SISTEMI (SECONDA PARTE)

1. SISTEMI IMPOSSIBILI E INDETERMINATI

Osserva bene il seguente sistema: $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 6x+3y=14 \end{cases}$

Che ne dici? Non ti sembra che abbia qualcosa di "strano"? …

Se rifletti attentamente, scoprirai che le due equazioni che lo compongono
sono **incompatibili**, sono in contraddizione l'una con l'altra,
e non possono quindi essere verificate "contemporaneamente" (= da una stessa coppia *x*, *y*).
Infatti, $6x+3y$ è il triplo di $2x+y$, mentre 14 NON è il triplo di 10.
Se una data coppia $(x,\ y)$ è tale che per essa risulti $2x+y=10$,
allora per la stessa coppia $(x,\ y)$ varrà l'uguaglianza $6x+3y=3(2x+y)=3\cdot 10=30$
e quindi NON potrà valere la $6x+3y=14$.
Insomma, se una data coppia $(x,\ y)$ verifica la prima equazione del sistema,
allora non potrà mai verificare la seconda.
Non esiste dunque nessuna coppia $(x,\ y)$ che soddisfi simultaneamente
sia l'una che l'altra equazione del sistema.
Quest'ultimo è IMPOSSIBILE (= privo di soluzioni).

L'impossibilità del sistema in esame è legata al fatto che, mentre i coefficienti di *x* e di *y*
nella seconda equazione sono ciascuno il triplo del coefficiente corrispondente nella prima equazione
(6 è il triplo di 2, e 3 è il triplo di 1), invece il termine noto 14 NON è il triplo di 10.

Generalizzando, si riconosce facilmente che un sistema della forma

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

risulta **IMPOSSIBILE** (= privo di soluzioni) ogniqualvolta accade che

(1) $\boxed{\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}}$

cioè **i coefficienti delle incognite sono proporzionali fra loro, ma non coi termini noti del sistema**.

Invece si può vedere che il sistema seguente: $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 6x+3y=30 \end{cases}$

è INDETERMINATO, vale a dire: è verificato da INFINITE coppie $(x,\ y)$. Infatti,
la 2^a equazione non è altro che la 1^a moltiplicata per 3, quindi è sostanzialmente una ripetizione della 1^a.
Ma allora è come se avessimo soltanto l'equazione $2x+y=10$, e **una sola equazione**
(salvo casi eccezionali) non è sufficiente a determinare in modo unico i valori di due incognite.
La "nostra" equazione $2x+y=10$ è verificata, ad esempio, dalla coppia $x=3,\ y=4$;
ma è verificata pure dalle coppie $x=-1,\ y=12;\quad x=1/2,\ y=9;\quad x=8,\ y=-6;$ ecc. ecc. ecc.
Noi possiamo divertirci a costruire tante coppie $(x,\ y)$, soluzioni della $2x+y=10$, quante ne desideriamo.
A tale scopo ci basterà riscrivere la $2x+y=10$ sotto la forma $y=10-2x$:
comprenderemo così che la $2x+y=10$ è verificata da tutte le coppie costruibili
assegnando a *x* un valore a piacere, poi calcolando *y* mediante la formula $y=10-2x$.
Ad esempio, ponendo $x=2$, si ottiene $y=10-2x=10-4=6$:
ecco che la coppia $(2,\ 6)$ è soluzione della nostra equazione.
Ponendo invece $x=-1$, otteniamo $y=10-2x=10+2=12$:
bene, la coppia $(-1,\ 12)$ è un'altra soluzione della nostra equazione.

Il sistema proposto $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 6x+3y=30 \end{cases}$,

che equivale alla sola equazione $2x+y=10$
(perché l'altra, come già osservato, è una "ripetizione" di questa)
ha dunque infinite soluzioni, riassumibili con la scrittura $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=10-2x \end{cases}$.

Notiamo bene che **le soluzioni sono infinite, ma non qualsiasi**:
infatti, per scrivere una coppia-soluzione, è vero che noi possiamo fissare *x* a nostro piacere,
ma poi non potremo abbinare al valore di *x* scelto un valore di *y* arbitrario,
bensì dovremo calcolare *y* proprio mediante la formula specifica $y=10-2x$.

Generalizzando quanto detto, comprendiamo che un sistema della forma

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

è certamente **INDETERMINATO** (= dotato di infinite soluzioni) nel caso si abbia

(2) $\boxed{\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}}$ (**coefficienti delle incognite proporzionali fra loro E coi termini noti**).

Attenzione però**: le condizioni (1), (2)**
non sono le uniche circostanze sotto le quali un sistema può risultare impossibile o indeterminato.

Consideriamo infatti ad esempio il caso seguente:

$$\begin{cases} 0\cdot x+y=4 \\ 0\cdot x+2y=8 \end{cases}$$

E' evidente che il sistema in esame è indeterminato:
si osserva che è verificato da tutte le infinite coppie $(x,\ y)$ con x qualsiasi, $y=4$,
tuttavia i suoi coefficienti NON soddisfano alla condizione (2):
infatti lo zero a denominatore non ha significato.

Ancora: se prendiamo il sistema

$$\begin{cases} x-3y=4 \\ 3(x-2y)+2(x+y+2)=5x-4(y-3) \end{cases}$$

e svolgiamo i calcoli nella seconda equazione, troveremo $\cancel{3x}\cancel{-6y}\cancel{+2x}\cancel{+2y}+4=\cancel{5x}\cancel{-4y}+12$
e vedremo così che tale equazione è IMPOSSIBILE, cioè non è verificata da nessuna coppia $(x,\ y)$.
Pertanto non può esistere, a maggior ragione, nessuna coppia $(x,\ y)$
che verifichi sia l'una che l'altra equazione del sistema proposto: questo è dunque IMPOSSIBILE.

Se invece avessimo una situazione come la seguente:

$$\begin{cases} x-3y=4 \\ 2(x+y+1)=3x-(x-2y-2) \end{cases}$$

ci troveremmo di fronte ad una seconda equazione indeterminata, ossia verificata da *qualsiasi* coppia $(x,\ y)$.
Ma un'equazione indeterminata è come se non ci fosse, perché non pone alcun vincolo ad x e y.
Rimane solo la prima equazione, e, come abbiamo già visto, una sola equazione in due incognite
non individua queste in modo univoco, ma lascia aperte infinite possibilità.

Il nostro sistema è verificato dalle infinite coppie $(x,\ y)$ con $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=\dfrac{x-4}{3} \end{cases}$ ed è perciò INDETERMINATO.

Senza pretendere affatto di esaurire l'argomento
(la teoria dei sistemi "lineari" ossia di 1° grado, che è coronata dal grande Teorema di Rouché-Capelli
di cui ci occuperemo in un capitolo del Volume 2, non è semplicissima),
ci limitiamo qui solo a un paio di indicazioni generali:

- **Un sistema di 1° grado a n equazioni ed n incognite è "determinato", cioè ha regolarmente una e una sola soluzione (NOTA), se e solo se il determinante (pag. 201) dei coefficienti delle incognite, quello che nella regola di Cramer (pag. 202) è indicato con D, è diverso da zero. Quando invece tale determinante è uguale a zero, allora si ha un caso "speciale", che potrà essere di impossibilità o di indeterminazione (bisognerà valutare di volta in volta).**

NOTA: l'aggettivo "**determinato/a**", riferito a un sistema o a una singola equazione, significa: "**dotato/a di un numero *finito e non nullo* di soluzioni**".
Quando il sistema, o l'equazione, è di 1° grado, nel caso ciò avvenga la soluzione è *unica*.

- **Per scoprire se un sistema di 1° grado a n equazioni ed n incognite è determinato, indeterminato o impossibile si può dunque calcolarne il determinante D. Oppure, in alternativa, si può procedere, coi metodi di sostituzione o di riduzione, fino a giungere ad una equazione in una sola incognita: si tratta poi di risolvere questa e di trarre le conclusioni opportune.**

Gli ESERCIZI su questo paragrafo si trovano a pag. 410.

2. SISTEMI DI 1° GRADO IN CUI IL NUMERO DELLE EQUAZIONI DIFFERISCE DAL NUMERO DELLE INCOGNITE

A) PIU' EQUAZIONI CHE INCOGNITE

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=9 \\ 3x-2y=7 \end{cases}$$

nel quale le incognite sono 2, ma le equazioni sono 3 (quindi: una in più, rispetto alle incognite).

Se ci limitiamo a considerare solamente le prime due equazioni,
queste formeranno un "sotto-sistema" del sistema dato:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=9 \end{cases}$$

Risolvendo ora, con un metodo qualsiasi, tale sotto-sistema,
si trova che esso ammette come unica soluzione la coppia

$$\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

Questa coppia $x=4,\ y=1$ è dunque la sola che verifichi contemporaneamente
tanto la 1^{a} quanto la 2^{a} equazione del sistema iniziale.
Tuttavia, possiamo constatare che tale coppia NON rende verificata la 3^{a} equazione del sistema,
ossia la $3x-2y=7$.

E allora, in definitiva, siamo costretti a concludere che non esiste alcuna coppia $(x,\ y)$
che "vada bene" per tutte e tre le equazioni del sistema assegnato.

Questo è perciò IMPOSSIBILE (si dice anche: "INCOMPATIBILE").

Se l'ultima equazione, anziché essere $3x-2y=7$, fosse stata, poniamo, $3x-2y=10$,
allora la coppia $x=4,\ y=1$ avrebbe verificato, oltre alle prime due equazioni, anche l'ultima,
quindi il sistema sarebbe stato possibile (si dice preferibilmente: "COMPATIBILE"),
con soluzione, appunto, data da:

$$\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

L'esempio fatto mostra che, IN GENERALE,
da un sistema in cui ci siano più equazioni che incognite dobbiamo *aspettarci* impossibilità.
Infatti, se da un sistema siffatto andiamo ad "estrarre" un "sotto-sistema"
nel quale le equazioni siano tante quante le incognite, tale "sotto-sistema"
avrà, generalmente, una e una sola soluzione;
però tale soluzione, per essere soluzione pure del sistema "complessivo",
dovrebbe a questo punto verificare anche tutte le equazioni rimanenti,
e questo, evidentemente, avviene solo in via eccezionale:
di norma, non avviene.

Insomma:

Se il numero delle equazioni è maggiore del numero delle incognite, queste ultime hanno troppi vincoli da rispettare e, IN LINEA DI MASSIMA, "non ce la faranno" a soddisfarli tutti. Salvo casi eccezionali, il sistema sarà impossibile.

NOTA
Questo discorso, fatto pensando ai sistemi "lineari" (= di 1° grado),
si estende comunque, sempre come indicazione di carattere generale,
ai sistemi di equazioni di qualsiasi tipologia

♥ Nel volume 2 studieremo il bel Teorema di Rouché-Capelli, che darà ordine e rigore a ciò che in queste pagine presentiamo come indicazioni "valide in linea di massima".

B) PIU' INCOGNITE CHE EQUAZIONI

E se invece avessimo più incognite che equazioni?

Consideriamo l'esempio seguente:

$$\begin{cases} 3x+2y-z=20 \\ x+y-2z=6 \end{cases}$$

Isoliamo y dalla seconda equazione, e sostituiamo nella prima:

$$\begin{cases} y=6-x+2z \\ 3x+2(6-x+2z)-z=20; \quad 3x+12-2x+4z-z=20; \quad x+3z=8 \end{cases}$$

Ora isoliamo x dall'ultima equazione ottenuta, e sostituiamo nell'altra:

$$\begin{cases} \boxed{x=8-3z} \\ y=6-(8-3z)+2z; \quad y=6-8+3z+2z; \quad \boxed{y=5z-2} \end{cases}$$

Pertanto sono soluzioni del nostro sistema tutte e sole le terne (x, y, z) costruibili assegnando a z un valore ad arbitrio, poi calcolando i valori di x e di y mediante le uguaglianze $x=8-3z;\ y=5z-2$.
Ad es., scegliendo per z il valore 1, avremo $x=8-3=5,\ y=5-2=3$.
Bene, la terna $x=5,\ y=3,\ z=1$ è soluzione del nostro sistema.
Ponendo invece $z=0$, avremo $x=8,\ y=-2$
e la terna $(8,\ -2,\ 0)$ è un'altra soluzione del sistema in esame.

Possiamo indicare le infinite soluzioni del sistema dato con la scrittura $\begin{cases} x=8-3z \\ y=5z-2 \\ z\ \textit{qualsiasi} \end{cases}$

E quindi il sistema proposto, per il fatto di avere infinite soluzioni, è INDETERMINATO.

Vediamo quest'altro esempio:

$$\begin{cases} x+y+u+v+z=1 \\ 5x+4y-3u+2v+z=2 \\ x-u-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u+z \\ (u+z)+y+u+v+z=1 \\ 5(u+z)+4y-3u+2v+z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u+z \\ y+2u+v+2z=1 \\ 4y+2u+2v+6z=2; \quad 2y+u+v+3z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u+z \\ y=1-2u-v-2z \\ 2(1-2u-v-2z)+u+v+3z=1; \quad -3u-v-z=-1; \quad 3u+v+z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u+z \\ y=1-2u-v-2z \\ v=1-3u-z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u+z \\ y=1-2u-(1-3u-z)-2z \\ v=1-3u-z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u+z \\ y=u-z \\ v=1-3u-z \end{cases}$$

Le soluzioni sono perciò tutte e sole le cinquine (x, y, u, v, z) nelle quali:

$$\begin{cases} x=u+z \\ y=u-z \\ u\ \ \textit{qualsiasi} \\ v=1-3u-z \\ z\ \ \textit{qualsiasi} \end{cases}$$

Nel sistema dato, che aveva 3 equazioni e 5 incognite,
abbiamo espresso 3 delle incognite in funzione delle 2 incognite rimanenti.

Generalizzando: **Quando un sistema ha più incognite che equazioni (diciamo, per fissare le idee: n incognite e k equazioni, con n>k), allora esso sarà (IN LINEA DI MASSIMA) "indeterminato con $n-k$ gradi di libertà", nel senso che k fra le incognite potranno essere espresse in funzione delle $n-k$ incognite rimanenti (alle quali si potranno assegnare valori arbitrari).** NOTA - Questo discorso, fatto pensando ai sistemi "lineari" (= di 1° grado), si estende comunque, sempre come indicazione di carattere generale, ai sistemi di equazioni di qualsiasi tipologia	Nel volume 2 studieremo il bel Teorema di Rouché-Capelli, che darà ordine e rigore a ciò che in queste pagine abbiamo presentato come indicazioni "valide in linea di massima".

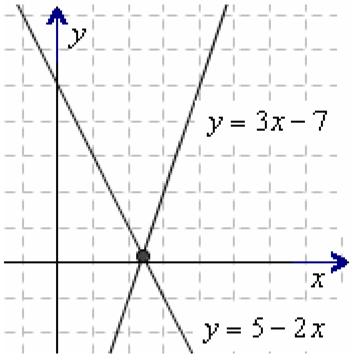
Gli ESERCIZI su questo paragrafo sono a pag. 410.

3. LA RISOLUZIONE GRAFICA DI UN SISTEMA LINEARE IN DUE INCOGNITE

La si può effettuare isolando la y in entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{y=5-2x} \\ \boxed{y=3x-7} \end{cases}$$



Poi si tracciano, in uno stesso riferimento cartesiano,
i grafici delle due funzioni così ottenute:

$y=5-2x,\ \ y=3x-7$

(*nel nostro esempio, poiché le funzioni sono di 1° grado, si tratterà di due rette*)

… per cercare infine la coppia (*x*, *y*) che appartiene ad *entrambi* i grafici.

In pratica, dunque, si va a prendere il PUNTO DI INTERSEZIONE fra i due grafici tracciati.

La *x* e la *y* di quel punto costituiranno la coppia $\begin{cases} x=\dots \\ y=\dots \end{cases}$ soluzione del sistema.

Nel nostro caso, graficamente non siamo in grado di stabilire quale sia il valore *esatto* di questa coppia (x, y); possiamo solo osservare che è $2<x<3$ e $0<y<1$ (con *y* molto più vicina a 0 che a 1).

In effetti, **di norma, queste risoluzioni grafiche ci permettono di *approssimare* la soluzione, piuttosto che di determinarla perfettamente**.

♥ L'interpretazione grafica può essere un'utile occasione per ribadire che (salvo rare eccezioni) *una singola* equazione in due incognite è verificata da INFINITE coppie (*x*, *y*).

Consideriamo, ad esempio, la retta "in discesa", che "rappresenta" l'equazione $2x+y=5$ $(y=5-2x)$.
Se nell'equazione $y=5-2x$ noi poniamo, ad esempio, $x=1$, otteniamo $y=5-2\cdot 1=3$;
bene, ciò significa che la coppia $x=1,\ y=3$ (brevemente: la coppia $(1,\ 3)$) è soluzione dell'equazione $y=5-2x$ quindi anche della sua equivalente $2x+y=5$ (controlliamo: $2\cdot 1+3=5$ *OK*).
Dando poi a *x* altri valori possiamo determinare *altre* coppie (*x*, *y*) che rendono vera l'equazione $y=5-2x$:

$$(0,5);\ \ (2,\ 1);\ \ (3,-1);\ \ (10,-15);\ \ (-1,7);\ \ \left(\frac{1}{2},\ 4\right);\ \ (3,7;\ -2,4);\ \ \dots$$

Tali infinite coppie (x, y) sono per l'appunto le coordinate degli infiniti punti che compongono la retta in discesa; mentre le coordinate (x, y) degli infiniti punti della retta in salita sono quelle coppie (x, y) che "vanno bene" per l'equazione $y=3x-7$ (o per la sua equivalente $3x-y=7$).
Le coordinate del punto in cui le due rette si intersecano sono dunque quei valori $x=\dots,\ y=\dots$ per i quali sono verificate SIMULTANEAMENTE ENTRAMBE le equazioni in gioco.

- ❑ E se le due rette fossero parallele? Vorrebbe dire che quel sistema è IMPOSSIBILE (1).
- ❑ Se poi quelle due rette coincidessero, saremmo di fronte a un sistema INDETERMINATO, avente per soluzioni tutte le infinite coppie (x, y) che verificano una a piacere fra le equazioni in gioco (2).

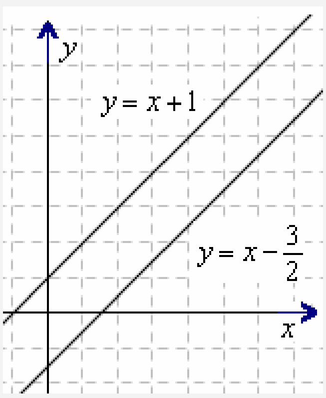
(1) Il sistema

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x-2y=3 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=x-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

ed è IMPOSSIBILE (rette parallele).



Osserviamo che è verificata la *condizione sufficiente di impossibilità*

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}:\ \text{è infatti}\ \ \frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{-1}{3}$$

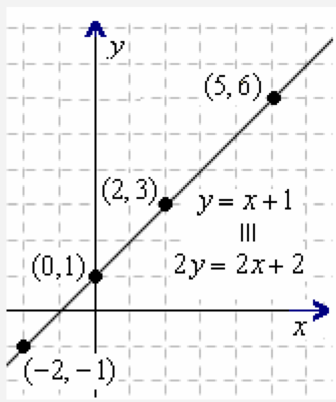
(2) Il sistema

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} y=x+1 \\ 2y=2x+2\ \ (y=x+1) \end{cases}$$

ed è INDETERMINATO (rette coincidenti).



Qui è verificata la *condizione sufficiente di indeterminazione*

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

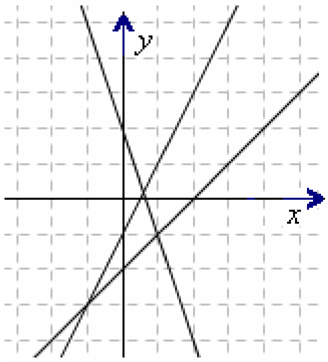
Le soluzioni del sistema sono tutte le coppie (x, y) che corrispondono ai punti di una qualsiasi delle due rette:
$(-2,-1);\ \ (0,1);\ \ (2,3);\ \ (5,6);\ \ (2{,}45;3{,}45);\ \ \dots$

Supponiamo ora che il sistema abbia 2 incognite, ma 3 equazioni: ad esempio

$$\begin{cases} 3x+y=2 \\ x-y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{y=2-3x} \\ \boxed{y=x-2} \\ \boxed{y=2x-1} \end{cases}$$

Già abbiamo visto che, **di norma, sistemi di questo tipo sono impossibili;**
ma che **potrebbero però, eccezionalmente, avere soluzione o addirittura risultare indeterminati**.

In effetti, qui le rette in gioco sono 3:

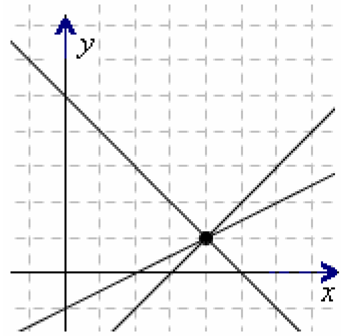


nel nostro caso, le tre rette NON passano tutte per uno stesso punto,
situazione che è poi la più "ordinaria" per 3 rette su un piano,
quindi non esiste una coppia (x,y) che soddisfi simultaneamente tutte e tre le equazioni considerate.

Invece il sistema che segue:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \\ x-2y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{y=5-x} \\ \boxed{y=x-3} \\ \boxed{y=\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{1}{2}x-1} \end{cases}$$

è, eccezionalmente, determinato, in quanto le tre rette passano tutte per uno stesso punto,
le cui coordinate $x=4,\ y=1$ costituiscono la soluzione del sistema.



ESERCIZI

Risolvi, sia graficamente che algebricamente, i sistemi che seguono:

1) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-y=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x+2y=8 \\ 3x+y=4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=3 \\ 3x-3y=1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ x+4y=-1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x-5y=1 \\ 5x-y=1/5 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x-2y=4 \\ 2x-4y=1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ -x+y=3 \\ x+y=5 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 4x+y=7 \\ x-2y+5=0 \\ 2x+0,5y=3,5 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x+y=4 \\ 0,25x+0,25y=1 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 0,125x-0,125y=0,25 \\ 0,5x=1+0,5y \\ y+2=x \end{cases}$

RISPOSTE

1) $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 2) indet.: $\begin{cases} x=x \\ y=4-3x \end{cases}$ 3) imposs. 4) $\begin{cases} x=1 \\ y=-1/2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=0 \\ y=-1/5 \end{cases}$ 6) imposs.

7) imposs. 8) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 10) imposs. 11) indet.: $\begin{cases} x=x \\ y=x-2 \end{cases}$

4. SISTEMI LETTERALI

Esempio:

$$\begin{cases} ax-by=a^2+b^2 \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{cases}$$

Per **SOSTITUZIONE**:

$$\begin{cases} ax=a^2+b^2+by;\quad x=\dfrac{a^2+b^2+by}{a} \quad \underset{\text{NOTA 1}}{(a\neq 0)} \\ b\cdot\dfrac{a^2+b^2+by}{a}+ay=a^2+b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{a^2+b^2+by}{a} \\ \dfrac{a^2b+b^3+b^2y+a^2y}{\cancel{a}}=\dfrac{a^3+ab^2}{\cancel{a}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{a^2+b^2+by}{a} \\ b^2y+a^2y=a^3+ab^2-a^2b-b^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad '' \\ \left(a^2+b^2\right)y=a\left(a^2+b^2\right)-b\left(a^2+b^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad '' \\ \left(a^2+b^2\right)y=\left(a^2+b^2\right)(a-b);\quad y=a-b \quad \text{(NOTA 2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=a-b \\ x=\dfrac{a^2+b^2+b(a-b)}{a}=\dfrac{a^2\cancel{+b^2}+ab\cancel{-b^2}}{a}=\dfrac{\cancel{a}(a+b)}{\cancel{a}}=a+b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=a+b \\ y=a-b \end{cases}$$

NOTA 1
Questo passaggio, finalizzato a isolare *x*, è effettuabile solo nel caso $a\neq 0$; il caso particolare $a=0$ andrà valutato a parte (lo riprenderemo alla fine dell'esercizio)

NOTA 2
La semplificazione dell'equazione è effettuabile solo nel caso $a^2+b^2\neq 0$; d'altra parte, potrebbe risultare $a^2+b^2=0$ soltanto se fosse $a=b=0$, e noi in questo momento ci siamo posti nel caso $a\neq 0$, quindi la quantità a^2+b^2 per la quale abbiamo semplificato è certamente diversa da 0. Non è pertanto necessario porre alcuna condizione per la semplificazione.

Per **RIDUZIONE**:

$$\begin{matrix} a\cdot \\ b\cdot \end{matrix}\begin{cases} ax-by=a^2+b^2 \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{cases} \quad (a\neq 0,\ b\neq 0: \textit{vedi}\ \text{NOTA 3})$$

$$\begin{cases} a^2x-aby=a^3+ab^2 \\ b^2x+aby=a^2b+b^3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1)+(2) \\ (2) \end{matrix}\begin{cases} a^2x+b^2x=a^3+ab^2+a^2b+b^3;\quad \cancel{\left(a^2+b^2\right)}x=\cancel{\left(a^2+b^2\right)}(a+b) \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=a+b \\ b(a+b)+ay=a^2+b^2;\quad ab\cancel{+b^2}+ay=a^2\cancel{+b^2};\quad \cancel{a}y=a^{\cancel{2}}-\cancel{a}b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=a+b \\ y=a-b \end{cases}$$

NOTA 3
Con l'obiettivo di mandar via la *y*, moltiplichiamo la prima equazione per *a* e la seconda per *b*. A tale scopo, dobbiamo supporre $a\neq 0$ e $b\neq 0$, quindi in coda all'esercizio dovremo andare a valutare cosa succede nei due casi particolari ($a=0,\ b=0$) che stiamo provvisoriamente lasciando da parte.

Con **CRAMER**:

$$\begin{cases} ax-by=a^2+b^2 \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{cases}$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a^2+b^2 & -b \\ a^2+b^2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}}=\frac{a\left(a^2+b^2\right)+b\left(a^2+b^2\right)}{a^2+b^2}=\frac{\cancel{\left(a^2+b^2\right)}(a+b)}{\cancel{a^2+b^2}}=a+b \qquad \left(a^2+b^2\neq 0\right)$$

NOTA 4

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a & a^2+b^2 \\ b & a^2+b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}}=\frac{a\left(a^2+b^2\right)-b\left(a^2+b^2\right)}{a^2+b^2}=\frac{\cancel{\left(a^2+b^2\right)}(a-b)}{\cancel{a^2+b^2}}=a-b \qquad \left(a^2+b^2\neq 0\right)$$

NOTA 4

L'applicazione nel metodo di Cramer comporta l'introduzione di denominatori, quindi vale a condizione che i denominatori stessi siano diversi da 0.
Il caso opposto $a^2+b^2=0$ (che si verifica esclusivamente con $a=b=0$) andrà valutato a parte.

LA DISCUSSIONE DEL SISTEMA

Come abbiamo visto, **la risoluzione, con qualunque metodo venga effettuata, può comportare l'individuazione di casi particolari, che vengono "provvisoriamente messi da parte", per valutarli poi alla fine.**

Ad esempio,

- risolvendo con SOSTITUZIONE, abbiamo "accantonato" il caso $a=0$;
- con RIDUZIONE, abbiamo lasciato da parte i casi $a=0$ e $b=0$;
- col metodo di CRAMER, abbiamo accantonato il caso $a^2+b^2=0$ $(a=b=0)$

♥ **Questi casi particolari vanno ripresi in coda all'esercizio, per capire "cosa diventa" il sistema in ciascun caso, e per stabilire se si tratta, eventualmente, di un caso di impossibilità o di indeterminazione per il sistema.**

- *Ad esempio, se abbiamo risolto con SOSTITUZIONE, il caso accantonato è* $a=0$.

  Bene! Con $a=0$ *il sistema* $\begin{cases} ax-by=a^2+b^2 \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{cases}$ *diventa*

  $\begin{cases} -by=b^2 \\ bx=b^2 \end{cases}$ *e ora possiamo dire che:*

  - *se* $b\neq 0$ *è lecito semplificare entrambe le equazioni ottenendo* $\begin{cases} x=b \\ y=-b \end{cases}$
  - *se invece è anche* $b=0$ *il sistema è COMPLETAMENTE INDETERMINATO (qualsiasi coppia (x, y) ne è soluzione).*

  Osserviamo che, con $a=0$ *e* $b\neq 0$, *la soluzione ottenuta* $\begin{cases} x=b \\ y=-b \end{cases}$ *non è altro che la "normalissima" soluzione* $\begin{cases} x=a+b \\ y=a-b \end{cases}$, *nel caso particolare* $a=0$ *!!!*

  E allora l'unico caso "anomalo" per questo sistema è in definitiva il caso $a=b=0$, *nel quale il nostro sistema risulta, come abbiamo visto, completamente indeterminato.*

- *Analogamente, se si è risolto con RIDUZIONE, occorre riprendere i due casi accantonati ecc.*
  Stessa cosa se la risoluzione è stata effettuata con CRAMER: va ripreso il caso accantonato.
  E' ovvio che la conclusione della discussione dovrà essere sempre la medesima, comunque si proceda.

Ecco qui di seguito **un altro esempio**.
Si tratta di un sistema che si presta molto bene ad essere risolto per RIDUZIONE.

$$\begin{cases}(a^2+9)(x+y-1)=6a(x-y)\\(a-3)(x-y-1)=6y\end{cases}$$

Portiamo innanzitutto in "forma normale":

$$\begin{cases}(a^2+9)(x+y-1)=6a(x-y)\\(a-3)(x-y-1)=6y\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2x+a^2y-a^2+9x+9y-9=6ax-6ay\\ax-ay-a-3x\underline{+3y}+3=\underline{6y}\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2x-6ax+9x+a^2y+6ay+9y=a^2+9\\ax-3x-ay-3y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a^2-6a+9)x+(a^2+6a+9)y=a^2+9\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}(a-3)^2x+(a+3)^2y=a^2+9\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}\quad\text{FORMA NORMALE}}$$

Risolviamo per **RIDUZIONE**, moltiplicando la seconda equazione per $(a+3)$

$$\mathit{Con}\ a\neq-3\ \text{(NOTA)}:\ (a+3)\cdot\begin{cases}(a-3)^2x+(a+3)^2y=a^2+9\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-3)^2x+(a+3)^2y=a^2+9\\(a^2-9)x-(a+3)^2y=a^2-9\end{cases}$$

NOTA
La moltiplicazione per $(a+3)$
è effettuabile soltanto supponendo
$a\neq-3$,
altrimenti l'equazione verrebbe
moltiplicata per 0 e quindi "distrutta".
Il caso particolare $a=-3$
andrà valutato separatamente.

$$\begin{matrix}(1)+(2)\\(2)\end{matrix}\quad\begin{cases}(a-3)^2x+(a^2-9)x=a^2\cancel{+9}+a^2\cancel{-9}\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2x-6ax\cancel{+9x}+a^2x\cancel{-9x}=2a^2\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a^2x-6ax=2a^2;\quad a^2x-3ax=a^2;\quad ax-3x=a\quad (a\neq0);\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-3)x=a\ ;\quad x=\dfrac{a}{a-3}\ \ (a\neq3);\\\cancel{(a-3)}\cdot\dfrac{a}{\cancel{a-3}}-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{a-3}\\\cancel{a}-(a+3)y=\cancel{a}-3;\quad (a+3)y=3;\quad y=\dfrac{3}{a+3}\ \ (a\neq-3)\end{cases}$$

Cerchiamo ora di capire (DISCUSSIONE)
cosa accade nei casi particolari, che abbiamo provvisoriamente lasciato da parte.

DISCUSSIONE

Il sistema in forma normale era

$$\boxed{\begin{cases}(a-3)^2x+(a+3)^2y=a^2+9\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}}$$

Vediamo cosa diventa, rispettivamente, nei tre casi: $a=-3;\quad a=3;\quad a=0$

- Con $\boxed{a=-3}$ il sistema diventa

$$\begin{cases}(-3-3)^2x+(-3+3)^2y=(-3)^2+9\\(-3-3)x-(-3+3)y=-3-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}36x=18;\quad x=1/2\\-6x=-6;\quad x=1\end{cases}$$

Le due equazioni sono, evidentemente, incompatibili; il sistema, con $a=-3$, è IMPOSSIBILE.

- Con $\boxed{a=3}$ il sistema diventa

$$\begin{cases}(3-3)^2x+(3+3)^2y=3^2+9\\(3-3)x-(3+3)y=3-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}36y=18;\quad y=1/2\\-6y=0;\quad y=0\end{cases}$$

Le due equazioni sono, evidentemente, incompatibili; il sistema, con $a=3$, è IMPOSSIBILE.

- Con $\boxed{a=0}$ il sistema diventa:

$$\begin{cases}9x+9y=9;\quad x+y=1\\-3x-3y=-3;\quad x+y=1\end{cases}$$

Le due equazioni coincidono; il sistema, con $a=0$, è INDETERMINATO

e ha come soluzioni le infinite coppie: $\begin{cases}x\ qualsiasi\\y=1-x\end{cases}$

Risolvendo per **SOSTITUZIONE** avremmo avuto passaggi più pesanti:

$$\begin{cases}(a-3)x=(a+3)y+a-3;\quad x=\dfrac{(a+3)y+a-3}{a-3}\quad (a\neq 3)\\(a-3)^{\cancel{2}}\cdot\dfrac{(a+3)y+a-3}{\cancel{a-3}}+(a+3)^2y=a^2+9\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{(a+3)y+a-3}{a-3}\\(a-3)(a+3)y+(a-3)^2+(a+3)^2y=a^2+9\end{cases};\quad\begin{cases}\text{"}\\a^2y\cancel{-9y}\cancel{+a^2}-6a\cancel{+9}+a^2y+6ay\cancel{+9y}=\cancel{a^2}\cancel{+9}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{"}\\2a^2y+6ay=6a;\quad a^2y+3ay=3a;\quad ay+3y=3\ (a\neq 0)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{(a+3)y+a-3}{a-3}\\(a+3)y=3;\quad y=\dfrac{3}{a+3}\ (a\neq -3)\end{cases};\quad\begin{cases}x=\dfrac{\cancel{(a+3)}\cdot\dfrac{3}{\cancel{a+3}}+a-3}{a-3}=\dfrac{\cancel{3}+a\cancel{-3}}{a-3}=\dfrac{a}{a-3}\\y=\dfrac{3}{a+3}\end{cases}$$

… e a questo punto avremmo dovuto, come prima,
procedere con la valutazione dei casi particolari trovati, e provvisoriamente accantonati
($a=-3,\ \ a=3,\ \ a=0$).

5. ESERCIZI

ESERCIZI SUI SISTEMI DI 1° GRADO IMPOSSIBILI E INDETERMINATI

Per ciascuno dei seguenti sistemi, stabilisci se è determinato, impossibile, o indeterminato.
In caso di indeterminazione, stabilisci anche quali sono le soluzioni. Correzione ⇨

1) $\begin{cases} x+y=12 \\ 2x+2y=46 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+3y=21 \\ x+y=7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x-8y=12 \\ 10x-20y=30 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2(x+y)=y+2x+3 \\ x-3y=y-(12-x) \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-2y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{1}{5}y=1 \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{20}y=\frac{1}{4} \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x+y=2-(x-y) \\ x-y=6-(x+y) \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x+y=2-(x-y) \\ 2(x+y)=x+2y+1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x+3y=3(y-x) \\ 2x-y=-(y-x) \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 3x+4y=0 \\ 5x-6y=0 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x+2y+3z=5 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=1 \\ x-2y=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x+6y=8 \\ 2y=1 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 2(2x+y)=3y-(y-4x) \\ x+y=9 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 3(x+y+2)=3x+8+3y \\ 4x-y=2 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} 2(x-y)-1=x+y-(3y-x+1) \\ 2(x+y)=x+3y+1-(y-x) \end{cases}$

Negli esercizi seguenti, è richiesto di determinare il valore del parametro in modo che il sistema non sia determinato, e di stabilire se, per quel valore, si ha impossibilità o indeterminazione.

17) $\begin{cases} 6x+ay=10 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} kx+(k-1)y=5 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} bx-y=-2 \\ (b-4)x+y=b \end{cases}$ 20) $\begin{cases} 3x+my=6 \\ 2x+(m+3)y=4 \end{cases}$ 21) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ hx+hz=5 \\ x-y+z=3 \end{cases}$

ESERCIZI (SISTEMI IN CUI IL NUMERO DELLE EQUAZ. E' $\neq$ DA QUELLO DELLE INCOGNITE)

Per ciascuno dei seguenti sistemi, stabilisci se è determinato, impossibile, o indeterminato.
In caso di indeterminazione, stabilisci anche quali sono le soluzioni.

22) ⇨ $\begin{cases} 3x-y=12 \\ 2x+y=13 \\ 4x-7y=2 \end{cases}$ 23) $\begin{cases} a-2b=3 \\ 7a+b=36 \\ 11a-6b=49 \end{cases}$ 24) ⇨ $\begin{cases} x+y+z+t+w=0 \\ x-y-z-t+w=2 \\ x+y-z-t-w=4 \end{cases}$ 25) $\begin{cases} a-b-2c=9 \\ 2a+b=0 \\ c=b-a \\ a+b+c+4=0 \end{cases}$

26) $\begin{cases} a=2b \\ c=3d \\ a+b+c+d=0 \end{cases}$ 27) $\begin{cases} x+y+z=8 \\ x+y-z=6 \end{cases}$ 28) $\begin{cases} p+q=9 \\ 3p-2q=17 \\ 2p=7q \\ p-q=5 \\ 4p+3q=10 \\ 2p-5q=4 \end{cases}$ 29) ⇨ $\begin{cases} w-4x=0 \\ t-y=1 \\ w-t=1 \\ x+y+t+w=10 \\ x-2y+3w=9 \\ 3x+2t=9 \\ w-y=2 \end{cases}$

30) *Dato il sistema*: $\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ 4x+y+2z=3 \end{cases}$
è richiesto di esprimere
I) x e y in funzione di z
II) y e z in funzione di x
III) x e z in funzione di y

RISPOSTE

1) imp. 2) indet.: $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=7-x \end{cases}$ *opp.* $\begin{cases} x=7-y \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$ 3) indet.: $\begin{cases} x=2y+3 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$ *opp.* $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=\frac{x-3}{2} \end{cases}$ 4) indet.: $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=1/3 \\ y=-1/3 \end{cases}$ 6) indet. $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=\frac{15-10x}{3} \end{cases}$ 7) imp. 8) indet. $\begin{cases} x=1 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$ 9) indet. $\begin{cases} x=0 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

11) indet. $\begin{cases} x=z-3 \\ y=7-3z \\ z \text{ qualsiasi} \end{cases}$ 12) imp. 13) $\begin{cases} x=5 \\ y=1/2 \end{cases}$ 14) indet. $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=9-x \end{cases}$ 15) imposs. 16) imposs.

17) $a=-8$; ind. 18) $k=-2$; imp. 19) $b=2$; ind. 20) $m=-9$; ind. 21) ind. con $h=2$, imp. con $h\neq 2$

22) imposs. 23) $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$ 24) indet.: x *qualsiasi*, $y=2-x$, $z=x-t-3$, t *qualsiasi*, $w=1-x$ 25) $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$

26) indet.: $a=-\frac{8}{3}d$; $b=-\frac{4}{3}d$; $c=3d$; d *qualsiasi oppure* … 27) indet.: $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=7-x \\ z=1 \end{cases}$ *oppure*: $\begin{cases} x=7-y \\ y \text{ qualsiasi} \\ z=1 \end{cases}$

28) impossibile 29) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ t=3 \\ w=4 \end{cases}$ 30) *I)* $\begin{cases} x=\frac{3-z}{9} \\ y=\frac{15-14z}{9} \end{cases}$ *II)* $\begin{cases} y=14x-3 \\ z=3-9x \end{cases}$ *III)* $\begin{cases} x=\frac{y+3}{14} \\ z=\frac{15-9y}{14} \end{cases}$

ESERCIZI SUI SISTEMI LETTERALI

Clicca sulla freccia, se presente, per la correzione

1) ⇨ $\begin{cases}3x-2y=5a\\2x+3y=12a\end{cases}$ 2) ⇨ $\begin{cases}x+y=2a\\x-y=2\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x-y=2\\2x+y=3k+1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+y=k\\x+2y=k+1\end{cases}$

5) ⇨ $\begin{cases}mx-y=m^2\\2x+my=(m+1)^2+1\end{cases}$ 6) ⇨ $\begin{cases}x+ay=2a\\x-y=a-1\end{cases}$ 7) ⇨ $\begin{cases}(2a-1)x-(a+1)y=2(2a-1)(a-1)\\(a-1)x+(a+1)y=a(5a-3)\end{cases}$

8) $\begin{cases}2(b+1)x-(b-1)^2y=0\\4x+(b-1)y=3b-1\end{cases}$ 9) $\begin{cases}(m-1)x-my=2m^2\\mx=4y+[2m-(m-2)]^2\end{cases}$ 10) ⇨ $\begin{cases}\dfrac{kx}{2}=1-\dfrac{x-y}{2}\\(k-1)(x-3)+2y=0\end{cases}$

11) $\begin{cases}(a+1)(x-y)=2(1-ay)\\(a^2+1)(x-y)=2[1-a(x+y)]\end{cases}$ 12) ⇨ $\begin{cases}\dfrac{a-1}{y+2}=\dfrac{1}{x-a}\\x-y=\dfrac{2a}{a-1}\end{cases}$ 13) $\begin{cases}m\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{x}=m-1\\x+m(y-1)=m^2+1\end{cases}$

14) $\begin{cases}ax+by=2ab\\ax-by=0\end{cases}$ 15) $\begin{cases}(2a-1)x=2y-1\\a\dfrac{x-2}{y}+1=0\end{cases}$ 16) ⇨ $\begin{cases}x+y+z=3a+1\\x-y+z=a+1\\x+2z=2(a+1)\end{cases}$ 17) $\begin{cases}mx+y+mz=m+1\\y-x=1\\x+z=0\end{cases}$

18) $\begin{cases}px+qy=2\\x+y=\dfrac{p+q}{pq}\end{cases}$ 19) ⇨ $\begin{cases}x+y+z+t=6\\x-y-z+t=0\\x+2y+z+3t=10\\ax+y\quad+4t=2(a+3)\end{cases}$ 20) $\begin{cases}a^2x+a^2y+z=3a\\ax-ay+z=a\\x-y+az=a^2\end{cases}$

SOLUZIONI (ED EVENTUALE DISCUSSIONE)

1) $\begin{cases}x=3a\\y=2a\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=a+1\\y=a-1\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x=k+1\\y=k-1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x=k-1\\y=1\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x=m+1\\y=m\end{cases}$

6) $\begin{cases}x=a\\y=1\end{cases}$ *Se* $a=-1$, *il sistema è INDETERMINATO, con le soluzioni* $\begin{cases}x=y-2\\y\ \text{qualsiasi}\end{cases}$

7) *Se* $a\neq\dfrac{2}{3}\wedge a\neq-1$, $\begin{cases}x=3a-1\\y=2a-1\end{cases}$ *Se* $a=\dfrac{2}{3}$, *il sistema è INDET., con le soluzioni* $\begin{cases}x\ \text{qualsiasi}\\y=\dfrac{3x+2}{15}\end{cases}$
Se $a=-1$, *il sistema è INDET., con le soluzioni* $\begin{cases}x=-4\\y\ \text{qualsiasi}\end{cases}$

8) *Se* $b\neq1\wedge b\neq\dfrac{1}{3}$, $\begin{cases}x=\dfrac{b-1}{2}\\y=\dfrac{b+1}{b-1}\end{cases}$ *Se* $b=1$, *il sistema è IMPOSSIBILE;*
se $b=1/3$, *il sistema è INDETERMINATO,*
e in questo caso le sue soluz. sono le infinite coppie: $\begin{cases}x\ \text{qualsiasi}\\y=6x\end{cases}$

9) *Se* $m\neq2$, $\begin{cases}x=m\\y=-(m+1)\end{cases}$ *Se* $m=2$, *il sistema è INDETERMINATO, con le soluzioni* $\begin{cases}x=2y+8\\y\ \text{qualsiasi}\end{cases}$

10) *Se* $k\neq-\dfrac{1}{3}$, $\begin{cases}x=1\\y=k-1\end{cases}$ *Se* $k=-\dfrac{1}{3}$, *il sistema è INDETERMINATO, con le soluzioni* $\begin{cases}x\ \text{qualsiasi}\\y=\dfrac{2}{3}x-2\end{cases}$

11) *Se* $a\neq\pm1\wedge a\neq0$, $\begin{cases}x=\dfrac{1}{a+1}\\y=\dfrac{1}{a-1}\end{cases}$ *Se* $a=1\vee a=-1$, *il sistema è IMPOSSIBILE*
Se $a=0$, *il sistema è INDETERMINATO,*
con le soluzioni $\begin{cases}x\ \text{qualsiasi}\\y=x-2\end{cases}$

12) $Se\ a \neq 1 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq -1,\ \begin{cases} x = \dfrac{a^2+1}{a-1} \\ y = a-1 \end{cases}$

Il valore 1 *è "inammissibile" per* a.
Se $a = 2$, *il sistema risulta INDETERMINATO,*
con le soluzioni $\begin{cases} x \text{ qualsiasi, purché diverso da } 2; \\ y = x-4 \end{cases}$
Se $a = -1$, *il sistema è IMPOSSIBILE,*
perché la soluzione che si trova non è accettabile.

13) $Se\ m \neq 0 \wedge m \neq -1,\ \begin{cases} x = m+1 \\ y = m \end{cases}$

Se $m = 0$, *il sistema è INDET., con le soluzioni* $\begin{cases} x = 1 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$
Se $m = -1$, *il sistema è IMPOSSIBILE,*
perché la soluzione che si trova non è accettabile.

14) $Se\ a \neq 0 \wedge b \neq 0,\ \begin{cases} x = b \\ y = a \end{cases}$

Se $a = 0 \wedge b \neq 0$, *il sistema è INDETERMINATO:* $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y = 0 \end{cases}$
Se $a \neq 0 \wedge b = 0$, *il sistema è INDETERMINATO:* $\begin{cases} x = 0 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$
Se $a = b = 0$, *il sistema è COMPLETAMENTE INDET.:* $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$

15) $Se\ a \neq \dfrac{1}{4} \wedge a \neq 0,\ \begin{cases} x = 1 \\ y = a \end{cases}$

Se $a = 1/4$, *il sistema è INDETERMINATO,*
con le soluzioni $\begin{cases} x = 2-4y \\ y \text{ qualsiasi purché diverso da } 0 \end{cases}$
Se $a = 0$, *il sistema è IMPOSSIBILE,*
perché la soluzione che si trova non è accettabile.

16) $\begin{cases} x = 2a \\ y = a \\ z = 1 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} x = m \\ y = m+1 \\ z = -m \end{cases}$

18) $p \neq 0,\ q \neq 0.\ Se\ p \neq q,\ \begin{cases} x = 1/p \\ y = 1/q \end{cases}$ *Se* $p = q$, *il sistema è INDET., con le soluz.* $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y = \dfrac{2-px}{p} \end{cases} \left(o \begin{cases} x = \dfrac{2-py}{p} \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases} \right)$

19) $Se\ a \neq 2:\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases}$ *Con* $a = 2$, *il sistema è INDET., con le soluz.* $\begin{cases} x = 3-t \\ y = 4-2t \\ z = 2t-1 \\ t \text{ qualsiasi} \end{cases}$

20) $Se\ a \neq 0,\ a \neq \pm 1:\ \begin{cases} x = 1/a \\ y = 1/a \\ z = a \end{cases}$

Con $a = 0$ *il sistema diventa:* $\begin{cases} z = 0 \\ z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases}$ *ed è perciò INDET., con le soluzioni* $\begin{cases} x = y \\ y \text{ qualsiasi} \\ z = 0 \end{cases}$

Con $a = 1$ *il sistema diventa:* $\begin{cases} x+y+z = 3 \\ x-y+z = 1 \\ x-y+z = 1 \end{cases}$ *che equivale a* $\begin{cases} x+y+z = 3 \\ x-y+z = 1 \end{cases}$

Sommando, si ha $\begin{cases} 2x+2z = 4;\ \ x+z = 2 \\ y = 3-(x+z) = 3-2 = 1 \end{cases}$ *e il sistema è INDET.:* $\begin{cases} x = \text{qualsiasi} \\ y = 1 \\ z = 2-x \end{cases}$

Con $a = -1$ *il sistema diventa:* $\begin{cases} x+y+z = -3 \\ -x+y+z = -1\ \ (x-y-z = 1) \\ x-y-z = 1 \end{cases}$ *che equivale a* $\begin{cases} x+y+z = -3 \\ x-y-z = 1 \end{cases}$

Sommando, si ha $\begin{cases} 2x = -2;\ \ x = -1 \\ -1-y-z = 1;\ y+z = -2 \end{cases}$ *e il sistema è INDET.:* $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2-z \\ z = \text{qualsiasi} \end{cases}$

PROBLEMI CHE CONDUCONO AD UN SISTEMA LETTERALE

Clicca sulla freccia, se presente, per la correzione

1a) ⇨ Un liquido A contiene il 2% di alcool
Un altro liquido B contiene il 6% di alcool.
Si vogliono miscelare *x* litri del liquido A e *y* litri del liquido B in modo da ottenere 60 litri di liquido, che contenga il 3,2% di alcool. Quanto devono valere *x* e *y*?

1b) Risolvi lo stesso problema precedente, supponendo che A contenga il 15% di alcool, B il 5% e si desideri miscelare in modo da ottenere 100 litri di liquido al 12% di alcool.

1c) Generalizziamo. Un liquido A contiene una certa percentuale nota di alcool, percentuale che indichiamo con p_1 (quindi, il liquido A contiene il $p_1\%$ di alcool).
Un altro liquido B contiene il $p_2\%$ di alcool.
Si vogliono miscelare *x* litri del liquido A e *y* litri del liquido B in modo da ottenere k litri di liquido, che contenga il $p\%$ di alcool. Quanto devono valere *x* e *y*?

2a) Un treno merci parte dalla stazione di Milano Centrale diretto a Taranto, e procede a 35 km/h.
1 ora dopo un altro treno parte da Milano Centrale in direzione Taranto, su di un binario parallelo al precedente, viaggiando a 40 km/h.
A quale distanza da Milano i due treni si incontreranno, e dopo quante ore dalla partenza del secondo treno?
(Poni due incognite: s = distanza cercata, t = numero di ore impiegate per percorrere questa distanza, dal treno che parte per secondo)

2b) Risolvi il precedente problema supponendo questa volta che:
il primo treno viaggi a 30 km/h; il secondo treno parta 2 ore dopo e viaggi a 45 km/h.

2c) ⇨ Generalizzazione.
Un treno parte da una stazione procedendo alla velocità di v_1 km/h.
Un secondo treno parte dalla medesima stazione con un ritardo di r ore rispetto al primo treno, su di un binario parallelo, nella stessa direzione, viaggiando alla velocità di v_2 km/h (con $v_2 > v_1$).
A quale distanza dalla stazione i due treni si incontreranno, e dopo quante ore dalla partenza del secondo treno?

3a) Un ricco signore ha depositato una cifra complessiva di 100000 euro, per un anno, parte in una banca A (all'interesse del 3% annuo) e parte in una banca B (all'interesse del 2% annuo).
Sapendo che l'interesse complessivo riscosso dopo un anno è stato di 2180 euro, stabilire quale cifra era stata depositata nella banca A e quale cifra era stata depositata nella banca B.

3b) Risolvere il problema precedente nel caso generale: sia
- s la cifra complessiva iniziale,
- $a\%$ l'interesse annuo concesso dalla banca A,
- $b\%$ l'interesse annuo concesso dalla banca B,
- i l'interesse totale maturato.

Si vogliono conoscere le cifre *x* e *y* depositate rispettivamente in A e in B.

4) Nel triangolo ABC:
la media fra le misure dei due lati AB e AC è p; la media fra AB e BC è q; la media fra AC e BC è r.
Trovare le misure dei tre lati AB, AC, BC.

SOLUZIONI

1a) $x = 42$ litri, $y = 18$ litri 1b) $x = 70$ litri, $y = 30$ litri

1c) $x = \dfrac{(p-p_2)\cdot k}{p_1-p_2}$ litri, $y = \dfrac{(p_1-p)\cdot k}{p_1-p_2}$ litri . Il problema è imposs. se $p_1 = p_2 \neq p$, indet. se $p_1 = p_2 = p$.

2a) $s = 280$ km, $t = 7$ h 2b) $s = 180$ km, $t = 4$ h 2c) $s = \dfrac{v_1 v_2 r}{v_2 - v_1}$ km, $t = \dfrac{v_1 r}{v_2 - v_1}$ ore.

In 2c), il testo specifica che dev'essere $v_2 > v_1$; effettivamente, con $v_1 = v_2$ il problema sarebbe: indet. se $r = 0$ oppure $v_1 = v_2 = 0$, altrimenti impossibile. Infine, cosa diremo se si suppone $v_1 > v_2$?

3a) 18000 euro in A e 82000 in B. 3b) $x = \dfrac{100i - bs}{a-b}$; $y = \dfrac{as - 100i}{a-b}$ $(a \neq b)$. E se $a = b$, cosa si può dire?

4) $AB = p+q-r$; $AC = p-q+r$; $BC = q+r-p$