APPROSSIMAZIONI, ERRORI, INCERTEZZE

1. PERCHE', E COME, APPROSSIMARE

- **Un numero con tante cifre è "ingombrante", scomodo da maneggiare, e soprattutto** ***può darsi che le sue cifre meno "pesanti", vale a dire quelle più a destra, siano trascurabili***
  per il grado di precisione che è sensato osservare in un determinato contesto,
  o che è concretamente possibile ottenere
  (ad esempio, una macchinetta calcolatrice può gestire solo un numero limitato di cifre dopo la virgola).
- **Può anche avvenire che il *vero valore* di un numero sia *sconosciuto,***
  ma sia invece noto un valore che si sa non differire molto da esso.

Si rende quindi sovente opportuno o necessario "approssimare" un numero α,
sostituendolo con un altro numero, vicino ad α, le cui ultime cifre a destra siano tutte 0.

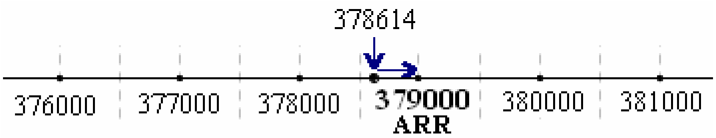
Tale **approssimazione** può essere effettuata in due modi:

A) **per** "**troncamento**", se semplicemente tutte le cifre a destra di una cifra fissata vengono sostituite con degli 0; ad esempio
- il troncamento del numero 378614 alla cifra delle migliaia è 378000
- il troncamento del numero 62,328 alla cifra dei decimi è 62,3
- il troncamento del numero 62,378 alla cifra dei decimi è ancora 62,3

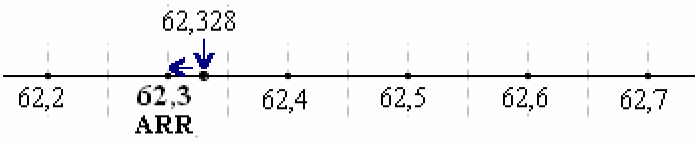
[è chiaro che il troncamento di un numero assoluto (= senza segno) porta sempre a un'approssimazione per *difetto*, ossia alla sostituzione di quel numero con un altro che è *minore* di quello originario]

B) oppure **per** "**arrotondamento**", che possiamo pensare come la **sostituzione del numero con un altro che gli sia** (per difetto o per eccesso) **il più possibile vicino**.
Ad esempio,

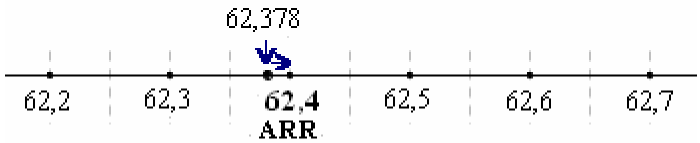
l'arrotondamento del numero 378614 alle *migliaia* è il multiplo di 1000 più vicino, ossia 379000



l'arrotondamento di 62,328 ai *decimi* è il numero con 1 cifra dopo la virgola (= quella dei decimi) più vicino, ossia 62,3



l'arrotondamento del numero 62,378 ai *decimi* è il numero con 1 cifra dopo la virgola (= quella dei decimi) più vicino, ossia 62,4



LA REGOLA PER ARROTONDARE

♥ La **REGOLA** che si applica per l'arrotondamento di un numero è la seguente.

♪ **Se vengono trasformate in "0" tutte le cifre a partire da una certa cifra e verso destra, quando la prima cifra da trasformare in "0" è 0, 1, 2, 3 o 4, allora nell'arrotondamento la cifra precedente resta invariata;**

♫ **se invece la prima cifra da trasformare in "0" è 5 (ma vedi NOTA), 6, 7, 8 o 9, allora nell'arrotondamento la cifra precedente viene aumentata di un'unità.**

Esempi: l'arrotondamento di 12328 alle centinaia è 12300; quello di 0,1372 ai centesimi è 0,14

NOTA: l'arrotondamento "del banchiere" (banker's rounding, o round-to-even method)
Se la **prima cifra da mutare in 0** è **5**, e tale cifra è **l'ultima del numero**, oppure è **seguita solo da zeri**, allora il passaggio al "valore più vicino" potrebbe esser fatto indifferentemente per difetto o per eccesso, perché ad esempio il numero 1,235 ha la stessa distanza sia da 1,23 che da 1,24;
per questo motivo, nel caso in cui i numeri da sottoporre ad arrotondamento siano tanti,
c'è chi preferisce procedere in modo un poco diverso dalla *regola* che abbiamo illustrato, ossia:
se la cifra che precede il 5 è pari, la si lascia invariata, mentre se è dispari, la si aumenta di un'unità
In tal modo le approssimazioni per difetto e per eccesso così effettuate tenderanno a "bilanciarsi" (sui valori arrotondati secondo questa convenzione, metà circa lo saranno per difetto e metà per eccesso), e l'insieme di dati risentirà il meno possibile, globalmente, delle modifiche apportate.

Per esempio, volendo arrotondare ai centesimi	3,875	3,645	3,735	3,865
si scriverà rispettivamente	3,88	3,64	3,74	3,86

Col "banker's rounding", l'ultima cifra del numero arrotondato sarà sempre pari! (*even* = pari)

ESEMPIO RIASSUNTIVO

1845,74893 diventa, se è richiesto di

- arrotondare alle *migliaia*: **2000**
- arrotondare alle *centinaia*: **1800**
- arrotondare alle *decine*: **1850**
- *troncare* alle *decine*: **1840**
- arrotondare alle *unità*: **1846**
- arrotondare ai *decimi*: **1845,7**
- arrotondare ai *centesimi*: **1845,75**
- arrotondare ai *millesimi*: **1845,749**
- *troncare* ai *millesimi*: **1845,748**
- …

ARROTONDAMENTO "NORMALE" O "DEL BANCHIERE" ???

Sta a noi decidere, a seconda delle nostre esigenze, quale applicare!

0,725 arrotondato ai centesimi diventa:

0,73 se decidiamo per un **arrotondamento "normale"**,
perché in questo caso la regola ci dice che se la prima cifra da mutare in 0 è 5,
allora la cifra precedente va aumentata di un'unità;

0,72 se decidiamo di fare l'**arrotondamento "del banchiere"**,
perché in questo caso la cifra che precede il 5, essendo pari, deve rimanere inalterata.

Abbiamo già detto che si può preferire l' "arrotondamento del banchiere" di fronte ad un numero consistente di dati statistici.

OSSERVAZIONI: E' SEMPRE OPPORTUNO ESPRIMERSI CON LA DOVUTA CHIAREZZA!

1) La parola "*arrotondamento*" è a volte impropriamente adoperata per indicare sia un'approssimazione di tipo A) che un'approssimazione di tipo B).
Ma è molto meglio essere *accurati* nella terminologia usata, e riservare il termine "arrotondamento" soltanto a un'approssimazione di tipo "B", ossia alla "scelta del numero più vicino", denominando invece "troncamento" un'approssimazione di tipo "A".

2) Capita di sentire in giro delle espressioni verbali *ambigue* e dunque non appropriate.
Ad esempio, la frase "arrotondare un numero a 2 cifre" come andrà interpretata?
Si tratterà di "arrotondare in modo che rimangano due cifre soltanto *in totale*", oppure di "arrotondare il numero in modo da conservare solo due cifre *dopo la virgola*"?
Per evitare equivoci, bisognerebbe comunicare in modo più preciso, quindi dire, a seconda dei casi,
   - "arrotondare il numero *a 2 cifre significative*"
     (per un discorso esauriente sulle "cifre significative" vedi Volume 2, Statistica, paragrafo 12)

   oppure
   - "arrotondare il numero *alla cifra dei centesimi*, o *alla* 2^a *cifra dopo la virgola* ".

   Ad esempio, prendiamo il numero 1,4723:
   - "arrotondarlo a due cifre significative" significa approssimarlo con 1,5
   - "arrotondarlo a due cifre dopo la virgola", o "arrotondarlo ai centesimi", significa approssimarlo con 1,47.

E' sempre meglio dire o scrivere qualche parola in più, ed evitare l'ambiguità, piuttosto che essere troppo sintetici e lasciare spazio ai dubbi!
Non seguiamo il pessimo esempio dei giornali e della televisione, per carità!!!

3) Ancora: consideriamo il numero, scritto in notazione esponenziale, $3,425 \cdot 10^{-6}$.
Scrivere che il suo "arrotondamento ai decimi" è $3,4 \cdot 10^{-6}$ non ha molto senso,
perché il coefficiente iniziale 3,425 è moltiplicato per 10^{-6}
quindi la sua cifra delle unità (che è 3) indica in realtà dei "milionesimi",
e la sua prima cifra dopo la virgola (che è 4) indica in realtà dei "decimilionesimi".
Molto meglio, allora, dire che
   - $3,4 \cdot 10^{-6}$ è l' "arrotondamento di $3,425 \cdot 10^{-6}$ a due cifre significative"

   oppure
   - $3,4 \cdot 10^{-6}$ è l' "approssimazione di $3,425 \cdot 10^{-6}$ ottenuta arrotondando *il coefficiente* alla *prima cifra dopo la virgola* ".

2. L' ERRORE (ERRORE "ASSOLUTO") NELL'APPROSSIMAZIONE

Quando noi passiamo da un numero a una sua approssimazione, per "troncamento" o per "arrotondamento", commettiamo un "errore", nel senso che il *nuovo* numero *non* è più quello "*vero*":

$$errore = |valore\ approssimato - valore\ esatto|$$

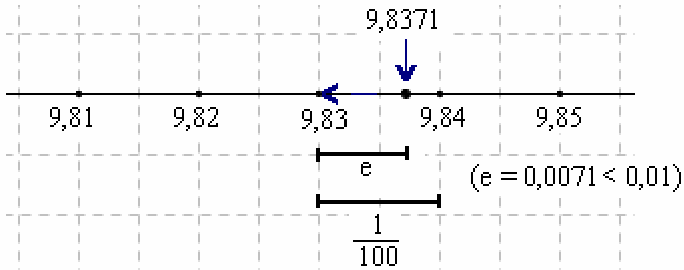
L'errore qui definito viene anche chiamato "errore assoluto"
per distinguerlo dall' "errore relativo" che introdurremo fra poco.
Tuttavia, per la presenza, nella nostra definizione, delle stanghette di "valore assoluto", si tratta anche di un numero "assoluto" nel senso di "senza segno" (o, volendo, di "maggiore o uguale a 0", "non negativo").

- ❑ Ad esempio, se arrotondiamo ai decimi il numero 7,418 otterremo 7,4 e sarà
  $errore = |valore\ approssimato - valore\ esatto| = |7,4 - 7,418| = |-0,018| = 0,018$.
- ❑ Arrotondando invece lo stesso numero 7,418 ai centesimi si otterrà 7,42 e avremo
  $errore = |valore\ approssimato - valore\ esatto| = |7,42 - 7,418| = |0,002| = 0,002$.

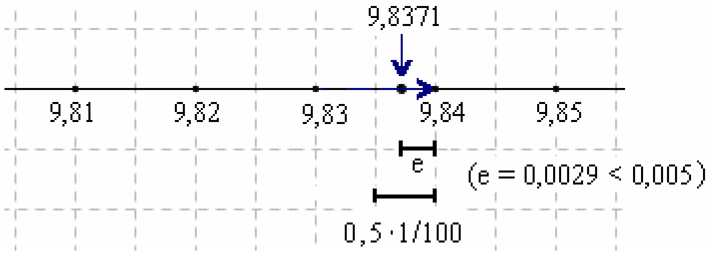
Di questo $errore = errore\ "assoluto" = |valore\ approssimato - valore\ esatto|$
è possibile dare con facilità una "maggiorazione",
cioè un confine al di sopra del quale esso non potrà comunque andare. Precisamente:

- ❑ **nel caso del "troncamento" si può affermare che l'errore sarà sempre minore della grandezza che corrisponde all'ultima cifra del nuovo numero ottenuto …**
- ❑ **… e nel caso dell'arrotondamento, sempre minore o uguale alla metà di questa grandezza**.

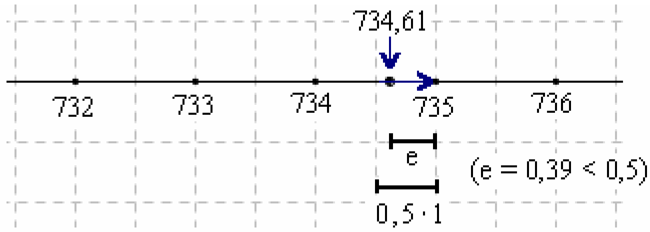
Se **tronchiamo** ai **centesimi**
il numero 9,8371
otteniamo 9,83
la cui differenza in valore assoluto
dal vero valore ("**errore**")
è $|9,83 - 9,8371| = |-0,0071| = 0,0071$
che risulta **inferiore a un centesimo**



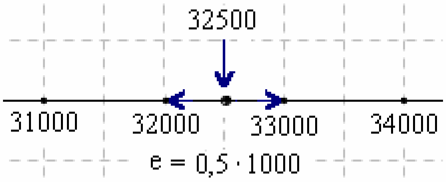
Se **arrotondiamo** ai **centesimi**
lo stesso numero 9,8371
otteniamo 9,84
la cui differenza in valore assoluto
dal vero valore ("**errore**")
è **inferiore alla metà di un centesimo**



Se **arrotondiamo** alle **unità**
il numero 734,61
otteniamo 735
la cui differenza in valore assoluto
dal vero valore ("**errore**")
è **inferiore alla metà di una unità**



Se **arrotondiamo** alle **migliaia** il numero 32500
otteniamo 33000 o 32000, a seconda che applichiamo
l'arrotondamento "normale" oppure quello "del banchiere";
ma in entrambi i casi, la differenza in valore assoluto
fra l'approssimazione e il vero valore (cioè, l' "**errore**")
è **uguale alla metà di un migliaio**.



Insomma, detto α il numero da approssimare, e detti:
T il suo troncamento, A il suo arrotondamento, riferiti alla "cifra di posto *n*", dove intendiamo - ad es. - che

- ♪ "cifra di posto 3" = cifra delle migliaia
- ♪ "cifra di posto 2" = cifra delle centinaia
- ♪ "cifra di posto 1" = cifra delle decine
- ♪ "cifra di posto 0" = cifra delle unità
- ♪ "cifra di posto -1" = cifra dei decimi
- ♪ "cifra di posto -2" = cifra dei centesimi

avremo:

- ❑ nel caso del **troncamento**, $e = errore = |T - \alpha| < 10^n$
- ❑ nel caso dell'**arrotondamento**, $e = errore = |A - \alpha| \le 0,5 \cdot 10^n$

3. L' "ERRORE RELATIVO" NELL' APPROSSIMAZIONE

Se noi arrotondiamo alle decine *l'età di una persona*,
certamente l'errore di approssimazione potrà essere rilevante, specie se la persona è giovane!
Se invece arrotondiamo alle decine *l'altezza in metri di una montagna*,
è ovvio che comunque l'errore sarà trascurabile.
E' perciò spesso conveniente, oltre o alternativamente all'errore "assoluto" visto precedentemente, considerare il cosiddetto "errore relativo", il quale non è altro che il quoziente (= il rapporto) fra l'errore assoluto e il numero considerato (che per una serie di ragioni si intende di prendere nella sua versione approssimata, e in valore assoluto, cioè ignorandone un eventuale segno negativo).

Vale a dire: $$\boxed{\textbf{errore relativo} = \frac{\textbf{errore assoluto}}{|\textbf{valore dell'approssimazione}|}}$$

da cui: $\textbf{errore assoluto} = \textbf{errore relativo} \cdot |\textbf{valore dell'approssimazione}|$

Ad esempio, se l'età di una ragazza 23enne viene arrotondata a 20 anni,
si commette un errore relativo uguale a 3/20 , cioè uguale a 0,15 o anche uguale al 15%,
mentre se l'altezza di una montagna himalayana di 7576 metri viene arrotondata a 7580 metri,
l'errore relativo sarà uguale a 4/7580 = 0,0005… ossia sarà circa dello 0,05%.

A proposito di errore relativo espresso come percentuale, avremo

$$\textbf{errore relativo } \textbf{\textit{percentuale}} = \textbf{errore relativo} \cdot \mathbf{100}$$

4. ERRORI E INCERTEZZE

A ben guardare, nelle varie situazioni della matematica pura e applicata,
più che l'*errore* è facile che sia nota una sua *maggiorazione*, cioè che l'informazione di cui si dispone sia:

"*al massimo*, l'errore potrà valere *tot*, non di più".

Quel "tot" è allora l'INCERTEZZA del nostro dato.

Cos'è dunque l' INCERTEZZA?
E' la MAGGIORAZIONE DELL'ERRORE.
Se sappiamo che l'errore è $\le k$, quel k viene chiamato "incertezza".
Se il valore approssimato è x e l'incertezza è k , il vero valore sarà compreso fra $x-k$ e $x+k$;
non sappiamo dove si trovi tale vero valore, ma esso apparterrà all'intervallo $[x-k,\ x+k]$

La questione si presenta *sempre* nelle scienze sperimentali,
quando si effettua la misurazione di una qualsiasi grandezza fisica.

Allora il *vero* valore (NOTA) della quantità da misurare è pressoché impossibile da cogliere:
intervengono infatti inevitabili circostanze per le quali la misura rilevata
è affetta, rispetto al valore vero, da un errore.

In generale si fanno *diverse* misurazioni, se ne calcola la media aritmetica $\overline{x}$ (leggi: "*x* segnato")
e si conclude

- NON che il valore di quella grandezza sia $\overline{x}$,
- BENSI' che tale valore sia compreso
  (*non* con "*sicurezza*", ma con una certa *probabilità*, più o meno quantificabile) fra $\overline{x}-k$ e $\overline{x}+k$,
  essendo k un determinato numero positivo individuato con opportuni procedimenti statistici.

Il vero valore *non* è stato stabilito esattamente, ma è stato *stimato* in $\overline{x}$ con una INCERTEZZA di k .

NOTA – Il discorso sul "valore *vero*" viene ripreso nel capitolo di Statistica del Volume 2

OCCHIO!

♥ In parecchi libri di testo, ad esempio di Fisica ma anche di Matematica,
viene sbrigativamente e impropriamente chiamato ERRORE …
… ciò che in realtà dovrebbe essere denominato INCERTEZZA.
Ti avverto, perché ciò può essere fonte di una ben giustificata difficoltà di lettura!!!

5. L' "INCERTEZZA RELATIVA"

$$\boxed{\textbf{incertezza relativa} = \frac{\textbf{incertezza assoluta}}{|\textbf{valore dell'approssimazione}|}}$$

da cui : $\textbf{incertezza assoluta} = \textbf{incertezza relativa} \cdot |\textbf{valore dell'approssimazione}|$

Si ha poi $\textbf{incertezza relativa } \textbf{\textit{percentuale}} = \textbf{incertezza relativa} \cdot \mathbf{100}$

6. LA "PROPAGAZIONE" DEGLI ERRORI, O MEGLIO: DELLE "INCERTEZZE"

♥ **Cos'è l' ERRORE? E' LA DIFFERENZA, PRESA IN VALORE ASSOLUTO, FRA IL VALORE APPROSSIMATO, O IL VALORE RICAVATO DA UNA MISURA, E IL VALORE VERO.**

♥ **Cos'è l' INCERTEZZA?**
E' LA MAGGIORAZIONE DELL'ERRORE.
Se sappiamo che l'errore è $\le k$, quel k viene chiamato "incertezza".

Se il valore approssimato è x e l'incertezza è k, il vero valore sarà compreso fra $x-k$ e $x+k$;
non sappiamo dove si trovi tale vero valore, ma esso apparterrà all'intervallo $[x-k,\ x+k]$

♥ NOTA - **IN UN'ACCEZIONE PIÙ GENERALE, si intende per "incertezza" il grado di indeterminazione cui è soggetto il valore che viene attribuito a una data quantità.**
In alcuni contesti, come la teoria degli errori di misura, non si può dire che il valore vero si trovi in $[x-k,\ x+k]$ "sicuramente", bensì "con una certa probabilità", più o meno quantificabile. Vedi Volume 2, cap. di Statistica.

Insistiamo (sigh!): in parecchi libri di testo viene impropriamente chiamato ERRORE ciò che in realtà dovrebbe essere denominato INCERTEZZA … e questo può complicare la vita al povero lettore !!! ☹

Siano a, b due grandezze, e sia G una terza grandezza che derivi da un'operazione aritmetica su a, b. Allora:

- **L' incertezza della SOMMA $G = a + b$**
  è la somma delle incertezze da cui sono affetti gli addendi: $\boxed{\Delta G = \Delta a + \Delta b \ \text{ se } \ G = a + b}$

Di solito questa regola viene enunciata impropriamente così ☹ :
"L'errore della somma è uguale alla somma degli errori degli addendi"
(semmai, riferendosi all'*errore*, sarebbe vera l'affermazione che:
"L'errore della somma è sempre *minore o uguale* alla somma degli errori degli addendi")

Il simbolo Δ ("delta") è sovente utilizzato, in matematica, per indicare "differenza".
Ad es., fra due persone che hanno risp. 15 anni e 47 anni, c'è una differenza di età "delta e" $\Delta e = 47 - 15 = 32$.
Se considero, in Fisica, due istanti di tempo successivi t_1 e t_2, nei quali la velocità di un corpo è risp. v_1 e v_2, allora nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ la variazione di velocità ($>$, $<$ o $=0$) è data da $\Delta v = v_2 - v_1$.

- **La stessa identica regola vale per la differenza: l' incertezza della DIFFERENZA $G = a - b$**
  è la somma delle incertezze da cui sono affetti i termini: $\boxed{\Delta G = \Delta a + \Delta b \ \text{ se } \ G = a - b}$
- **L'incertezza del PRODOTTO $G = ca$ DI UN NUMERO COSTANTE $c > 0$ PER UNA GRANDEZZA**
  è il prodotto del numero fisso per l'incertezza della grandezza: $\boxed{\Delta G = c\Delta a \ \text{ se } \ G = ca}$
- **L' *incertezza relativa* (OCCHIO! RELATIVA, questa volta, non assoluta!) del PRODOTTO $G = a \cdot b$**
  è la somma delle *incertezze relative* dei fattori: $\boxed{\dfrac{\Delta G}{G} = \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b} \ \text{ se } \ G = a \cdot b}$

Di solito questa regola viene enunciata impropriamente così ☹ :
"L'errore relativo del prodotto è la somma degli errori relativi dei fattori"

- **Del tutto analoga a quella sul prodotto, e come essa basata sulle incertezze *relative*,**
  è la regola per il QUOZIENTE $G = \dfrac{a}{b}$: $\boxed{\dfrac{\Delta G}{G} = \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b} \ \text{ se } \ G = \dfrac{a}{b}}$
- **Per la POTENZA $G = a^n$:** $\boxed{\dfrac{\Delta G}{G} = n\dfrac{\Delta a}{a} \ \text{ se } \ G = a^n}$ (valida anche se n è frazionario, ossia con le radici: tieni presente che, ad es., $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ e $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$)

ESERCIZIO SVOLTO

Se il valore approssimato di un numero t è $\boxed{5{,}30}$, e l'*incertezza* è $\boxed{0{,}10}$, si avrà
$5{,}30 - 0{,}10 \le t \le 5{,}30 + 0{,}10$ cioè $5{,}20 \le t \le 5{,}40$.

Se il valore approssimato di un numero t è $\boxed{5{,}30}$, e si sapesse che l'*errore* è, in valore assoluto, $\boxed{0{,}10}$, allora
$t = 5{,}20$ oppure $t = 5{,}40$.

Se il valore appross. di t è $\boxed{5{,}30}$, e l'*incertezza relativa* è $\boxed{0{,}10}$, quindi l'inc. rel. percentuale è del 10%, si avrà
incertezza assoluta $= 5{,}30 \cdot 0{,}10 = 0{,}53$ da cui $5{,}30 - 0{,}53 \le t \le 5{,}30 + 0{,}53$.

7. ESERCIZI. Armati di macchinetta calcolatrice e riempi le seguenti tabelle.
Le risposte sono alla pagina successiva.

1)

Numero	Troncamento ai centesimi	Arrotondamento ai centesimi	Errore assoluto dell'arrotondamento	Errore relativo dell'arr. anche percentuale
887,2851				
0,038				
3,141592				
23,88888				
Numero	Troncamento alle decine	Arrotondamento alle decine	Errore assoluto dell'arrotondamento	Errore relativo dell'arr. anche percentuale
7777				
324				
325				
500001				
Numero	Troncamento ai millesimi	Arrotondamento ai millesimi	Errore assoluto dell'arrotondamento	Errore relativo dell'arr. anche percentuale
9,3485				
27,9474				
0,000208				
Numero		Arrotondamento a 3 cifre significative	Errore assoluto dell'arrotondamento	Errore relativo dell'arr. anche percentuale
9,3485	– – –			
27,9474	– – –			
0,000208	– – –			

2)

Valore ottenuto arrotondando *x* ai centesimi	Valori possibili del numero *x* (*x* compreso fra …)
33,47	
4,01	
2,00	

Valore ottenuto arrotondando *x* ai decimi	Valori possibili del numero *x*
33,4	
4,0	

3)

Valore approssimato di *x*	Incertezza assoluta	Valori possibili del numero *x* (*x* compreso fra …)
23	1	
98,65	0,02	
1,500	0,001	

4)

Valore approssimato di *x*	Incertezza relativa	Valori possibili del numero *x*
131	5%	
0,08	1%	
4,59	1,5%	

5)

Incertezza assoluta di a	Incertezza assoluta di b	Incertezza assoluta di $a+b$	Valore approssimato di $a+b$	Valori possibili di $a+b$
0,1	0,1		43,8	
0,05	0,1		3,00	
0,03	0,02		12,34	

6)

Incertezza relativa di a	Incertezza relativa di b	Incertezza relativa di $a \cdot b$	Valore approssimato di $a \cdot b$	Valori possibili di $a \cdot b$
5%	5%		83,40	
0,01	0,02		5,20	
0,001	0,001		8,000	

RISPOSTE

1)

Numero	Troncamento ai centesimi	Arrotondamento ai centesimi	Errore assoluto dell'arrotondamento	Errore relativo dell'arr. anche percentuale
887,2851	887,28	887,29	0,0049	0,0000055… ($\approx$0,00055%)
0,038	0,03	0,04	0,002	0,05 (5%)
3,141592	3,14	3,14	0,001592	0,000507… ($\approx$0,0507%)
23,88888	23,88	23,89	0,00112	0,00004688… ($\approx$0,004688%)
Numero	Troncamento alle decine	Arrotondamento alle decine	Errore assoluto dell'arrotondamento	Errore relativo dell'arr. anche percentuale
7777	7770	7780	3	0,0003856… ($\approx$0,03856%)
324	320	320	4	0,0125 (1,25%)
325	320	330	5	0,0151515… ($\approx$1,51515%)
500001	500000	500000	1	0,000002 (0,0002%)
Numero	Troncamento ai millesimi	Arrotondamento ai millesimi	Errore assoluto dell'arrotondamento	Errore relativo dell'arr. anche percentuale
9,3485	9,348	9,349	0,0005	0,00005348… ($\approx$0,005348%)
27,9474	27,947	27,947	0,0004	0,0000143… ($\approx$0,00143%)
0,000208	0	0	0,000208	Non valutabile
Numero		Arrotondamento a 3 cifre significative	Errore assoluto dell'arrotondamento	Errore relativo dell'arr. anche percentuale
9,3485	– – –	9,35	0,0015	0,0001604… ($\approx$0,01604%)
27,9474	– – –	27,9	0,0474	0,0016989… ($\approx$0,16989%)
0,000208	– – –	0,000208	0	0 (0%)

2)

Valore ottenuto arrotondando x ai centesimi	Valori possibili del numero x
33,47	$33,465 \le x < 33,475$
4,01	$4,005 \le x < 4,015$
2,00	$1,995 \le x < 2,005$

Valore ottenuto arrotondando x ai decimi	Valori possibili del numero x
33,4	$33,35 \le x < 33,45$
4,0	$3,95 \le x < 4,05$

3)

Valore approssimato di x	Incertezza assoluta	Valori possibili del numero x
23	1	$22 \le x \le 24$
98,65	0,02	$98,63 \le x \le 98,67$
1,500	0,001	$1,499 \le x \le 1,501$

4)

Valore approssimato di x	Incertezza relativa	Valori possibili del numero x
131	5%	$124,45 \le x \le 137,55$
0,08	1%	$0,0792 \le x \le 0,0808$
4,59	1,5%	$4,52115 \le x \le 4,65885$

5)

Incertezza assoluta di a	Incertezza assoluta di b	Incertezza assoluta di $a+b$	Valore approssimato di $a+b$	Valori possibili di $a+b$
0,1	0,1	0,2	43,8	$43,6 \le a+b \le 44,0$
0,05	0,1	0,15	3,00	$2,85 \le a+b \le 3,15$
0,03	0,02	0,05	12,34	$12,29 \le a+b \le 12,39$

6)

Incertezza relativa di a	Incertezza relativa di b	Incertezza relativa di $a \cdot b$	Valore approssimato di $a \cdot b$	Valori possibili di $a \cdot b$
5%	5%	10%	83,40	$75,06 \le a \cdot b \le 91,74$
0,01	0,02	0,03	5,20	$5,044 \le a \cdot b \le 5,356$
0,001	0,001	0,002	8,000	$7,984 \le a \cdot b \le 8,016$

8. L' "ORDINE DI GRANDEZZA" E I DIVERSI MODI DI DEFINIRLO

Per "ordine di grandezza" di un numero si intende "una potenza di 10 adatta ad approssimare il numero".
Ad esempio,

- l'ordine di grandezza di 814 è 10^3 ($10^3 = 1000$ è la potenza di 10 più vicina a 814);
- l'ordine di grandezza di 357 è 10^2 ($10^2 = 100$ è la potenza di 10 più vicina a 357);
- l'ordine di grandezza di 74972,1 è 10^5 ($10^5 = 100000$ è la potenza di 10 più vicina a 74972,1);
- l'ordine di grandezza di 14,7 è 10^1 ($10^1 = 10$ è la potenza di 10 più vicina a 14,7);
- l'ordine di grandezza di 4,15 è 10^0 ($10^0 = 1$ è la potenza di 10 più vicina a 4,15);
- l'ordine di grandezza di 0,00008 è 10^{-4} ($10^{-4} = 0,0001$ è la potenza di 10 più vicina a 0,00008).

Nella pratica, si suole procedere nel modo seguente:

- ai numeri y tali che $5 \le y < 50$ si attribuisce ordine di grandezza 10^1
  (NOTA: anche se, a ben guardare, 5 sarebbe più prossimo a $10^0 = 1$ che a $10^1 = 10$!)
- ai numeri y tali che $50 \le y < 500$ si attribuisce ordine di grandezza 10^2
- ai numeri y tali che $500 \le y < 5000$ si attribuisce ordine di grandezza 10^3; e così via.

Quindi per fissare l'ordine di grandezza di un numero basta scriverlo in *notazione esponenziale*, ossia come
$a \cdot 10^n$, con n intero relativo e (importante!) $1 \le a < 10$;
dopodiché l'ordine di grandezza sarà 10^n se $1 \le a < 5$, e sarà invece 10^{n+1} se $5 \le a < 10$. Esempi:

- $814 = 8{,}14 \cdot 10^2$ da cui, essendo $5 \le 8{,}14 < 10$, si trae che l'ordine di grandezza di 814 è 10^3
- $357 = 3{,}57 \cdot 10^2$ da cui, essendo $1 \le 3{,}57 < 5$, si trae che l'ordine di grandezza di 357 è 10^2.

Semplice, se non fosse che NON TUTTI I TESTI DANNO PRECISAMENTE QUESTA DEFINIZIONE.

Molti autori, infatti, pur partendo sempre dalla premessa che
l' "ordine di grandezza" debba essere "una potenza di 10 vicina al numero dato",
affermano che per "ordine di grandezza di un numero" si debba intendere 10^n qualora n sia … ascolta …
"l'arrotondamento all'intero più vicino del logaritmo in base 10 del numero", ossia
"l'arrotondamento all'intero più vicino dell'esponente che occorre dare alla base 10 per ottenere il numero".

Ci sono, è ovvio, ottime motivazioni per preferire siffatta impostazione;
tuttavia, evidentemente, non è altrettanto semplice dell'altra. Facciamo degli esempi.

- Vale l'uguaglianza $814 \approx 10^{\frac{291}{100}} = 10^{2,91}$ (gli esponenti frazionari sono trattati nel Volume 2)
  quindi l'ordine di grandezza di 814, secondo questa definizione, sarà 10^3
  perché 3 è l'arrotondamento di 2,91 all'intero più vicino.
- Nel caso precedente la conclusione è stata *la medesima* che con la definizione data all'inizio.
  Ma prendiamo ora il numero 357: si ha $357 = 10^{2,55\ldots}$ e l'arrotondamento di 2,55…
  all'intero più vicino è 3; dunque con questa definizione si dovrebbe concludere
  che l'ordine di grandezza di 357 è 10^3, e *non* 10^2 come si era detto all'inizio.

Qualora si proceda nello strano modo che abbiamo descritto, la situazione diventa all'incirca la seguente:

- ai numeri y tali che $3{,}16 \le y < 31{,}6$ viene attribuito ordine di grandezza 10^1;
- ai numeri y tali che $31{,}6 \le y < 316$ viene attribuito ordine di grandezza 10^2; eccetera.

Altri testi poi ☹ adottano una definizione ancora diversa!!!
E infine (ma qui è una questione di uso delle parole, più che di sostanza)
in qualche caso per "ordine di grandezza" non si intende la potenza di 10, bensì il suo esponente!

♥ Questa **disomogeneità** nelle definizioni in uso è antipatica; tuttavia la nozione di "ordine di grandezza"
è utilizzata soprattutto per *confrontare* fra loro *approssimativamente* due grandezze della stessa specie,
al fine di valutare se hanno lo stesso ordine di grandezza oppure ordini di grandezza diversi;
ora, *qualunque definizione* si adotti, accade sempre che due quantità

- "differiscono di 1 ordine di grandezza" se il rapporto fra la più grande e la più piccola è all'incirca 10
- "differiscono di 2 ordini di grandezza" se il rapporto fra la più grande e la più piccola è all'incirca 100
- … e così via.

E ciò basta a dare una idea di quante volte, pressappoco, una grandezza sia maggiore o minore di un'altra.

Ad esempio, la distanza della Terra dal Sole e la distanza del sistema solare dalla Proxima Centauri,
la stella a noi più vicina dopo il Sole, differiscono di 5 ordini di grandezza
(vuol dire che la distanza sistema solare - Proxima Centauri è intorno a 100000 volte la distanza Terra-Sole);
a sua volta, la distanza del sistema solare dalla Proxima Centauri e il raggio stimato della Via Lattea
differiscono di altri 5 ordini di grandezza.

Cliccando sulla freccia ⇨ potrai vedere una tabella molto interessante a proposito degli ordini di grandezza.