minore.
- 24) $\Rightarrow$ A partire dai due vertici opposti A, C di un quadrato ABCD prendi, sui lati, quattro segmenti uguali fra loro $\overline{AE} = \overline{AF} = \overline{CG} = \overline{CH}$. Dimostra che:
I) il quadrilatero di vertici E, G, H, F   un rettangolo
II) il perimetro di questo rettangolo rimarrebbe sempre costante, anche se variasse la lunghezza dei quattro segmenti uguali $\overline{AE} = \overline{AF} = \overline{CG} = \overline{CH}$.

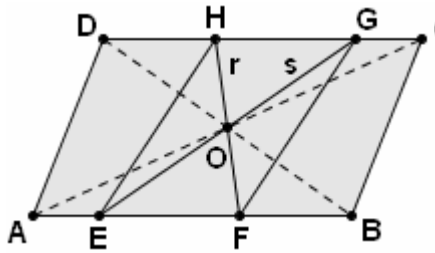


- 25) Un quadrato ABCD ha il lato di 4 cm. Un secondo quadrato, di lato 2 cm, ha le sue due diagonali che si tagliano in A (vedi figura). Dimostra che la parte di piano comune fra il quadrato pi  grande e quello pi  piccolo ha un'area che   costante, indipendentemente da come venga modificata, per rotazione del quadrato pi  piccolo, l'ampiezza dell'angolo fra le due rette AE e AB. Quanto misura quest'area costante?



 DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)

4)
⇒



HP

ABCD parallelogrammo
r, s rette condotte
per il punto O di
intersezione delle diagonali

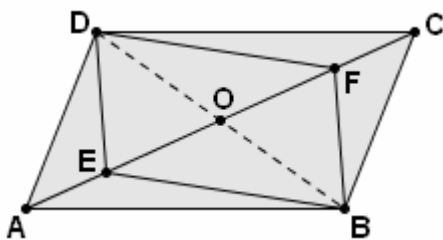
TH

EFGH parallelogrammo

**A TE IL COMPITO
DI SEGNARE IN FIGURA,
IN QUESTA PAGINA,
L'IPOTESI,
E CIO' CHE
VIA VIA SI DEDUCE
NEL CORSO DELLA
DIMOSTRAZIONE!**

DIM. Si può procedere in diversi modi, ma il più efficace è quello che sfrutta i teoremi (diretti e inversi) sulle diagonali di un parallelogrammo. Innanzitutto, abbiamo $\overline{AO} = \overline{OC}$ e $\overline{BO} = \overline{OD}$ perché è noto che in ogni parallelogrammo (e tale è per ipotesi ABCD) le diagonali Allora i due triangoli BOF e DOH hanno:
 $\overline{BO} = \overline{OD}$; $\widehat{BOF} = \dots$ perché; $\widehat{FBO} = \widehat{HDO}$ perché quindi sono uguali per il
Segue $\overline{OF} = \dots$. Allo stesso modo, confrontando i due triangoli AOE e COG, si deduce $\overline{OE} = \dots$.
Possiamo perciò concludere che EFGH è un parallelogrammo perché ha le diagonali che, c.v.d.

5)
⇒



HP: ABCD parallelogrammo; $\overline{AE} = \overline{CF}$ (su $\overline{AC}$)

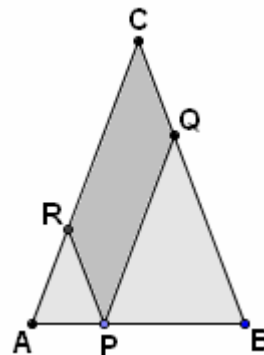
TH: EBFD parallelogrammo

DIM. Si può procedere in diversi modi, ma c'è una via davvero semplice. Tracciamo l'altra diagonale $\overline{DB}$; poiché nel parallelogrammo ABCD le diagonali è $\overline{AO} = \overline{OC}$, $\overline{BO} = \overline{OD}$. Ma allora potremo scrivere la catena $\overline{EO} = \overline{AO} - \overline{AE} = \dots - \dots = \overline{OF}$. Ed essendo $\overline{EO} = \overline{OF}$ e $\overline{BO} = \overline{OD}$, concluderemo che EBFD è un parallelogrammo in quanto ha le diagonali che, c.v.d.

10) DIM. Osserviamo che $\widehat{APR} = \widehat{B}$, $\widehat{BPQ} = \widehat{A}$ perché
⇒ perciò, essendo pure $\widehat{A} = \widehat{B}$ perché,
sarà $\widehat{APR} = \widehat{B} = \widehat{A} = \widehat{BPQ}$.

Da tali uguaglianze angolari si trae che i triangoli APR, PBQ sono: $\overline{PR} = \overline{AR}$, $\overline{PQ} = \overline{BQ}$
per cui potremo scrivere

$$\begin{aligned} 2p(\text{PQCR}) &= \overline{PR} + \overline{RC} + \overline{QC} + \overline{PQ} = \\ &= \overline{AR} + \overline{RC} + \overline{QC} + \overline{BQ} = (\overline{AR} + \overline{RC}) + (\overline{QC} + \overline{BQ}) = \\ &= \overline{AC} + \overline{BC}, \text{ c.v.d.} \end{aligned}$$



HP

$\overline{CA} = \overline{CB}$
 $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$
 $\overline{PR} \parallel \overline{BC}$

TH

$$\begin{aligned} 2p(\text{PQCR}) &= \\ &= \overline{AC} + \overline{BC} \end{aligned}$$

11) DIM.

⇒ Innanzitutto, le rette $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ sono parallele fra loro perché tutte

Tracciamo ora per B la perpendicolare BH a $\overline{CC'}$.
Il quadrilatero $B'BHC'$, avendo tre angoli retti, deve avere retto anche l'angolo rimanente (perché)
quindi è un rettangolo.
Si ha perciò $\overline{BB'} = \overline{HC'}$.

A questo punto per avere la tesi basterebbe poter dimostrare l'uguaglianza $\overline{DD'} = \overline{CH}$.

E a tale scopo basterebbe riuscire a provare che sono uguali i due triangoli $\triangle AD'D$ e

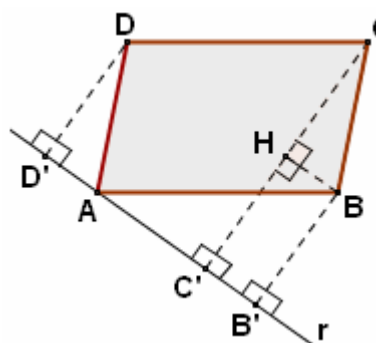
Essi hanno ciascuno un angolo retto ($\widehat{AD'D} = 90^\circ$ per, $\widehat{BHC} = 90^\circ$ per) e $\overline{AD} = \overline{BC}$ perché

Se avessimo ora un'altra uguaglianza angolare potremmo concludere che sono uguali per il

Bene, quest'uguaglianza può essere la $\widehat{ADD'} = \widehat{BCH}$: tali due angoli sono infatti uguali per avere i lati

..... e precisamente $\overline{CH} \parallel \overline{DD'}$ perché, come già osservato,; $\overline{DA} \parallel \overline{CB}$ perché

Dunque, ricapitolando, è $\triangle AD'D = \triangle BHC$ quindi $\overline{DD'} = \overline{CH}$ perciò $\overline{CC'} = \overline{HC'} + \overline{CH} = \overline{BB'} + \overline{DD'}$ c.v.d.



HP

ABCD parallelogrammo
r retta per A,
 $r \cap ABCD = \{A\}$
 $\overline{BB'} \perp r$, $\overline{CC'} \perp r$, $\overline{DD'} \perp r$

TH

$$\overline{CC'} = \overline{BB'} + \overline{DD'}$$

♥ Nella dimostrazione viene qui applicato il METODO TOP-DOWN (pagina 342)

GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 5

1) ➡

a) Dimostra che i punti medi dei lati di un quadrilatero qualsiasi sono vertici di un parallelogrammo.

b) Che proprietà deve possedere il quadrilatero di partenza

- affinché tale parallelogrammo sia un rettangolo?
- E affinché sia un rombo?
- E affinché sia un quadrato?

2) In ogni triangolo, i punti medi dei tre lati e il piede di un'altezza sono vertici di un trapezio isoscele.

3) ☀ (Dimostrazione guidata a pag. 347)

ABCD è un parallelogrammo; M è il punto medio di AB, N il punto medio di DC.

Dimostra che se si tracciano i segmenti DM e BN, la diagonale AC ne risulta suddivisa in 3 parti uguali.

4) ☀ (Dimostrazione guidata a pag. 347)

In un trapezio, la congiungente i punti medi dei due lati obliqui è parallela alle basi e uguale alla loro semisomma.

5) In un trapezio, la congiungente i punti medi delle due diagonali è parallela alle basi e uguale alla loro semidifferenza.

6) Spiega perché in un triangolo isoscele incentro, ortocentro, baricentro e circocentro sono allineati.

7) Dimostra che un triangolo nel quale due qualsiasi dei 4 “punti notevoli” (incentro, ortocentro, baricentro e circocentro) sono allineati con un vertice, è isoscele.

8) Dimostra che la parallela a un lato di un triangolo, condotta per il baricentro di questo, divide ciascuno dei due lati rimanenti in due parti, delle quali una è doppia dell'altra [ti conviene tracciare ...]

9) In un triangolo rettangolo, il baricentro sta sempre sulla stessa retta dell'ortocentro e del circocentro: perché?

10) Sia ABC un triangolo, e sia O il suo ortocentro.

Dove si trova l'ortocentro di ABO? E quello di ACO? E quello di BCO?

11) Considera un triangolo ABC e prolunga il lato AB dalla parte di B: otterrai un angolo esterno.

Analogamente, prolunga il lato AC dalla parte di C: otterrai un altro angolo esterno.

Ora traccia le bisettrici dei due angoli esterni considerati, e indica con E il punto in cui si incontrano. Dimostra che anche la bisettrice dell'angolo interno di vertice A passa per E.

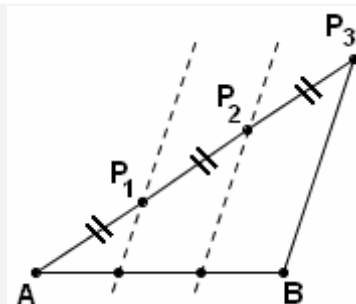
[E, punto di intersezione fra le tre bisettrici di due angoli esterni e dell'angolo interno che ha il suo vertice nel rimanente vertice del triangolo, prende il nome di “ex-centro”.

Ogni triangolo ha dunque 1 incentro e 3 ex-centri]

12) Per dividere un segmento AB in 3 parti uguali, possiamo fare così:

dall'estremo A del segmento facciamo partire un segmento qualsiasi AP_1 , poi sul prolungamento di AP_1 prendiamo successivamente due altri segmenti P_1P_2 e P_2P_3 entrambi uguali ad AP_1 .Congiungiamo ora P_3 con B, e per P_1, P_2 tracciamo le parallele a P_3B ; queste parallele, tagliando AB, realizzeranno la suddivisione desiderata.

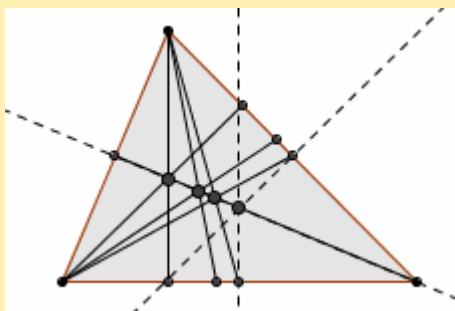
Per esercizio, puoi servirti del software GEOGEBRA per dividere un segmento fissato in 7 parti fra loro uguali.



13) Perché non ti diverti a tracciare, col software GEOGEBRA, una figura che mostri un triangolo ABC coi suoi 4 punti notevoli?

Nella figura qui a fianco il triangolo è isoscele, e infatti (esercizi 6 - 7)

i punti notevoli sono tutti allineati.



♥ Un BARICENTRO si indica preferibilmente con la lettera G (da “Gravity center”, centro di gravità).

Infatti
il punto di incontro delle mediane di un triangolo viene chiamato “baricentro”
(dal greco *baros* = peso) perché coincide con il “baricentro fisico” del triangolo,
ossia col punto di applicazione della risultante delle forze peso agenti sulle
varie parti del triangolo, se questo fosse realizzato in materiale rigido.

Ritagliando un triangolo nel cartoncino, se ne disegni le mediane, e poi
appoggi il triangolo (collocandolo orizzontalmente: vedi figura a destra)
sopra un piccolo sostegno piazzato in corrispondenza del punto di incontro
delle mediane stesse, vedrai che il triangolo starà in equilibrio. ... Provaci!



☀ **DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)**

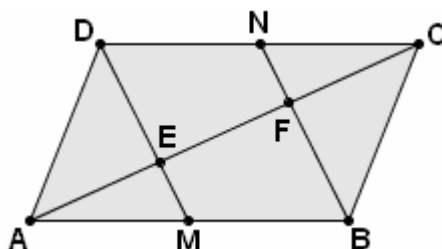
3)

⇒ **HP**

ABCD parallelogrammo;
 $AM = MB$; $DN = NC$

TH

$AE = EF = FC$



**A TE IL COMPITO
DI SEGNARE IN FIGURA,
IN QUESTA PAGINA,
L'IPOTESI,
E CIO' CHE
VIA VIA SI DEDUCE
NEL CORSO DELLA
DIMOSTRAZIONE!**

DIM. Cominciamo con l'osservare che $AM = MB = DN = NC$
perché metà dei due segmenti e , che sono uguali perché

Ora, MBND è un parallelogrammo perché ha due lati opposti (MB, DN) che sono e ;
ne consegue $MD \parallel BN$.

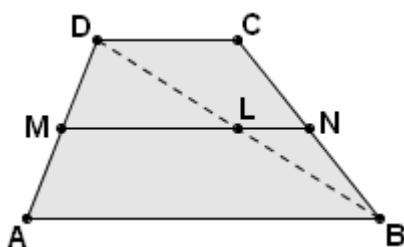
Allora, considerando il triangolo ABF, ME è la parallela ad un lato (BF)
condotta dal punto medio di un altro lato (AB), per cui e abbiamo perciò $AE = EF$.

Analogamente, considerando DEC: $NF \parallel DE$, $DN = NC \rightarrow EF = FC$.

In definitiva, è $AE = EF = FC$, c.v.d.

4)

⇒



HP

$DC \parallel AB$
 $AM = MD$, $BN = NC$

TH

$MN \parallel AB \parallel DC$
 $MN = \frac{AB+DC}{2}$

DIM. Per dimostrare che MN è parallela ad AB e DC,
immaginiamo di condurre, a partire da M, la parallela ad AB e DC:
faremo vedere che tale parallela è sovrapposta a MN, coincide con MN.

Infatti, se noi consideriamo AB, DC e la parallela a tali due rette condotta per M,
avremo tre parallele di un fascio, e ai due segmenti uguali $AM = MD$ sulla trasversale AD,
dovranno corrispondere sull'altra trasversale BC:
quindi la parallela che parte da M sarà obbligata a tagliare il segmento BC in due parti uguali,
cioè a passare per N, punto medio di BC.

Ora che abbiamo dimostrato essere $MN \parallel AB \parallel DC$, tracciamo la diagonale BD indicando con L
il punto di intersezione fra BD e MN, poi consideriamo il triangolo ABD.

In tale triangolo, la retta MN, parallela ad un lato (AB) condotta da un punto medio di un altro (AD),
va a tagliare : è dunque , cioè L è il punto medio di BD.

Ma allora il segmento ML, in quanto congiungente i punti medi di due lati del triangolo ABD,
è metà del terzo lato: $ML = \frac{1}{2} AB$.

Per lo stesso motivo, con riferimento al triangolo BCD, si ha $LN = \frac{1}{2} DC$.

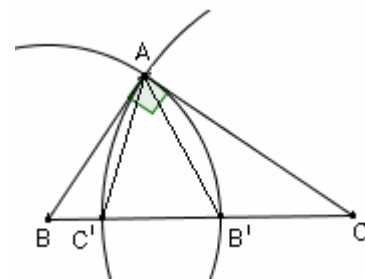
Dunque possiamo scrivere $MN = ML + LN = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} (AB + DC) = \frac{AB + DC}{2}$, c.v.d.

GEOMETRIA: ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

- 1) Dimostra che in un rombo le altezze relative a due lati consecutivi sono fra loro uguali e che, viceversa, un parallelogrammo nel quale siano uguali fra loro le altezze relative a due lati consecutivi è un rombo.
- 2) Dimostra che un triangolo con due mediane uguali fra loro, è isoscele.
(Ricordi la proprietà di cui gode il baricentro? Esso divide ciascuna mediana in due parti tali che ...)
- 3) In un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e di 60° ,
l'ipotenusa è uguale al doppio del cateto minore.
(Indicazione: traccia la mediana relativa all'ipotenusa ... Ti ricordi la sua proprietà caratteristica?)
- 4) Se in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è uguale al doppio del cateto minore,
allora gli angoli acuti misurano 30° e 60° (Indicazione: traccia la mediana relativa all'ipotenusa ...)
- 5) Dimostra che, detto O il punto di intersezione fra le diagonali di un trapezio ABCD
di base maggiore AB, se è $AO = BO$ allora il trapezio è isoscele.
- 6) Se, in un trapezio isoscele, per l'estremo comune a un lato obliquo e alla base minore
si conduce la parallela all'altro lato obliquo, questa stacca dal trapezio un triangolo isoscele.
- 7) Nel parallelogrammo ABCD è $BC = 2AB$.
Sia B' il punto simmetrico del punto B rispetto al punto A
(ossia: situato sul prolungamento di AB dalla parte di A, e tale che $AB' = AB$).
Dimostra che la congiungente CB' fa da bisettrice per l'angolo $\widehat{DCB}$.
- 8) ABCD è un parallelogrammo; E, F sono i punti medi dei due lati opposti AD e BC rispettivamente.
Dimostra che: I) $EF \parallel AB$ II) $EC \parallel AF$ III) BD taglia EF in due parti uguali.
- 9) Se sui due cateti AB e AC di un triangolo ABC, rettangolo in A, si costruiscono,
all'esterno del triangolo, due quadrati, allora due fra le diagonali di questi quadrati
stanno una sul prolungamento dell'altra, e le due rimanenti sono parallele tra loro.
- 10) Preso un punto P sulla bisettrice di un angolo convesso, traccia per P le parallele ai lati dell'angolo
e dimostra che esse individuano, coi lati stessi, un rombo.
- 11) Traccia le due diagonali di un parallelogrammo ABCD e prolunga:
la diagonale AC, dalle due parti, di due segmenti fra loro uguali $AE = CF$;
e l'altra diagonale BD, dalle due parti, di due segmenti fra loro uguali $BG = DH$.
Dimostra ora che pure il quadrilatero EGFH è un parallelogrammo.
- 12) In un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, si tracciano:
la mediana AM, la bisettrice CD, e infine, detto E il punto di intersezione fra AM e CD,
la perpendicolare EH da E fino al lato AC. Dimostra che il quadrilatero MCHE è un deltoide
(ossia, un quadrilatero con due lati consecutivi uguali fra loro e gli altri due pure uguali fra loro).
- 13) Dimostra che un trapezio in cui l'asse della base maggiore risulti asse anche per la base minore,
è certamente isoscele.
- 14) In un triangolo rettangolo, l'altezza e la mediana relative all'ipotenusa formano un angolo,
che è uguale alla differenza fra gli angoli acuti del triangolo.
- 15) In un triangolo ABC, rettangolo in A, sia AD la bisettrice dell'angolo retto,
e siano E, F le proiezioni del punto D sui cateti AB e AC. Dimostra che $EF = AD$.
- 16) In un triangolo qualsiasi ABC, l'angolo compreso fra la bisettrice e l'altezza che escono dal vertice C
è uguale alla semidifferenza dei due angoli di vertici A e B.
- 17) In un triangolo ABC, siano AD, BE e CF le tre bisettrici, e si indichi con I l'incentro.
Sia poi H la proiezione di I sul lato AB.
Si chiede di dimostrare che i due angoli $\widehat{A\hat{I}H}$ e $\widehat{B\hat{I}F}$ sono fra loro uguali.
- 18) E' dato un triangolo ABC, rettangolo in C.
L'altezza CH relativa all'ipotenusa forma coi cateti due angoli acuti $\widehat{ACH}$ e $\widehat{BCH}$
dei quali si tracciano le bisettrici, fino a tagliare l'ipotenusa rispettivamente in P e in Q.
Ciascuno dei triangoli BCP, ACQ è allora isoscele: dimostralolo.
- 19) Se si prende un punto P sul prolungamento, dalla parte di A, della base AB di un triangolo isoscele
ABC, e si tracciano le distanze PH, PK di P dalle rette su cui giacciono i lati obliqui CA e CB,
allora la differenza $PK - PH$ è uguale all'altezza relativa a uno dei lati obliqui.
- 20) Sia ABC un triangolo, e siano D, E, F i punti medi di AB, AC, BC rispettivamente.
Sapresti spiegare perché il baricentro di DEF coincide col baricentro di ABC?

- 21) Se nel triangolo ABC si tracciano le due altezze BH e CK, l'asse del segmento HK passerà per il punto medio del lato BC: perché?
- 22) Nel triangolo ABC, sia O l'ortocentro, M il punto medio di AB, N il punto medio di AC, D ed E i punti medi di OB e OC rispettivamente. Il quadrilatero DENM è un rettangolo: dimostrarlo.
- 23) Sia PQR un triangolo qualsiasi, M ed N i punti medi dei due lati PQ e PR, H la proiezione di R su PQ. Si chiede di dimostrare che l'angolo $\widehat{HNM}$ è uguale alla differenza fra i due angoli $\widehat{P}$ e $\widehat{Q}$.
- 24) In un triangolo rettangolo ABC, si traccia l'altezza AH relativa all'ipotenusa poi le distanze HK e HS del punto H dai due cateti AB e AC rispettivamente. Dimostra che i due angoli $\widehat{HKS}$ e $\widehat{B}$ sono uguali.
- 25) Dimostra che in ogni trapezio isoscele, gli assi dei quattro lati passano per uno stesso punto.

- 26) Si disegna un triangolo ABC rettangolo in A poi, col compasso, due archi di circonferenza: uno di centro B e passante per A, l'altro di centro C e passante per A. Tali archi di circonferenza vanno a intersecare l'ipotenusa BC nei due punti B' e C' rispettivamente. Ora, l'angolo $\widehat{C'AB'}$ avrà ampiezza costante, qualunque sia la forma del triangolo rettangolo ABC di partenza. Qual è questa ampiezza? Giustifica la risposta.



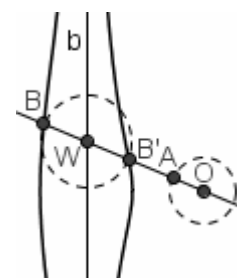
- 27) (*Insidioso: errori logici in agguato...*)

Considera un parallelogramma ABCD e prolunga: il lato AB, dalla parte di B, di un segmento $BE = AD$; poi il lato AD, dalla parte di D, di un segmento $DF = AB$. Dimostra che i tre punti E, C, F sono allineati.

- 28) Disegna un angolo convesso di vertice A. Siano b, c i lati di questo angolo (dovrai "rinominarli"!)
- Prendi un punto su b, chiamalo B e traccia la circonferenza di centro A e raggio AB; questa andrà a intersecare c in un punto che chiamerai C.
- Traccia per il punto B la perpendicolare al lato b; allo stesso modo traccia per C la perpendicolare al lato c; sia D il punto di intersezione di tali due perpendicolari.
- Quale sarà il luogo delle posizioni di D, al variare di B su b? Perché?
- Dopo aver risposto, traccia il luogo con **GeoGebra**.

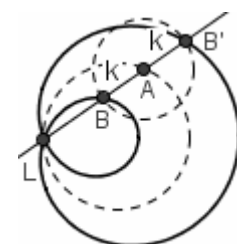
- 29) Traccia una retta per due punti A e B, poi la circonferenza di centro A e passante per B. Definisci ora sulla retta AB un punto mobile; cambia il suo nome in P; modifica il suo colore; traccia la circonferenza di centro B e raggio BP, e chiama Q una delle sue intersezioni con la circonferenza iniziale. La retta AQ taglierà l'ultima circonferenza tracciata in un secondo punto (oltre a Q) che denominerai W e colorerai come desideri. Ora cerca di prevedere (non è facile!) che forma avrà il luogo delle posizioni di W al variare di P, e traccialo infine con **GeoGebra** per confermare le tue congetture.

- 30) Sul foglio **GeoGebra**, crea un punto O ("polo") e una retta b non passante per O. Con centro in O traccia una circonferenza, e prendi su di essa un punto A. Traccia la retta OA, indica con W il punto in cui questa retta interseca la retta b, poi con centro in W traccia una circonferenza di raggio fissato (strumento "Circonferenza dati centro e raggio"). Siano infine B, B' i due punti di intersezione di tale circonferenza con la retta OA. Il luogo descritto dalla coppia di punti B, B' al variare di A è chiamato "**concoide di Nicomede**"; è curioso osservare come cambia di forma se la retta b viene spostata.



- 31) Sul foglio **GeoGebra**, sia L un punto fissato di una circonferenza fissata. Sia poi A un punto che può invece variare, su quella circonferenza. Tracciata la retta LA, i due punti B e B' , che stanno su quella retta da parti opposte rispetto ad A, e sono tali che $AB = AB' = costante = k$, determinano, al variare di A, la **lumaca di Pascal**.

- 32) Traccia una retta per due punti A e B piuttosto vicini, poi la circonferenza di centro A e passante per B. Definisci ora su tale circonferenza un punto; rinominalo, chiamandolo N; scegli per questo punto un bel colore giallo sole; disegna la circonferenza di centro B e raggio BN, poi quella di centro N e raggio NB. Sia G l'intersezione, esterna alla circonferenza iniziale, dell'ultima fra le circonferenze in gioco, con la retta AN; rendi rosso l'aspetto di G. Crea con **GeoGebra** il luogo descritto da G al variare di N.



Questa curva $N \rightarrow G$, da colorare anch'essa in rosso, è una dedica personale dell'autore del libro.