EQUAZIONI FRATTE E LETTERALI

1. EQUAZIONI FRATTE

Sono quelle equazioni nelle quali l'incognita compare, almeno una volta, a denominatore.

Risolvendo un'equazione fratta, si perviene sempre a un passaggio del tipo:

(1) $\frac{\mathrm{N}_1(x)}{\mathrm{D}(x)} = \frac{\mathrm{N}_2(x)}{\mathrm{D}(x)}$ (*la x fra parentesi evidenzia che si tratta di espressioni contenenti l'incognita x*)

Eliminando a questo punto i due denominatori uguali, si ottiene l'equazione

(2) $\mathrm{N}_1(x) = \mathrm{N}_2(x)$

LE DUE EQUAZIONI (1) e (2) NON SONO PERO' NECESSARIAMENTE EQUIVALENTI
(= non hanno necessariamente le stesse soluzioni, può darsi che non abbiano le stesse soluzioni).
Infatti:

a) $\Downarrow$ se un certo valore di x è soluz. della (1), allora lo stesso valore di x è certamente soluz. anche della (2);

b) $\not\Uparrow$ però **non vale il viceversa**. Infatti, se un certo valore di x è soluzione della (2), vuol dire che quel valore di x rende uguali le due espressioni che stanno a NUMERATORE nella (1); ma può eccezionalmente accadere che il valore in questione vada pure ad annullare l'espressione D(x), ossia il DENOMINATORE della (1), e in questo caso NON renderebbe i due membri della (1) uguali, bensì li renderebbe entrambi privi di significato, quindi NON SAREBBE soluzione della (1).

Ricapitolando,

> ♥ **nel caso delle equazioni fratte, la soluzione che si trova alla fine è accettabile**
> **(cioè, è soluzione anche dell'equazione di partenza)**
> **soltanto se NON annulla il denominatore eliminato D(x).**

❑ **Esempio**:

$$\frac{2}{4x^3-x} = \frac{5}{6x^2+3x} + \frac{1}{2x^2-x}$$

$$\frac{2}{x(2x+1)(2x-1)} = \frac{5}{3x(2x+1)} + \frac{1}{x(2x-1)}$$

$$\frac{6}{\cancel{3x(2x+1)(2x-1)}} = \frac{5(2x-1)+3(2x+1)}{\cancel{3x(2x+1)(2x-1)}} \rightarrow$$

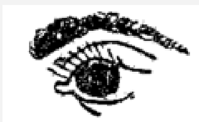
$$6 = 10x - 5 + 6x + 3$$

$$6 = 16x - 2;\ \ -16x = -8$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} \ \text{ NON ACCETTABILE}}$$

L'equazione è perciò IMPOSSIBILE.

OCCHIO!



$3x \neq 0;\ 2x+1 \neq 0;\ 2x-1 \neq 0$
ossia

$$\boxed{x \neq 0;\ x \neq -\frac{1}{2};\ x \neq \frac{1}{2}}$$

$\downarrow$

" CONDIZIONI DI ACCETTABILITA' "
(leggi l'osservazione qui a destra)

♥ Queste annotazioni, che si scrivono nel momento in cui si mandano via i due denominatori uguali, significano:
se alla fine dovessimo trovare come soluzione *x* = 0, oppure *x* = –1/2, oppure *x* = 1/2, si tratterebbe di una "falsa soluzione", o, come si suol dire, di una "soluzione non accettabile", quindi da scartare.

❑ **Un altro esempio**: $\frac{1}{x(x+7)} = \frac{1}{2x(3x-4)}$

$$\frac{2(3x-4)}{\cancel{2x(x+7)(3x-4)}} = \frac{x+7}{\cancel{2x(x+7)(3x-4)}}$$

$2x \neq 0$; $\boxed{x \neq 0}$ $\quad x+7 \neq 0$; $\boxed{x \neq -7}$ $\quad 3x-4 \neq 0$; $3x \neq 4$; $\boxed{x \neq 4/3}$

$$6x-8 = x+7;\ \ 5x = 15;\ \ \boxed{x = 3 \ \ \textit{accettabile}}$$

Come avrai notato, di fronte alle **condizioni contenenti il simbolo ≠ ("diverso da")** ci si comporta esattamente come di fronte alle equazioni: si isola la lettera con gli stessi passaggi, semplicemente scrivendo "≠" anziché "=".

Qualche altro caso:

$\frac{\dots}{\cancel{5x+4}}$ $\quad 5x+4 \neq 0$; $5x \neq -4$; $\boxed{x \neq -\frac{4}{5}}$

$\frac{\dots}{\cancel{(x+3)^2}}$ $\quad (x+3)^2 \neq 0,\ x+3 \neq 0,\ \boxed{x \neq -3}$

Un quadrato è uguale a 0 quando è uguale a 0 la sua base, è diverso da 0 quando è diversa da 0 la sua base

Schematicamente: $\dfrac{N_1(x)}{D(x)}=\dfrac{N_2(x)}{D(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} N_1(x)=N_2(x) \\ D(x)\neq 0 \end{cases}$ OSSIA **l'equazione è equivalente al sistema**. Ricordiamo che la graffa di sistema esprime il connettivo logico $\wedge$ ("ET")

$\boxed{\Rightarrow}$ *Se, per un certo x, è* $\dfrac{N_1(x)}{D(x)}=\dfrac{N_2(x)}{D(x)}$, *allora, per lo stesso x, sarà anche* $\begin{cases} N_1(x)=N_2(x) \\ D(x)\neq 0 \end{cases}$

$\boxed{\Leftarrow}$ *Se, per un certo x, è* $\begin{cases} N_1(x)=N_2(x) \\ D(x)\neq 0 \end{cases}$, *allora, per lo stesso x, sarà anche* $\dfrac{N_1(x)}{D(x)}=\dfrac{N_2(x)}{D(x)}$

♥ **Le "condizioni" vanno poste ogniqualvolta un denominatore cessa di essere tale**, per effetto:

a) dell'**eliminazione dei due denominatori uguali**

b) … ma anche di un "**capovolgimento**"! Esempio:

$$\frac{\frac{x+1}{x+2}}{\frac{x-3}{x-4}}=1 \qquad \frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x-4}{x-3}=1 \qquad \boxed{x\neq 4}$$

(perché $x-4$, che era a denominatore, per effetto del capovolgimento ha cessato di esserlo)

c) … ma anche di una **semplificazione**! Esempio:

$$\frac{\cancel{x-5}}{x-3}\cdot\frac{2x+1}{\cancel{x-5}}=7 \qquad \boxed{x\neq 5}$$

(perché $x-5$, che era a denominatore, per effetto della semplificazione ha cessato di esserlo)

d) … ma anche del **procedimento "veloce"** col quale si può eliminare il denominatore pure senza fare i due denominatori comuni uguali, ma invece **moltiplicando ambo i membri dell'equazione per il denominatore stesso**! Prendiamo ad es. l'equazione $\dfrac{3x-2}{x}+7=0$;

per mandar via il denominatore, in questa situazione molto semplice, anziché fare i due denominatori comuni uguali posso più rapidamente moltiplicare ambo i membri per x ottenendo:

$$x\cdot\left(\frac{3x-2}{x}+7\right)=0\cdot x \qquad 3x-2+7x=0 \qquad \boxed{x\neq 0}$$

(perché comunque, prima della moltiplicazione, un denominatore x c'era)

ESERCIZI 1) $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x+4}{x+2}$ 2) $3\cdot\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9x-1}{x}$ 3) $\dfrac{x+3}{x-3}-\dfrac{x-3}{x+3}=\dfrac{11x+3}{x^2-9}$ 4) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{2x+4}$ ⇨

5) $\dfrac{3}{x^2+4+4x}=\dfrac{2}{x^2-4}$ ⇨ 6) $\dfrac{3x-1}{2x^2-2x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x}=0$ 7) $\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{x}{x+1}$ 8) $\dfrac{1}{x^2-2x+1}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{1}{2x-2}$

9) $\dfrac{2}{x-4}-\dfrac{1}{x}=0$ 10) $\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{3}{x^2-x-2}$ 11) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{4x+5}{x-2}=1$ 12) $\dfrac{4}{x^2-3x+2}=\dfrac{3}{x^2-5x+6}$

13) $2\cdot\dfrac{x}{2x-1}=\dfrac{3x+1}{3x-1}$ ⇨ 14) $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{2}{x-4}=\dfrac{x}{x^2-6x+8}$ 15) $\dfrac{1}{x^2-2x-3}-\dfrac{1}{x^2-6x+9}=\dfrac{x-9}{(x+1)(x-3)^2}$

16) $\dfrac{2}{3x-2}+\dfrac{x+2}{3x^2-8x+4}=0$ ⇨ 17) $\left(\dfrac{1}{4x-3}-\dfrac{1}{4x+3}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{4x}-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{4x+3}=\dfrac{1}{2x}$ 18) $\dfrac{5x-2}{x^4-5x^2+4}=\dfrac{3}{x^3+2x^2-x-2}$

19) $\dfrac{3}{4x^4-5x^2+1}+\dfrac{1}{x^2-4x^4}=\dfrac{1}{2x^4+3x^3+x^2}$ ⇨ 20) $\dfrac{\frac{x+1}{x-7}-\frac{x-7}{x-1}}{7x-25}+(x-1)\left[x^{-2}-(x-1)^{-2}\right]=0$

21) $\left(\dfrac{1}{3x+8}-\dfrac{1}{2x+8}\right)\cdot\left(\dfrac{4}{x}+1\right)=\dfrac{1}{2}$ 22) $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{5}{x^2-2x}=\dfrac{3x^2-11x+5}{x^3-3x^2+2x}$ 23) $\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{x+5}{x+7}$

24) $\dfrac{\frac{2x+3}{x(16x^2-1)}-\frac{1}{4x^2+x}}{x^2}\cdot\dfrac{(x-1)(1+x)-x^2}{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2}=\dfrac{4}{4x^4-x^3}$ 25) $\dfrac{\frac{2}{3x+1}-\frac{1}{3x-2}}{3x-1}-\dfrac{1-\frac{2}{3x}}{\frac{9}{2}x^2-3x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}}=0$

SOLUZIONI

1) $x=2$ 2) $x=1/10$ 3) IMP. ($x=3$ *non acc.*) 4) $x=0$ 5) $x=10$ 6) IMP. ($x=1$ *non acc.*)
7) $x=-2$ 8) $x=1/3$ 9) $x=-4$ 10) IMP. ($x=-1$ *non acc.*) 11) $x=-1$ 12) $x=9$ 13) $x=1$
14) IMP. ($x=4$ *non acc.*) 15) $x=5$ 16) IMP. ($x=2/3$ *non acc.*) 17) $x=-2$ 18) IMP. ($x=-2$ *non acc.*)
19) IMP. ($x=0$ *non acc.*) 20) $x=7/15$ 21) Si trova una soluzione accettabile. Fai la verifica, sostituendo.
22) E' INDET.: ammette come soluzione QUALUNQUE numero reale, TRANNE 0, 1, 2. $S=\mathbb{R}-\{0,1,2\}$
23) $x=-15$ 24) $x=20$ 25) IMP. ($x=-1/3$ *non acc.*)

2. EQUAZIONI LETTERALI

- **Problema 1**
  Un padre ha 53 anni, suo figlio ne ha 15.
  Fra quanti anni il padre avrà il triplo dell'età del figlio?

Facile:

x = numero di anni che devono passare affinché l'età del padre sia tripla di quella del figlio.
Fra x anni, il padre avrà $53+x$ anni, il figlio ne avrà $15+x$.
Possiamo perciò scrivere l'equazione

$$53+x=3(15+x)$$

e risolverla coi semplici passaggi seguenti:

$$53+x=45+3x$$
$$x-3x=45-53$$
$$-2x=-8$$
$$x=4$$

Fra 4 anni, dunque!

Vediamo se è giusto.
- Il padre, che attualmente ha 53 anni, fra 4 anni ne avrà 57.
- E il figlio, che attualmente ha 15 anni, fra 4 anni ne avrà 19.

Bene, 57 è proprio il triplo di 19. Dunque la soluzione è corretta.

- **Problema 2**
  Un padre ha 45 anni, suo figlio ne ha 11.
  Fra quanti anni il padre avrà il triplo dell'età del figlio?

"Ma professore …" – mi dirai tu a questo punto –
" … questo problema è identico al precedente, cambiano solo i dati!"

Infatti, evidentemente è proprio così!!!
… Però io penso che tu stia già comprendendo dove voglio arrivare ...

Abbi pazienza un attimo ancora.
Risolviamo anche questo problema n. 2,
dopodiché saremo pronti per entrare nel "cuore" del discorso.

x = numero di anni che devono passare affinché l'età del padre sia tripla di quella del figlio.
Fra x anni, le due età saranno $45+x$ e $11+x$; l'equazione risolvente è

$$45+x=3(11+x)$$

da cui si ottiene:

$$45+x=33+3x$$
$$x-3x=33-45$$
$$-2x=-12$$
$$x=6$$

Facciamo la verifica.
Fra 6 anni, le due età, che attualmente sono 45 e 11, saranno 45+6 = 51 e 11+6 = 17.
E 51 è proprio il triplo di 17. Tutto OK.

I due problemi proposti avevano dunque "la stessa struttura", differivano soltanto per i dati.
Ma allora … IDEA!
Perché non indicare i dati (l'età attuale del padre e quella del figlio)
con dei SIMBOLI anziché direttamente con dei numeri?
In questo modo, il procedimento sarebbe del tutto GENERALE
e non più legato ad un caso particolare …
e la risoluzione andrebbe bene per TUTTI i problemi di QUEL tipo,
che possiamo divertirci ad inventare.

- **Problema 3 (generalizzato)**
  Un padre ha p anni, suo figlio f anni.
  Fra quanti anni il padre avrà il triplo dell'età del figlio?

x = numero di anni che devono passare affinché l'età del padre sia tripla di quella del figlio.
Fra x anni, il padre avrà $p+x$ anni, il figlio ne avrà $f+x$.
L'equazione risolvente è

$$\boxed{p+x=3(f+x)}$$

EQUAZIONE "LETTERALE" O "PARAMETRICA"
nella quale
$\boxed{x \text{ è l'INCOGNITA}}$
mentre p, f NON sono incogniti, al contrario:
p, f sono NUMERI NOTI, FISSATI, ANCHE SE VOLUTAMENTE IMPRECISATI

Ricaviamo x:

$$p+x=3(f+x)$$
$$p+x=3f+3x$$
$$x-3x=3f-p$$
$$-2x=3f-p$$
$$2x=p-3f$$
$$x=\frac{p-3f}{2}$$

La formuletta trovata fornisce ora, istantaneamente,
la soluzione di TUTTI i problemi del tipo considerato.

Ad esempio, per un padre di 38 anni e un figlio di 8, avremo

$$x=\frac{38-3\cdot 8}{2}=\frac{38-24}{2}=\frac{14}{2}=7$$

… infatti, passati 7 anni, le età saranno 38+7 = 45 e 8+7 = 15; ed è proprio $45=15\cdot 3$.
Verifica tu stesso che, com'è ovvio, anche i due problemi affrontati precedentemente
(p = 53, f = 15; p = 45, f = 11) sono risolti in modo esatto dalla formula appena ottenuta.

- **Problema 4 (ulteriore generalizzazione)**
  Un padre ha p anni, suo figlio f anni.
  Fra quanti anni il padre avrà k volte l'età del figlio?

x = numero di anni che devono passare affinché l'età del padre sia k volte quella del figlio

$$p+x=k(f+x)$$
$$p+x=kf+kx$$
$$x-kx=kf-p$$
$$(1-k)x=kf-p \quad \text{(NOTA 1)}$$
$$x=\frac{kf-p}{1-k}\underset{\text{NOTA 2}}{=}\frac{p-kf}{k-1}$$

Ad esempio, con
$p=31,\ f=7,\ k=4$
si ha

$$x=\frac{p-kf}{k-1}=\frac{31-4\cdot 7}{4-1}=\frac{31-28}{3}=1$$

NOTA 1
Qui si è dovuta RACCOGLIERE L'INCOGNITA x
fra i termini che la contenevano, allo scopo di ottenere
che x comparisse, a primo membro, una sola volta,
moltiplicata per il suo bravo coefficiente $(1-k)$.
Dopodiché, dividendo per il coefficiente di x, si isola x:

$$\frac{\cancel{(1-k)}x}{\cancel{1-k}}=\frac{kf-p}{1-k}$$

NOTA 2
Abbiamo preferito cambiare i segni
di numeratore e denominatore,
in quanto i valori che il parametro k può assumere sono,
evidentemente, 2, 3, 4, … per cui il numero $1-k$ è negativo.

Dunque, ricapitolando:

Si dice “EQUAZIONE LETTERALE” (o anche: “equazione PARAMETRICA”)
un’equazione nella quale, OLTRE ALL’INCOGNITA,
compaiono anche ALTRE LETTERE che però
♥ ***non* stanno a rappresentare numeri incogniti**
bensì NUMERI NOTI, FISSATI,
ANCHE SE VOLUTAMENTE IMPRECISATI.

Tali lettere vengono dette “PARAMETRI” o “costanti”
(meglio sarebbe dire: “COSTANTI ARBITRARIE”).

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{para–}\\ \textit{metro}}}{p} + \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{inco–}\\ \textit{gnita}}}{x} = \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{para–}\\ \textit{metro}}}{k}\;(\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{para–}\\ \textit{metro}}}{f} + \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{inco–}\\ \textit{gnita}}}{x})$$

Altri esempi:

❑ **Problema 5**
Trovare due numeri che diano per somma s e per differenza d

numero minore = x, numero maggiore = $x+d$

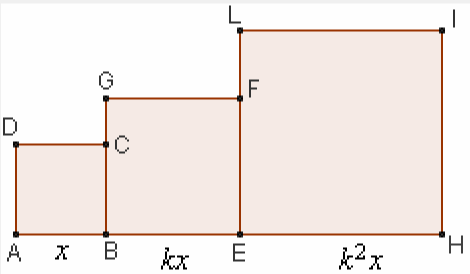
$x+x+d=s$

$2x=s-d$

$x=\dfrac{s-d}{2}$

numero minore = $\boxed{\dfrac{s-d}{2}}$, numero maggiore $=\dfrac{s-d}{2}+d=\dfrac{s-d+2d}{2}=\boxed{\dfrac{s+d}{2}}$

❑ **Problema 6**
Nella figura sottostante compaiono 3 quadrati.



Il lato del quadrato intermedio è k volte il lato del quadrato più piccolo,
e il lato del quadrato più grande è k volte il lato del quadrato intermedio.
Inoltre il contorno del poligono AHILFGCD ha una misura nota $2p$.
Determinare i lati dei tre quadrati.

$\mathrm{AB}=x,\quad \mathrm{BE}=kx,\quad \mathrm{EH}=k\cdot kx=k^2x$

$\mathrm{GC}=\mathrm{BG}-\mathrm{BC}=kx-x,\quad \mathrm{LF}=\mathrm{EL}-\mathrm{EF}=k^2x-kx$

$$\underset{x}{\mathrm{AB}}+\underset{kx}{\mathrm{BE}}+\underset{k^2x}{\mathrm{EH}}+\underset{k^2x}{\mathrm{HI}}+\underset{k^2x}{\mathrm{IL}}+\underset{k^2x-kx}{\mathrm{LF}}+\underset{kx}{\mathrm{FG}}+\underset{kx-x}{\mathrm{GC}}+\underset{x}{\mathrm{CD}}+\underset{x}{\mathrm{DA}}=2p$$

$$\underline{x}\,\underline{\underline{+kx}}+\overset{\frown}{k^2x}+\overset{\frown}{k^2x}+\overset{\frown}{k^2x}+\overset{\frown}{k^2x}\cancel{-kx}\cancel{+kx}\,\underline{\underline{+kx}}\cancel{-x}\cancel{+x}\,\underline{+x}=2p$$

$2x+2kx+4k^2x=2p$

$x+kx+2k^2x=p$

$(1+k+2k^2)x=p$

$\mathrm{AB}=\boxed{\dfrac{p}{1+k+2k^2}},\quad \mathrm{BE}=\boxed{\dfrac{kp}{1+k+2k^2}},\quad \mathrm{EH}=\boxed{\dfrac{k^2p}{1+k+2k^2}}$

ESERCIZI: EQUAZIONI LETTERALI

NOTA
In realtà, quando nel procedimento si deve dividere per un'espressione contenente il parametro, occorrerebbe fare la cosiddetta "**discussione**", cioè riconoscere quei valori del parametro per i quali tale divisione non è effettuabile, in quanto l'espressione in gioco si annulla.
In tali casi l'equazione diventa impossibile, o indeterminata.
Vedremo questo aspetto, che per ora fingiamo di ignorare, un po' più avanti.

1) $7x-6a=5x$ 2) $4x+a=0$ 3) $1-ax=0$ 4) $mx-m=0$ 5) $5x-k=1$ 6) $3(x+d)=5(x-d)$

7) $a(2x-3)+2(x-1)=1$ 8) $h+\frac{x}{3}=\frac{x}{2}$ 9) $2x-m=n$ 10) $22x+44a=33x-55b$

11) $4dx-c=dx+a+b$ 12) $3(1+x+c)=4(c+x)$ 13) $ax=2+x$ 14) $10(ax-b)=bx+a$

15) $2(3bx+1)=b(x+5)$ 16) $a(x-1)-1=x$ 17) $3(c-x)-cx=0$ 18) $\frac{x}{4}-1=kx+k$

19) $n(x-n)+1=-x$ 20) $k^3=k(x-1)+k$ 21) $(e-1)x+2(ex+1)-1=ex$ 22) $\frac{px+qx}{p}=\frac{1+x}{2}$

23) $a(x-1)+b(x+1)=c(1-x)$ 24) $x-\left[\frac{k}{3}(x-1)+2\right]=0$ 25) $\frac{x(1+c)}{b}+x=1$

26) $\frac{1}{2}ax=\frac{bx}{2}+ax+1$ 27) $a(x-3)=a^2-x+2$ 28) $p\left(p^2+p+1\right)=x(p+1)-1$

29) $a^2(x-1)+(2a+1)x+1=0$ 30) $h\left(2x-2+\frac{x}{h}\right)=x+2h^2(h+1)$ 31) $a\cdot\frac{3ax+1}{2}=\frac{1+2x}{3}$

www.mathvizza.com

Solve for the variable indicated in the parenthesis
(vai a rivedere anche il capitoletto sull' "inversione di formule" alle pagine 172-173)!

32) $P=IRT$ $[T]$ 33) $A=2(L+W)$ $[W]$ 34) $y=5x-6$ $[x]$ 35) $2x-3y=8$ $[y]$ 36) $\frac{x+y}{3}=5$ $[x]$

37) $y=mx+b$ $[b]$ 38) $ax+by=c$ $[y]$ 39) $P=\frac{R-C}{N}$ $[R]$ 40) $A=4\pi r^2$ $[r^2]$ 41) $A=\frac{R}{2L}$ $[L]$

http://webserver.exeter.k12.pa.us

Literal Equations. Formulas can be manipulated through the process of solving literal equations.

42) Solve for b: $A=bh$ (area of a parallelogram)

43) Solve for h: $A=\frac{1}{2}bh$ (area of a triangle)

44) Solve for d: $C=\pi d$ (circumference of a circle)

45) Solve for L: $P=2L+2W$ (perimeter of a rectangle) [beh, di solito un perimetro si indica con $\mathbf{2}p$!]

RISPOSTE

1) $x=3a$ 2) $x=-\frac{a}{4}$ 3) $x=\frac{1}{a}$ 4) $x=1$ 5) $x=\frac{k+1}{5}$ 6) $x=4d$ 7) $x=\frac{3}{2}$ 8) $x=6h$

9) $x=\frac{m+n}{2}$ 10) $x=4a+5b$ 11) $x=\frac{a+b+c}{3d}$ 12) $x=3-c$ 13) $x=\frac{2}{a-1}$ 14) $x=\frac{a+10b}{10a-b}$

15) $x=\frac{5b-2}{5b}$ 16) $x=\frac{a+1}{a-1}$ 17) $x=\frac{3c}{c+3}$ 18) $x=\frac{4(1+k)}{1-4k}$ 19) $x=n-1$ 20) $x=k^2$

21) $x=-\frac{1}{2e-1}=\frac{1}{1-2e}$ 22) $x=\frac{p}{p+2q}$ 23) $x=\frac{a-b+c}{a+b+c}$ 24) $x=\frac{6-k}{3-k}=\frac{k-6}{k-3}$ 25) $x=\frac{b}{1+b+c}$

26) $x=-\frac{2}{a+b}$ 27) $x=a+2$ 28) $x=p^2+1$ 29) $x=\frac{a-1}{a+1}$ 30) $x=h^2+h+1$ 31) $x=-\frac{1}{3a+2}$

32) $T=\frac{P}{IR}$ 33) $W=\frac{A}{2}-L=\frac{A-2L}{2}$ 34) $x=\frac{y+6}{5}$ 35) $y=\frac{2x-8}{3}$ 36) $x=15-y$

37) $b=y-mx$ 38) $y=\frac{c-ax}{b}$ 39) $R=PN+C$ 40) $r^2=\frac{A}{4\pi}$ 41) $L=\frac{R}{2A}$

42) $b=\frac{A}{h}$ 43) $h=\frac{2A}{b}$ 44) $d=\frac{C}{\pi}$ 45) $L=\frac{P-2W}{2}$

ESERCIZI: PROBLEMI CHE CONDUCONO A UN'EQUAZIONE LETTERALE

1) L'età di Mario fra k anni sarà doppia di quella che egli aveva k anni fa. Quanti anni ha Mario?

2) (*Ulteriore generalizzazione del problema precedente*)
L'età di Mario fra k anni sarà n volte quella che egli aveva k anni fa. Quanti anni ha Mario?

3) Trovare due numeri interi positivi consecutivi sapendo che la differenza dei loro quadrati è D.

4) (*Ulteriore generalizzazione del problema precedente*)
Trovare due numeri positivi sapendo che la loro differenza è d e la differenza dei loro quadrati è D.

5) La somma di cinque numeri interi positivi consecutivi è s. Quanto vale il numero più piccolo?

6) ⇨ In un triangolo isoscele di perimetro $2p$, la differenza fra lato obliquo e base è d. Trovare i lati.

7) In un triangolo isoscele di perimetro $2p$, la differenza fra base e lato obliquo è d. Trovare i lati.

8) Trovare i lati di un triangolo isoscele di perimetro $2p$,
sapendo che la somma fra base e lato obliquo misura s.

9) Trovare i lati di un triangolo isoscele conoscendone il perimetro $2p$
e sapendo che il lato obliquo è lungo k volte la base.

10) Trovare i lati di un triangolo isoscele conoscendone il perimetro $2p$
e sapendo che la base è k volte il lato obliquo.

11) ⇨ Dopo uno sconto del p%, il prezzo finale di un oggetto è f. Qual era il prezzo originario?

12) Un commerciante pratica uno sconto del p%, e dopo qualche mese decide di fare un ulteriore sconto, sul prezzo già ribassato, del q%, portando l'articolo a un prezzo finale f. Risali al prezzo originario.

13) Quando nacquero i suoi 3 figli, un padre aveva rispettivamente: p_1 anni, p_2 anni e p_3 anni.
Oggi l'età del padre è uguale alla somma delle età dei tre figli. Qual è l'età attuale del padre?

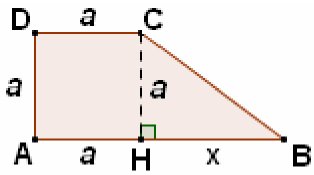
14) ⇨ In un triangolo rettangolo un cateto misura a, e l'ipotenusa supera di d l'altro cateto.
Trovare le misure del cateto incognito, dell'ipotenusa e del perimetro.
(*L'equazione risolvente si può impostare applicando il Teorema di Pitagora, vedi pag. 214*)

15) In un rettangolo di perimetro noto $2p$, la base è k volte l'altezza. Trovare le dimensioni.

16) In un rettangolo di perimetro noto $2p$, la differenza fra le dimensioni è d. Trovare le dimensioni.

17) Di due circonferenze si sa che la somma dei loro diametri è s, mentre la differenza fra le lunghezze delle due circonferenze uguaglia il diametro della circonferenza maggiore.
Quanto misura quest'ultimo?

18) Determina x,
con riferimento al trapezio della figura qui a fianco,
in modo che sia uguale a S l'area del trapezio.



19) Dividere un numero dato a in due parti, proporzionali ai numeri h e k $(x:h = y:k)$

20) Una classe si reca in gita scolastica; il costo, che è stato pagato in anticipo all'agenzia di viaggi, è di a euro per studente. Tuttavia, il giorno prima della partenza, uno dei ragazzi ha un infortunio che lo costringe a rinunciare alla gita. Sul pullman, i ragazzi discutono di questo fatto e decidono di tassarsi per rimborsare al compagno il prezzo pagato; così il costo *pro capite*, per i partecipanti, sale a b euro. Quanti sono gli studenti che effettivamente partono per la gita?

21) Il piano tariffario dei telefonini di marca A prevede una spesa di a centesimi di euro al minuto, con l'apparecchio fornito gratuitamente, mentre per la marca B i centesimi al minuto sono b, con $b < a$, ma in compenso è prevista una spesa iniziale di m euro per l'acquisto del telefonino.
Dopo quanti minuti di conversazione si comincia a risparmiare, con la compagnia B?

22) Due autobus, sulle due corsie di una lunga autostrada, procedono in direzioni opposte venendosi incontro. Supposto che si trovino a una distanza d (in km) e che procedano alle velocità costanti di v_1 e $v_2 = v_1 + k$ km/h, dopo quanti minuti si incroceranno?

23) Un autobus transita davanti a un pittoresco castello ai bordi dell'autostrada, procedendo ad una velocità costante v_1 (in km/h). Dopo r minuti nella stessa posizione troviamo un secondo autobus, in viaggio nella stessa direzione del primo, ma ad una diversa velocità costante di $v_2 > v_1$ km/h.
Quanti minuti devono ancora passare prima che l'autobus più veloce sorpassi il più lento?

SOLUZIONI dei problemi

1) $3k$ anni

2) $\dfrac{k(n+1)}{n-1} = k\dfrac{n+1}{n-1}$ anni

3) $\dfrac{D-1}{2}, \dfrac{D+1}{2}$

4) $\dfrac{D-d^2}{2d}, \dfrac{D+d^2}{2d}$

5) $\dfrac{s-10}{5}$

6) $base = \dfrac{2(p-d)}{3}; \ \ lato\ obliquo = \dfrac{2p+d}{3}$

7) $base = \dfrac{2(p+d)}{3}; \ \ lato\ obliquo = \dfrac{2p-d}{3}$

8) $base = 2s-2p; \ \ lato\ obliquo = 2p-s$

9) $base = \dfrac{2p}{1+2k}; \ \ lato\ obliquo = \dfrac{2kp}{1+2k}$

10) $base = \dfrac{2kp}{2+k}; \ \ lato\ obliquo = \dfrac{2p}{2+k}$

11) $\dfrac{100f}{100-p} = \dfrac{100}{100-p} \cdot f = f \cdot \dfrac{100}{100-p}$

12) $\dfrac{10000}{(100-p)(100-q)} \cdot f$

13) $\dfrac{p_1+p_2+p_3}{2}$

14) $\dfrac{a^2-d^2}{2d}, \ \dfrac{a^2+d^2}{2d}, \ \dfrac{a^2+ad}{d}$

15) $altezza = \dfrac{p}{1+k}; \ \ base = \dfrac{kp}{1+k}$

16) $\dfrac{p-d}{2}, \dfrac{p+d}{2}$

17) $\dfrac{\pi s}{2\pi-1}$

18) $x = \dfrac{2S-2a^2}{a}$

19) $\dfrac{ah}{h+k}, \dfrac{ak}{h+k}$

20) Sono $\dfrac{a}{b-a}$

21) Dopo $\dfrac{100m}{a-b}$ minuti

22) Dopo $\dfrac{60d}{2v_1+k}$ minuti

23) L'equazione risolvente può essere
$v_2 \cdot \dfrac{x}{60} = v_1 \cdot \dfrac{r}{60} + v_1 \cdot \dfrac{x}{60}$ se si indica con x il numero di minuti che devono passare; si trova $x = \dfrac{v_1}{v_2-v_1} r$ minuti

Dal sito www.amsi.org.au:

EXAMPLE
Solve the equation

$$5(x - a) + 2a = 3x + 7a - 2$$

for x.

SOLUTION
We proceed using the usual rules, keeping our focus on the unknown x

$$5(x - a) + 2a = 3x + 7a - 2$$
$$5x - 5a + 2a = 3x + 7a - 2$$
$$5x - 3x = 7a + 5a - 2a - 2$$
$$2x = 10a - 2$$
$$x = 5a - 1.$$

Note:
The answer can be checked in the usual way

LHS = $5(5a - 1 - a) + 2a = 22a - 5$

RHS = $3(5a - 1) + 7a - 2 = 22a - 5$

Therefore, LHS = RHS

[LHS = Left Hand Side = Primo membro
RHS = Right Hand Side = Secondo membro]

"*Idle no more*" è un movimento di protesta che con la disobbedienza civile e la resistenza non violenta si propone di promuovere i diritti delle popolazioni indigene, espropriate delle loro terre e della loro dignità, e di combattere contro il degrado dell'ecosistema e l'ingiustizia sociale.
.... Cosa ha a che fare tutto ciò con le equazioni letterali? ....
Dovremmo piuttosto ribaltare il punto di vista e chiederci che senso possono avere la scienza e la matematica se il mondo in cui viviamo è sempre più innaturale, iniquo e autolesionista.
Il sistema perverso del profitto a tutti i costi, della predazione delle risorse e dello spreco sistematico, per il feticcio assurdo di una produzione e un consumo che dovrebbero crescere senza fine, genera solo infelicità e falsi bisogni: e va (pacificamente) rivoltato come un calzino!!!!!! *Questa* soprattutto è l'equazione che mi auguro tu comprenda, e contribuisca a risolvere.

3. "DISCUSSIONE" DELLE EQUAZIONI LETTERALI

Si dice "DISCUSSIONE" di un'equazione letterale, la RICERCA di quei PARTICOLARI VALORI DEL PARAMETRO (o dei parametri) PER CUI L'EQUAZIONE RISULTA
- **IMPOSSIBILE (= priva di soluzioni)**
- **oppure INDETERMINATA (= dotata di infinite soluzioni).**

Il riconoscimento di tali valori "notevoli" avviene all'atto del passaggio finale,
ossia quando, per isolare x, occorre dividere ambo i membri per il coefficiente di x; ed eventualmente nel caso (raro) in cui l'equazione sia semplificabile per un'espressione contenente il parametro.

Di fronte ad un'equazione letterale, dobbiamo innanzitutto tenere conto di un'idea fondamentale:

♪ **quando noi pensiamo che il parametro indica UN NUMERO FISSATO,**
da *questo* punto di vista abbiamo *UNA* EQUAZIONE

♫ **quando pensiamo che il valore del parametro può essere FISSATO AD ARBITRIO,**
da *quest'altro* punto di vista abbiamo *UNA FAMIGLIA DI INFINITE* EQUAZIONI:
ad *ogni* valore che il parametro può assumere corrisponde *una* delle equazioni della "famiglia".

♥ **Ora, la "discussione" consiste nell'andare a cercare gli eventuali "elementi degeneri" di questa famiglia, ossia quelle particolari equazioni della famiglia (se ce ne sono) che risultano, eccezionalmente, impossibili o indeterminate.**

Vediamo una piccola rassegna di ESEMPI.

1) $ax-2=5x$

Trasportiamo i termini contenenti x a 1° membro e i termini noti a 2° membro:

$$ax-5x=2$$

Raccogliamo x:

$$\underbrace{(a-5)}_{\text{coefficiente di } x}\quad x=2$$

Ora l'obiettivo è di isolare x;
x è moltiplicata per il suo coefficiente $(a-5)$,
per cui occorrerà dividere entrambi i membri per tale coefficiente.

♥ MA UNA DIVISIONE E' EFFETTUABILE SOLTANTO SE
IL NUMERO PER CUI SI INTENDE DIVIDERE E' DIVERSO DA ZERO !

Quindi dobbiamo DISTINGUERE DUE CASI !!!

$$\boxed{(a-5)x=2}$$

↙ ↘

$\boxed{1°\ caso:\ se\ \ a-5\neq 0}$, ossia $a\neq 5$,

possiamo dividere per $(a-5)$ e ricavare

$$x=\frac{2}{a-5}$$

$\boxed{2°\ caso:\ se\ \ a-5=0}$, ossia $a=5$,

NON possiamo isolare x;
siamo BLOCCATI al passaggio $(a-5)x=2$
che diventa, nella fattispecie,
$(5-5)\cdot x=2$.
Perciò, nel caso particolare $a=5$,
la nostra equazione si riduce a
$0\cdot x=2$
IMPOSSIBILE (*non esiste nessun numero il quale, moltiplicato per* 0, *dia come risultato* 2)

- Facciamo una verifica: l'equazione iniziale $ax-2=5x$, cosa diventa nel caso particolare $a=5$?
  Diventa $5x-2=5x$ ossia $\cancel{5x}-2=\cancel{5x}$; $-2=0$ IMPOSSIBILE.
- Vediamo la verifica per un qualunque caso "normale", ad esempio il caso $a=3$. Si ha
  $3x-2=5x;\ -2x=2;\ x=\boxed{-1}$ … e -1 è proprio il valore assunto dalla frazione $\frac{2}{a-5}$ quando $a=3$.

2) $\dfrac{m(mx-1)-x}{3}=1$

$m(mx-1)-x=3;\quad m^2x-m-x=3;\quad m^2x-x=m+3;\quad (m^2-1)x=m+3$

$\boxed{(m+1)(m-1)x=m+3}$

Se $(m+1)(m-1)\neq 0$, ossia $m\neq -1$ e $m\neq +1$, brevemente: $m\neq \pm 1$ (un prodotto è diverso da zero quando lo sono tutti i suoi fattori; è uguale a zero quando si annulla anche un solo fattore), potremo dividere per $(m+1)(m-1)$ ottenendo $x=\dfrac{m+3}{(m+1)(m-1)}$

- Se $m=1$ l'equazione diventa $0\cdot x=4$ *imposs.*
- Se $m=-1$ l'equazione diventa $0\cdot x=2$ *imposs.*

3) $\dfrac{1}{3}ax+x-\dfrac{2}{3}=\dfrac{ax}{2}-\dfrac{1}{6}b$

$\dfrac{2ax+6x-4}{\cancel{6}}=\dfrac{3ax-b}{\cancel{6}};\quad 2ax-3ax+6x=-b+4;\quad -ax+6x=-b+4;\quad ax-6x=b-4$

$\boxed{(a-6)x=b-4}$

NOTA ♥ **$0\cdot x$ = un numero diverso da zero IMPOSSIBILITA'**
$0\cdot x=0$ INDETERMINAZIONE (infinite soluzioni)

Se $a-6\neq 0$, ossia $a\neq 6$, $x=\dfrac{b-4}{a-6}$

Se $a=6$ l'equazione diventa

$0\cdot x=b-4$ $\begin{cases} \textit{impossibile se } b-4\neq 0, \textit{ ossia } b\neq 4 \\ \textit{indeterminata } (0\cdot x=0) \textit{ se } b=4 \end{cases}$

NOTA

4) $3(px-4)-q=0$

$3px-12-q=0$

$\boxed{3px=q+12}$

Se $3p\neq 0$, ossia $p\neq 0$: $x=\dfrac{q+12}{3p}$

Se $p=0$ l'equazione diventa $3\cdot 0\cdot x=q+12$

$0\cdot x=q+12$ $\begin{cases} \textit{imposs. se } q+12\neq 0, \textit{ ossia } q\neq -12 \\ \textit{indet. se } q=-12 \end{cases}$

5) $a(x-1)+5=x+b$

$ax-a+5=x+b;\quad ax-x=a+b-5$

$\boxed{(a-1)x=a+b-5}$

Se $a-1\neq 0$, ossia $a\neq 1$, $x=\dfrac{a+b-5}{a-1}$

Se $a=1$ l'equazione diventa $0\cdot x=1+b-5$

$0\cdot x=b-4$ $\begin{cases} \textit{impossibile se } b\neq 4 \\ \textit{indeterminata se } b=4 \end{cases}$

6) $(a-b)^2x-1=a+b(bx+1)$

$a^2x-2abx\cancel{+b^2x}-1=a+\cancel{b^2x}+b;\quad a^2x-2abx=a+b+1$

$\boxed{a(a-2b)x=a+b+1}$

Se $a(a-2b)\neq 0$, ossia $a\neq 0\wedge a\neq 2b$, $x=\dfrac{a+b+1}{a(a-2b)}$

- Se $a=0$ l'equazione diventa $0\cdot x=b+1$ $\begin{cases} \textit{imposs. se } b\neq -1 \\ \textit{indet. se } b=-1 \end{cases}$
- Se $a=2b$ l'equazione diventa $0\cdot x=2b+b+1$, quindi

$0\cdot x=3b+1$ $\begin{cases} \textit{imposs. se } b\neq -\frac{1}{3} \\ \textit{indet. se } b=-\frac{1}{3} \textit{ perciò } a=2b=-\frac{2}{3} \end{cases}$

7) $x\left(a^3+1\right)-a^2\left(3x+b\right)=a-x\left(2a-1\right)$

$$a^3x\cancel{+x}-3a^2x-a^2b=a-2ax\cancel{+x}$$

$$\boxed{a^3x-3a^2x-a^2b=a-2ax}$$

Si osserva a questo punto che l'equazione è semplificabile per a !
Ora, SEMPLIFICARE equivale a DIVIDERE, e, di nuovo,

UNA DIVISIONE E' EFFETTUABILE SOLTANTO SE
IL NUMERO PER CUI SI INTENDE DIVIDERE E' DIVERSO DA ZERO!

Quindi dovremo DISTINGUERE DUE CASI:

Se $\boxed{a\neq 0}$ è possibile semplificare, ottenendo:

$$a^{\cancel{3}\,2}x-3a^{\cancel{2}}x-a^{\cancel{2}}b=\overset{1}{\cancel{a}}-2\cancel{a}x$$
$$a^2x-3ax-ab=1-2x$$

Se $\boxed{a=0}$ l'equazione diventa

$$0\cdot x-0\cdot x-0\cdot b=0-0\cdot x$$
$$0=0$$
INDETERMINATA

Proseguiamo ora, ponendoci nel caso $a\neq 0$, con l'equazione semplificata:

$$a^2x-3ax-ab=1-2x$$
$$a^2x-3ax+2x=ab+1$$
$$\left(a^2-3a+2\right)x=ab+1$$
$$\boxed{(a-1)(a-2)x=ab+1}$$

Se $(a-1)(a-2)\neq 0$, cioè $\boxed{a\neq 1\wedge a\neq 2}$:

$$x=\frac{ab+1}{(a-1)(a-2)}$$

Se $\boxed{a=1}$ l'equazione diventa:

$$(1-1)(1-2)x=1\cdot b+1$$
$$0\cdot x=b+1\left\langle\begin{array}{l}\textit{impossibile se } b\neq -1\\ \textit{indeterminata se } b=-1\end{array}\right.$$

Se $\boxed{a=2}$ l'equazione diventa:

$$(2-1)(2-2)x=2b+1$$
$$0\cdot x=2b+1\left\langle\begin{array}{l}\textit{impossibile se } b\neq -\frac{1}{2}\\ \textit{indeterminata se } b=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

IN DEFINITIVA,
i CASI DI INDETERMINAZIONE sono:

- $a=0,\ b$ *qualsiasi (infinite equazioni)*
- $a=1,\ b=-1$
- $a=2,\ b=-\frac{1}{2}$

mentre i CASI DI IMPOSSIBILITA' sono:

- $a=1,\ b\neq -1$ (*infinite equazioni*)
- $a=2,\ b\neq -\frac{1}{2}$ (*infinite equazioni*)

Per esercizio, dai, riprendi l'equazione iniziale

$$x\left(a^3+1\right)-a^2\left(3x+b\right)=a-x\left(2a-1\right)$$

e …

- *va' a vedere cosa diventa nel caso* $a=1, b=-1$*: fatti i vari calcoli e passaggi, troverai un'equazione INDETERMINATA.*
- *Fai lo stesso con* $a=1, b=2$*: troverai un'equazione IMPOSSIBILE.*
- *Fai lo stesso con* $a=3, b=4$*: troverai un'equazione con una e una sola soluzione, data da*

$$x=\left[\frac{ab+1}{(a-1)(a-2)}\right]_{a=3,\,b=4}=$$
$$=\frac{3\cdot 4+1}{(3-1)(3-2)}=\frac{12+1}{2\cdot 1}=\frac{13}{2}$$

ESERCIZI SULLE EQUAZIONI LETTERALI CON DISCUSSIONE

(*soluzioni alle pagine 391, 392, 393*)

1) Scrivi l'equazione che si ottiene dall'equazione letterale $m(1+x)=2(1+m)$ dando a m il valore -4. Risolvi l'equazione. Fai lo stesso per $m=1,\ m=3,\ m=0$. Poi risolvi e discuti l'equazione "generale" per vedere se il suo risultato va d'accordo con quanto hai stabilito nei casi particolari considerati.

2) Scrivi l'equazione che si ottiene dall'equazione letterale $\frac{k(x+k)}{2}=x(k+1)$ dando a k, successivamente, i valori $2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2$. Risolvi l'equazione nei vari casi. Poi risolvi e discuti l'equazione "generale" e controlla se c'è accordo con quanto ricavato in precedenza.

3) Risolvi l'equazione che si ottiene dall'equazione letterale $ax+1=2(a-x+1)$ attribuendo al parametro i valori $2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2$. Successivamente risolvi e discuti l'equazione "generale".

4) Risolvi l'equazione che si ottiene dall'equazione letterale $p(1-x)+2(x-q)=0$ per:
a) $p=3, q=5$ b) $p=1, q=-3$ c) $p=2, q=1$ d) $p=2, q=4$.
Successivamente risolvi e discuti l'equazione "generale".

RISOLVI E DISCUTI le seguenti equazioni letterali:

5) a) $ax-1=0$ b) $ax-a=0$ c) $ax-1=a$ d) $mx+n=0$ e) $2(x-1)=a$ f) $ax-2=b$

6) $m(x-5)=3x$

7) $ax=4(2-x)$ Dopo aver risolto l'equazione letterale $ax=4(2-x)$, poni, in essa, al posto di a il valore 3 e risolvi l'equazione numerica così ottenuta, controllando che il risultato "particolare" e quello generale vadano d'accordo. Fai poi lo stesso con $a=0,\ a=4,\ a=-3,\ a=-4$.

8) $\frac{x}{2}-\frac{1}{6}=k(2x-1)+\frac{1}{3}$ 9) $b(x-4)=b-x$ 10) $\frac{c(x-1)}{3}=x+1$ 11) $ax+b=3(2b-x)+1$

12) $\frac{bx-a}{4}+1=2x$ Dopo aver risolto l'equazione letterale $\frac{bx-a}{4}+1=2x$, poni, in essa, $a=1$ e $b=-1$, e risolvi l'equazione numerica così ottenuta, controllando che il risultato "particolare" e quello generale vadano d'accordo.
Fai poi lo stesso con $\begin{cases}a=5\\b=9\end{cases}$, $\begin{cases}a=3\\b=7\end{cases}$, $\begin{cases}a=3\\b=8\end{cases}$, $\begin{cases}a=4\\b=8\end{cases}$, $\begin{cases}a=4\\b=7\end{cases}$, $\begin{cases}a=-2\\b=5\end{cases}$

13) $(p+1)x+4=n$ 14) $3(bx-a)+1=0$ 15) $4x(1-m)=2q-m^2x$

16) $p(x-1)+x(q-2)=q(x+1)-(x+5)$ 17) $bx+a^2=(a+1)^2-(a+b+2)$ 18) $px+1=s+2(x-p)$

19) $\frac{mx+m}{6}=\frac{x+2a}{3}-\frac{a}{2}$ 20) $\frac{p(x-q)-1}{10}=x$ 21) $a(x-1)+b(x+1)+2=0$ 22) $b(x-1)-c(x+1)=x$

23) $k(x-1)-2h=0$ 24) $m(x-1)=n$ 25) $h+2x=\frac{k}{2}(x-1)$ 26) $\frac{h}{2}(x-h)+2=x$

27) $s(sx-2x-1)=1$ 28) $x(m^2+k)-(k+9)(x+1)+8=0$ 29) $a(ax-1)+1=-ax$

30) $(k-1)^2x+2(kx-n)=2x$ 31) $c(2-dx)+d(1-cx)+2=0$ 32) $r(r^2x-s)=r^2x+2$

33) $4abx-3=a+2b$ 34) $x(k^2+1)=k(2x+1)$ 35) $a(ax-1)=2(3x+b)+ax$

36) $a(bx-2x+1)=2(a-x)+b(x+1)$ 37) $p(qx-2)+1=0$ 38) $mx-4=(-m-2)(-m+2)+m$

39) $a(x-2)-5x=(a-6)(a+4)-1$ 40) $b^2(x-1)+x=x(2b+1)$ 41) $4a^2(3x-4)+1=(7a-1)x$

42) $bx-3(x-1)=c-2x$ 43) $\frac{6+n^2(n+x)}{3}=2-\frac{n(1+n)(1-n)}{3}$ 44) $2(ax-1)=a+b$ 45) $3(ax-1)=-bx$

46) $\frac{ax}{10}-\frac{1}{2}bx+\frac{1}{10}=\frac{a}{5}+\frac{1}{10}b-1$ 47) $c(3x-1)-1=d(2x+1)$ 48) $a(ax-bx-1)=b+6$

49) $(a-b)x=x+a+b$ 50) $q(1+x)+1=p(1-x)+x$ 51) $\frac{b(x-1)}{2}+1=cx$

52) $a(x-a)+3b(2a-x)=9b^2$ 53) $a(x-1)=\frac{1-[b(x+1)+x]}{2}$

54) $b(3bx-1)=a-c$ 55) $r(x-1)+s(x+1)=0$

56) Per quale valore del parametro l'equazione letterale seguente: $k(x-1)+3=5x$ ha per soluzione
a) 2? b) 0? c) -3? d) 1?

57) Per quale valore del parametro l'equazione letterale seguente: $m(x+1)=1$ ha per soluzione
a) 2? b) 0? c) 1? d) -1?

58) Per quale valore del parametro l'equazione letterale seguente: $hx-1=2(h-x)$ ha per soluzione
a) 0? b) 1? c) 2? d) 3?

59) Quali valori occorre dare ai due parametri *a*, *b* in modo che l'equazione $a(x-3)+b=1-x$ risulti indeterminata?

60) Può l'equazione $x=\frac{m}{2}(x-1)$ risultare impossibile? E indeterminata?

61) Può l'equazione $ax-1=(a-1)(a+1)+a(1-x)$
a) risultare impossibile? b) essere indeterminata? c) avere per soluzione $x=0$?

62) Per quale valore del numero *k* l'equazione $3(2x+1)-x=k(x+1)-2$ è impossibile?
a) Per $k=0$? b) o per $k=5$? c) o per $k=-5$? d) o per nessun valore di k?

63) Seleziona l'affermazione corretta. L'equazione $3(x+5)+11x=7(2x+2)+1$
a) ha come unica soluzione $x=0$ b) non ha nessuna soluzione c) ha infinite soluzioni
d) nessuna delle affermazioni precedenti è vera

64) Seleziona l'affermazione corretta. L'equazione $3ax-5=x$ ha come soluzione $x=0$
a) quando $a=\frac{1}{3}$ b) quando $a=0$ c) quando $a=-1$ d) per nessun valore di *a*

65) Seleziona l'affermazione corretta. L'equazione $x^n=x+2$ ha come soluzione $x=-1$
a) quando *n* è pari b) quando *n* è dispari c) solo quando *n*=2 d) nessuna delle risposte precedenti è esatta

66) Per quale valore del numero *k* le due equazioni $4(x+1)=x-2$ e $2x+1=k$ hanno la stessa soluzione?
a) Per $k=-5$? b) Per $k=-3$? c) Per $k=-1$? d) Per nessun valore di k?

67) Per quale valore del numero *h* le due equazioni $2(x-2h)+h=1$ e $\frac{x}{2}+\frac{1-h}{3}+\frac{1}{6}h=0$
hanno la stessa soluzione? E qual è il valore della soluzione comune?

68) Per quale valore di *m* accade che la soluzione dell'equazione $x-1=\frac{m}{3}$ è uguale al doppio
della soluzione dell'equazione $x+1=\frac{x+m}{2}$? E quanto valgono in tal caso tali soluzioni?

69) Scrivi un'equazione letterale, col parametro *a*, della quale le equazioni seguenti:
$13x=9$; $6x=2$; $0\cdot x=-4$
siano casi particolari, ottenuti assegnando al parametro un determinato valore.

70) Scrivi un'equazione letterale, col parametro *a*, che:
sia impossibile quando $a=3$; abbia soluzione nulla quando $a=2$ e anche quando $a=1$

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULLE EQUAZIONI LETTERALI CON DISCUSSIONE

OSSERVAZIONE METODOLOGICA

Di fronte all'equazione letterale (tanto per fare un esempio) $(k-2)x = m-3$,

si potrebbe anche dividere "brutalmente" per $(k-2)$, ottenendo $x = \dfrac{m-3}{k-2}$,

per ragionare poi sulla **frazione** ottenuta,
domandandosi per quali valori di k e di m
essa "salta" perché risulta
- impossibile (denominatore nullo, numeratore non nullo)
- oppure indeterminata (denom. e num. entrambi nulli).

♥ $\dfrac{\textbf{numero diverso da zero}}{\mathbf{0}}$ **= fraz. IMPOSSIBILE**
$\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ **= frazione INDETERMINATA**

Il ragionamento sull'*equazione* (con la distinzione: determinata, indeterminata, impossibile) verrebbe allora sostituito da un ragionamento sulla *frazione*. Si farebbe, in pratica, così:

$(k-2)x = m-3;$

$x = \dfrac{m-3}{k-2}$ se $k \neq 2$; con $k = 2$ la frazione diventa $x = \dfrac{m-3}{0}$ che è $\left\langle \begin{array}{l} \text{indet.} \left(\dfrac{0}{0}\right) \text{ con } m = 3 \\ \text{imposs. con } m \neq 3 \end{array} \right.$

In questo modo, le conclusioni sarebbero identiche a quelle che si possono trarre ragionando sull'equazione, perché, se noi mettiamo a confronto l'equazione $ax = b$ e la frazione $x = \dfrac{b}{a}$, vediamo che

♪ l'etichetta di "indeterminazione" si appiccica *tanto* all'equazione, *quanto* alla frazione, nel caso $a = b = 0$
♫ e l'etichetta di "impossibilità" si appiccica *tanto* all'equazione, *quanto* alla frazione, nel caso $a = 0,\ b \neq 0$

A parere di chi scrive, il ragionamento "sull'equazione" è più lineare e diretto, e quindi preferibile.

D'altronde, per qual motivo una frazione del tipo $\dfrac{\textit{numero diverso da zero}}{0}$ è considerata "IMPOSSIBILE"?
Il motivo è che tale frazione esprime (frazione = divisione = operazione inversa della moltiplicazione) la ricerca di un numero *x*, tale che $x \cdot 0 = \textit{numero diverso da zero}$; e tale **equazione** è *impossibile*.

Cose analoghe si potrebbero dire sull'indeterminazione.
Dunque sono sempre le **equazioni**, più che le frazioni, il FONDAMENTO del pensiero, in questi contesti.
Tuttavia anche il ragionamento "sulla frazione" può avere i suoi vantaggi; se non altro, vantaggi di brevità.

1) Con $m = -4$ si trova l'equazione $-4(1+x) = 2(1-4)$ che ha per soluzione $x = \dfrac{1}{2}$.
Con $m = 1,\ m = 3,\ m = 0$ si trova rispettivamente $x = 3,\ x = 5/3$, equazione impossibile.
Risolvendo e discutendo l'equazione generale si ottiene $x = \dfrac{m+2}{m}\ (m \neq 0)$, e impossibilità con $m = 0$.

$\left[\dfrac{m+2}{m}\right]_{m=-4} = \dfrac{1}{2},\quad \left[\dfrac{m+2}{m}\right]_{m=1} = 3,\quad \left[\dfrac{m+2}{m}\right]_{m=3} = \dfrac{5}{3},\quad \left[\dfrac{m+2}{m}\right]_{m=0} = \textit{impossibile}$

2) Risolvendo e discutendo l'equazione generale si ottiene $x = \dfrac{k^2}{k+2}\ (k \neq -2;\ \textit{con } k = -2,\ \textit{imposs.})$, e:

$\left[\dfrac{k^2}{k+2}\right]_{k=2} = 1,\quad \left[\dfrac{k^2}{k+2}\right]_{k=1} = \dfrac{1}{3},\quad \left[\dfrac{k^2}{k+2}\right]_{k=0} = 0,\quad \left[\dfrac{k^2}{k+2}\right]_{k=-1} = 1,\quad \left[\dfrac{k^2}{k+2}\right]_{k=-2} = \textit{impossibile}$

3) $x = \dfrac{2a+1}{a+2}\ (a \neq -2)$ 4) $x = \dfrac{2q-p}{2-p} = \dfrac{p-2q}{p-2}\ (p \neq 2)$

5) a) $x = \dfrac{1}{a}\ (a \neq 0);\ \textit{con } a = 0 \textit{ è imposs.}$ b) $x = 1\ (a \neq 0);\ \textit{con } a = 0 \textit{ è indet.}$

c) $x = \dfrac{a+1}{a}\ (a \neq 0);\ \textit{con } a = 0 \textit{ è imposs.}$ d) $x = -\dfrac{n}{m}\ (m \neq 0);\ \textit{con } m = 0 \textit{ è}: \left\langle \begin{array}{l} \textit{imposs. se } n \neq 0 \\ \textit{indet. se } n = 0 \end{array} \right.$

e) $x = \dfrac{a+2}{2}$. L'eq. non è mai imposs. o indet. f) $x = \dfrac{b+2}{a}\ (a \neq 0);\ \textit{con } a = 0 \textit{ è}: \left\langle \begin{array}{l} \textit{imposs. se } b \neq -2 \\ \textit{indet. se } b = -2 \end{array} \right.$

6) $Se\ m \neq 3 : x = \dfrac{5m}{m-3};\ se\ m = 3\ è\ imposs.$

7) $x = \dfrac{8}{a+4}\ (a \neq -4);\ con\ a = -4,\ imposs.$ 8) $x = \dfrac{1-2k}{1-4k} = \dfrac{2k-1}{4k-1}\ \left(k \neq \dfrac{1}{4}\right);\ con\ k = \dfrac{1}{4},\ imposs.$

9) $x = \dfrac{5b}{b+1}\ (b \neq -1);\ con\ b = -1,\ imposs.$ 10) $x = \dfrac{c+3}{c-3}\ (c \neq 3);\ con\ c = 3,\ imposs.$

11) $Se\ a \neq -3 : x = \dfrac{5b+1}{a+3};\ se\ a = -3 \wedge b \neq -\dfrac{1}{5} : imposs.;\ se\ a = -3 \wedge b = -\dfrac{1}{5} : indet.$

12) $x = \dfrac{a-4}{b-8}\ (b \neq 8);\ con\ b = 8 : \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ a \neq 4 \\ indet.\ se\ a = 4 \end{array} \right.$ 13) $x = \dfrac{n-4}{p+1}\ (p \neq -1);\ con\ p = -1 : \left\langle \begin{array}{l} se\ n \neq 4\ imposs. \\ se\ n = 4\ indet. \end{array} \right.$

14) $x = \dfrac{3a-1}{3b}\ (b \neq 0);\ se\ b = 0 : \left\langle \begin{array}{l} con\ a \neq \dfrac{1}{3},\ imposs. \\ con\ a = \dfrac{1}{3},\ indet. \end{array} \right.$ 15) $x = \dfrac{2q}{(m-2)^2}\ (m \neq 2);\ con\ m = 2 : \left\langle \begin{array}{l} q \neq 0 : imposs. \\ q = 0 : indet. \end{array} \right.$

16) $Se\ p \neq 1 : x = \dfrac{p+q-5}{p-1};\ se\ p = 1 : \left\langle \begin{array}{l} q \neq 4 : imposs. \\ q = 4 : indet. \end{array} \right.$

17) $x = \dfrac{a-b-1}{b}\ (b \neq 0);\ con\ b = 0 : \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ a \neq 1 \\ indet.\ se\ a = 1 \end{array} \right.$

18) $x = \dfrac{s-2p-1}{p-2}\ (p \neq 2);\ con\ p = 2 : \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ s \neq 5 \\ indet.\ se\ s = 5 \end{array} \right.$

19) $x = \dfrac{a-m}{m-2}\ (m \neq 2);\ con\ m = 2 : \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ a \neq 2 \\ indet.\ se\ a = 2 \end{array} \right.$

20) $x = \dfrac{pq+1}{p-10}\ (p \neq 10);\ con\ p = 10 : \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ q \neq -1/10 \\ indet.\ se\ q = -1/10 \end{array} \right.$

21) $x = \dfrac{a-b-2}{a+b}\ (a \neq -b);\ con\ a = -b : \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ b \neq -1 \\ indet.\ se\ b = -1\ (quindi\ a = 1) \end{array} \right.$

22) $x = \dfrac{b+c}{b-c-1}\ (b \neq c+1);\ con\ b = c+1 : \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ c \neq -1/2 \\ indet.\ se\ c = -1/2\ \left(quindi\ b = 1/2\right) \end{array} \right.$

23) $Se\ k \neq 0 : x = \dfrac{k+2h}{k};\ se\ k = 0 : \left\langle \begin{array}{l} h \neq 0 : imposs. \\ h = 0 : indet. \end{array} \right.$

24) $x = \dfrac{m+n}{m}\ (m \neq 0);\ con\ m = 0 : \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ n \neq 0 \\ indet.\ se\ n = 0 \end{array} \right.$

25) $x = \dfrac{2h+k}{k-4}\ (k \neq 4);\ con\ k = 4 : \left\langle \begin{array}{l} imp.\ se\ h \neq -2 \\ ind.\ se\ h = -2 \end{array} \right.$

26) $x = h+2\ (h \neq 2);\ con\ h = 2,\ indet.$ 27) $Se\ s \neq 0 \wedge s \neq 2 : x = \dfrac{s+1}{s(s-2)};\ \begin{array}{l} se\ s = 0 : imposs. \\ se\ s = 2 : imposs. \end{array}$

28) $Se\ m \neq \pm 3 : x = \dfrac{k+1}{(m+3)(m-3)};\ \begin{array}{l} se\ m = 3 \wedge k = -1 : indet.;\ se\ m = 3 \wedge k \neq -1 : imposs. \\ se\ m = -3 \wedge k = -1 : indet.;\ se\ m = -3 \wedge k \neq -1 : imposs. \end{array}$

29) $x = \dfrac{a-1}{a(a+1)}\ (a \neq 0,\ a \neq -1);\ con\ a = 0 : imposs.;\ con\ a = -1 : imposs.$

30) $x = \dfrac{2n}{(k+1)(k-1)}\ (k \neq \pm 1);\ con\ k = 1 \vee k = -1 : \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ n \neq 0 \\ indet.\ se\ n = 0 \end{array} \right.$

31) $x = \dfrac{2c+d+2}{2cd}\ \begin{pmatrix} c \neq 0 \\ d \neq 0 \end{pmatrix};\ se\ c = 0 : \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ d \neq -2 \\ indet.\ se\ d = -2 \end{array} \right.;\ se\ d = 0 : \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ c \neq -1 \\ indet.\ se\ c = -1 \end{array} \right.$

32) $x = \dfrac{rs+2}{r^2(r-1)}\ (r \neq 0,\ r \neq 1);\ con\ r = 0 : imposs.;\ con\ r = 1 : \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ s \neq -2 \\ indet.\ se\ s = -2 \end{array} \right.$

33) $x = \dfrac{a+2b+3}{4ab}\ (a \neq 0, b \neq 0);\ con\ a = 0 : \left\langle \begin{array}{l} imp.\ se\ b \neq -3/2 \\ ind.\ se\ b = -3/2 \end{array} \right.;\ con\ b = 0 : \left\langle \begin{array}{l} imp.\ se\ a \neq -3 \\ ind.\ se\ a = -3 \end{array} \right.$

34) $Se\ k \neq 1 : x = \dfrac{k}{(k-1)^2};\ \ se\ k = 1 : imposs.$

35) $Se\ a \neq 3 \wedge a \neq -2 : x = \dfrac{a+2b}{(a-3)(a+2)};$ $se\ a = 3 \wedge b = -3/2 : indet.;\ se\ a = 3 \wedge b \neq -3/2 : imposs.$ $se\ a = -2 \wedge b = 1 : indet.;\ se\ a = -2 \wedge b \neq 1 : imposs.$

36) $Se\ a \neq 1 \wedge b \neq 2 : x = \dfrac{a+b}{(a-1)(b-2)};$ $se\ a = 1 \wedge b = -1 : indet.;\ se\ a = 1 \wedge b \neq -1 : imposs.;$ $se\ b = 2 \wedge a = -2 : indet.;\ se\ b = 2 \wedge a \neq -2 : imposs.$

37) $Se\ \ p \neq 0 \wedge q \neq 0 : x = \dfrac{2p-1}{pq};\ \ se\ \ p = 0 : imposs.;\ se\ q = 0 \wedge p \neq \dfrac{1}{2} : imposs.;\ se\ q = 0 \wedge p = \dfrac{1}{2} : indet.$

38) $Se\ m \neq 0 : x = m+1;\ se\ m = 0 : indet.$ 39) $Se\ a \neq 5 : x = a+5;\ se\ a = 5 : indet.$

40) $Se\ b \neq 0 \wedge b \neq 2 : x = \dfrac{b}{b-2};\ se\ b = 0 : indet.;\ se\ b = 2 : imposs.$

41) $12a^2 - 7a + 1 = 12a^2 - 4a - 3a + 1 = ...$ $Se\ a \neq \dfrac{1}{4} \wedge a \neq \dfrac{1}{3} : x = \dfrac{4a+1}{3a-1};\ se\ a = \dfrac{1}{4} : ind.;\ se\ a = \dfrac{1}{3} : imp.$

42) $Se\ b \neq 1 : x = \dfrac{c-3}{b-1};\ se\ b = 1 : \left\langle \begin{array}{l} c \neq 3 : imposs. \\ c = 3 : indet. \end{array} \right.$ 43) $Se\ n \neq 0 : x = -\dfrac{1}{n};\ se\ n = 0 : indet.$

44) $Se\ a \neq 0 : x = \dfrac{a+b+2}{2a};\ se\ a = 0 : \left\langle \begin{array}{l} b \neq -2 : imposs. \\ b = -2 : indet. \end{array} \right.$ 45) $Se\ b \neq -3a : x = \dfrac{3}{3a+b};\ se\ b = -3a : imposs.$

46) $Se\ a \neq 5b : x = \dfrac{2a+b-11}{a-5b};\ se\ a = 5b : \left\langle \begin{array}{l} indet.\ se\ \ b = 1\ (e\ quindi\ a = 5) \\ imposs.\ se\ b \neq 1 \end{array} \right.$

47) $Se\ c \neq \dfrac{2}{3}d : x = \dfrac{c+d+1}{3c-2d};\ \ se\ c = \dfrac{2}{3}d : \left\langle \begin{array}{l} indet.\ \ se\ \ d = -3/5\ \ (e\ quindi\ c = -2/5) \\ imposs.\ \ se\ d \neq -3/5 \end{array} \right.$

48) $Se\ a \neq 0 \wedge a \neq b : x = \dfrac{a+b+6}{a(a-b)};$ $se\ a = 0 \wedge b = -6 : indet.;\ se\ a = 0 \wedge b \neq -6 : imposs.$ $se\ a = b = -3 : indet.;\ se\ a = b \neq -3 : imposs.$

49) $Se\ a \neq b+1 : x = \dfrac{a+b}{a-b-1};\ se\ a = b+1 : \left\langle \begin{array}{l} indet.\ se\ \ b = -1/2\ \ (e\ quindi\ a = 1/2) \\ imposs.\ se\ b \neq -1/2 \end{array} \right.$

50) $x = \dfrac{p-q-1}{p+q-1}\ \ (q \neq 1-p);\ se\ q = 1-p : \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ con\ \ p \neq 1 \\ indet.\ con\ \ p = 1\ \ (\rightarrow q = 0) \end{array} \right.$

51) $x = \dfrac{b-2}{b-2c}\ (b \neq 2c);\ con\ b = 2c : \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ c \neq 1 \\ indet.\ se\ c = 1\ (\rightarrow b = 2) \end{array} \right.$

52) $Se\ a \neq 3b : x = a - 3b;\ se\ a = 3b : indet.$

53) $Se\ b \neq -2a-1 : x = \dfrac{2a-b+1}{2a+b+1};\ \ se\ b = -2a-1 : \left\langle \begin{array}{l} indet.\ \ se\ \ a = -1/2\ (e\ quindi\ b = 0) \\ imposs.\ \ se\ a \neq -1/2 \end{array} \right.$

54) $Se\ b \neq 0 : x = \dfrac{a+b-c}{3b^2};\ se\ b = 0 : \left\langle \begin{array}{l} indet.\ se\ a = c \\ imposs.\ se\ a \neq c \end{array} \right.$

55) $Se\ r \neq -s : x = \dfrac{r-s}{r+s};\ se\ r = -s \neq 0 : imposs;\ \ se\ r = 0\ \wedge\ s = 0 : indet.$

56) a) La soluzione è $x = \dfrac{k-3}{k-5}$ $(k \neq 5)$ ed è uguale a 2 se $\dfrac{k-3}{k-5} = 2;\ \ k-3 = 2k-10;\ \ k = 7$.
Oppure: $k(x-1)+3 = 5x$ ha per soluzione $x = 2$ se e solo se, sostituendo 2 al posto di *x*, si ottiene un'uguaglianza vera; dunque $k(2-1)+3 = 5 \cdot 2;\ \ k+3 = 10;\ \ k = 7$.
b) $k = 3$ c) $k = 9/2$ d) imposs.: per nessun valore di *k* questa equaz. può avere come soluz. $x = 1$

57) a) $m = 1/3$ b) $m = 1$ c) $m = 1/2$ d) imposs. 58) a) $h = -1/2$ b) $h = 1$ c) imposs. d) $h = -5$

59) $a = -1, b = -2$ 60) E' imposs. con $m = 2$. Non può mai essere indeterminata, per nessun valore di *m*.

61) a) Non può mai essere imposs., per nessun valore di a b) E' indet. con $a = 0$ c) Con $a = -1$ e $a = 0$

62) d) 63) c) 64) d) 65) a) 66) b) 67) Per $h = -1$; $x = -1$ 68) Per $m = 3$; $x = 2$ e $x = 1$.

69) Ad esempio, $ax = a - 4$ oppure $(a+4)x = a$

70) Ad esempio, $(a-3)x = (a-2)(a-1)$

4. EQUAZIONI LETTERALI FRATTE

Sono quelle che, oltre a presentare il parametro, contengono almeno una volta l'incognita a denominatore.

Vediamo un **esempio**.

❑ $$\frac{(a+1)x-2}{a^2x-6a^2-2ax+12a}+\frac{x-1}{ax-6a}=\frac{x+1}{ax-6a-2x+12}$$

Scomponiamo i denominatori e facciamo il denominatore comune:

$$\frac{(a+1)x-2}{a(a-2)(x-6)}+\frac{x-1}{a(x-6)}=\frac{x+1}{(a-2)(x-6)}$$

$$\frac{ax+x-2+(a-2)(x-1)}{a\cancel{(a-2)(x-6)}}=\frac{a(x+1)}{a\cancel{(a-2)(x-6)}} \qquad x\neq 6 \quad (*) \qquad a\neq 0 \quad a\neq 2 \quad (**)$$

$$\cancel{ax}+x\cancel{-2}+ax-a-2x\cancel{+2}=\cancel{ax}+a$$

$$ax-x=a+a$$

$$(a-1)x=2a$$

Se $a\neq 1$:	Se $a=1$:
$x=\dfrac{2a}{a-1}$	$0\cdot x=2$ *impossibile*

C'è a questo punto una "coda".
All'atto di spedir via il denominatore,
noi avevamo scritto la "condizione di accettabilità"
$x\neq 6$.

Ora, *in generale*, la soluzione trovata $x=\dfrac{2a}{a-1}$
è, in effetti, diversa da 6;
tuttavia, può darsi che esista un valore del parametro *a*
per il quale tale soluzione risulti proprio uguale a 6!
Se ciò accadesse, per quel valore di *a* l'equazione risulterebbe impossibile, in quanto dotata di soluzione non accettabile.

Si tratta quindi di andare a cercare quell'eventuale valore di *a*, impostando l'equazione

$$\frac{2a}{a-1}=6$$

nella quale a fa da incognita.

$$\frac{2a}{a-1}=6$$

$$\frac{2a}{\cancel{a-1}}=\frac{6(a-1)}{\cancel{a-1}} \qquad (a\neq 1)$$

$$2a=6a-6$$

$$-4a=-6$$

$$a=\frac{3}{2}$$

(*) ♥
La condizione riferita all'incognita
$x\neq 6$
è una
"CONDIZIONE
DI ACCETTABILITA' "
e significa:
se alla fine dovesse capitare
di trovare come soluzione $x=6$,
bisognerebbe scrivere:
"soluzione NON ACCETTABILE".

(**) ♥
Le condizioni riferite al parametro
$a\neq 0$, $a\neq 2$
hanno un significato
COMPLETAMENTE DIVERSO:
sono
"CONDIZIONI PRELIMINARI",
e significano:
al parametro *a* possiamo attribuire
il valore che desideriamo,
ma con due eccezioni:
non è lecito attribuire ad *a*
né il valore 0 né il valore 2,
perché altrimenti si otterrebbe
un'equazione priva di significato.

"Priva di significato"
non equivale affatto a "impossibile":

♪ **un'equazione "impossibile"**
è un'equazione che ha senso
affrontare e cercare di risolvere,
ma che non ha soluzioni,
come un albero senza frutti;

♫ **di fronte ad un'equazione**
"priva di significato", invece,
si rimane bloccati fin dall'inizio,
perché ci si trova a che fare con
una o più operazioni non eseguibili.

Ricapitoliamo:

- con $a=0 \vee a=2$ l'equazione non ha significato
- con $a=1$ l'equazione è impossibile
- con $a=\dfrac{3}{2}$ l'equazione è impossibile (soluzione non accettabile)
- con $a\neq 0 \wedge a\neq 1 \wedge a\neq 2 \wedge a\neq \dfrac{3}{2}$ l'equazione ha 1 e 1 sola soluzione e precisamente $x=\dfrac{2a}{a-1}$

Facciamo una **verifica**.

Cosa diventa la nostra equazione nel caso particolare $a=\frac{3}{2}$?

Sostituiamo:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}+1\right)x-2}{\frac{9}{4}x-\cancel{6}^{\,3}\cdot\frac{9}{\cancel{4}_{\,2}}-\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}x+\cancel{12}^{\,6}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}}+\frac{x-1}{\frac{3}{2}x-\cancel{6}^{\,3}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}}=\frac{x+1}{\frac{3}{2}x-\cancel{6}^{\,3}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}-2x+12}$$

$$\frac{\frac{5}{2}x-2}{\frac{9}{4}x-\frac{27}{2}-3x+18}+\frac{x-1}{\frac{3}{2}x-9}=\frac{x+1}{\frac{3}{2}x-9-2x+12}$$

$$\frac{\frac{5x-4}{2}}{\frac{9x-54-12x+72}{4}}+\frac{x-1}{\frac{3x-18}{2}}=\frac{x+1}{\frac{3x-18-4x+24}{2}}$$

$$\frac{\frac{5x-4}{2}}{\frac{-3x+18}{4}}+\frac{x-1}{\frac{3x-18}{2}}=\frac{x+1}{\frac{-x+6}{2}};\qquad \frac{5x-4}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}^{\,2}}{-3(x-6)}+(x-1)\cdot\frac{2}{3(x-6)}=(x+1)\cdot\frac{2}{-(x-6)};$$

$$-\frac{2(5x-4)}{3(x-6)}+\frac{2(x-1)}{3(x-6)}=-\frac{2(x+1)}{x-6};\qquad \frac{-10x+8+2x-2}{\cancel{3(x-6)}}=\frac{-6x-6}{\cancel{3(x-6)}}\qquad (x\neq 6)$$

$-8x+6=-6x-6;\quad -2x=-12;\quad x=6$ *NON ACCETTABILE, come ci attendevamo*

Un altro esempio:

- $\frac{1}{3(x+1)}+\frac{x+m}{m(x-4)(x+1)}=\frac{1}{m(x-4)}$

$$\frac{mx-4m+3x+3m}{\cancel{3m(x-4)(x+1)}}=\frac{3x+3}{\cancel{3m(x-4)(x+1)}}\qquad m\neq 0,\ \ x\neq 4,\ \ x\neq -1$$

$mx\underline{-4m}\cancel{+3x}\underline{+3m}=\cancel{3x}+3$

$mx=m+3$

$x=\frac{m+3}{m}$ (ricordiamo che avevamo già posto come condizione preliminare $m\neq 0$: con $m=0$ l'equazione sarebbe priva di significato).

La soluzione trovata $x=\frac{m+3}{m}$ in generale è accettabile;
non lo è, eccezionalmente, se risulta

$$\frac{m+3}{m}=4;\quad m+3=4m;\quad -3m=-3;\quad m=1$$

oppure

$$\frac{m+3}{m}=-1;\quad m+3=-m;\quad 2m=-3;\quad m=-\frac{3}{2}$$

SCHEMA DI RICAPITOLAZIONE

Valori del parametro per cui l'equazione è:

Determinata	**Impossibile**	**Indeterminata**	**Priva di significato**
$\begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 1 \\ m\neq -\frac{3}{2} \end{cases}$	$m=1$ $m=-\frac{3}{2}$		$m=0$

Consigliate alcune verifiche, MOLTO istruttive! Ad esempio, per:
$m=1$
$m=2$
$m=-3/2$
$m=-3$

EQUAZIONI LETTERALI FRATTE (NOTA) CON DISCUSSIONE ESERCIZI			Discussione			
Equazione	**Condizioni da porre**	**Soluzione (quando l'equaz. è determinata)**	**Determinata**	**Indet.**	**Impossibile**	**Priva di significato**
1) $\frac{a-x}{a+2}+\frac{8ax}{a^2-a-6}=0$	$a\neq -2$ $a\neq 3$	$x=\frac{3a-a^2}{7a+3}$	$\begin{cases} a\neq -2 \\ a\neq 3 \\ a\neq -3/7 \end{cases}$		$a=-3/7$	$a=-2$ $a=3$
2) $\frac{6x}{a+8}-\frac{x}{a^2+8a}=\frac{5a^2x-1-\left[a(9x-1)-1\right]}{a^2(a+8)}$	$a\neq 0$ $a\neq -8$	$x=\frac{1}{a+8}$	$\begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq -8 \end{cases}$			$a=0$ $a=-8$
3) $\frac{x-b}{b^2+b}-\frac{x-2b}{b^2-b}=\frac{x}{1-b}$	$b\neq 0$ $b\neq \pm 1$	$x=-\frac{b^2+3b}{(b+2)(b-1)}$	$\begin{cases} b\neq 0 \\ b\neq \pm 1 \\ b\neq -2 \end{cases}$		$b=-2$	$b=0$ $b=\pm 1$
4) $\frac{x}{2m+1}-5\frac{x}{2m-1}+\frac{m+6x}{4m^2-1}=0$	$m\neq \pm\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{8}$	$\begin{cases} m\neq \pm 1/2 \\ m\neq 0 \end{cases}$	$m=0$		$m=\pm 1/2$
5) $\frac{x}{b^2}-\frac{x}{a^2}=\frac{a-b}{ab}$ NOTA: *per la precisione le equaz. da 1) a 6) sono letterali ma non "fratte", perché in esse l'incognita NON compare a denominatore.*	$a\neq 0$ $b\neq 0$	$x=\frac{ab}{a+b}$	$\begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ a\neq b \\ a\neq -b \end{cases}$	$a=b$ $(\neq 0)$	$a=-b$ $(\neq 0)$	$a=0$ $b=0$
6) $\frac{11kx+4}{k(k+5)}=2x$	$k\neq 0$ $k\neq -5$	$x=\frac{4}{k(2k-1)}$	$\begin{cases} k\neq 0 \\ k\neq -5 \\ k\neq 1/2 \end{cases}$		$k=1/2$	$k=0$ $k=-5$
7) $\frac{1}{5x-1}-\frac{7a}{25x^2-1}=0$	$x\neq \pm\frac{1}{5}$	$x=\frac{7a-1}{5}$	$\begin{cases} a\neq 2/7 \\ a\neq 0 \end{cases}$		$a=2/7$ (*assegnando ad* a *questo valore si otterrebbe* $x=1/5$ *non acc.*) $a=0$ (*assegnando ad* a *questo valore si otterrebbe* $x=-1/5$ *non acc.*)	
8) $2\cdot\frac{a}{x-3}-\frac{a}{x+2}=\frac{1}{x^2-x-6}$	$x\neq 3$ $x\neq -2$	$x=\frac{1-7a}{a}$	$\begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq 1/10 \\ a\neq 1/5 \end{cases}$		$a=0$ $a=1/10$ ($x=3$ *non acc.*) $a=1/5$ ($x=-2$ *non acc.*)	

EQUAZIONI LETTERALI FRATTE CON DISCUSSIONE **ESERCIZI**			Discussione			
Equazione	**Condizioni da porre**	**Soluzione (quando l'equaz. è determinata)**	**Determinata**	**Indet.**	**Impossibile**	**Priva di significato**
9) $\frac{a}{x-2}-\frac{3a-1}{x}=0$	$x \neq 2$ $x \neq 0$	$x=\frac{6a-2}{2a-1}$	$\begin{cases} a \neq 1/2 \\ a \neq 1/3 \\ a \neq 0 \end{cases}$		$a=1/2$ $a=0$ $(x=2$ *non acc.*$)$ $a=1/3$ $(x=0$ *non acc.*$)$	
10) $\frac{x}{x-4}+a=0$	$x \neq 4$	$x=\frac{4a}{a+1}$	$a \neq -1$		$a=-1$	
11) $\frac{x-3}{x-2}-\frac{1}{d}=\frac{21}{dx-2d}$	$x \neq 2$ $d \neq 0$	$x=\frac{3d+19}{d-1}$	$\begin{cases} d \neq 0 \\ d \neq 1 \\ d \neq -21 \end{cases}$		$d=1$ $d=-21$ $(x=2$ *non acc.*$)$	$d=0$
12) $\frac{1}{b^2+b}+\frac{2x-b}{bx-5b}=\frac{3x-5}{b(b+1)(x-5)}$	$b \neq 0$ $b \neq -1$ $x \neq 5$	$x=\frac{b+1}{2}$	$\begin{cases} b \neq 0 \\ b \neq -1 \\ b \neq 9 \end{cases}$		$b=9$ $(x=5$ *non acc.*$)$	$b=0$ $b=-1$
13) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{a}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}-\frac{1}{x-a}=2$	$x \neq 0$ $a \neq 0$ $x \neq a$	$x=\frac{a-1}{3}$	$\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq -1/2 \end{cases}$		$a=1$ $(x=0$ *non acc.*$)$ $a=-1/2$ $(x=a$ *non acc.*$)$	$a=0$
14) $\frac{3k}{x-5}=1$	$x \neq 5$	$x=3k+5$	$k \neq 0$		$k=0$ $(x=5$ *non acc.*$)$	
15) $\frac{3}{x-5}=\frac{1}{k}$	$x \neq 5$ $k \neq 0$	$x=3k+5$	$k \neq 0$			$k=0$
16) $\frac{x}{b^2-x^2}=\frac{b}{b+x}+\frac{1}{b-x}$	$x \neq b$ $x \neq -b$	$x=b+1$	$\begin{cases} b \neq 0 \\ b \neq -1/2 \end{cases}$	$b=0$	$b=-1/2$ $(x=-b$ *non acc.*$)$	
17) $(c+1)\left(\frac{cx}{c^2-1}-\frac{c}{c+1}\right)=\frac{c^2x}{c-1}$	$c \neq \pm 1$	$x=-1$	$\begin{cases} c \neq \pm 1 \\ c \neq 0 \end{cases}$	$c=0$		$c=\pm 1$
18) $\frac{x}{x-a+2}-3=0$	$x \neq a-2$	$x=\frac{3a-6}{2}$	$a \neq 2$		$a=2$ $(x=a-2$ *non acc.*$)$	

ALTRI ESERCIZI SULLE EQUAZIONI LETTERALI CON LETTERE A DENOMINATORE

Risolvi e discuti le equazioni seguenti:

1) $\dfrac{2}{a+1}+\dfrac{a-1}{x-1}=1$ 2) $\dfrac{x}{x-2}=2\cdot\dfrac{b}{b-3}$ 3) $\dfrac{x}{m}-\dfrac{2x-3}{2m}=\dfrac{x+1}{x-1}$ 4) $\dfrac{a}{x-a-2}=\dfrac{2}{x-1}$ 5) $\dfrac{x+a}{x+3}-\dfrac{x^2+3}{x^2+3x}=0$

Per le seguenti equazioni letterali, non è richiesta la discussione.
Si chiede di fare invece la verifica, ossia, trovata la soluzione, di sostituirla al posto di x nell'equazione di partenza per controllare che l'uguaglianza sia, effettivamente, verificata.

6) $\dfrac{2}{x^2-a^2}-\dfrac{x}{x+a}+\dfrac{x}{x-a}=0$ 7) $\dfrac{\frac{x}{q}-\frac{x}{p}}{x+1}=\dfrac{1}{pq}$ 8) $\dfrac{x}{x^2-x-6}-\dfrac{c}{x-3}=0$ 9) $\dfrac{\frac{k+3}{x+3}-1}{2}+1=0$

10) $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x}=\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc}$ 11) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{x-a-b}=a^{-1}b^{-1}$ 12) $\dfrac{a}{x^2+x}+\dfrac{b}{2x+2}=3\cdot\dfrac{bx}{2x^2+2x}$

13) $\dfrac{1-\frac{1}{x}+b}{a-1}+1=0$ 14) $\dfrac{1}{ax-x-a+1}+\dfrac{1}{ax-x}+\dfrac{1}{x-x^2}=0$ 15) $\dfrac{a}{x^2+x-2}-\dfrac{b}{x^2-3x+2}=0$

16) $\dfrac{2x+a}{2x-a}-\dfrac{2x-a}{2x+a}=\dfrac{x+1}{4x^2-a^2}$ 17) $\dfrac{x-3}{x+k-1}=\dfrac{x+3}{x-k+1}$ 18) $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{x}}=\dfrac{b}{a}$ 19) $\dfrac{a}{4x^2-4}-\dfrac{b}{8x+8}=0$

PROBLEMI CON DISCUSSIONE

20) Sia a un numero reale fissato.
Esiste un numero x tale che, addizionandogli a o moltiplicandolo per a, si ottenga il medesimo risultato? In caso affermativo, stabilire il valore di x.

21) Sia a un numero reale non nullo fissato.
Determinare, qualora esista, il numero x tale che, dividendolo per a o diminuendolo di a, si ottenga lo stesso risultato.

22) Dati due numeri reali non nulli a e b,
quale numero x bisogna sommare ai due termini della frazione a/b per ottenere la frazione b/a?

23) Sia $a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$.
Quale numero occorre togliere a ciascuno dei due termini della frazione a/b per ottenere il quadrato di tale frazione?

24) Determina quel numero che aumenta di 1 unità se lo si moltiplica per m.

25) Sottraendo k da un numero, o dividendolo per k, si ottiene il medesimo risultato.
Di che numero si tratta?

26) Quale numero occorre addizionare ad entrambi i termini di una frazione a/b, affinché questa raddoppi?

27) Trovare due numeri sapendo che il rapporto fra il 1° e il 2° è r e la differenza fra il 1° e il 2° è d.

28) Trovare due numeri sapendo che la loro somma è s e il loro rapporto è r.

RISPOSTE

1) Perde significato con $a=-1$.
E' indeterminata con $a=1$: in tal caso, ne sono soluzione tutti i valori di x, tranne $x=1$.
Con $a\neq\pm1$, è $x=a+2$

2) Ha significato solo con $b\neq3$. E' impossibile quando $b=-3$. Per $b\neq\pm3$, è $x=\dfrac{4b}{b+3}$

3) Ha significato solo con $m\neq0$. E' impossibile se $m=\dfrac{3}{2}$. Con $m\neq\dfrac{3}{2}$, $m\neq0$ ha come soluz. $x=\dfrac{3+2m}{3-2m}$.

4) Si trova $x=-\dfrac{a+4}{a-2}$, sotto le condizioni $a\neq2,\ a\neq0,\ a\neq-1$. Con $a=2, a=0, a=-1$ l'equaz. è imposs.

$$\left[\begin{array}{l}\text{La condizione di accettabilità } -\dfrac{a+4}{a-2}\neq a+2 \text{ equivale a}\\ -a-4\neq a^2-4\ (a\neq2);\ \ a^2+a\neq0;\ \ a(a+1)\neq0 \text{ ossia } a\neq0,\ a\neq-1\end{array}\right]$$

5) $x=\frac{3}{a}\ (a\ne 0,\ a\ne -1)$. Con $a=0 \vee a=-1$ l'equazione è impossibile.

6) $x=-\frac{1}{a}$ 7) $x=\frac{1}{p-q-1}$ 8) $x=\frac{2c}{1-c}$ 9) $x=-(k+6)$ 10) $x=abc$ 11) $x=2(a+b)$ 12) $x=\frac{a}{b}$

13) $x=\frac{1}{a+b}$ 14) $x=\frac{a}{2}$ 15) $x=2\cdot\frac{a+b}{a-b}$ 16) $x=\frac{1}{8a-1}$ 17) $x=0$ 18) $x=\frac{a-b}{2}$ 19) $x=\frac{2a+b}{b}$

20) Il numero x esiste, ed è $x=\frac{a}{a-1}$.

Fa eccezione però il caso $a=1$. In questo caso il problema è impossibile: non c'è nessun numero x tale che addizionandogli 1 o moltiplicandolo per 1 si ottenga il medesimo risultato.

Facciamo la verifica? Ma sì, dài:

$$\frac{a}{a-1}\boxed{+a}=\frac{a+a(a-1)}{a-1}=\frac{\cancel{a}+a^2\cancel{-a}}{a-1}=\boxed{\frac{a^2}{a-1}};\qquad \frac{a}{a-1}\boxed{\cdot a}=\boxed{\frac{a^2}{a-1}}\ \textit{OK, stesso risultato.}$$

Ad es., nel caso $a=3$, *il numero* x *è* $\left[\frac{a}{a-1}\right]_{a=3}=\frac{3}{2}$: *e infatti* $\frac{3}{2}+3=\frac{3+6}{2}=\frac{9}{2}$ *e anche* $\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{2}$

21) Il numero x in generale esiste, e vale $x=\frac{a^2}{a-1}$.

Soltanto nel caso particolare $a=1$, il problema è impossibile.

22) $x=-(a+b)$. Se però $a=b$, allora il problema è indeterminato:
infatti, in questo caso particolare, ogni numero x è soluzione del problema, escluso soltanto $x=-b$.

23) Nel caso generale $a\ne \pm b$, il numero è $\frac{ab}{a+b}$.

Il problema è invece:

- indeterminato se $a=b$ (in questo caso, qualsiasi numero va bene tranne il numero b);
- impossibile se $a=-b$.

Verifica: $$\frac{a-\frac{ab}{a+b}}{b-\frac{ab}{a+b}}=\frac{\frac{a(a+b)-ab}{a+b}}{\frac{b(a+b)-ab}{a+b}}=\frac{\frac{a^2\cancel{+ab}\cancel{-ab}}{a+b}}{\frac{\cancel{ab}+b^2\cancel{-ab}}{a+b}}=\frac{a^2}{\cancel{a+b}}\cdot\frac{\cancel{a+b}}{b^2}=\frac{a^2}{b^2},\ \text{OK}$$

24) Il numero è $\frac{1}{m-1}$, purché sia $m\ne 1$. Con $m=1$ il problema è impossibile.

25) Il problema ha senso solo per $k\ne 0$. La sua soluzione è il numero $\frac{k^2}{k-1}$, se $k\ne 1$. Con $k=1$, è imposs.

26) Questo problema ha senso solo con $b\ne 0$. Il numero è $\frac{ab}{b-2a}$, se $b\ne 2a \wedge b\ne a$.

Dev'essere $b\ne a$ in quanto l'equazione risolvente è $\frac{a+x}{b+x}=2\cdot\frac{a}{b}$ e occorre porre la condizione

$b+x\ne 0,\ x\ne -b$ da cui $\frac{ab}{b-2a}\ne -b,\ ab\ne -b(b-2a)$ ossia $a\ne -b+2a,\ b\ne a$.

Qualora sia $b=2a \vee b=a$ il problema è impossibile.

27) I due numeri sono $\frac{d}{r-1}$ e $\frac{rd}{r-1}$ rispettivamente, se $r\ne 1$.

Nel caso $r=1$, se $d\ne 0$ il problema è impossibile mentre nel caso $d=0$ è indeterminato,
con l'avvertenza, in quest'ultimo caso, che tutte le coppie di numeri
fra loro uguali ne sono soluzione, TRANNE la coppia (0, 0) per la quale non ha senso il rapporto.

28) I due numeri sono $\frac{rs}{r+1}$ e $\frac{s}{r+1}$ rispettivamente, se $r\ne -1$.

Nel caso $r=-1$, se $s\ne 0$ il problema è impossibile mentre nel caso $s=0$ è indeterminato,
con l'avvertenza, in quest'ultimo caso, che tutte le coppie di numeri
fra loro opposti ne sono soluzione, TRANNE la coppia (0, 0) per la quale non ha senso il rapporto.