

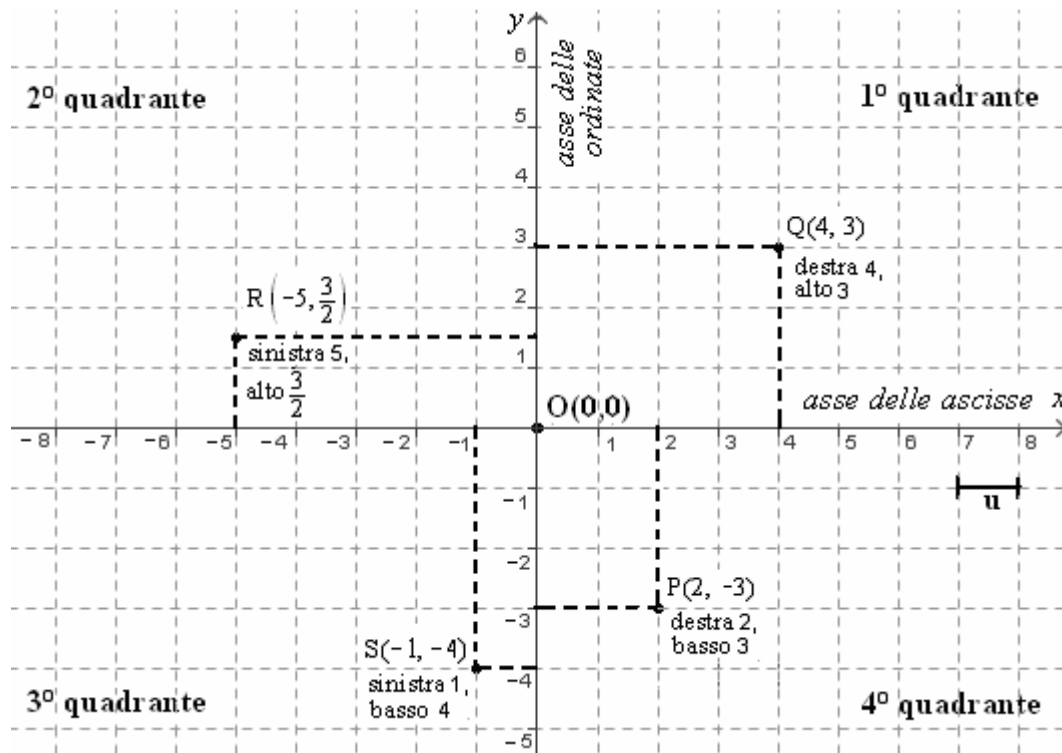
IL RIFERIMENTO CARTESIANO; LE FUNZIONI E IL LORO GRAFICO

1. IL RIFERIMENTO CARTESIANO

Un “riferimento cartesiano” consta di due “number lines” che si tagliano perpendicolarmente (riferimento cartesiano “ortogonale”: dei “non ortogonali” non ci occuperemo) nell’origine comune. Esse sono dette “assi cartesiani”.

- Uno dei due assi è chiamato “asse delle ascisse” o “asse delle x ”,
- l’altro “asse delle ordinate” o “asse delle y ” (NOTA).

Di norma l’asse delle ascisse è disposto *orizzontalmente* rispetto al lettore, l’asse delle ordinate *verticalmente*. Ove possibile, per i due assi si sceglie la stessa unità di misura (sistema di riferimento “monometrico”); quando ciò, per motivi vari di opportunità, non avviene, si parla di sistema “dimetrico”.



Ad ogni punto di un “piano cartesiano” (= piano sul quale è stato fissato un riferimento cartesiano) si fanno corrispondere due numeri, il primo dei quali si chiama “ascissa” del punto considerato, il secondo “ordinata”. Si dice che ogni punto del piano cartesiano ha due “coordinate”: l’ascissa e l’ordinata.

- L’ascissa di un punto P è il numero che si incontra proiettando P sull’asse delle ascisse;
- l’ordinata di P è il numero che si incontra proiettando P sull’asse delle ordinate.

[Ricordiamo che “proiettare” vuol dire “calarsi perpendicolarmente su”]

Al posto di dire “l’ascissa” si dice spesso anche “la x ”; e al posto di dire “l’ordinata” si dice “la y ” (NOTA). Se un punto P ha, ad es., ascissa 2 e ordinata -3, si scrive $P(2, -3)$, e si legge: “P, di coordinate 2 e -3”.

♥ Si può anche dire che

- l’ascissa di un punto P è il numero che descrive lo **scostamento “orizzontale”** di P rispetto all’origine,
- l’ordinata di P è il numero che descrive lo **scostamento “verticale”** di P rispetto all’origine:

insomma, se è, per esempio, $P(2, -3)$, vuol dire che, a partire dall’origine, possiamo giungere al punto P muovendoci di 2 unità verso *destra* e di 3 unità verso il *basso*.

- ❑ Ogni punto dell’asse delle ascisse ha ordinata 0, mentre ogni punto dell’asse delle ordinate ha ascissa 0.
- ❑ L’origine comune dei due assi, detta “origine del riferimento” e di norma indicata con la lettera O, ha coordinate entrambe nulle: si scrive dunque $O(0, 0)$.
- ❑ Gli assi cartesiani suddividono il piano in quattro “quadranti”.
Il 1° quadrante è l’insieme dei punti con $x > 0$, $y > 0$;
la numerazione dei quadranti prosegue poi in senso *antiorario*.

Ogni punto, sul piano cartesiano, è “individuato biunivocamente” dalla coppia delle sue coordinate, ossia:

♥ **ad ogni punto preso sul piano cartesiano corrisponde una e una sola coppia (x, y) di numeri reali; e viceversa, presa una qualsiasi coppia (x, y) di numeri reali, ad essa corrisponde uno e un solo punto sul piano cartesiano.**

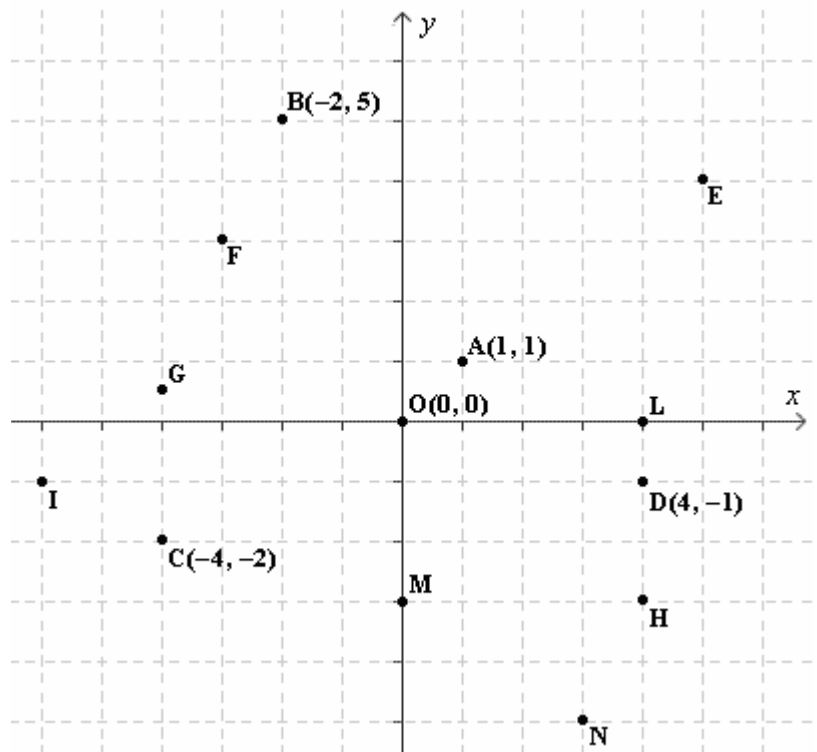
NOTA - Naturalmente, questo s’intende a patto che (è la norma, ma non è la generalità) si sia deciso di utilizzare effettivamente il simbolo x per indicare i numeri rappresentati sull’asse delle ascisse, e y per quelli sull’altro asse (a volte è più opportuna una scelta diversa)

ESERCIZI Clicca per le risposte ➡

- 1) Nella figura qui a fianco, sono riportate le coordinate di alcuni punti. Scrivi le coordinate di ciascuno dei punti restanti.

Si scrive, tra parentesi, prima l'ascissa (x) e poi l'ordinata (y). L'ascissa è il numero che si ottiene calandosi perpendicolarmente dal punto sopra l'asse orizzontale, l'ordinata ... sull'asse verticale.

In alternativa, l'ASCISSA è il numero che descrive quale spostamento IN ORIZZONTALE devo effettuare se, partendo dall'origine, voglio raggiungere il punto (positivo se devo andare verso destra, negativo se devo andare a sinistra); l'ORDINATA è il numero che descrive quale spostamento IN VERTICALE devo effettuare se, partendo dall'origine, voglio raggiungere il punto (positivo se devo andare verso l'alto, negativo se devo andare verso il basso)



- 2) Nella figura qui a fianco, disegna i punti

Q(-4,1) R(1,-4) S(-1,-4)

T(2,2) U(0,3) V(-5,0)

$W\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$ $Z\left(\frac{13}{5}, -\frac{11}{3}\right)$

$J\left(-\frac{23}{5}, \frac{23}{6}\right)$ $K\left(\frac{19}{4}, -\frac{11}{4}\right)$

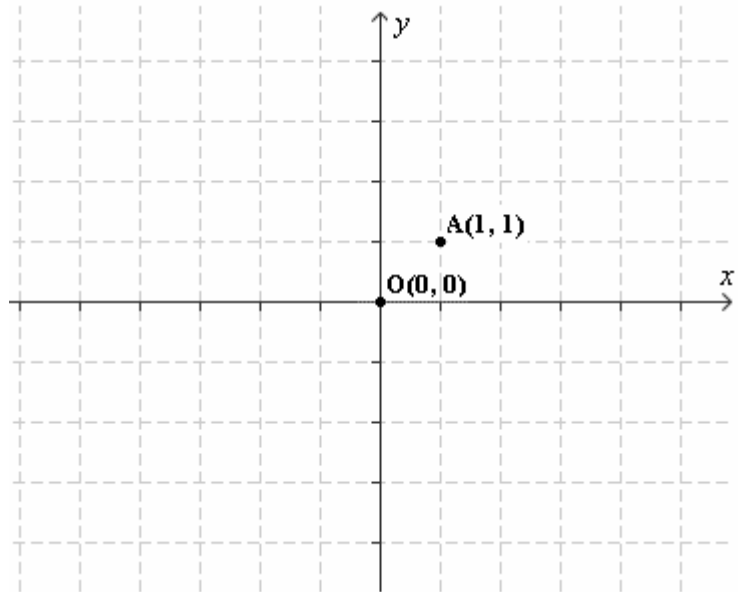
Voglio il punto $(-4, 1)$?

Allora, partendo dall'origine, devo andare

- prima a sinistra di 4 unità,
- poi in alto di 1.

Per le coordinate frazionarie, quando la frazione ha il numeratore più grande del denominatore, prima converrà trasformare nella somma algebrica di un intero con una frazione "piccola":

$$\text{es. } \frac{13}{5} = \frac{10+3}{5} = 2 + \frac{3}{5}; \quad -\frac{11}{3} = \frac{-9-2}{3} = -3 - \frac{2}{3}$$



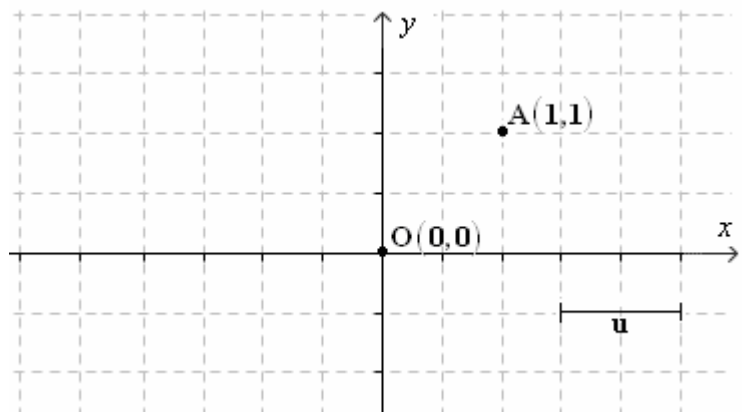
- 3) Questa volta l'unità di misura è di DUE quadretti.

Disegna i punti seguenti:

B(-1,2) C $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ D $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

E $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$ F(-1,0) G $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

H $\left(-\frac{7}{4}, \frac{6}{5}\right)$ I $\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ J $\left(\frac{7}{3}, \frac{12}{7}\right)$



2. INTRODUZIONE AL CONCETTO DI FUNZIONE

Definizione

♥ Si ha una **FUNZIONE** quando si hanno due grandezze variabili, legate fra loro in modo che ad ogni valore di una di esse (variabile indipendente) corrisponde **UNO E UN SOLO** valore dell'altra (variabile dipendente).

*Di preferenza,
la variabile indipendente si indica con la lettera x ,
e la variabile dipendente con y ,
ma a volte è più opportuna una scelta dei simboli diversa.*

ESEMPI

- a) Com'è noto, il **volume della sfera** si ottiene applicando la formula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

E' chiaro (sia dalla formula che dall'intuizione geometrica)

che **ad ogni valore del raggio corrisponde uno e un solo valore del volume.**

Il raggio (r) è la variabile indipendente; il volume (V) è la variabile dipendente.

Si ha una **funzione**, che potremmo chiamare ad esempio **f**

(per indicare una funzione si usa di solito una lettera alfabetica, minuscola o maiuscola).

Scriveremo allora $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = f(r)$

La scrittura

$$V = f(r)$$

si legge

“**V uguale f di r**”

e significa:

“**ho una funzione,
che ho indicato col simbolo f ,
nella quale**

**la variabile indipendente è stata indicata col simbolo r
e la variabile dipendente col simbolo V ”.**

$V = f(r)$
var. dip. nome della funzione (var. ind.)



Ad esempio, il volume di una sfera di raggio 3 metri è: $f(3) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi \approx 113,1 \text{ m}^3$.

- b) Se un'automobile si muove con la velocità costante di 1,5 metri al secondo,
- dopo 1 secondo dall'istante in cui facciamo scattare il cronometro avrà percorso 1,5 m,
 - dopo 2 secondi 3 m,
 - dopo 3 secondi 4,5 m,
 - dopo $\frac{1}{2}$ secondo 0,75 m,
 - ecc. ecc.

In questo caso la variabile indipendente è il tempo (che potremmo indicare con t) e la variabile dipendente è lo spazio percorso (lo indicheremo con s).

La funzione, cioè il legame fra le due variabili, si può esprimere mediante la formula $s = 1,5 t$.

Se chiamiamo questa funzione D (D come Distanza), avremo: $s = D(t) = 1,5 t$.

E potremo scrivere, ad esempio: $D(2) = 3$, $D(10) = 15$, ecc.

- c) Supponiamo di misurare il tempo in ore, e le temperature in gradi centigradi. Immaginiamo di piazzarci con un termometro davanti al cancello della scuola e di far scattare il cronometro.

La nostra unità di misura per i tempi sarà la durata di 1 ora.

La temperatura, all'istante $t = 0$, avrà un certo valore,

all'istante $t = 1$ (cioè dopo 1 ora) avrà un certo altro valore ($>$, $<$ o eventualmente $=$ al precedente),

all'istante $t = 1,4$ (cioè dopo 1 ora e $\frac{4}{10}$ di ora, 1 ora e 24 minuti) un certo altro valore, ecc.

E' chiaro che, in questo caso, non c'è alcuna formula

che permetta di calcolare la temperatura conoscendo il valore di t .

Si ha ancora una funzione,
perché ad ogni valore del tempo t corrisponde 1 e un solo valore della temperatura T ,
ma questa funzione NON è esprimibile mediante una formula matematica.

Si ha cioè una funzione “**empirica**”,
perché solo l’osservazione diretta può farci conoscere qual è il valore
che la variabile dipendente assume in corrispondenza di un certo valore della variabile indipendente.
Le funzioni degli esempi precedenti erano invece funzioni “matematiche”.

*Una funzione si dice “**matematica**” (o anche “**analitica**”)
quando esiste una “**legge**” che consenta di passare
da un dato valore della variabile indipendente
al corrispondente valore della variabile dipendente,
semplicemente effettuando dei calcoli.
Si dice “**empirica**” in caso contrario.*

3. IL “DOMINIO” DI UNA FUNZIONE; PRECISAZIONI SULLA DEFINIZIONE

♥ Si dice “**dominio**” o “**campo di esistenza**” (C.E.) di una funzione,
l’insieme dei valori che è possibile attribuire alla variabile indipendente,
affinché esista il corrispondente valore della variabile dipendente.

ESEMPI

Funzione	Dominio
$y = \frac{1}{x}$	$\{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$
$y = \sqrt{x-5}$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq 5\}$
$y = x^2 - x - 2$	$\mathbb{R}$

♥ Avevamo iniziato il discorso affermando che
si ha una **FUNZIONE** quando ci sono due grandezze variabili,
legate fra loro in modo che ad **OGNI** valore di una di esse (variabile indipendente)
corrisponde **UNO E UN SOLO** valore dell’altra (variabile dipendente).

Ma più precisamente, QUELL’ “OGNI” VA INTERPRETATO.
Si deve intendere “AD OGNI VALORE DELLA VARIABILE INDIPENDENTE ...
... PRESO DA UN OPPORTUNO INSIEME DI RIFERIMENTO (il ‘dominio’, appunto)”.

A volte, poi, per determinare il “dominio” di una funzione,
occorre badare, oltre che al puro aspetto del calcolo,
anche a considerazioni di carattere “contestuale”.

Prendiamo ad esempio la funzione $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = f(r)$ legata al volume della sfera.

Dal punto di vista della pura Algebra, alla lettera r potremmo assegnare anche valori <0 ;
ma dal punto di vista dell’interpretazione geometrica, questi non avrebbero senso e dunque
è più corretto dire che il dominio di questa funzione è l’insieme dei valori di r maggiori di 0 ($r \geq 0$),
se si accetta l’idea di una sfera di raggio nullo, che si ridurrebbe ad un punto, e avrebbe volume nullo).

♥ **IN DEFINITIVA**, per “**DOMINIO**” di una funzione si intenderà
l’insieme dei valori che è possibile attribuire alla variabile indipendente,
affinché esista il corrispondente valore della variabile dipendente
oppure anche un insieme più “ristretto” di questo,
quando intervengano ulteriori limitazioni
legate al contesto nel quale la funzione viene applicata.

4. IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Di una funzione, si può disegnare il grafico, che è poi una visualizzazione efficace della funzione stessa, ossia del legame che essa stabilisce fra la variabile indipendente e la variabile dipendente.

Come si fa? Vediamo.

Innanzitutto, per meglio fissare le idee, noi supporremo sempre che la variabile indipendente sia indicata con x , e la variabile dipendente con y (anche se sappiamo che non sempre è così). In questo modo, potremo dire sbrigativamente “la x ” e “la y ” anziché, come sarebbe più generale ma un pochino pesante, “la variabile indipendente” e “la variabile dipendente”.

Dunque, supponiamo di avere una determinata funzione $y = f(x)$, e di volerne tracciare il grafico. Molto semplice.

- Diamo a x un valore (badando, è ovvio, che questo valore faccia parte del “dominio” della funzione), e calcoliamo il corrispondente valore di y
- disegniamo il punto che ha come coordinate QUEI due valori (x, y)
- facciamo questo per un opportuno insieme di valori di x
- congiungiamo i punti ottenuti.

Ed ecco il grafico!

(... O meglio, ecco un *abbozzo* del grafico, tanto più preciso quanto più “fitti” sono i valori di x considerati, ed evidentemente limitato a un campo di valori di x “comodi”, o comunque a quei valori che ci interessano).

Facciamo un esempio, prendendo la funzione $y = f(x) = x^2 - 2x$.

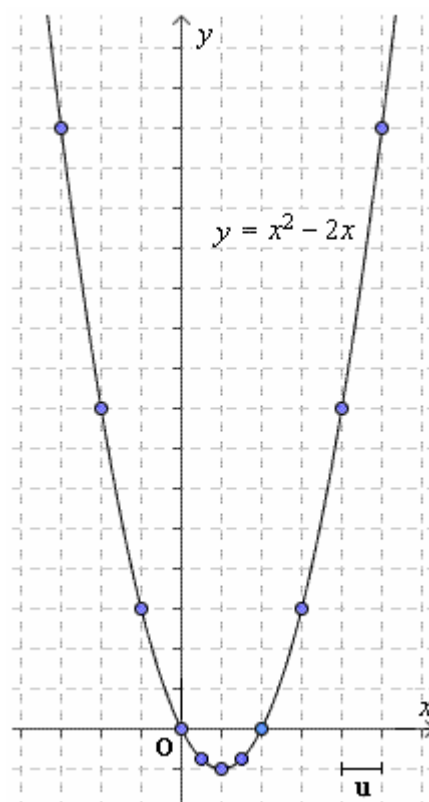
Attribuiamo a x dei valori, e calcoliamo, per ciascun valore dato a x , il corrispondente valore di y .

Possiamo anche organizzarci attraverso una tabella:

x	$y = f(x) = x^2 - 2x$
0	0
1	-1
2	0
3	3
4	8
5	15
-1	3
-2	8
-3	15
$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$

Abbiamo assegnato a x pure due valori frazionari, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$, perché si avvertiva la necessità di stabilire con maggior precisione l'andamento della curva in prossimità dell'ascissa 1.

♥ *Dammi ascolto: man mano che si compila la tabella, conviene disegnare SUBITO i punti via via determinati. Mi spiego: con $x=0$, ottengo $y=0$. Bene! Allora segno SUBITO, sulla figura, che il punto di coordinate $(0,0)$ (che è poi l'origine) appartiene al grafico. Poi passo ad assegnare a x il valore 1. Ottengo $y = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$ e allora segno SUBITO, nel disegno, il punto $(1,-1)$. E così via: non aspetto di aver completato la tabella per passare al disegno, ma appena trovo un punto salto immediatamente dalla tabella al disegno.*

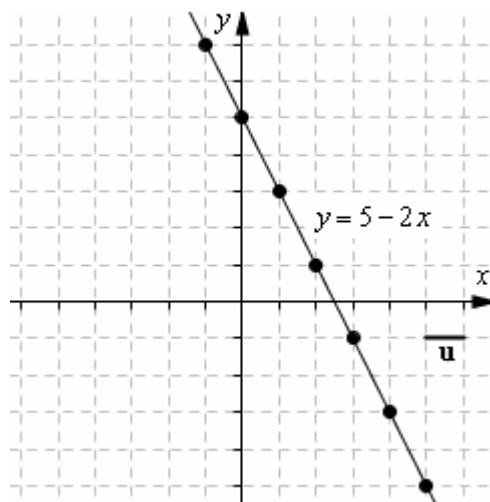
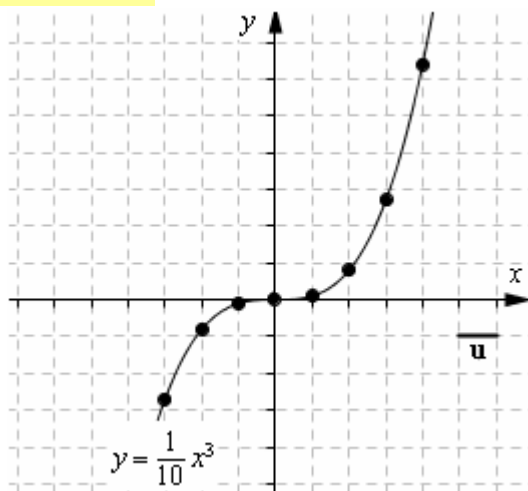


Il grafico ci fa cogliere con immediatezza tante informazioni sull' “andamento” della funzione, e sulle sue caratteristiche. Ad esempio,

- possiamo notare che il valore minimo che la y può assumere è -1 (valore che si ottiene per $x = 1$)
- vediamo che la y decresce, al crescere di x , quando è $x < 1$, mentre cresce, al crescere di x , quando è $x > 1$
- osserviamo la presenza di una “simmetria”, nel senso che se due valori di x stanno uno a sinistra e l'altro a destra dell'ascissa 1, ma alla stessa distanza, ad essi corrispondono due valori di y uguali fra loro
- ... eccetera.

Certo, quanto abbiamo scritto ha bisogno di essere comunque controllato con ragionamenti e calcoli vari, per il fatto che, per forza di cose, abbiamo potuto dare a x soltanto *alcuni* fra gli infiniti valori possibili; ma la figura è senz'altro utilissima per una visione d'insieme iniziale e come punto di partenza per un eventuale studio più accurato.

ALTRI ESEMPI: le due funzioni $y = \frac{1}{10}x^3$, $y = 5 - 2x$



GRAFICI DI FUNZIONI CON GEOGEBRA

(però, innanzitutto devi saperli fare in MATITA!!!)

Apri GeoGebra;
guarda in basso e noterai una casella bianca,
preceduta dalla scritta "Inserimento":

Inserimento:

E' lì che devi digitare
l'espressione della funzione; ad esempio,
 $y = 5 - 2x$; $y = x^2$; $y = \text{sqrt}(x)$; $y = 6/(1 + x^2)$

Occhio ad un uso accorto delle
parentesi !!!

La **moltiplicazione** si esprime
con un **asterisco**, che però
sovente si può sottintendere;
la **radice quadrata**,
con **sqrt()** oppure con **^(1/2)**

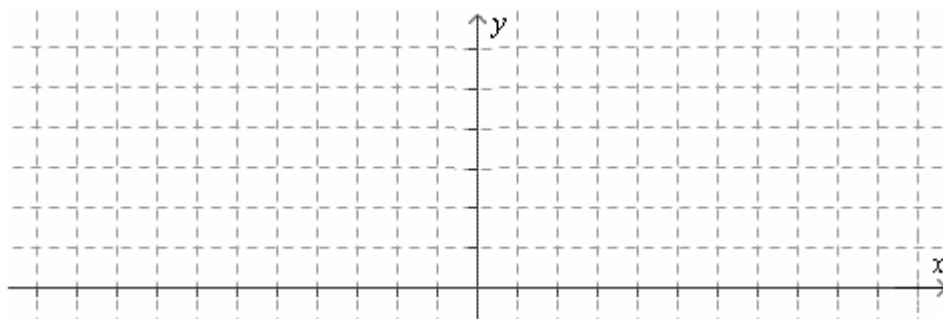
Per ogni ragguglio,
consulta la Guida in Linea.

ESERCIZI

1) Traccia il grafico della funzione $y = \frac{6}{1+x^2}$

Soluzione ➡

x	y	x	y
0			
1		-1	
2		-2	
3		-3	
4		-4	
5		-5	
6		-6	
10		-10	
1/2		-1/2	
1/4		-1/4	



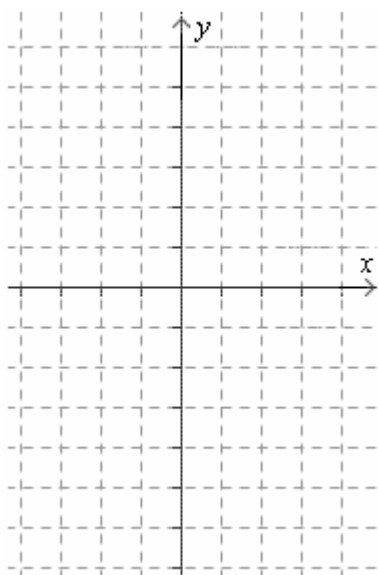
NOTA: se non è specificata l'unità di misura, si intende che sia di un quadretto

2)

Traccia il grafico
della funzione
 $y = 2x - 1$

x	y
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

Soluzione ➡

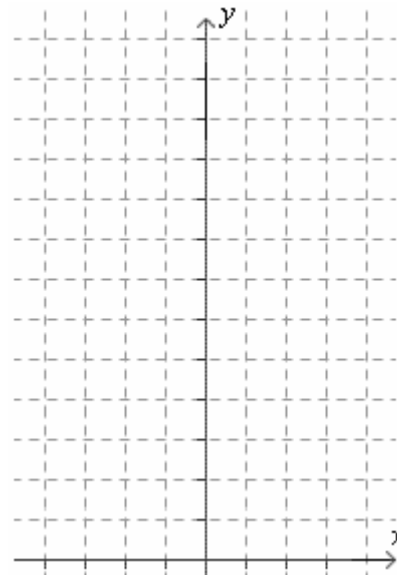


3)

Traccia il grafico
di $y = x^2$

x	y
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
1/2	
-1/2	

Soluzione ➡



5. FUNZIONI LINEARI: RETTE

Prova a disegnare, sul tuo quaderno, il grafico di una funzione della forma

$$y = mx + q, \text{ essendo } m, q \text{ due numeri fissati}$$

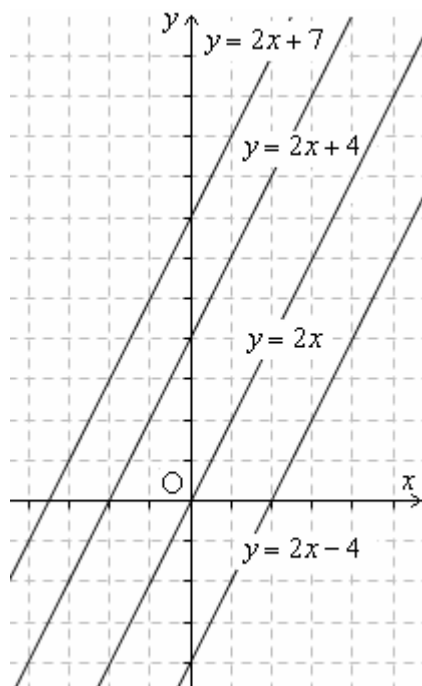
(ad esempio, potresti prendere $y = 3x + 4$, $y = x - 1$, $y = -2x \dots$)

Le funzioni della forma $y = mx + q$ sono anche dette “funzioni di 1° grado” o “funzioni lineari”.

Bene! Ti accorgerai che

una funzione di questo tipo ha sempre come grafico una RETTA

(ecco perché i matematici utilizzano con lo stesso significato la locuzione “di 1° grado” e l’aggettivo “lineare”!)



Quelli qui sopra sono i grafici delle rette

$$y = 2x + 7$$

$$y = 2x + 4$$

$$y = 2x$$

$$y = 2x - 4$$

Come vediamo, tali rette sono fra loro *parallele*.

Da qui possiamo intuire che se due rette

$$y = mx + q, \quad y = m'x + q'$$

hanno $m = m'$, allora sono parallele fra loro.

La costante m dell’equazione $y = mx + q$ viene detta “**coefficiente angolare**”.

Ricordalo, è importante:

- ♥ “Se due rette hanno lo stesso coeff. angolare m , allora sono parallele”.

Dalle figure emerge pure il significato della costante q .

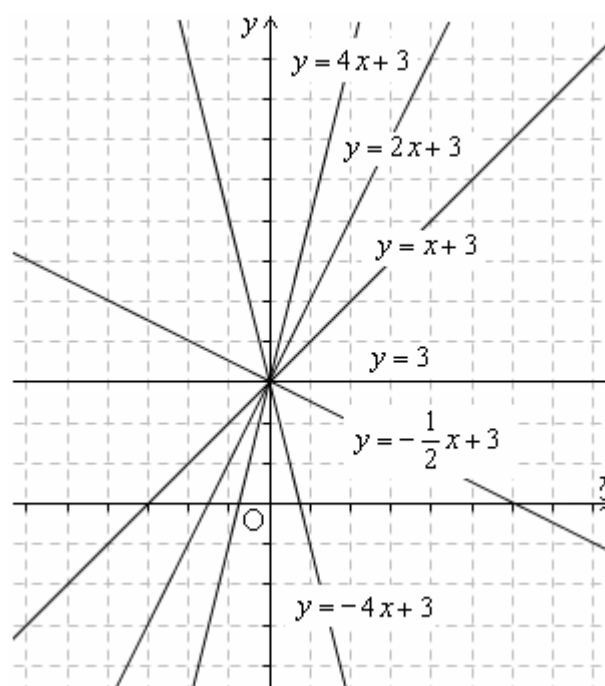
- ♥ La costante q esprime l’ordinata del punto nel quale la retta taglia l’asse verticale.

In effetti, data l’equazione $y = mx + q$,

se si pone $x = 0$ si ottiene $y = q$

per cui la retta in questione passerà per $(0, q)$.

La costante q viene detta “l’ordinata all’origine”, per il fatto che **indica l’ordinata del punto della retta che sta sopra (o sotto) l’origine**.



Questi altri grafici corrispondono alle rette

$$y = 4x + 3$$

$$y = 3$$

$$y = 2x + 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$y = x + 3$$

$$y = -4x + 3$$

accomunate dalla stessa “ordinata all’origine” q (mentre i coeff. angolari sono fra loro differenti).

Si vede chiaramente che

- ♥ quando il coeff. angolare è positivo ($m > 0$) la retta è in salita,
- ♥ quando il coeff. angolare è negativo ($m < 0$) la retta è in discesa,
- ♥ quando il coeff. angolare è nullo ($m = 0$) la retta è in orizzontale.

Il caso del coefficiente angolare nullo è quello della “funzione costante”, ad esempio

$$y = 3,$$

che potrebbe anche essere scritta come

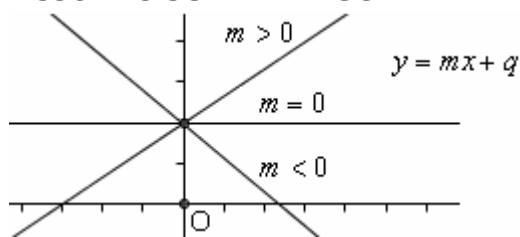
$$y = 0 \cdot x + 3$$

e assume sempre il valore $y = 3$ per qualsiasi valore di x .

Inoltre,

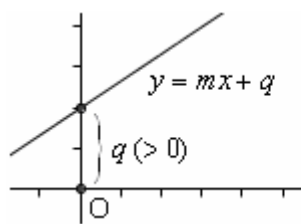
- ♥ quanto più è grande il valore assoluto $|m|$ del coefficiente angolare, tanto più la retta è inclinata nella sua salita o discesa.

RIASSUNTO SCHEMATICO

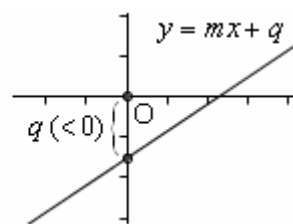


$m = \text{coefficiente angolare}$

$m > 0$ salita
 $m < 0$ discesa
 $m = 0$ orizzontalità



$q = \text{"ordinata all'origine"}$
 $= \text{ordinata del punto che ha } x = 0$
 $= \text{ordinata del punto di intersezione con l'asse } y$



RETTE ORIZZONTALI

Sappiamo che **una retta orizzontale** (= parallela all'asse x) ha **coefficiente angolare nullo** ($m = 0$).

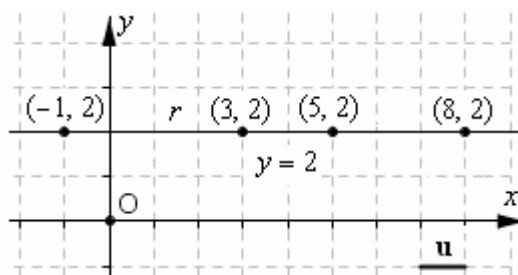
Riflettiamo ancora un attimo su questo fatto.

In effetti, una retta orizzontale è il luogo dei punti del piano cartesiano, con la proprietà di avere una certa ordinata fissata k (ad esempio, nella figura qui a fianco è rappresentata la retta formata da tutti e soli i punti di ordinata uguale a 2).

L'equazione "gemellata" a tale retta, ossia l'uguaglianza indicante la proprietà che è caratteristica di tutti i suoi punti e di essi soltanto, è perciò della forma $y = k$ (per la retta in figura, $y = 2$).

Un'uguaglianza del tipo $y = k$ può anche essere riscritta come $y = 0 \cdot x + k$;

vediamo che qualunque valore si attribuisca a x , la y corrispondente vale sempre k , e il moltiplicatore di x , ossia il coefficiente angolare, è appunto 0.



Riassumendo: **il coefficiente angolare $m = 0$ è associato all'orizzontalità;**

♥ **una retta orizzontale (NOTA) ha dunque equazione della forma $y = k$ (k costante)**

NOTA: spesso in queste pagine ci prendiamo la licenza, per brevità, di scrivere "retta orizzontale/verticale" quando invece dovremmo parlare di "retta parallela all'asse delle ascisse/ordinate". Di norma, in effetti, l'asse delle ascisse è disposto orizzontalmente rispetto all'osservatore, e quello delle ordinate verticalmente.

RETTE VERTICALI

♥ **Per una retta "verticale" (= parallela all'asse delle y) il coefficiente angolare non esiste, non è definito.**

Infatti si intende per "coefficiente angolare" la costante che moltiplica x in un'equazione della forma $y = mx + q$; ma una retta verticale *non ha* un'equazione di tal forma.

L'equazione di una retta (o, più in generale, di una data curva sul piano cartesiano) esprime una proprietà "caratteristica" dei punti di quella retta, ossia una proprietà che è posseduta dalle coordinate x, y di tutti i punti di quella retta, e di essi soltanto.

Ora, prendiamo la retta verticale della figura a destra.

Qual è la proprietà che caratterizza i suoi punti?

E' facile riconoscere che i suoi punti sono

tutti e soli i punti del piano cartesiano, la cui ascissa è 5.

Pertanto tale retta sarà associata all'equazione $x = 5$.

... Impossibile riscriverla sotto la forma $y = mx + q$!

♥ **Una retta verticale ha equazione della forma $x = k$.**

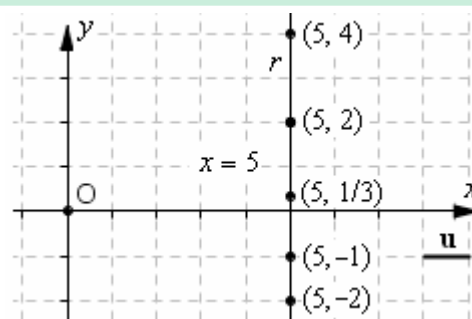
Osserviamo che tale equazione

- ❑ NON indica una funzione in cui x sia var. indipendente
- ❑ NON può essere portata sotto la forma $y = mx + q$.

♥ **DA UN CERTO PUNTO DI VISTA, si può però dire che "una retta verticale ha coefficiente angolare INFINITO".**

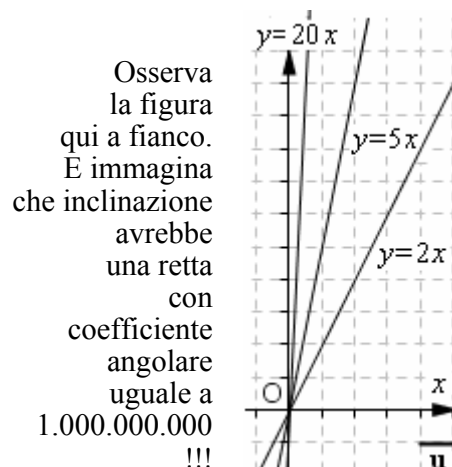
Questa affermazione va interpretata nel senso che

"se una retta ha inclinazione altissima, quasi verticale, il suo coefficiente angolare sarà grandissimo, tendendo all'infinito all'aumentare dell'inclinazione".



♥ Anche l'asse delle y è una particolare retta verticale: la sua equazione è $x = 0$.

♥ E l'asse x è una particolare retta orizzontale, di equazione $y = 0$.



BISETTRICI DEI QUADRANTI E RETTE INCLINATE DI 45°

- ♥ La bisettrice del 1° e 3° quadrante ha equazione $y = x$

(è il luogo dei punti del piano cartesiano la cui ordinata è uguale all'ascissa).

Quindi il coefficiente angolare $m = 1$

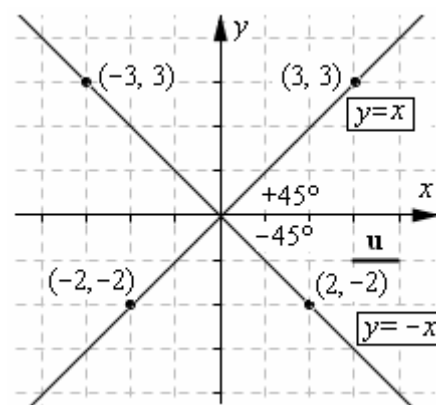
contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale, sono inclinate di 45° in salita (+ 45°).

- ♥ La bisettrice del 2° e 4° quadrante ha equazione $y = -x$

(è il luogo dei punti del piano cartesiano la cui ordinata è uguale all'opposto dell'ascissa).

Quindi il coefficiente angolare $m = -1$

contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale, sono inclinate di 45° in discesa (- 45°).



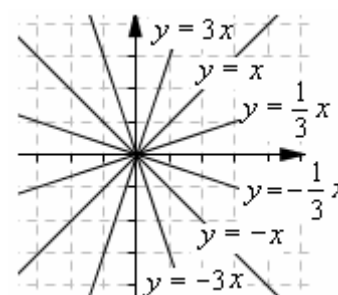
Le bisettrici dei quadranti

RETTE CON INCLINAZIONE MAGGIORE, O MINORE, DI 45°

- Una retta, con inclinazione (in salita o in discesa) $> 45^\circ$, ha $|m| > 1$;
una retta, con inclinazione (in salita o in discesa) $< 45^\circ$, ha $0 \leq |m| < 1$

- Due rette, che siano ugualmente inclinate, ma una in salita e l'altra in discesa, hanno coefficienti angolari fra loro OPPOSTI.

- ♥ Si può dimostrare che due rette PERPENDICOLARI hanno coefficienti angolari fra loro ANTIRECIPROCI (si dice "antireciproco" l'opposto del reciproco).



LA PROPRIETA' FONDAMENTALE DEL COEFFICIENTE ANGOLARE

Prendi una retta qualsiasi: che so, la $y = 2x + 3$. Adesso, assegna a x due valori, per calcolare i corrispondenti valori di y e determinare dunque due punti della retta stessa. Ad esempio,

- puoi porre $x = 1$, e avrai quindi $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ e di conseguenza un primo punto $A(1, 5)$;
- poi puoi porre $x = 4$, e avrai quindi $y = 2 \cdot 4 + 3 = 11$ da cui un secondo punto $B(4, 11)$.

Ora vai a calcolare il rapporto (= quoziente) fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse dei due punti ottenuti:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11 - 5}{4 - 1} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$$

Come hai potuto vedere, il risultato di questo calcolo coincide col coefficiente angolare m della retta.

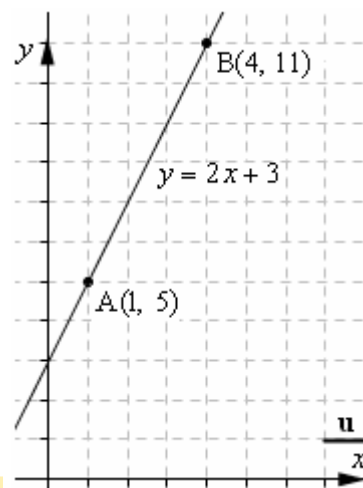
Prova con un'altra coppia di punti, fai nuovamente il calcolo:

otterrai ancora lo stesso valore, il valore del coefficiente angolare.

Prendi un'altra retta, considera una coppia di suoi punti: vedrai che il calcolo

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

darà sempre il coefficiente angolare m di quella retta.



Ecco una retta $y = 2x + 3$,
e due suoi punti
 $A(1, 5)$; $B(4, 11)$.

$$\text{Calcoliamo } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

$$\text{avremo } \frac{11 - 5}{4 - 1} = \frac{6}{3} = \boxed{2}.$$

Ma 2 è il coeff. angolare!!!

Vale dunque (lo si potrebbe dimostrare in generale) la **formula**

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m \quad (\text{importantissima!})$$

**Data una retta di equazione $y = mx + q$,
il suo coefficiente angolare m
è uguale al rapporto
fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse
di due punti qualsiasi della retta stessa.**

NOTA - Il simbolo Δ è sovente utilizzato, in matematica, per indicare "differenza".

Ad es., fra due persone che hanno risp. 15 anni e 47 anni, c'è una differenza di età $\Delta e = 47 - 15 = 32$.

Presi, in Fisica, due istanti di tempo successivi t_1 e t_2 , nei quali la velocità di un corpo è risp. v_1 e v_2 , allora nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ l'incremento di velocità ($>$, $<$ o $= 0$) è dato da $\Delta v = v_2 - v_1$.

E' utile ed importante osservare (vedi figura) che

♥ **le due quantità Δx e Δy**
corrispondono alle due misure (con segno)
dei due segmenti orizzontale (Δx) e verticale (Δy)
che occorre percorrere per passare dal primo punto al secondo

... **misure CON SEGNO**, nel senso che

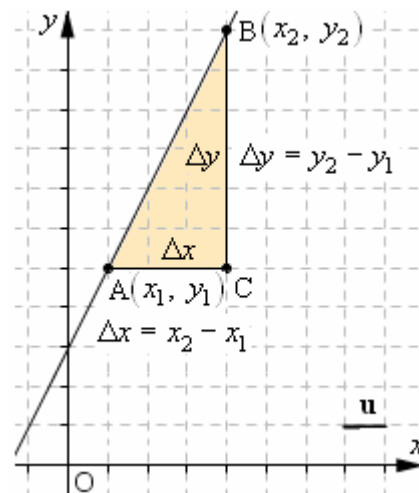
il segmento orizzontale andrà preso col segno

- positivo se viene percorso da sinistra verso destra,
- negativo se viene percorso da destra verso sinistra;

e allo stesso modo

il segmento verticale andrà preso col segno

- positivo se viene percorso dal basso verso l'alto,
- negativo se viene percorso dall'alto verso il basso.



Quanto sopra ci dice che in una funzione "lineare", ossia della forma $y = mx + q$, l'incremento di x è proporzionale all'incremento corrispondente di y : il rapporto fra questi due incrementi è costante.

Si può dimostrare che VALE ANCHE IL VICEVERSA:

se due grandezze x, y sono legate fra loro in modo tale che l'incremento di x è proporzionale all'incremento corrispondente di y (se raddoppia uno, raddoppia anche l'altro ...)

allora la relazione tra le due grandezze è della forma $y = mx + q$.

Segnaliamo infine che molti testi chiamano "**AFFINE**" una funzione della forma $y = ax + b$, riservando il termine "**LINEARE**" solo, o prevalentemente, al caso in cui $b = 0$ ($y = ax$).

ENGLISH

- coefficiente angolare = **slope** (lett.: *pendenza*), o **gradient**
- ordinata all'origine = **y-intercept**
- $\Delta y / \Delta x =$ "**rise over run**" = spostamento verticale fratto spostamento laterale

DISEGNARE UNA RETTA CONOSCENDONE UN PUNTO E IL COEFFICIENTE ANGOLARE

Se noi sappiamo che una retta passa per un dato punto P_0 , e conosciamo il coefficiente angolare m di quella retta, potremo disegnare la retta con precisione anche senza aver determinato la costante q dell'equazione $y = mx + q$.

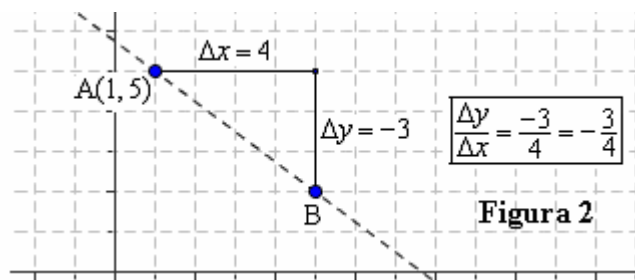
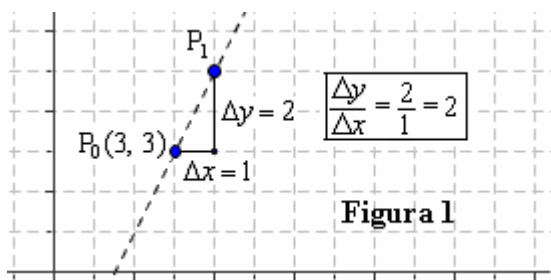
Infatti, poiché sappiamo che per il coefficiente angolare vale la formula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$,

ci basterà fare il disegno in modo che la retta passi per P_0 e per un altro punto P_1 per ottenere il quale partiremo da P_0 e ci sposteremo

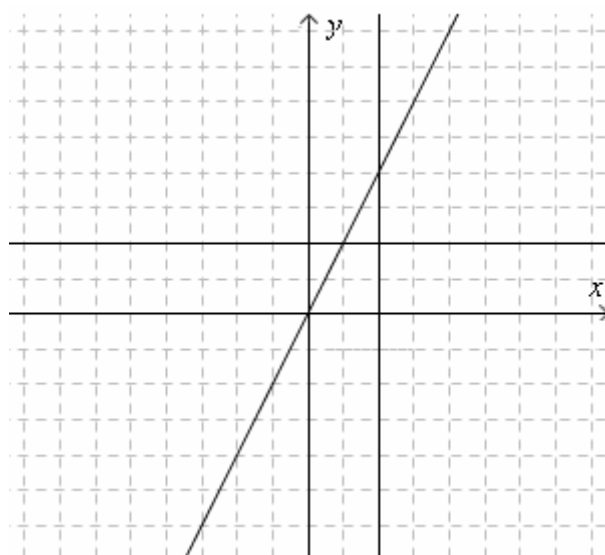
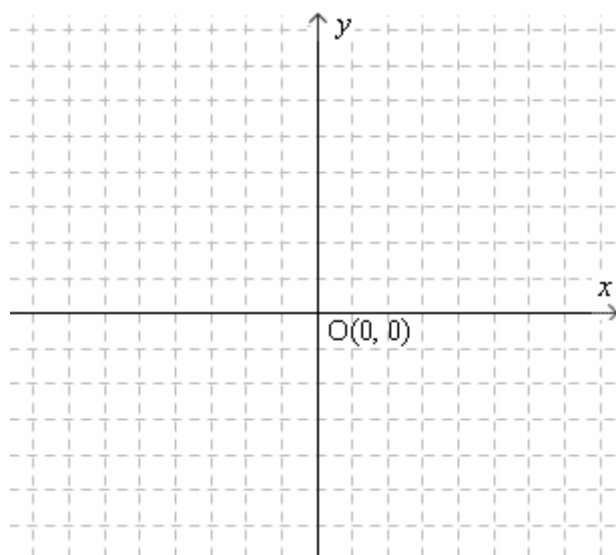
- ♪ prima orizzontalmente di un segmento orientato Δx
- ♪ poi verticalmente di un altro segmento orientato Δy ,

dopo aver scelto Δx e Δy in modo tale che il loro quoziente sia uguale a quel valore m che ci interessa.

- Ad esempio (figura 1), per disegnare la retta passante per $P_0(3, 3)$ e avente coefficiente angolare $m = 2$, possiamo partire da P_0 e poi spostarci di 1 verso destra ($\Delta x = 1$) e di 2 verso l'alto ($\Delta y = 2$). Troveremo così il nuovo punto P_1 , tale che la retta P_0P_1 avrà $m = \Delta y / \Delta x = 2$ e sarà perciò la retta desiderata.
- Facciamo un altro esempio (fig. 2). Per disegnare la retta passante per $A(1, 5)$ e di coeff. ang. $m = -3/4$, possiamo partire da A e spostarci di 4 verso destra ($\Delta x = 4$) poi di 3 verso il basso ($\Delta y = -3$). Raggiungeremo così un nuovo punto B e congiungendo A con B il gioco sarà fatto.



ESERCIZIETTI PER FAMILIARIZZARE CON LA RETTA NEL PIANO CARTESIANO



- 1) In questo riferimento cartesiano, disegna le rette

$$\begin{aligned} y &= 2x - 1 & y &= 2x + 1 \\ y &= x + 3 & y &= -\frac{1}{2}x + 3 \\ y &= -3 & x &= -3 \end{aligned}$$

- 2) La retta di equazione $y = -2x + 15$

- passa per il punto $(12, -11)$?
- passa per il punto $(4, 7)$?
- passa per il punto $(-6, 27)$?

- 3) La retta di equazione $y = 3x - 22$

passa per un punto di ordinata -40 .

Qual è l'ascissa di quel punto?

E quali sono le coordinate dei punti in cui la retta taglia i due assi cartesiani?

Da www.mathworksheets4kids.com

- 6) Find equation of Straight Line

Slope = coefficiente angolare

y-intercept = ordinata all'origine

Slope	y-intercept	Equation
4	-1	
-1	0	

- 7) Find slope

Equation of straight line	Slope of the line
$y = -5x + 5$	
$y = x$	
$x + y = 7$	
$4y - 6x = 7$	
$4x - y = 1$	
$-4x + 2y - 1 = 0$	

- 4) In questo riferimento cartesiano ci sono tre rette; scrivi, accanto a ciascuna di esse, la rispettiva equazione.

Ricorda che l'equazione di una retta esprime la proprietà che caratterizza la coppia di coordinate di ciascun punto di quella retta!

Ad esempio, per la retta inclinata, che relazione c'è fra la y e la x di ciascuno dei suoi punti?

Insomma, detta (x, y) la coppia delle coordinate di uno qualsiasi dei suoi punti, qual è l'uguaglianza che lega x a y ?

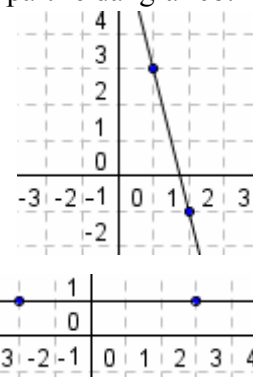
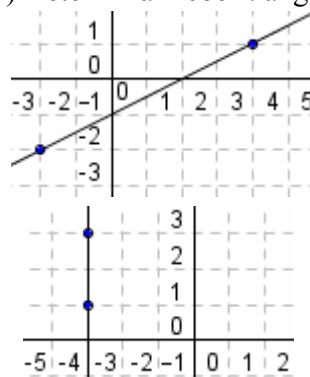
- 5) Qual è la retta, sul piano cartesiano, che è associata all'equazione $y = 0$?

E qual è la retta, sul piano cartesiano, che è associata all'equazione $x = 0$?

- 8) Determina il coefficiente angolare della retta AB:

- $A(1, -1)$; $B(2, -2)$
- $A(1, 0)$; $B(2, 3)$
- $A(-3, 5)$; $B(2, -7)$
- $A(-4, 1)$; $B(-4, -2)$

- 9) Determina il coeff. angolare a partire dal grafico:



RISPOSTE e INDICAZIONI

- 2) Controlla se sostituendo 12 al posto di x si ottiene $y = -11$. In pratica, sostituisci 12 al posto di x e -11 al posto di y : se l'uguaglianza ottenuta è vera, il punto apparterrà alla retta, altrimenti no. a) No b) Sì c) Sì

- 3) Poni nell'equazione $y = -40$ e risali al valore di x . Si trova $x = -6$.

L'intersezione con l'asse delle x si ottiene ponendo $y = 0$... Intersezioni con gli assi: $(22/3, 0)$; $(0, -22)$

- 4) Le equazioni delle tre rette sono: $y = 2$, $x = 2$, $y = 2x$ 5) L'asse x (equazione $y = 0$) e l'asse y ($x = 0$)

- 6) $y = 4x - 1$; $y = -x$ 7) In alcuni casi occorre prima isolare y . $-5, 1, -1, 3/2, 4, 2$.

- 8) $\Delta y / \Delta x = m$. $m = -1, m = 3, m = -12/5, m = \infty$ (retta verticale) 9) $\Delta y / \Delta x = m$. $m = 1/2, m = \infty, m = -4, m = 0$

6. COMPLEMENTI SULLA RETTA E SUL PIANO CARTESIANO

A) Scrivere l'EQUAZIONE DELLA RETTA (NON VERTICALE) PASSANTE PER DUE PUNTI ASSEGNATI

A dire il vero, esisterebbe anche un'apposita formula, a questo scopo: la vedremo più avanti nel capitolo; tuttavia, è sufficiente procedere nel modo illustrato dal seguente esempio.

Supponiamo di voler scrivere l'equazione della retta passante per i due punti $A(-3, 5)$ e $B(1, 3)$.

La nostra retta non è verticale: la sua equazione è perciò della forma $y = mx + q$, dove i valori di m e di q sono da determinare in modo che la retta passi per i due punti dati.

Ma una retta passa per $A(-3, 5)$ se e soltanto se,

assegnando a x il valore -3 nell'equazione della retta, si ottiene 5 come corrispondente valore di y ; quindi la retta $y = mx + q$ passerà per $A(-3, 5)$ se e solo se l'uguaglianza $5 = m \cdot (-3) + q$ è vera.

Allo stesso modo, la retta $y = mx + q$ passerà per $B(1, 3)$ se e soltanto se l'uguaglianza $3 = m \cdot 1 + q$ è vera.

Perciò per determinare l'equazione della retta in questione basterà risolvere il sistema

$$\begin{cases} 5 = m \cdot (-3) + q \\ 3 = m \cdot 1 + q \end{cases} \quad (\text{NOTA}).$$

Si trova $\begin{cases} 5 = -3m + q \\ 3 = m + q \end{cases}$, $\begin{cases} -3m + q = 5 \\ m + q = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} (1) - (2) \\ (2) \end{cases} \begin{cases} -4m = 2 \\ -1/2 + q = 3 \end{cases}$ per cui la retta che ci interessa è $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

NOTA - Si dice in questi casi che "si è posta la **CONDIZIONE DI APPARTENENZA**" (di un punto dato, a una curva di equazione data)

APPARTENENZA?



SOSTITUIRE!

♥ Un punto appartiene ad una curva associata a una certa equazione se e solo se, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione della curva al posto di x e di y rispettivamente, si ottiene un'uguaglianza vera.

Questo fatto è banale se si tiene presente che, come insegna la Geometria Analitica,

♥ l'equazione associata a una data curva nel piano cartesiano è quell'uguaglianza contenente x e y che è verificata dalla coppia (x, y) delle coordinate di tutti i punti della curva, e di essi soltanto.

B) Scrivere l'equazione della RETTA PASSANTE PER UN PUNTO ASSEGNATO E AVENTE UN DATO COEFFICIENTE ANGOLARE

Anche qui sarebbe possibile stabilire un'apposita formula (pag. 448). Ma possiamo pure farne a meno ...

Scrivi l'equazione della retta su cui giace l'altezza AH del triangolo ABC , con $A(1, 2)$; $B(2, 4)$; $C(5, -1)$.

Ricordiamo che due rette sono perpendicolari se e solo se hanno coefficienti angolari fra loro antireciproci; allora basterà ricavare il coefficiente angolare della retta BC , poi scrivere l'equazione della retta passante per A e avente coefficiente angolare antireciproco di quello prima determinato.

Per trovare il coefficiente angolare di BC è possibile

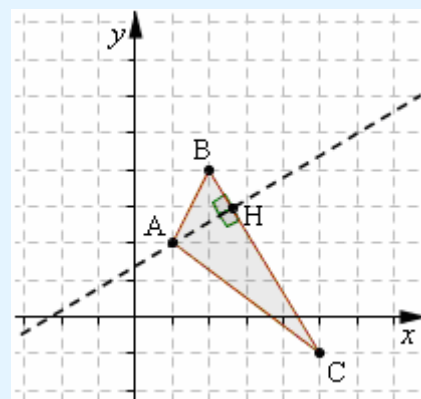
- 1) determinare l'equazione di BC (retta per due punti dati: vedi esercizio precedente; puoi provarci, e otterresti $BC: y = -\frac{5}{3}x + \frac{22}{3}$)
- 2) oppure (più comodo!) utilizzare la formula $m = \Delta y / \Delta x$:

$$m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-4}{5-2} = -\frac{5}{3}$$

Da $m_{BC} = -\frac{5}{3}$ si ricava poi $m_{AH} = \frac{3}{5}$ (antireciproco di $-\frac{5}{3}$) da cui $AH: y = \frac{3}{5}x + q$

dove si potrà determinare q ponendo la condizione di appartenenza del punto $A(1, 2)$: $2 = \frac{3}{5} \cdot 1 + q$; $q = \frac{7}{5}$.

L'equazione richiesta è perciò $AH: y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$. Puoi constatare come m, q siano coerenti con la figura!



C) FORMA ESPLICITA E FORMA IMPLICITA PER L'EQUAZIONE DI UNA RETTA

Abbiamo già rilevato che un'equazione della forma

$$y = mx + q$$

non è in grado di rappresentare *qualsiasi* retta, perché restano *escluse* le rette verticali.

Invece un'equazione della forma

$$ax + by + c = 0$$

può rappresentare davvero *tutte* le rette, quelle verticali *comprese* (esse si ottengono nel caso $b = 0$).

Quando tutti i termini si trovano a primo membro:

$$ax + by + c = 0$$

si dice che l'equazione della retta è in **FORMA IMPLICITA**.

La forma

$$y = mx + q$$

è invece detta **FORMA ESPLICITA**.

Il passaggio dalla forma implicita a quella esplicita, possibile solo per le rette non verticali, si effettua con semplici passaggi algebrici, finalizzati a isolare y a primo membro, come nei due esempi della colonna qui a fianco.

$$3x + 4y - 5 = 0$$

$$4y = -3x + 5; \quad y = \frac{-3x+5}{4} \text{ opp. } y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

$$2x - y + 7 = 0; \quad -y = -2x - 7; \quad y = 2x + 7$$

Di norma la forma *esplicita* è più comoda, in quanto

- viene utilizzata nel disegnare la retta
- consente di osservare direttamente il coefficiente angolare e l'ordinata all'origine.

Inoltre c'è da dire che, per una data retta, i due parametri m e q della forma *esplicita* sono determinati in modo unico, mentre i 3 parametri a , b , c della forma *implicita* non sono determinati univocamente, ma solo "A MENO DI UNA COSTANTE DI PROPORZIONALITÀ".

Ad esempio, le seguenti equazioni:

$$3x - 2y + 1 = 0$$

$$6x - 4y + 2 = 0$$

$$-9x + 6y - 3 = 0$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6} = 0$$

...

rappresentano tutte LA STESSA RETTA.

ALTRI ESEMPI

- **Portare l'equazione** $8x - 2y - 1 = 0$ **in forma esplicita**

Si tratta di isolare y a primo membro:

$$8x - 2y - 1 = 0; \quad -2y = -8x + 1; \quad 2y = 8x - 1; \quad y = \frac{8x-1}{2}; \quad y = 4x - \frac{1}{2}$$

- **Viceversa: portare l'equazione** $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{12}$ **in forma implicita**

Porteremo tutto a 1° membro, in modo che il 2° m. sia 0; sarà bene mandare pure via i denominatori:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{12}; \quad 12y = -9x + 1 \text{ (abbiamo moltiplicato per 12); } \quad 9x + 12y - 1 = 0$$

D) Per TROVARE LE COORDINATE DEL PUNTO DI INTERSEZIONE fra due rette di equazioni note basta prendere tali equazioni e porle a SISTEMA.

Infatti il punto di intersezione fra due rette è quello che appartiene *sia all'una che all'altra*. Ora, un punto appartiene sia alla prima che alla seconda retta se e solo se le sue coordinate verificano tanto l'equazione della prima, quanto l'equazione della seconda, ossia il *sistema* formato da tali due equazioni.

Se, ad esempio, in relazione all'esercizio con figura della pagina precedente, venissero richieste le coordinate di H, basterebbe impostare il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5} & \text{(AH)} \\ y = -\frac{5}{3}x + \frac{22}{3} & \text{(BC)} \end{cases}$$

e risolverlo. Si troverebbe $\begin{cases} x = \frac{89}{34} \\ y = \frac{101}{34} \end{cases}$ ossia $H\left(\frac{89}{34}, \frac{101}{34}\right)$.

INTERSE-
ZIONE?



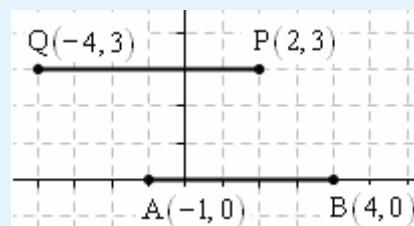
SISTEMA!

E) DISTANZA FRA DUE PUNTI NEL PIANO CARTESIANO

Se i due punti hanno **UGUAL ORDINATA** (segmento orizzontale):
si fa il valore assoluto della differenza delle ascisse

$$d = |x_2 - x_1|$$

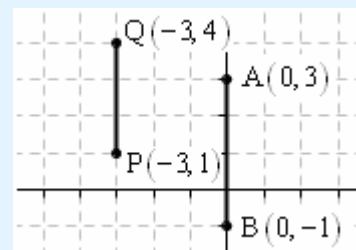
Ad esempio, in figura: $AB = |4 - (-1)| = 5$
 $PQ = |-4 - 2| = |-6| = 6$



Se i due punti hanno **UGUALE ASCISSA** (segmento verticale):
si fa il valore assoluto della differenza delle ordinate

$$d = |y_2 - y_1|$$

Ad esempio, in figura: $AB = |-1 - 3| = |-4| = 4$
 $PQ = |4 - 1| = |3| = 3$

**CASO GENERALE:**

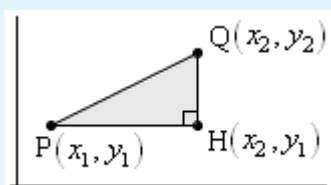
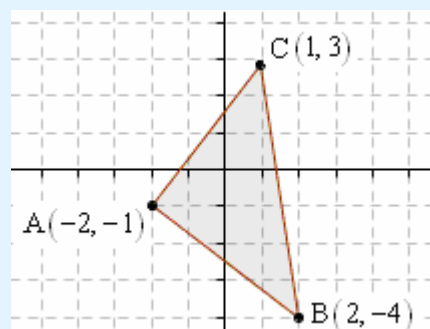
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ad es., i lati del triangolo ABC nella figura qui a fianco misurano:

$$AB = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-4 - (-1))^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(1 - 2)^2 + (3 - (-4))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 7, \dots$$

$$CA = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$



La formula relativa al caso generale è “figlia” del Teorema di Pitagora (pag. 214), come mostra il triangolo PHQ della figura qui a sinistra, nel quale

$$PH = |x_2 - x_1|, \quad HQ = |y_2 - y_1|$$

$$PQ = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

OSSERVAZIONI

- 1) In tutte e tre le formule È INDIFFERENTE L'ORDINE nel quale vengono presi i due punti
- 2) LA FORMULA RELATIVA AL “CASO GENERALE” È APPLICABILE, VOLENDO, ANCHE AI CASI IN CUI I DUE PUNTI ABBIANO UGUAL ASCISSA O UGUAL ORDINATA (sebbene, evidentemente, nella fattispecie siano più comode le due formule “specifiche”).

F) COORDINATE DEL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

Dati due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, il punto medio M del segmento AB ha coordinate

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

L'ascissa del punto medio di un segmento è la media delle ascisse degli estremi, la sua ordinata è la media delle ordinate.

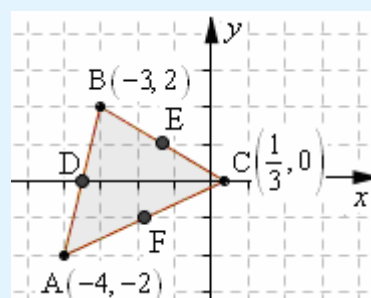
Ad esempio, i punti medi dei lati del triangolo ABC,

con $A(-4, -2)$; $B(-3, 2)$; $C(\frac{1}{3}, 0)$, sono:

$$D\left(\frac{-4-3}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$$

$$E\left(\frac{-3+\frac{1}{3}}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = \left(-\frac{4}{3}, 1\right)$$

$$F\left(\frac{-4+\frac{1}{3}}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = \left(-\frac{11}{6}, -1\right)$$



ESERCIZIETTI PER PRENDER CONFIDENZA

- 1) Scrivi l'equazione della retta passante per i 2 punti: a) $(-1, 7)$ e $(4, 2)$ b) $(0, 5)$ e $(1, 8)$
 2) Determina il punto di $\cap$ fra le rette r, s : a) $r: x+3y=0; s: y=x-4$ b) $r: y=-2x-6; s: 4x+2y-1=0$
 3) Riconosci se il punto P appartiene alla retta r : a) $P(-2,0); r: y=-257x-514$ b) $P(2,-5); r: x-y-7=0$
 4) Porta le equazioni seguenti in forma esplicita: a) $5x-4y+2=0$ b) $3x+3y+1=0$
 5) Porta le equazioni seguenti in forma implicita: a) $y=7x+41$ b) $y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}=0$
 6) Scrivi l'equaz. della retta r che passa per P ed è $\parallel$ a s : a) $P(-1,3); s: x+y=0$ b) $P(-2,-5); s: y=3x-4$
 7) Scrivi l'equaz. della retta r che passa per P ed è $\perp$ a s : a) $P(-1,3); s: x+y=0$ b) $P(-2,-5); s: y=3x-4$
 8) Trova la lunghezza del segmento di estremi P, Q: a) $P(3, -8); Q(-4, 16)$ b) $P(0, 10); Q(21, -10)$

Da www.mathworksheets4kids.com

- 9) Find the midpoint of the following line segments with the given endpoints:

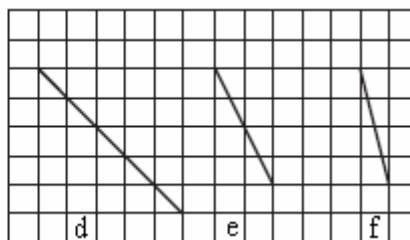
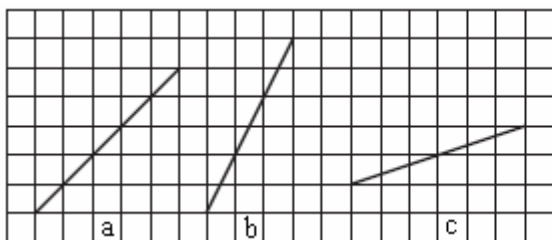
Endpoint	Endpoint	Midpoint
(2, 5)	(8, 7)	
(4, -6)	(6, 8)	
(9, -4)	(-5, -4)	
(-3, -5)	(3, 5)	

- 10) Find the missing end point of the following line segments whose midpoint and one of the endpoints is given:

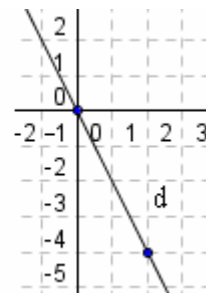
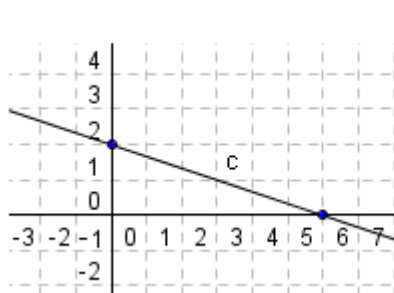
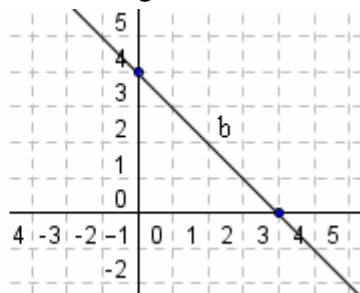
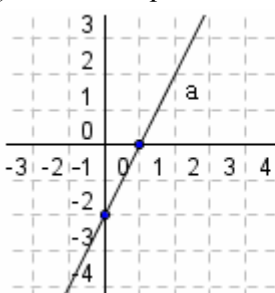
Endpoint	Midpoint	Missing endpoint
(2, 5)	(3, 4)	
(-4, 8)	(0, 8)	
(6, -2)	(4.5, -2.5)	

Da www.cimt.plymouth.ac.uk

- 11) Determine the gradient of each of the following lines: [*gradient = slope = coefficiente angolare*]



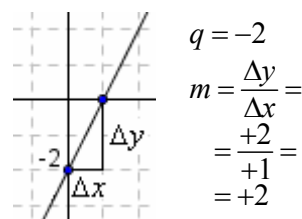
- 12) Scrivi le equazioni delle rette raffigurate:

**RISPOSTE e INDICAZIONI**

- 1) a) $y=6-x$ b) $y=3x+5$ 2) a) $(3, -1)$ b) Sono parallele! 3) a) Sì b) Sì 4) a) $y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$ b) $y=-x-\frac{1}{3}$
 5) a) $7x-y+41=0$ b) $2x+12y-3=0$ 6) a) $y=-x+2$ b) $y=3x+1$ 7) a) $y=x+4$ b) $y=-\frac{1}{3}x-\frac{17}{3}$
 8) a) $PQ=25$ b) $PQ=29$ 9) $(5,6); (5,1); (2,-4); (0,0)$ 10) $\frac{2+x}{2}=3, \frac{5+y}{2}=4 \dots (4,3); (4,8); (3,-3)$
 11) In questi casi va applicata la fondamentale formula $\Delta y / \Delta x = m$. a) 1 b) 2 c) $1/3$ d) -1 e) -2 f) -4

- 12) Qui si può applicare il procedimento per trovare l'equazione di una retta noti due punti, oppure osservare che è sempre nota l'intersezione con l'asse delle y quindi dell'equazione cercata $y=mx+q$ si conosce subito q , ed m è facilmente ricavabile calcolando il rapporto fra Δy (spostamento verticale quando si passa da un punto ad un altro) e Δx (spostamento orizzontale). La figura qui a fianco si riferisce al caso a).

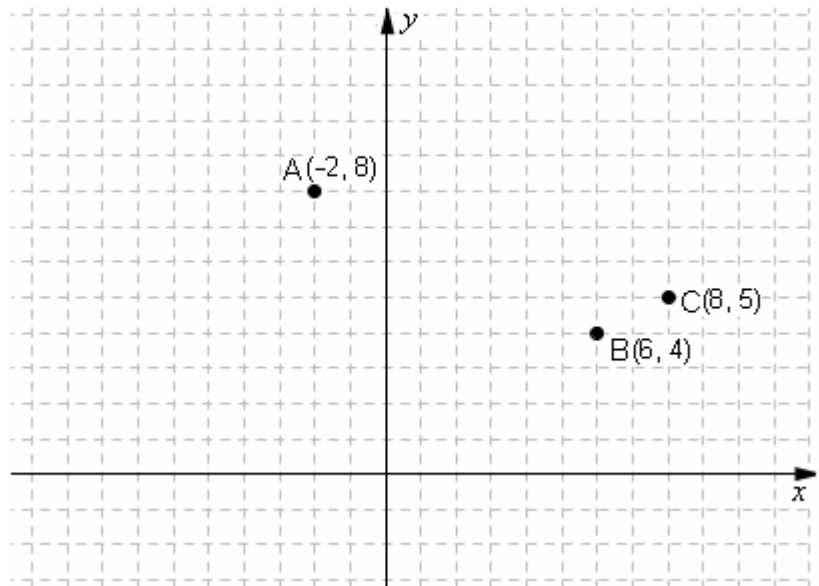
Le risposte sono: a) $y=2x-2$ b) $y=-x+4$ c) $y=-\frac{1}{3}x+2$ d) $y=-2x$



13)

Nella figura a fianco, disegna le rette con le seguenti caratteristiche e accanto a ciascuna scrivi la rispettiva equazione:

- passante per A e parallela all'asse x
- passante per A e parallela all'asse y
- passante per A e per l'origine
- passante per A e per B
- passante per A e parallela alla bisettrice del 1° e 3° quadrante
- passante per A e parallela alla bisettrice del 2° e 4° quadrante
- passante per A e parallela alla retta BC
- passante per A e perpendicolare alla retta BC



14)

In figura compaie il triangolo ABC, di vertici $A(-3,1)$, $B(5,5)$, $C(0,10)$. Scrivi le equazioni delle due altezze che partono dai vertici B e C, e delle due mediane che partono dagli stessi vertici.

Disegna le quattro rette in questione, e determina le coordinate dell'ortocentro

(punto di incontro delle altezze)

e del baricentro

(punto di incontro delle mediane).

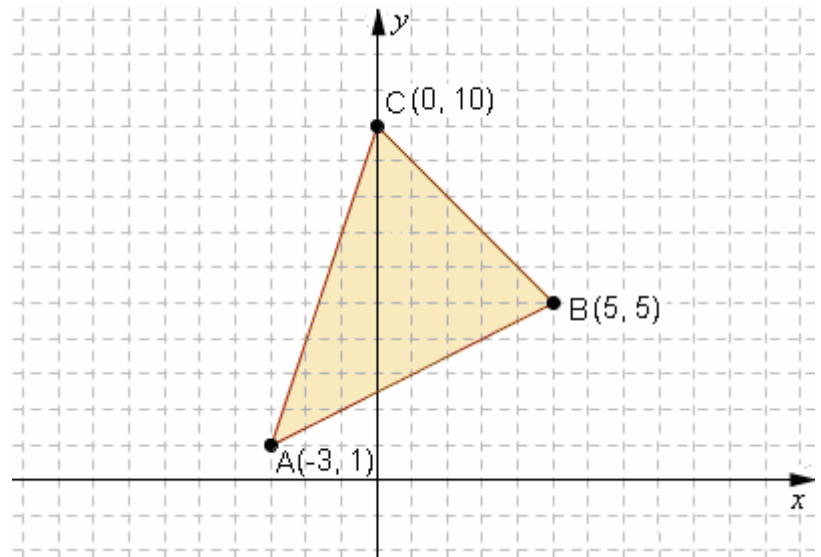
Scrivi anche l'equazione

della terza mediana,

e verifica che anch'essa passa per il punto di incontro delle altre due.

[Troverai Ortocentro $(2, 6)$

Baricentro $(2/3, 16/3)$]



15)

La figura riporta

il quadrilatero

di vertici

$O(0, 0)$, $A(3, 4)$, $B(-3, 8)$, $C(-6, 4)$.

Verifica che:

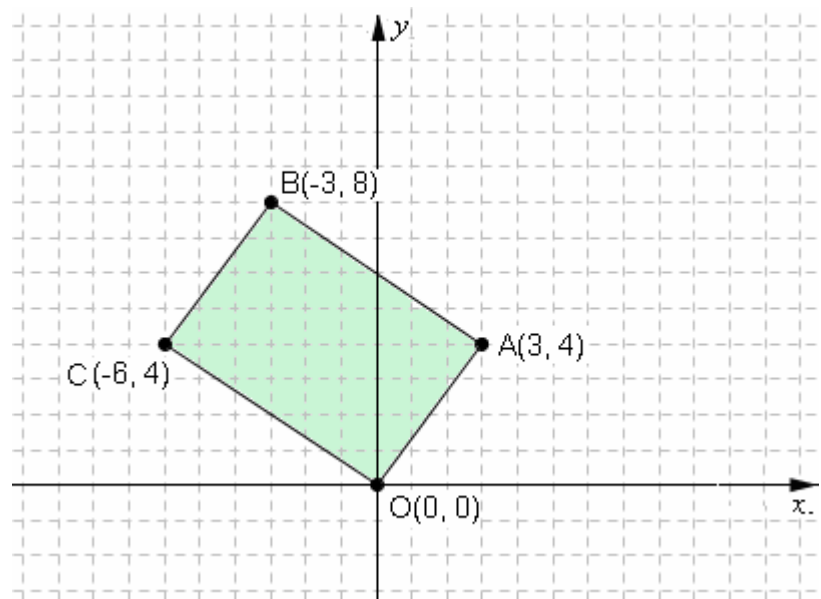
- ha i lati opposti paralleli
- ha i lati opposti uguali
- ha le diagonali disuguali, ma che si tagliano scambievolmente per metà nel punto $(-3/2, 4)$

Verifica infine col calcolo

che le intersezioni

della retta BC con gli assi

sono i punti $(-9, 0)$ e $(0, 12)$

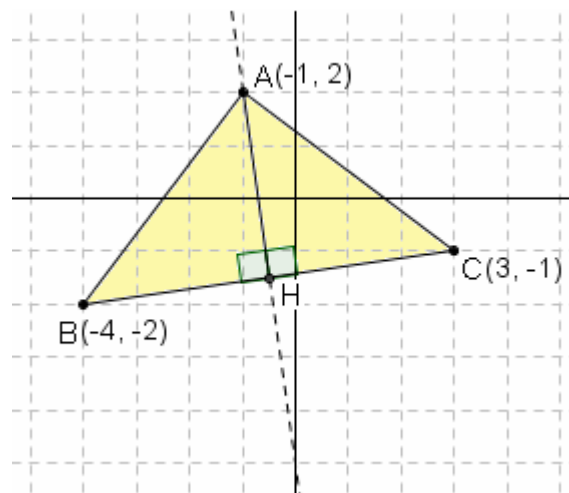


FACCIAMO INSIEME QUALCHE ESERCIZIO PIU' IMPEGNATIVO

- **SEGUI CON ATTENZIONE I VARI RAGIONAMENTI ESPOSTI**
- **COMPLETA I CALCOLI**
- **E RIEMPI I PUNTINI**

1) I tre punti $A(-1, 2)$, $B(-4, -2)$, $C(3, -1)$ sono vertici di un triangolo.

- Verifica che ABC è isoscele e trovine il perimetro
- Determina le coordinate del punto H, piede dell'altezza AH
- Calcola l'area di ABC
- Il triangolo ABC è rettangolo?



I) Calcoliamo innanzitutto le misure dei tre lati di ABC, così potremo controllare se è isoscele e avere i dati per determinarne il perimetro.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4 + 1)^2 + (-2 - 2)^2} = \dots$$

$$BC = \dots = \sqrt{50} \approx 7,1$$

$$AC = \dots$$

Bene, allora abbiamo verificato che il nostro triangolo ABC è isoscele in quanto $AB = AC$.

$$\text{Avremo poi } 2p(ABC) = \dots = 10 + \sqrt{50} \approx 17,1$$

II) Per determinare le coordinate di H abbiamo a disposizione due modi:

- ☐ il primo è molto più svelto,
- ☐ il secondo è più generale perché sarebbe applicabile anche se il triangolo non fosse isoscele.

1° modo. E' noto che in un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche mediana, quindi H sarà il punto medio di BC. E allora

$$H = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) = \left(\dots, \frac{-2 - 1}{2} \right) = (\dots, \dots)$$

Controlliamo subito se le due coordinate trovate possono andare d'accordo col disegno! E in caso affermativo, segniamole in matita a fianco di H.

2° modo. Se ABC non fosse stato isoscele con base BC, non avremmo potuto determinare le coordinate di H attraverso le formule per il punto medio di un segmento.

Come sarebbe stato il procedimento, allora?

- Si trova l'equazione della retta su cui giace l'altezza AH (brevemente: della retta AH)
- poi si scrive pure l'equazione della retta BC
- e infine si determina l'intersezione di tali due rette, facendo il sistema fra le loro equazioni.

Iniziamo col trovare l'equazione della retta AH.

Cosa conosciamo di questa retta?

Sappiamo che è una retta non verticale,

passante per $A(-1, 2)$ e perpendicolare alla retta BC, con $B(-4, -2)$, $C(3, -1)$.

Ma allora l'equazione della retta AH sarà della forma $y = mx + q$,

col coefficiente angolare m uguale all'antireciproco del coefficiente angolare della retta BC (ricordi? Due rette sono perpendicolari se e solo se i loro coefficienti angolari sono uno l'antireciproco dell'altro; e "antireciproco" significa "l'opposto del reciproco":

ad esempio, l'antireciproco di 5 è $-\frac{1}{5}$, mentre l'antireciproco di $-\frac{3}{8}$ è $+\frac{8}{3}$).

Il coefficiente angolare di BC si può determinare in due modi:

uno più lungo (ricavando l'equazione di BC),

$$\text{e uno molto più svelto, ossia con la nota formula: } m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{1}{7}.$$

Ma allora sarà $m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} = -7$, che "va d'accordo" col disegno

perché in esso vediamo che AH è una retta in discesa piuttosto ripida.

Perciò avremo $AH: y = -7x + q$ dove dobbiamo solo determinare il valore di q .
 A tale scopo, porremo la condizione di appartenenza, a tale retta, del punto $A(-1, 2)$:
 $A(-1, 2) \in AH \rightarrow 2 = -7 \cdot (-1) + q$
 da cui, risolvendo rispetto a q che in questo momento fa da incognita, $q = \dots$

Dopo aver determinato l'equazione di AH
 che è risultata essere $AH: y = -7x - 5$,
 abbiamo ora bisogno dell'equazione della retta BC .

- Potremmo, a tale scopo, partire dall'equazione $y = mx + q$ di una generica retta non verticale, e trovare m e q ponendo le due condizioni di appartenenza
 - del punto $B(-4, -2)$: $-2 = -4m + q$
 - e del punto $C(3, -1)$: $\dots$

per poi farne il sistema: $\begin{cases} -2 = -4m + q \\ \dots \end{cases}$ da cui $\begin{cases} m = \dots \\ q = \dots \end{cases}$

- Oppure potremmo sfruttare il fatto che il coeff. ang. di BC lo avevamo già trovato in precedenza (valeva $1/7$)

quindi già si sapeva che l'equazione di BC era della forma $y = \frac{1}{7}x + q$; ma per determinare il valore di q è possibile porre la condizione di appartenenza di B o di C , indifferentemente:
 ad esempio, la condizione di appartenenza di B porta a $-2 = -\frac{4}{7} + q$ da cui $q = \dots$

Bene! Ora che abbiamo stabilito le due equazioni di AH e di BC , ossia $AH: y = -7x - 5$, $BC: \dots$ basterà farne il sistema e risolverlo, per trovare le coordinate di H :

$$\text{punto } H \begin{cases} y = -7x - 5 \\ \dots \end{cases}$$

- III) Per trovare l'area di ABC (a parte il fatto che si tratta di un triangolo isoscele del quale si conoscono le misure dei tre lati, quindi potremmo benissimo ignorare il fatto che sia inserito in un riferimento cartesiano e determinare la misura dell'altezza AH con Pitagora, ecc.) possiamo calcolare la lunghezza del segmento AH utilizzando la nota formula:

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \dots = \sqrt{\frac{50}{4}} \stackrel{\text{NOTA 1}}{=} \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$$

E a questo punto,

$$S(ABC) = \frac{\text{base} \cdot \text{altezza}}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{\sqrt{50} \cdot \frac{\sqrt{50}}{2}}{2} = \dots = \frac{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}}{2} \cdot \frac{1}{2} \stackrel{\text{NOTA 2}}{=} \frac{50}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$$

NOTA 1:

Quando sotto radice c'è una somma o una sottrazione, la radice NON può essere "spezzata" (sarebbe errore gravissimo! ☹), si può invece spezzare quando c'è un prodotto o un quoziente:

$$\sqrt{9+4} \neq \sqrt{9} + \sqrt{4}, \quad \sqrt{9-4} \neq \sqrt{9} - \sqrt{4}$$

$$\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4}, \quad \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$$

NOTA 2 Cos'è $\sqrt{50}$? E' quel numero che, se viene elevato alla seconda, dà come risultato 50; e allora, se lo moltiplico per sé stesso, operazione che equivale a elevarlo al quadrato, ottengo appunto 50!!! $\rightarrow \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} = 50$

- IV) Dalla figura, è chiaro che i lati che eventualmente possono formare un angolo retto sono AB e AC . Se andiamo a calcolare i coefficienti angolari delle due rette AB e AC avremo:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dots \quad m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \dots$$

e vediamo quindi che sono antireciproci uno dell'altro.

Pertanto tali due rette sono perpendicolari e dunque il triangolo ABC è rettangolo.

Oppure: avevamo già calcolato le misure dei lati di ABC , ottenendo $AB = 5$, $AC = 5$, $BC = \sqrt{50}$.

Andiamo allora a controllare se vale la relazione $5^2 + 5^2 = (\sqrt{50})^2$: $\dots$

Come si vede la risposta è affermativa, quindi, per l'inverso del teorema di Pitagora, il triangolo ABC è rettangolo.

♥ Comunque, per scrivere l'equazione della retta passante per due punti di coordinate note oppure della retta passante per un punto di coordinate note e avente un determinato coefficiente angolare esistono due apposite e comode **FORMULE**, alle quali volutamente abbiamo scelto di rinunciare per ora: le introdurremo più avanti.

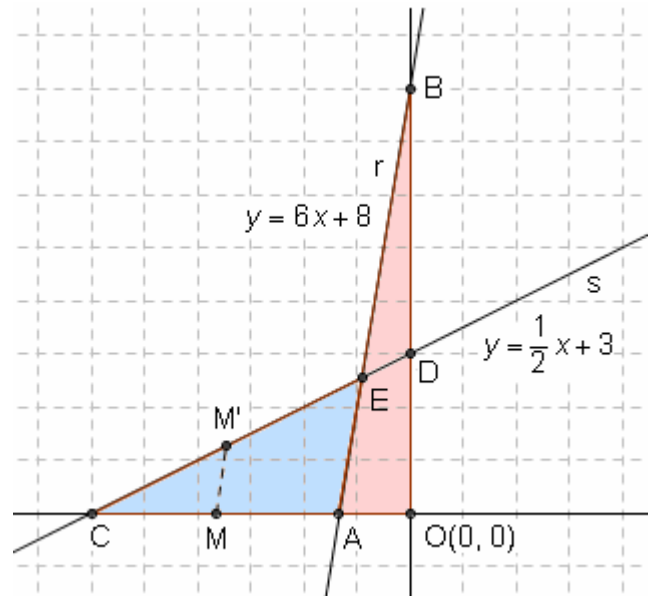
2) Le due rette

$$r: y = 6x + 8; \quad s: y = \frac{1}{2}x + 3$$

intersecano gli assi cartesiani nei punti A e B (retta r), C e D (retta s) e si tagliano nel punto E.

I) E' maggiore la superficie del triangolo AOB o quella di CAE?

II) Verifica che, detto M il punto medio di CA e M' il punto medio di CE, la congiungente MM' è parallela ad AE.



I)

Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti A, B, C, D, E.

A è l'intersezione della retta $r: y = 6x + 8$ con l'asse delle x , che è l'insieme dei punti del piano cartesiano aventi ordinata 0, e ha perciò equazione $y = 0$.

Quindi A si determina risolvendo il sistema $\begin{cases} y = 6x + 8 \\ y = 0 \end{cases}$ o anche, semplicemente,

tenendo conto che la sua y vale 0 e ponendo $y = 0$ nell'equazione $y = 6x + 8$ per trovare anche la x .
Dunque $0 = 6x + 8$ da cui $x = \dots$

Di conseguenza le coordinate di A sono: $A(\dots, 0)$

Analogamente si procede per trovare le coordinate di C, intersezione con l'asse x della retta $s: y = \frac{1}{2}x + 3$.

Si trova $C(\dots, 0)$.

Le coordinate di B e D sono immediate da determinare.

B, ad esempio, è l'intersezione della retta $r: y = 6x + 8$ con l'asse delle y , che è l'insieme dei punti del piano cartesiano aventi ascissa 0, e ha perciò equazione $x = 0$.

Perciò B si determina risolvendo il sistema $\begin{cases} y = 6x + 8 \\ x = 0 \end{cases}$ o anche, in modo estremamente semplice,

tenendo conto che la sua x vale 0 e ponendo $x = 0$ nell'equazione $y = 6x + 8$ per trovare anche la y .

In alternativa, B è l'intersezione della retta $r: y = 6x + 8$ con l'asse delle y quindi la y di B coincide con l'ordinata all'origine q di quella retta, che vale ...

In definitiva risulta $B(0, \dots)$, $D(0, \dots)$.

Il punto E poi, essendo il punto di intersezione fra le due rette $r: y = 6x + 8$, $s: y = \frac{1}{2}x + 3$,

si trova risolvendo il ... delle equazioni delle due rette.

$$\begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$$

Si trovano così, per E, coordinate frazionarie: $E(\dots, \dots)$

Area di CAE:

si può ottenere col calcolo $S_{CAE} = \frac{CA \cdot y_E}{2}$,

essendo $CA = |x_A - x_C| = \dots$

Verifica che così facendo si trova $S_{CAE} = \frac{196}{33}$.

Per quanto riguarda AOB, è $S_{AOB} = \frac{AO \cdot OB}{2} = \dots$

Confrontando i valori frazionari di S_{CAE} e S_{AOB} , si vede che è maggiore la superficie di ...

II)

M è il punto medio del segmento CA, con $C(-6, 0)$ e $A\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$.

Dunque $M\left(\frac{-6-\frac{4}{3}}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \left(\dots, \dots\right)$. Allo stesso modo, si ottiene $M'\left(\dots, \dots\right)$

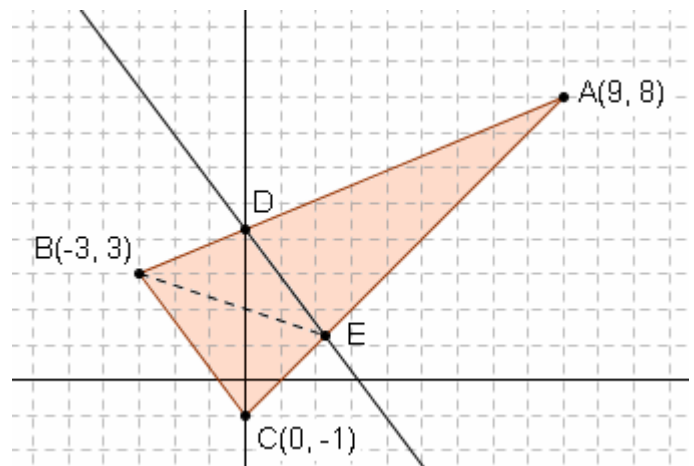
Determiniamo il coefficiente angolare della retta MM' applicando la formula $m_{MM'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \dots$

e vediamo che tale coefficiente angolare coincide con quello della retta AE : $y = 6x + 8 \rightarrow m_{AE} = \dots$

Perciò resta verificato che le due rette sono parallele.

Fra l'altro, questo è in accordo con un teorema generale della Geometria, che afferma:
 “in ogni triangolo, la congiungente i punti medi di due lati è *sempre* parallela al terzo lato
 (e uguale, come lunghezza, alla metà di questo)”.

3) I punti $A(9, 8)$; $B(-3, 3)$; $C(0, -1)$ sono vertici di un triangolo. Per il punto di intersezione D del lato AB con l'asse delle ordinate si traccia la parallela al lato BC, che taglia il lato AC in E. Determina le misure delle diagonali del trapezio BCED. Qual è la diagonale più lunga?



Occorre determinare innanzitutto le coordinate del punto D, intersecando la retta AB con l'asse y .

Retta AB: $y = mx + q$ dove m e q si trovano ponendo le condizioni di appartenenza di A e di B.

$$\begin{cases} A(9, 8) \\ B(-3, 3) \end{cases} \begin{cases} 8 = 9m + q \\ \dots \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} m = \dots \\ q = \dots \end{cases} \text{ e di conseguenza l'equazione di AB è } y = \dots + \frac{17}{4}$$

Ora le coordinate di D, punto di ascissa 0 della retta AB, saranno $D(0, \dots)$.

La retta DE, essendo parallela a BC, avrà coefficiente angolare uguale a quello di BC. Ma è $m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \dots$

per cui l'equazione della retta DE, tenuto conto che la sua ordinata all'origine vale $\dots$, sarà $y = \dots$

Per determinare le coordinate di E bisogna intersecare tale retta con la retta AC.

L'equazione di quest'ultima si può scrivere considerando la generica equazione $y = mx + q$ e determinando i valori di m e q che interessano tramite le condizioni di appartenenza di A e di C:

$$\begin{cases} A(9, 8) \\ C(0, -1) \end{cases} \begin{cases} 8 = 9m + q \\ \dots \end{cases} \text{ da cui, dopo aver risolto il sistema, AC: } y = \dots$$

oppure tenendo conto del fatto che per la retta AC l'ordinata all'origine vale $\dots$

e determinando m_{AC} con la formula $m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \dots$: si ha subito che l'equazione di AC è $y = \dots$

A questo punto, con un sistema, si determinano le coordinate di E:

$$\begin{cases} \dots \\ y = x - 1 \end{cases} \text{ da cui } E\left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

Infine, $DC = |y_C - y_D|$ perché il segmento DC ha per estremi due punti con la stessa ascissa:

$$DC = |y_C - y_D| = \dots$$

mentre

$$BE = \sqrt{\dots} = \dots = \sqrt{\frac{490}{16}} = \frac{\sqrt{490}}{4} \approx \frac{22,136}{4} = 5,534$$

Fra le due diagonali BE e DC, è quindi leggermente più lunga $\dots$

PER FINIRE, DUE FORMULE IMPORTANTI E MOLTO COMODE

Intenzionalmente, abbiamo rimandato fin qui la presentazione di un paio di formule che rendono assai più rapido il procedimento risolutivo di parecchi problemi.

La prima è la formula per l'equazione della **retta passante per due punti di coordinate note**.

Essa nei testi viene solitamente ricavata impostando una opportuna proporzione, e scritta sotto la forma

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

FORMULA PER L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI DATI

essendo (x_1, y_1) e (x_2, y_2) i due punti in questione.

Osserviamo subito che questa formula NON vale qualora i due punti individuino una retta parallela a uno degli assi cartesiani, e vediamo un paio di esempi di applicazione.

Se fosse richiesto di determinare l'equazione della retta passante per i due punti $A(-8, 1)$ e $B(2, -4)$,

... procedendo, come abbiamo sempre fatto fin qui, *senza formule*, si tratterebbe di considerare la generica equazione $y = mx + q$ per porre le due condizioni di appartenenza

$$\begin{cases} (-8, 1) & \begin{cases} 1 = -8m + q \\ (2, -4) & \begin{cases} -4 = 2m + q \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

e risolvere il sistema trovando così m e q :

$$\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ q = -3 \end{cases} \rightarrow \text{la retta è } y = -\frac{1}{2}x - 3$$

... mentre *con la formula* si ottiene direttamente

$$\frac{y - 1}{-4 - 1} = \frac{x + 8}{2 + 8}$$

Si fanno poi i calcoli, si porta l'equazione in forma esplicita oppure implicita, ed è fatta.

$$\frac{y - 1}{-5} = \frac{x + 8}{10}; \quad -(y - 1) = \frac{x + 8}{2};$$

$$-2y + 2 = x + 8; \quad -x - 2y - 6 = 0$$

$$\text{da cui } x + 2y + 6 = 0 \text{ oppure } y = -\frac{1}{2}x - 3$$

Se invece i due punti assegnati fossero ad esempio $(2, 5)$ e $(9, 5)$, la formula non sarebbe applicabile

perché si otterrebbe uno 0 a denominatore: $\frac{y - 5}{5 - 5} = \frac{x - 2}{9 - 2}$; tuttavia, in casi come questo

(due punti con uguale ordinata oppure uguale ascissa), dato che la retta è orizzontale oppure verticale la sua equazione si potrà scrivere *immediatamente* senza scomodare formule (nel nostro caso, è $y = 5$).

Un'altra formula che può risultare parecchio utile è quella per la

retta passante per un punto dato, e avente coefficiente angolare assegnato:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

FORMULA PER L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER IL PUNTO $P_0(x_0, y_0)$ E AVENTE COEFFICIENTE ANGOLARE m

Indipendentemente da come sia stata ricavata, osserviamo che questa semplice formula "funziona", perché

- l'equazione scritta rappresenta certamente una retta (per il fatto che si tratta di un'equazione di 1° grado nelle due variabili x, y);
- tale retta ha coeff. ang. m (se si portasse in forma esplicita, il moltiplicatore di x risulterebbe essere m);
- tale retta infine passa certamente per $P_0(x_0, y_0)$ in quanto sostituendo x_0, y_0 al posto di x e y rispettivamente, si ottiene un'uguaglianza vera.

Ad esempio, la retta che passa per il punto $(4, -12)$ e ha coefficiente angolare $m = 5$ è semplicemente $y + 12 = 5(x - 4)$ ossia $y + 12 = 5x - 20$; $y = 5x - 32$.

NEGLI ESERCIZI PROPOSTI ALLE PAGINE SEGUENTI potrai, volendo, rendere più veloci le risoluzioni attraverso le due belle formule presentate in questo riquadro. Per fare un esempio:

Il triangolo RST ha per vertici $R(2, 5)$; $S(-2, 0)$; $T(-4, 6)$.
Scrivi l'equazione della retta ST e determina le coordinate della proiezione H del punto R su questa retta.

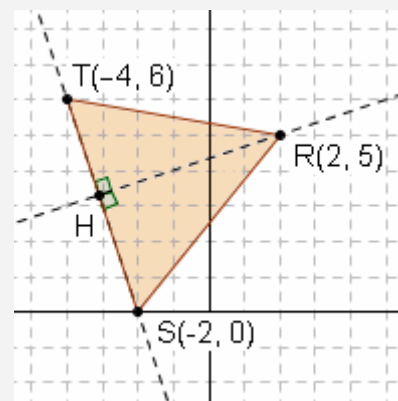
Equazione della retta passante per i due punti S, T:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; \quad \frac{y - 0}{6 - 0} = \frac{x + 2}{-4 + 2}; \quad \dots \quad y = -3x - 6$$

Equazione della retta che passa per R e ha coefficiente angolare $1/3$

(antireciproco di -3): $y - y_0 = m(x - x_0)$; $y - 5 = \frac{1}{3}(x - 2)$; $\dots \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$.

Facendo il sistema fra questa retta e la retta ST, si ottiene $H\left(-\frac{31}{10}, \frac{33}{10}\right)$



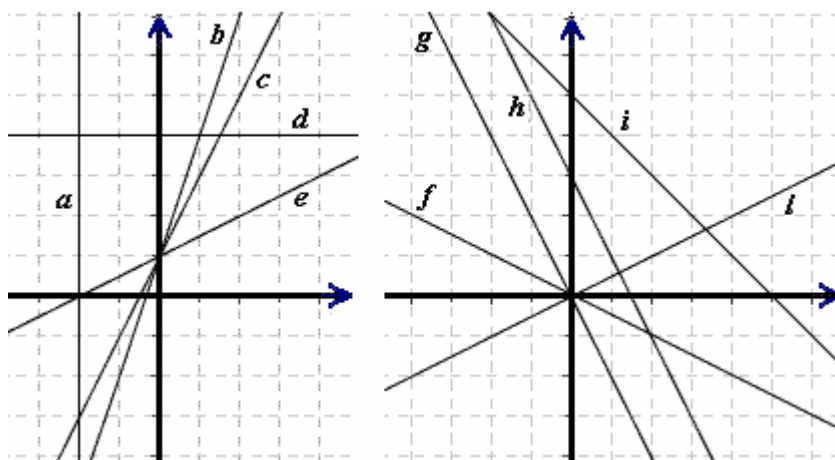
7. ESERCIZI (risposte alle pagg. 452, 453)

DISEGNARE, RICONOSCERE

- 1) **Disegna** le seguenti rette:
- a) $y = x + 3$ b) $y = x$ c) $y = x - 3$ d) $y = 3$ e) $x = 3$
 f) $y = -4x + 2$ g) $y = -4x$ h) $y = 4x$ i) $y = \frac{1}{4}x$ j) $y = -\frac{1}{4}x - 3$

- 2) **Abbina** a ciascuna fra le seguenti equazioni la corrispondente retta fra quelle raffigurate:

- i) $y = \frac{1}{2}x$ ii) $y = \frac{1}{2}x + 1$
 iii) $x = -2$ iv) $y = -2x$
 v) $y = -\frac{1}{2}x$ vi) $y = 4$
 vii) $y = -2x + 3$ viii) $y = 5 - x$
 ix) $y = 3x + 1$ x) $y = 2x + 1$



I D E E F O R M U L E	APPARTENENZA?  SOSTITUIRE!	INTERSEZIONE?  SISTEMA!	Distanza fra due punti: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $d = x_2 - x_1 $ stessa ordinata $d = y_2 - y_1 $ stessa ascissa	Punto medio di un segmento: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$
	Due rette sono PARALLELE se e solo se hanno coefficienti angolari uguali; due rette sono PERPENDICOLARI se e solo se hanno coefficienti angolari antireciproci.			
	Proprietà fondamentale del coeff. angolare: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Formula per l'equazione della retta passante per due punti dati: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	Formula per l'equazione della retta passante per (x_0, y_0) e avente coefficiente angolare m : $y - y_0 = m(x - x_0)$	

COEFFICIENTE ANGOLARE, PARALLELISMO, PERPENDICOLARITA'

- 3) Determina (formula $m = \Delta y / \Delta x$) il coefficiente angolare della retta passante per ciascuna coppia di punti:

- i) A(1,2) B(4,3) ii) C(4,5) D(7,2) iii) E(1,-1) F(3,5) iv) G(3,2) H(3,-2)
 v) I(0,3) L(-1,1) vi) M(7,7) N(-5,7) vii) O(0,0) P($\frac{1}{2}, -2$) viii) Q($1, \frac{1}{3}$) R($\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$)

- 4) Data la retta $y = -\frac{2}{3}x$, riconosci quali fra le seguenti rette sono ad essa I) parallele II) perpendicolari

- a) $y = \frac{2}{3}x + 1$ b) $y = \frac{3}{2}x - 1$ c) $y = 1 - \frac{2}{3}x$ d) $4x + 6y + 30 = 0$ e) $3x + 2y + 6 = 0$

- 5) Stabilisci quale coeff. angolare hanno tutte le rette parallele alla retta che passa per la coppia di punti:

- a) A(1,-3); B(3,2) b) C(1/8, 1/4); D(1/2, -1/2) c) E(5, 4); F(5, -2)

- 6) Stabilisci quale coefficiente angolare hanno tutte le rette perpendicolari alla retta che passa per ciascuna delle tre coppie di punti a), b), c) dell'esercizio precedente

RETTA PER DUE PUNTI

- 7) Scrivi l'equazione della retta AB, con:

- a) A(0,4); B(-6,1) b) A(-3,4); B(2,-1) c) A(-3,-6); B(4,1) d) A($1, \frac{1}{2}$); B($\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$)
 e) A(3,5); B(1,-1) f) A(-1,-4); B(-3,2) g) A($-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}$); B($\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}$) h) A(1,3); B(1,-1)

RETTA PER UN PUNTO DATO, CON DATO COEFFICIENTE ANGOLARE

- 8) Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto $P(2,3)$ ed è parallela alla retta
 a) $y = 2x + 1$ b) $y = x$ c) $y = -4x - 5$ d) $y = 7 - x$ e) $y = -\frac{1}{2}x$
 f) $3x - y + 1 = 0$ g) $4x + 3y + 2 = 0$ h) AB, con $A(1,2)$; $B(2,7)$ i) $y = 1$ j) Asse y
- 9) Riprendi l'esercizio precedente, sostituendo "perpendicolare" a "parallela"
- 10) Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto $P(-3,0)$ ed è parallela alla retta
 a) $y = -2x - 4$ b) $y = -x$ c) $y = \frac{5}{7}x$ d) $x = 0$ e) Asse x
 f) AB, con $A(-3,1)$; $B(0,4)$ g) CD, con $C(-1,-5)$; $D(-2,4)$ h) EF, con $E(0,1)$; $F(0,-1)$
- 11) Riprendi l'esercizio precedente, sostituendo "perpendicolare" a "parallela"
- 12) Scrivi le equazioni delle tre altezze (= delle rette su cui giacciono le altezze) di ABC, nei seguenti casi:
 a) $A(2,1)$; $B(5,3)$; $C(7,2)$
 b) $A(-5,-2)$; $B(-3,4)$; $C(0,1)$ d) $A(2, \frac{1}{2})$; $B(4, -\frac{1}{2})$; $C(1,-1)$
 c) $A \equiv O(0,0)$; $B(0,5)$; $C(-4,1)$

Sarà forse ovvio, ma è davvero
IMPORTANTISSIMO
 fare la **figura** con precisione e
controllare se i risultati trovati
sono in accordo con essa!

SU FORMA ESPLICITA E IMPLICITA

- 13) Porta le seguenti equazioni in forma esplicita:
 a) $x + y - 1 = 0$ b) $3x - y + 4 = 0$ c) $x + 4y - 6 = 0$ d) $2x + 3y = 0$ e) $x - 5y - 10 = 0$
- 14) Porta le seguenti equazioni in forma implicita:
 a) $y = -3x + 8$ b) $y = x + 2$ c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}$ d) $y = \frac{x-7}{2}$ e) $y = -\frac{4}{3}x$

SU APPARTENENZA E INTERSEZIONE

- 15) Per ciascuna delle rette indicate qui a fianco, determina
 i) il punto di ascissa -3 (basterà sostituire -3 al posto di x e ricavare y !)
 ii) il punto di ordinata 4 (basterà sostituire 4 al posto di y e ricavare x !)
 iii) il punto comune con l'asse y
 iv) il punto comune con l'asse x
 a) $y = 4x - 3$
 b) $y = -\frac{5}{6}x + 2$
 c) $3x - 5y + 6 = 0$
 d) $y = -4$
- 16) Trova le coordinate del punto in cui si tagliano le rette a fianco indicate
 a) $r: y = 12x + 1$, $r': y = 13x - 1$
 b) $r: 3x - 5y + 2 = 0$, $r': 7x + 5y - 4 = 0$ c) $r: y = -\frac{x}{3}$, $r': x + y = 1$
- 17) Trova le coordinate dei vertici del triangolo individuato dalle rette seguenti:
 a) $r: y = -x$, $s: 3x - y - 2 = 0$, $t: 2x - 2y + 1 = 0$ b) $r: x = 0$, $s: y - 2 = 0$, $t: y = 5x - 1$

SULLA DISTANZA FRA DUE PUNTI

- 18) Calcola le distanze fra le seguenti coppie di punti:
 a) $A(0,2)$; $B(6,10)$ b) $A(-8,3)$; $B(7,-5)$ c) $A(0,-3)$; $B(0,-7)$
 d) $A(2,-1)$; $B(-\frac{1}{2}, -1)$ e) $A(10,-1)$; $B(6,2)$ f) $A(3,42)$; $B(12,2)$ g) $A(-\frac{1}{6}, -2)$; $B(\frac{3}{2}, 2)$
- 19) Determina il perimetro del triangolo di vertici
 a) $A(1,-4)$; $B(13,-9)$; $C(1,0)$ b) $D(-7,3)$; $E(7,3)$; $F(2,-9)$
- 20) Trova il perimetro di PQR, con $P(-4,2)$; $Q(-1,-2)$; $R(5,6)$ (il risultato conterrà una radice)
- 21) Il triangolo di vertici $D(-3,3)$; $E(0,-1)$; $F(-7,0)$ è isoscele: dimostrarlo, e calcola la sua base

Nel seguito si parlerà, a volte, di **parallelogrammi**, eventualmente "particolari" (rettangolo, quadrato).
 Questo argomento è trattato alle pagine 312 ... 316 del volume: vai a dare un'occhiata!

- 22) Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-2,6)$; $B(10,1)$; $C(7,-3)$; $D(-5,2)$ è un parallelogrammo, utilizzando:
 a) i coefficienti angolari b) la formula per la distanza fra due punti
- 23) Verifica che il triangolo di vertici $A(-2,-1)$; $B(10,-10)$; $C(22,6)$ è rettangolo
 a) coi coefficienti angolari b) utilizzando *esclusivamente* la formula per la distanza fra due punti.
- 24) Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-2,2)$; $B(0, \frac{7}{2})$; $C(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$; $D(-\frac{1}{2}, 0)$ è un quadrato
 a) col metodo che ti pare b) utilizzando *esclusivamente* la formula per la distanza fra due punti

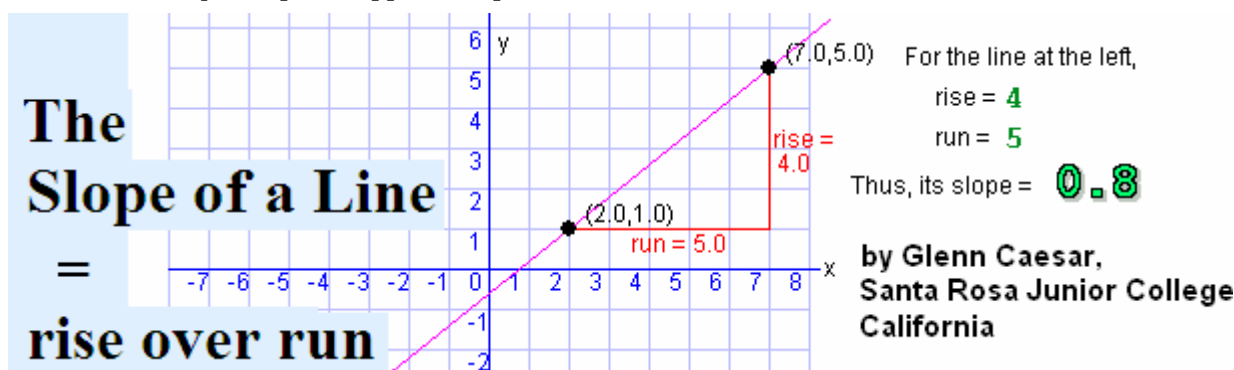
SUL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

- 25) Calcola le coordinate del punto medio del segmento AB, essendo
- a) $A(3,5)$; $B(-1,9)$ b) $A(-4,0)$; $B(-3,0)$ c) $A(-2,-4)$; $B(0,2)$
- d) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$; $B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$ e) $A\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}\right)$; $B\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ f) $A(k, -3)$; $B(1, -3)$
- g) $A(a+b, a-b)$; $B(a-b, b)$ h) $A(3,6; 0,4)$; $B(1,4; -0,5)$
- 26) Calcola le coordinate dei punti medi I, L, M, N dei lati del quadrilatero ABCD, essendo $A(-3,1)$; $B(1,-5)$; $C(5,7)$; $D(1,7)$. Il quadrilatero che ha per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero qualsiasi è sempre un parallelogrammo: verificalo in questo caso particolare, constatando che i lati opposti di ILMN sono a due a due paralleli come direzione, e uguali come lunghezza.
- 27) M è il punto medio di PQ, essendo $P(0,1)$; $Q(-4,3)$. Che coordinate ha N, punto medio di PM?
- 28) Nell'esercizio 22 si è verificato che ABCD, con $A(-2,6)$; $B(10,1)$; $C(7,-3)$; $D(-5,2)$, è un parallelogrammo; ma allora le sue diagonali dovrebbero tagliarsi scambievolmente per metà, vale a dire i loro punti medi dovrebbero coincidere. Verificalo.
- 29) Se $M(1,-1)$ è il punto medio del segmento AB e $A(-4,3)$, quali sono le coordinate di B?
- 30) Se $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right)$ è il punto medio del segmento AB e $A\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$, quali sono le coordinate di B?
- 31) Trova le coordinate del punto R, simmetrico di $T(-4,2)$ rispetto a $S(-1,-3)$
- 32) Trova il quarto vertice del parallelogrammo che ha tre vertici in $A\left(-3, \frac{13}{2}\right)$; $B(-2,4)$; $C(3,2)$
- VARI**
- 33) E' dato il triangolo ABC, con $A(-1,0)$; $B(3,-3)$; $C(-4,-6)$. Scrivi le equazioni delle mediane relative ai lati AB e AC (= delle rette su cui giacciono tali mediane), poi determina il loro punto di intersezione.
- 34) Dopo aver dimostrato che ABCD, con $A(-5,-2)$; $B(5,-3)$; $C(6,2)$; $D(-4,3)$, è un parallelogrammo, congiungi il vertice A col punto medio M del lato DC e il vertice C con il punto medio N nel lato AB e verifica che i due segmenti AM e CN dividono la diagonale DB in tre parti uguali $DE = EF = FB$.
- 35) Verifica algebricamente che i tre punti $A(2,5)$; $B(4,1)$; $C(5,-1)$ sono allineati.
- 36) Verifica, utilizzando esclusivamente i coeff. angolari, che il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo.
- a) $A(-4,1)$; $B(0,-2)$; $C(3,0)$; $D(-1,3)$ b) $A(-1,-1)$; $B\left(3, -\frac{8}{3}\right)$; $C\left(3, \frac{4}{3}\right)$; $D(-1,3)$
- 37) Ripeti la verifica richiesta all'es. precedente utilizzando, invece, la formula per la distanza fra due punti.
- 38) Verifica, utilizzando esclusivamente i coefficienti angolari, che il triangolo a) ABC b) DEF è rettangolo.
- a) $A(-10,-8)$; $B(2,8)$; $C(14,-1)$ b) $D(-1,0)$; $E(4,-12)$; $F(8, 15/4)$
- 39) Ripeti la stessa verifica richiesta all'esercizio precedente utilizzando, invece, la relazione pitagorica.
- 40) Considera il triangolo di vertici $A(-8,-3)$; $B(0,12)$; $C(0,3)$ e verifica (nei tre possibili casi) che la congiungente i punti medi di due lati è sempre parallela al lato rimanente, e uguale alla sua metà
- 41) Determina il baricentro (= punto di incontro delle mediane) e l'ortocentro (delle altezze):
- a) di OAB, con $O(0,0)$; $A(5,0)$; $B(1,6)$ b) di DEF, con $D(1,2)$; $E(-5,-6)$; $F(-3,0)$
- 42) Disegna i punti $A(6,-8)$; $B(12,5)$ e determina l'area del triangolo OAB assumendo OA come base.
- 43) Determina l'area del triangolo che ha per vertici a) $(-2,-3)$; $(0,6)$; $(6,3)$ b) $(-9,5)$; $(-6,-3)$; $(-1,-3)$
- 44) Quanto misurano area e perimetro del triangolo che la retta $2x - 3y + 6 = 0$ forma con gli assi cartesiani?
- 45) Determina le coordinate del punto di incontro degli assi di due dei lati del triangolo che ha per vertici i punti $(-7,-3)$; $(-5,5)$; $(4,5)$. Verifica che anche l'asse del lato rimanente passa per quel punto. [L'asse di un segmento è la perpendicolare a quel segmento condotta per il suo punto medio].
- 46) I vertici del triangolo ABC sono: $A(-7,5)$; $B(-6,-2)$; $C(2,2)$. Scrivi le equazioni: dell'altezza e della mediana relative al lato BC; dell'asse di BC; della parallela a BC passante per A. Ora BC, l'altezza relativa a BC, l'asse di BC e la parallela a BC per A determinano un rettangolo: trovanne l'area e determina la misura delle sue diagonali, constatando che sono uguali.
- 47) Gli assi dei tre lati di un triangolo passano sempre per uno stesso punto, che ha ugual distanza dai tre vertici del triangolo: verificalo nel caso particolare del triangolo di vertici $A(-1,-5)$; $B(8,-2)$; $C(0,2)$. Quanto vale in questo caso la distanza comune?

RISPOSTE

- 2) i) l ii) e iii) a iv) g v) f vi) d vii) h viii) i ix) b x) c
- 3) i) $1/3$ ii) -1 iii) 3 iv) *non esiste/ è infinito* v) 2 vi) 0 vii) -4 viii) $1/3$
- 4a) $né \parallel né \perp$ 4b) $\perp$ 4c) $\parallel$ 4d) $\parallel$ 4e) $né \parallel né \perp$
- 5a) $m = \frac{5}{2}$ 5b) $m = -2$ 5c) $m = \text{"non esistente", "non definito", "infinito"} \text{ (retta verticale)}$
- 6a) $m = -\frac{2}{5}$ 6b) $m = \frac{1}{2}$ 6c) $m = 0$
- 7) a) $y = \frac{1}{2}x + 4$ b) $y = 1 - x$ c) $y = x - 3$ d) $y = \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}$
 e) $y = 3x - 4$ f) $y = -3x - 7$ g) $y = -x - \frac{5}{4}$ h) $x = 1$
- 8) a) $y = 2x - 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = -4x + 11$ d) $y = -x + 5$ e) $y = -\frac{1}{2}x + 4$
 f) $y = 3x - 3$ g) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$ h) $y = 5x - 7$ i) $y = 3$ j) $x = 2$
- 9) a) $y = -\frac{1}{2}x + 4$ b) $y = -x + 5$ c) $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$ d) $y = x + 1$ e) $y = 2x - 1$
 f) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$ g) $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ h) $y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$ i) $x = 2$ j) $y = 3$
- 10) a) $y = -2x - 6$ b) $y = -x - 3$ c) $y = \frac{5}{7}x + \frac{15}{7}$ d) $x = -3$ e) $y = 0$
 f) $y = x + 3$ g) $y = -9x - 27$ h) $x = -3$
- 11) a) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ b) $y = x + 3$ c) $y = -\frac{7}{5}x - \frac{21}{5}$ d) $y = 0$ e) $x = -3$
 f) $y = -x - 3$ g) $y = \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$ h) $y = 0$
- 12) a) $y = 2x - 3$; $y = -5x + 28$; $y = -\frac{3}{2}x + \frac{25}{2}$ b) $y = x + 3$; $y = -\frac{5}{3}x - 1$; $y = -\frac{1}{3}x + 1$
 c) $y = -x$; $y = 4x + 5$; $y = 1$ d) $y = -6x + \frac{25}{2}$; $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{6}$; $y = 2x - 3$
- 13) a) $y = -x + 1$ b) $y = 3x + 4$ c) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ d) $y = -\frac{2}{3}x$ e) $y = \frac{1}{5}x - 2$
- 14) a) $3x + y - 8 = 0$ b) $\begin{matrix} -x + y - 2 = 0 \\ o \ x - y + 2 = 0 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} -5x + 15y + 3 = 0 \\ o \ 5x - 15y - 3 = 0 \end{matrix}$ d) $\begin{matrix} -x + 2y + 7 = 0 \\ x - 2y - 7 = 0 \end{matrix}$ e) $4x + 3y = 0$
- 15) a) i) $(-3, -15)$ ii) $\left(\frac{7}{4}, 4\right)$ iii) $(0, -3)$ iv) $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ b) i) $\left(-3, \frac{9}{2}\right)$ ii) $\left(-\frac{12}{5}, 4\right)$ iii) $(0, 2)$ iv) $\left(\frac{12}{5}, 0\right)$
 c) i) $\left(-3, -\frac{3}{5}\right)$ ii) $\left(\frac{14}{3}, 4\right)$ iii) $\left(0, \frac{6}{5}\right)$ iv) $(-2, 0)$ d) i) $(-3, -4)$ ii) *non esiste* iii) $(0, -4)$ iv) *non esiste*
- 16) a) $(2, 25)$ b) $\left(\frac{1}{5}, \frac{13}{25}\right)$ c) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
- 17) a) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$; $\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)$ b) $(0, 2)$; $(0, -1)$; $\left(\frac{3}{5}, 2\right)$
- 18) a) 10 b) 17 c) 4 d) $5/2$ e) 5 f) 41 g) $13/3$
- 19) a) 32 b) 42 20) $15 + \sqrt{97}$
- 21) In effetti, è $DE = DF = 5$. base = $EF = \sqrt{50} \approx 7,07$
- 22) a) Due lati opposti giacciono su rette di coeff. ang. $-5/12$, gli altri due su rette di coeff. ang. $4/3$
 b) Occorrerà controllare che i lati opposti siano a due a due uguali. Si trova $AB = DC = 13$; $AD = CB = 5$.

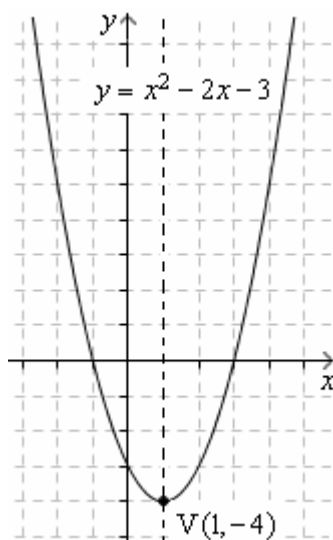
- 23) b) Basta verificare che la somma dei quadrati di due lati uguaglia il quadrato del lato rimanente: si potrà così concludere che il triangolo è rettangolo in virtù dell'inverso del Teorema di Pitagora (pag. 214).
- 24) b) Si deve verificare che i quattro lati sono uguali, e pure le diagonali sono uguali!
 Si trova $AB = BC = CD = DA = \frac{5}{2}$, $AC = BD = \sqrt{\frac{50}{4}} = \sqrt{12,5} \approx 3,5$
- 25) a) $(1, 7)$ b) $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$ c) $(-1, -1)$ d) $\left(\frac{3}{8}, \frac{4}{15}\right)$ e) $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{2}{3}\right)$ f) $\left(\frac{k+1}{2}, -3\right)$ g) $\left(a, \frac{a}{2}\right)$ h) $(2, 5; -0, 05)$
- 26) $(-1, -2); (3, 1); (3, 7); (-1, 4)$; due lati opposti di ILMN misurano 5 e gli altri due 6
- 27) $N\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ 28) In effetti, sia AC che BD hanno per punto medio $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 29) $B(6, -5)$ 30) $B\left(\frac{7}{6}, -1\right)$
- 31) $R(2, -8)$ 32) $D\left(2, \frac{9}{2}\right)$ 33) Il punto di intersezione delle mediane è $G\left(-\frac{2}{3}, -3\right)$ 34) $E(-1, 1); F(2, -1)$
- 35) Puoi scrivere l'equazione della retta che passa per 2 di questi punti e verificare che anche il 3° punto le appartiene.
- 36) a) $m_{AB} = -\frac{3}{4} = m_{DC}$ perciò $AB \parallel DC$; $m_{AD} = \frac{2}{3} = m_{BC}$ perciò $AD \parallel BC$
 b) $m_{AB} = -\frac{5}{12} = m_{DC}$ perciò $AB \parallel DC$; $m_{AD} = \infty = m_{BC}$ perciò $AD \parallel BC$ (entrambe verticali)
- 37) a) $AB = 5 = DC$; $AD = \sqrt{13} = BC$ e un quadrilatero coi lati opposti a due a due uguali è un parallelogrammo.
 b) $AB = \frac{13}{3} = DC$; $AD = 4 = BC$
- 38) a) $m_{AB} = \frac{4}{3}$ e $m_{BC} = -\frac{3}{4}$ perciò $AB \perp BC$ ($\widehat{ABC} = 90^\circ$) b) $m_{DE} = -\frac{12}{5}$ e $m_{DF} = \frac{5}{12}$ perciò $DE \perp DF$ ($\widehat{EDF} = 90^\circ$)
- 39) a) $AB = 20$, $BC = 15$, $AC = 25$ quindi $AB^2 + BC^2 = 400 + 225 = 625 = AC^2$ da cui $\widehat{ABC} = 90^\circ$
 b) $DE = 13$, $DF = \frac{39}{4}$, $EF = \frac{65}{4}$ quindi $DE^2 + DF^2 = 169 + \frac{1521}{16} = \frac{4225}{16} = EF^2$ da cui $\widehat{EDF} = 90^\circ$
- 40) Ad esempio, i punti medi di AB e BC hanno coordinate $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$ e $\left(0, \frac{15}{2}\right)$
 e la loro congiungente ha coefficiente angolare, come retta, $\frac{3}{4}$, e misura, come segmento, 5.
 Ora, AC ha coefficiente angolare, come retta, ancora $\frac{3}{4}$ e misura, come segmento, 10 cioè $5 \cdot 2$.
 A te le altre verifiche.
- 41) a) ortocentro: $\left(1, \frac{2}{3}\right)$; baricentro: $(2, 2)$ b) ortocentro: $(-11, 6)$; baricentro: $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)$
- 42) $S(OAB) = 63$ 43) a) $S = 30$ b) $S = 20$ 44) $S = 3$, $2p = 5 + \sqrt{13}$ 45) $(-1/2, -3/8)$
- 46) $y = -2x - 9$; $y = -x - 2$; $y = -2x - 4$; $y = \frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$;
 il rettangolo ha area uguale a 15 e le sue diagonali misurano entrambe $\sqrt{50}$
- 47) Scrivi le equazioni degli assi dei tre lati, trova il punto di intersezione di due qualsiasi di tali assi e verifica che questo punto appartiene pure all'asse restante. La distanza comune vale 5.



8. FUNZIONI QUADRATICHE: PARABOLE

Parliamo ora delle funzioni “di 2° grado”, o “quadratiche”, la cui equazione è della forma $y = ax^2 + bx + c$

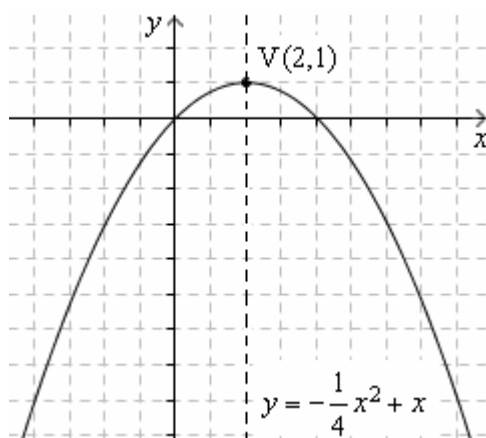
x	$y = x^2 - 2x - 3$
-3	12
-2	5
-1	0
0	-3
$\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{4} = -4 + \frac{1}{4}$
1	-4
$\frac{3}{2}$	$-\frac{15}{4} = -4 + \frac{1}{4}$
2	-3
3	0
4	5
5	12



Disegnando questa curva per punti, ci si rende conto che essa presenta una simmetria “assiale”, cioè una simmetria rispetto a una retta (tratteggiata nella figura). La presenza di un asse di simmetria consente di tracciare il grafico con più facilità: calcolate le coordinate di un punto, dopo averlo disegnato possiamo immediatamente disegnare anche un altro punto, quello che è simmetrico del primo rispetto all’asse.

Abbiamo indicato con V (“V” di “vertice”) il punto di ordinata minima del grafico.

x	$y = -\frac{1}{4}x^2 + x$
-2	-3
-1	-1,25
0	0
1	0,75
2	1
3	0,75
4	0
5	-1,25
6	-3



Questa seconda curva è “capovolta” rispetto alla precedente; inoltre la sua “curvatura” è meno accentuata. Entrambe le circostanze sono legate al coefficiente del termine di 2° grado nelle rispettive equazioni, come è spiegato più avanti.

Il vertice in questo caso è il punto di ordinata massima.

Una funzione di 2° grado $y = ax^2 + bx + c$ ha come grafico una “parabola”.

♥ Il segno del coefficiente a determina l’orientamento della “concavità” ovvero della “parte cava”:

- $a > 0$: concavità rivolta verso l’alto $\cup$
- $a < 0$: concavità rivolta verso il basso $\cap$

♥ Il valore assoluto di a si dice “apertura” perché è in relazione col fatto che la curvatura della parabola

- sia più “dolce” (valori di $|a|$ piccoli)
- o sia più accentuata (valori di $|a|$ grandi)

Si dimostra che l’ascissa del “vertice” (che possiamo provvisoriamente descrivere come il punto della parabola avente ordinata minima oppure massima, o anche come l’intersezione della parabola col proprio asse di simmetria) è calcolabile tramite la formula

$$♥ \quad x_V = -\frac{b}{2a}.$$

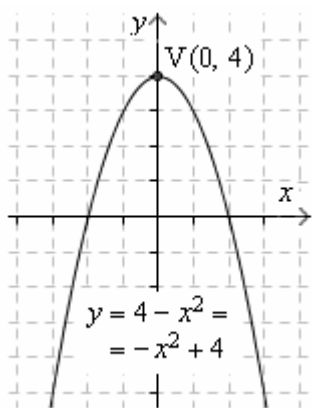
Trovata con questo calcolo l’ascissa del vertice, la rispettiva ordinata si potrà determinare facilmente: basterà semplicemente sostituire, nell’equazione della parabola, al posto di x il valore trovato.

Ad esempio, nel caso della parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$,

il calcolo fornisce: $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$ da cui successivamente $y_V = x_V^2 - 2x_V - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

♥ L’individuazione del vertice è la prima cosa che conviene fare, quando si vuole disegnare una parabola, come d’altronde il tracciamento dell’asse di simmetria, che è poi la retta verticale passante per il vertice, ossia la retta formata dai punti di ascissa $x = -\frac{b}{2a}$ (brevemente: la retta di equazione $x = -\frac{b}{2a}$).

x	$y = 4 - x^2$
-3	-5
-2	0
-1	3
$-\frac{1}{2}$	$4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$
0	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$
1	3
2	0
3	-5



Un ultimo esempio.

$y = 4 - x^2$ si può riscrivere come $y = -x^2 + 4$.

E' dunque $b = 0$, quindi anche $x_V = -\frac{b}{2a} = 0$.

Ma se il vertice ha ascissa 0, esso si troverà sull'asse delle y , che sarà perciò l'asse di simmetria per la curva.

D'altronde, che la curva fosse simmetrica rispetto all'asse y lo si poteva capire pure dal fatto che, non essendoci il termine contenente x ma solo il termine con x^2 e il termine noto, dando a x due valori opposti si ottiene sempre lo stesso valore di y !

9. FUNZIONI DELLA PROPORZIONALITA' INVERSA: IPERBOLI

Una funzione della forma $y = k/x$, con k costante, è detta “funzione della proporzionalità inversa”, perché **le due variabili in gioco, x e y , sono inversamente proporzionali**:

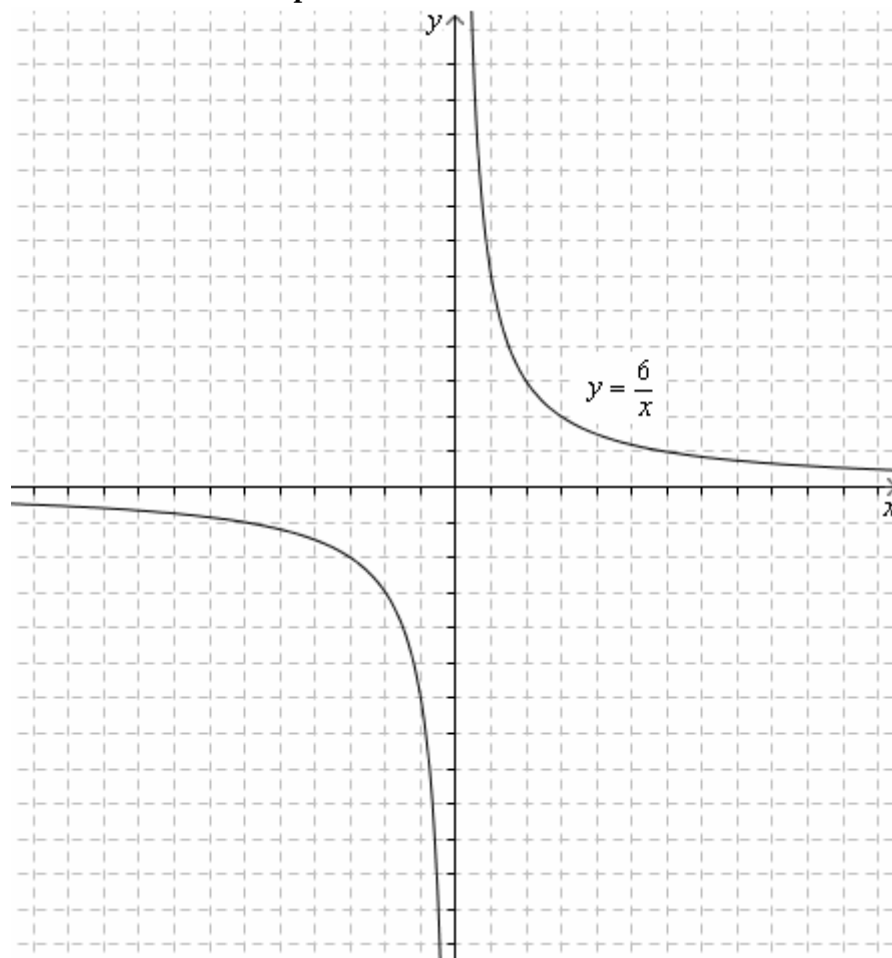
se x raddoppia, y si dimezza; se x triplica, y si riduce alla terza parte; ecc. ecc.

Tracciamo ad esempio il grafico della funzione $y = 6/x$.

Otterremo un'armoniosa curva in due rami, della quale una caratteristica che balza subito in evidenza è la simmetria “centrale”, dove il centro di simmetria è l'origine del riferimento cartesiano.

Si potrebbe dimostrare che si tratta di una “iperbole”.

x	$y = \frac{6}{x}$
-1000	-0,006
-12	-0,5
-6	-1
-5	-1,2
-4	-1,5
-3	-2
-2	-3
-1	-6
-0,5	-12
-0,1	-60
-0,001	-6000
0,001	6000
0,1	60
0,5	12
1	6
2	3
3	2
4	1,5
5	1,2
6	1
12	0,5
1000	0,006
1000000	0,000006



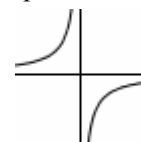
In questo esempio è $k > 0$ e la curva sta nel 1° e 3° quadrante; se invece fosse $k < 0$, come nei casi

$$y = -\frac{2}{x} = \frac{-2}{x}$$

oppure

$$y = -\frac{7}{4x} = \frac{-7}{4x},$$

la curva andrebbe ad occupare il 2° e 4° quadrante:



- ❑ Quando x diventa *grande grande* ($x = 1000, x = 1000000, \dots$), y diventa *piccola piccola*, “si schiaccia a zero”
- ❑ Quando x si avvicina a 0 da destra, ossia “per valori positivi”, la y corrispondente tende a $+\infty$
- ❑ Quando x si avvicina a 0 da sinistra, ossia “per valori negativi”, la y corrispondente tende a $-\infty$
- ❑ Quando x tende a $-\infty$, la y corrispondente tende a 0 dal basso, per valori negativi

Le **definizioni** rigorose di “parabola” e “iperbole” sono riportate in un bellissimo capitolo del Volume 2.

ESERCIZI

Traccia i grafici di:

a) $y = x^2 + 4x$
c) $y = -x^2$

b) $y = x^2 - x - 6$
d) $y = 3x^2 - 9$

e) $y = \frac{1}{10}x^2$

f) $y = \frac{4}{x}$

g) $y = -\frac{2}{x}$

h) $y = \frac{1}{x}$

10. RISOLUZIONE GRAFICA DI UN'EQUAZIONE (o di un semplice sistema)

Per risolvere graficamente un'equazione $f(x) = g(x)$

si rappresentano, in uno stesso riferimento cartesiano, le due funzioni $y = f(x)$; $y = g(x)$ e si vanno a ricercare quei valori di x per i quali la y corrispondente è la medesima.

In altre parole,

♥ si vanno a individuare i punti di intersezione fra le due curve $y = f(x)$, $y = g(x)$, e si prendono le ASCISSE di questi punti.

Tali ascisse sono le soluzioni dell'equazione data.

Di norma, la risoluzione grafica consente di determinare le soluzioni soltanto in modo approssimato.

$$2x - 4 = 5 - x$$

La retta in salita
è il grafico della funzione

$$y = 2x - 4$$

mentre quella in discesa
è il grafico della funzione

$$y = 5 - x.$$

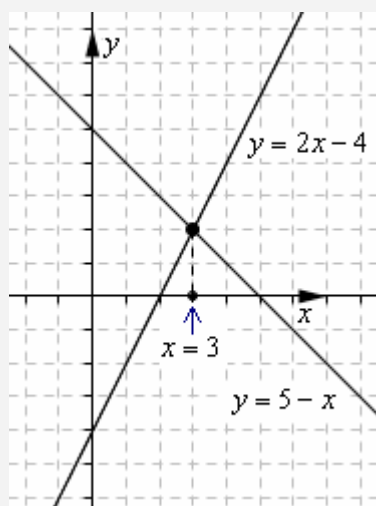
Per quale valore di x

Le due y sono uguali?

Per $x = 3$.

Infatti con $x = 3$ si ha,
sia per il 1° che il 2° membro,
 $y = 2$.

La soluzione di questa equazione
è dunque $x = 3$,
come la "classica" risoluzione algebrica
potrebbe immediatamente confermare.

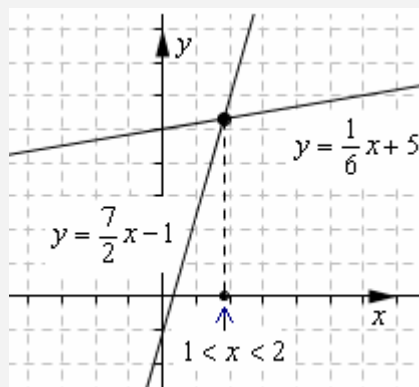


x	1° membro y	2° membro y
-2	-8	7
-1	-6	6
0	-4	5
1	-2	4
2	0	3
3	2	2
4	4	1
5	6	0
6	8	-1
7	10	-2

$$\frac{1}{6}x + 5 = \frac{7}{2}x - 1$$

Se tracciamo i grafici delle due rette
vediamo che si intersecano
nel 1° quadrante,
in un punto la cui ascissa è
leggermente inferiore a 2.

Possiamo dunque dire che
la soluzione di questa equazione
è un valore compreso fra 1 e 2:
 $1 < x < 2$



La risoluzione algebrica
in effetti ci dà:

$$\frac{1}{6}x + 5 = \frac{7}{2}x - 1$$

$$x + 30 = 21x - 6$$

$$-20x = -36$$

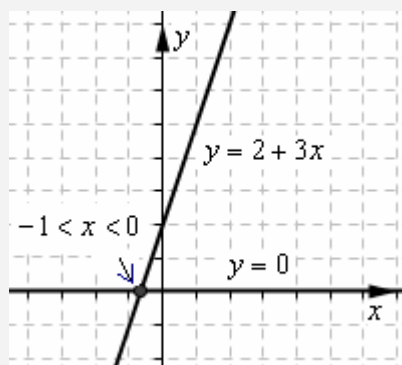
$$x = \frac{36}{20} = \frac{9}{5} = 1,8$$

$$2 + 3x = 0$$

La funzione a 1° membro
 $y = 2 + 3x$
ha come grafico
una retta in salita.

La funzione $y = 0$
(2° membro)

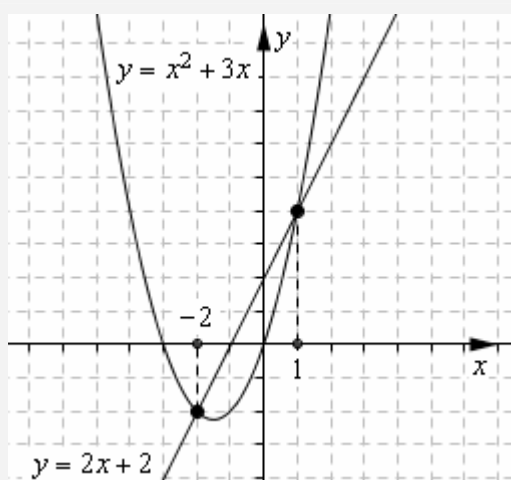
ha come grafico
una retta orizzontale,
che coincide
con l'asse delle ascisse.



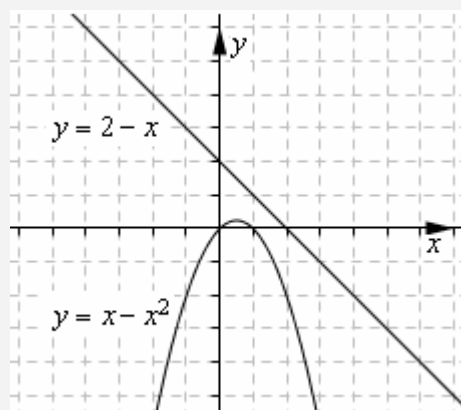
La soluzione è
l'ascissa del punto
in cui i due grafici
si tagliano;
vediamo che si tratta
di un valore compreso
fra -1 e 0: $-1 < x < 0$.

La risoluzione algebrica
ci fornisce

$$x = -\frac{2}{3}$$



$x^2 + 3x = 2x + 2$: le soluzioni sono $x = -2$, $x = 1$



$$x - x^2 = 2 - x$$

Le due curve non si intersecano:
l'equazione è IMPOSSIBILE.

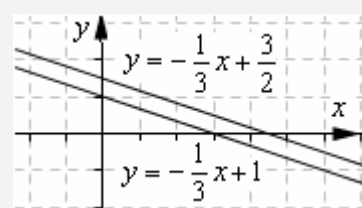
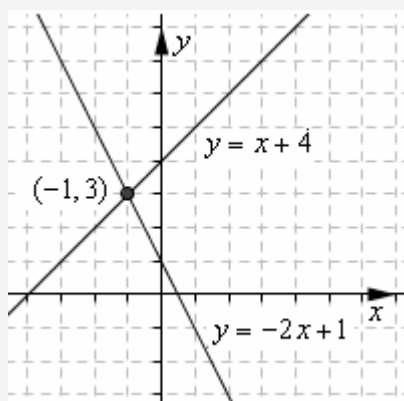
Questa figura risolve il SISTEMA IN DUE INCOGNITE

$$\begin{cases} x - y = -4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Lo si scrive nella forma

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

e si tracciano
i grafici delle due rette.
La soluzione del sistema
è la coppia (x, y)
delle coordinate
del punto di intersezione.



Il sistema

$$\begin{cases} 2x + 6y - 9 = 0 \\ x + 3y - 3 = 0 \end{cases} \text{ ossia } \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$$

è IMPOSSIBILE (le rette sono parallele).

ESERCIZI

1) Risolvi graficamente le seguenti equazioni,

poi controlla la correttezza delle tue conclusioni risolvendo anche algebricamente:

a) $x - 1 = 2x + 3$ b) $-x + 5 = 2x - 1$ c) $4x - 5 = -3x - 2$ d) $\frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{3}x - 1$

e) $4x + 5 = 3 - 5x$ f) $\frac{3}{8}x + 1 = 2$ g) $-\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} = x$ h) $-2x + 7 = -4x$ i) $3x = 3x + 2$

2) Risolvi graficamente le seguenti equazioni (cosa puoi notare?):

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ b) $x^2 - 4x = -3$ c) $x^2 = 4x - 3$ d) $-x^2 = 3 - 4x$ e) $4x = x^2 + 3$

3) Risolvi graficamente le seguenti equazioni.

a) $x^2 + 2x - 4 = 4x - 1$ b) $2x^2 - 1 = x$ c) $x^2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x$ d) $x^2 = (x - 1)^2$ e) $\frac{x^2}{2} = 3 - x^2$

4) Risolvi graficamente le seguenti equazioni.

a) $\frac{4}{x} = x + 3$ b) $\frac{1}{4}x^2 + 1 = \frac{6}{x}$ c) $-\frac{6}{x} = -x + 2$ d) $2x = x^2 + 4$ e) $x + 2 = -\frac{1}{x}$

5) Risolvi graficamente, poi anche algebricamente, i seguenti sistemi di 1° grado in 2 incognite.

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ y = -x - 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y - 12 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = 3x \\ x + y = 0 \end{cases}$

RISPOSTE

1) Controllo tramite risoluzione algebrica 2) Le 5 equazioni sono tutte equivalenti. Soluzioni: $x = 1$, $x = 3$

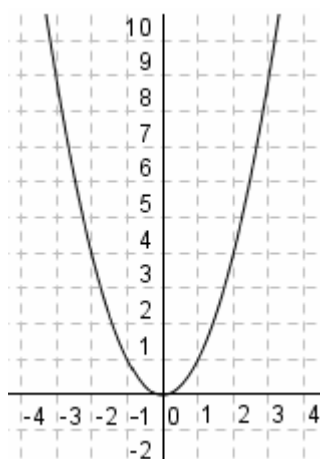
3) a) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ b) $x_1 = 1$, $-1 < x_2 < 0$ c) $x_1 = -1$, $1 < x_2 < 2$ d) $0 < x < 1$ e) $-2 < x_1 < -1$, $1 < x_2 < 2$

4) a) $x_1 = 1$, $x_2 = -4$ b) $2 < x < 3$ c) $-2 < x_1 < -1$, $3 < x_2 < 4$ d) Imposs. e) $x = -1$ 5) Controlla algebricamente

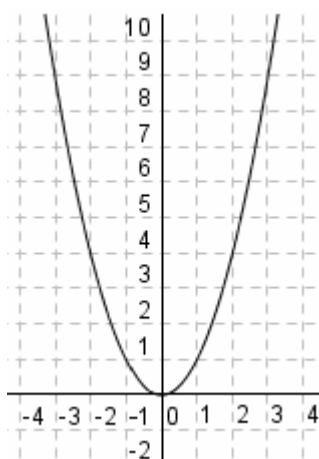
Altri ESERCIZI sulle risoluzioni grafiche

- 1) Non offenderti se trovi la domanda banale:
per stabilire se il valore $x = -5$ è soluzione dell'equazione $2x^2 + 7x - 15 = 0$ occorre risolvere l'equazione?
- 2) I grafici della figura sottostante rappresentano tutti la funzione $y = x^2$. Utilizzali per risolvere graficamente le quattro equazioni proposte; verificherai che le loro soluzioni sono tutte intere. Per ogni soluzione trovata, controlla che sia esatta sostituendola nell'equazione considerata.

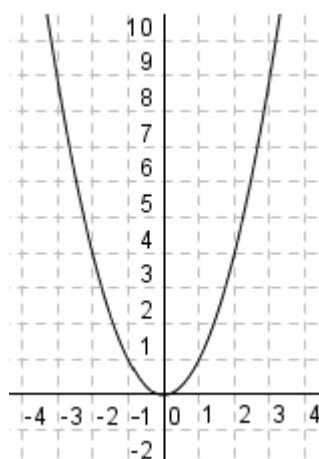
a) $x^2 = 2x$



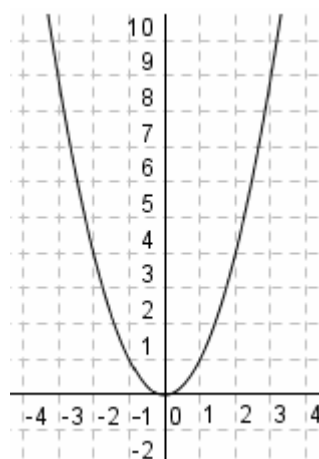
b) $x^2 = 2 - x$



c) $x^2 = (x+2)^2$



d) $x^2 = 8 - x^2$



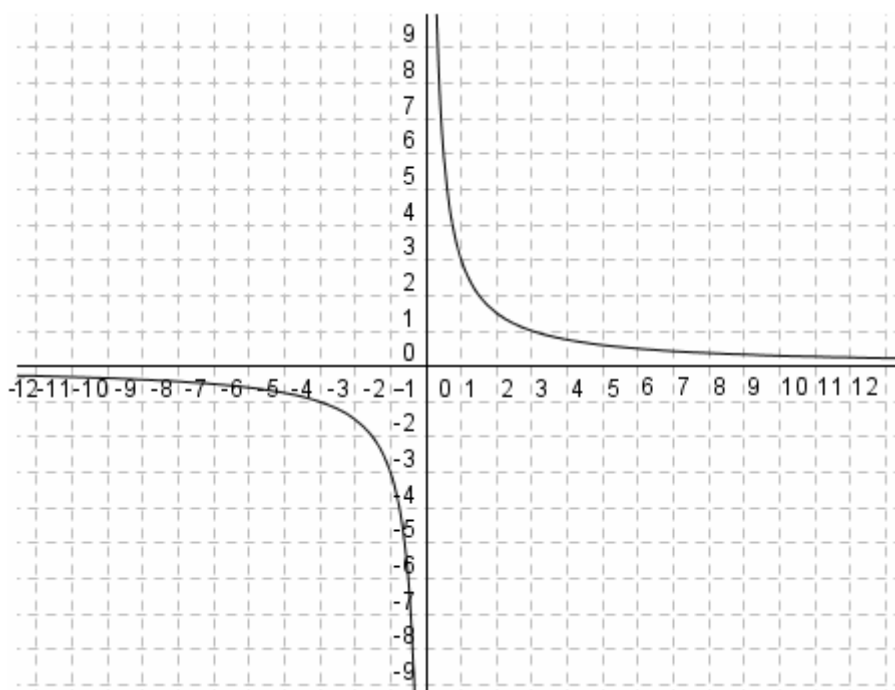
- 3) In figura
è rappresentato
il grafico della funzione

$$y = \frac{3}{x}.$$

Servitene
per risolvere graficamente
l'equazione

$$\frac{3}{x} = 7 - 2x$$

Vedrai che fra le soluzioni,
una è intera;
sostituiscila nell'equazione,
per controllare
che si ottiene
un'uguaglianza vera.

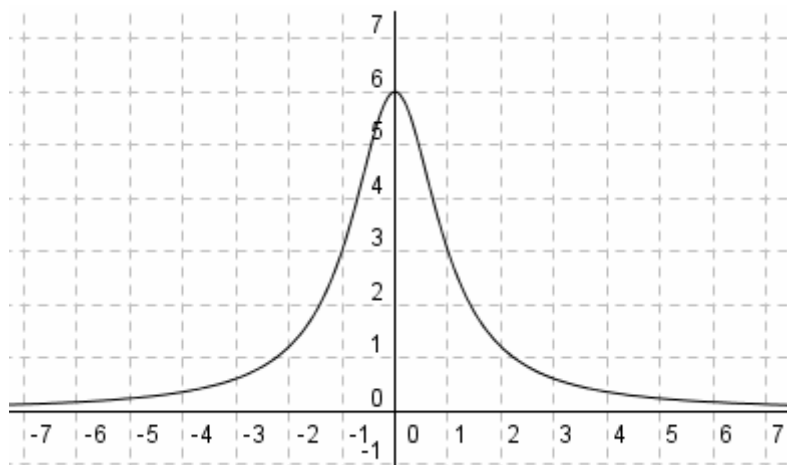


- 4) Nella figura
è rappresentato
il grafico della funzione

$$y = \frac{6}{1+x^2}.$$

Servitene
per risolvere graficamente
l'equazione

$$\frac{6}{1+x^2} = x + 4.$$



- 5) Nella figura a fianco è rappresentato il grafico della funzione

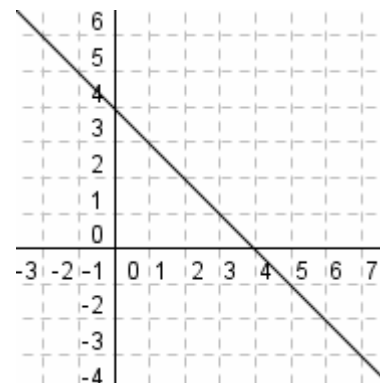
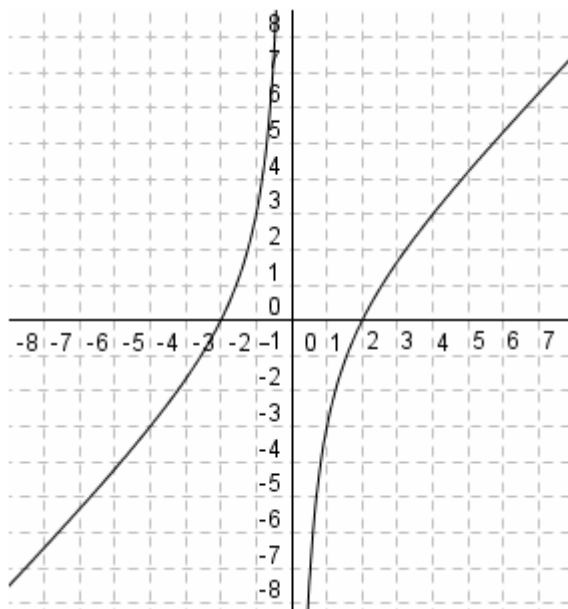
$$y = \frac{x^2 - 4}{x}.$$

- ❑ Qual è il dominio di tale funzione?

- ❑ Verifica che l'equazione

$$\frac{x^2 - 4}{x} = 1 + \frac{1}{2}x$$

ha due soluzioni intere. Sostituiscile nell'equazione per verificarne la correttezza.



- 6) Il grafico riporta la retta $y = 4 - x$. Utilizzalo per risolvere graficamente il sistema
- $$\begin{cases} y = 4 - x \\ x - 5y + 5 = 0 \end{cases}$$

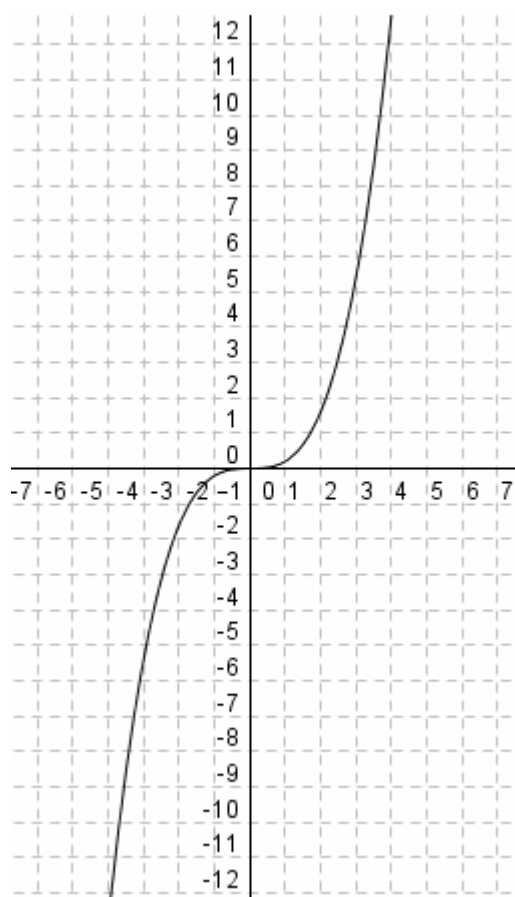
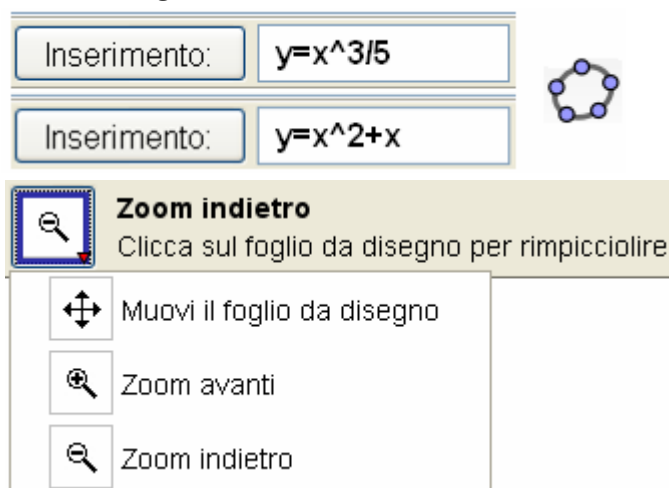
- 7) Nella figura qui a destra è rappresentato il grafico della funzione

$$y = \frac{x^3}{5}.$$

- ❑ Servitene per risolvere graficamente l'equazione

$$\frac{x^3}{5} = x^2 + x.$$

- ❑ Secondo te, oltre alle soluzioni che la figura può evidenziare, ce n'è anche un'altra?
- ❑ Controlla poi la risposta a quest'ultima domanda facendo la figura con GeoGebra e "zoomandola".



RISPOSTE

- 1) Nel modo più assoluto, NO! Basta sostituire quel valore al posto di x nell'equazione, per controllare se l'uguaglianza così ottenuta è vera o falsa. Nel nostro caso, si vede che è vera, quindi -5 è soluzione.
- 2) a) $x = 0, x = 2$ b) $x = -2, x = 1$ c) $x = -1$ d) $x = -2, x = 2$
- 3) $0 < x_1 < 1, x_2 = 3$ 4) $-4 < x_1 < -3, x_2 = -1, 0 < x_3 < 1$ 5) Il dominio è $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. $x_1 = -2, x_2 = 4$
- 6) Si trova una soluzione $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$, con $2 < a < 3, 1 < b < 2$. Risolvendo algebricamente si ottiene $\begin{cases} x = 5/2 \\ y = 3/2 \end{cases}$.
- 7) $-1 < x_1 < 0, x_2 = 0$; senz'altro c'è poi una terza soluzione positiva! Infatti, al crescere di x , la quantità $y = \frac{x^3}{5}$ a un certo punto comincia a crescere più rapidamente della quantità $y = x^2 + x$.

FUNZIONI LINEARI E PROBLEMI REALI
CONFRONTARE COSTI E OPPORTUNITÀ

- A) Il **Circolo Anziani** del paese sta organizzando per i suoi iscritti una **gita al mare**. Il viaggio potrà essere effettuato in **autobus** oppure in **treno**: del tutto improponibile l'idea di una carovana di auto. Se si sceglie l'autobus, occorrerà pagare alla compagnia di trasporti un costo fisso di 240 € più 4 € per ogni viaggiatore (ovviamente, il totale della spesa verrà poi suddiviso a carico dei partecipanti); nel caso del treno, invece, ogni persona spenderebbe 10 euro.

Quale sarà la scelta economicamente più vantaggiosa?

... Si capisce che la risposta dipende dal numero di persone che andranno in gita!

Ragioniamo, allora. La soluzione "autobus" ha un costo totale c , in euro, dato dalla formula

$$c = 240 + 4x$$

dove x è il numero dei partecipanti. Per quanto riguarda la soluzione "treno" la formula è invece

$$c = 10x$$

Facciamo un grafico che illustri la situazione:

x , numero dei partecipanti, è la nostra variabile indipendente;

c , costo totale in euro, fa da variabile dipendente (insomma, c è la nostra "y").

Cerchiamo di capire, ancora prima di tracciarli, che "forma" avranno i grafici delle due funzioni

I) $c = 240 + 4x$

II) $c = 10x$

Si tratta di funzioni di 1° grado (sappiamo che esse vengon dette "lineari"), nel senso che a 2° membro x compare a 1° grado (= con esponente 1 sottinteso, non quindi al quadrato, o sotto radice, o a denominatore ...) perciò il grafico in entrambi i casi sarà una **retta**.

Che caratteristiche avrà, nei due casi, questa retta?

Beh, per quanto riguarda la funzione I), ossia $c = 240 + 4x$, che possiamo pure riscrivere come

$$c = 4x + 240,$$

il moltiplicatore di x (che viene chiamato, come sappiamo, "coefficiente angolare") è 4,

e il termine noto (= "ordinata all'origine", ossia ordinata che si ha quando l'ascissa vale 0) è 240.

Avremo quindi una retta in salita (salita perché il coeff. ang. è > 0) che passerà per il punto $(0, 240)$.

Nel caso della funzione II), ossia $c = 10x$, il coeff. angolare è più grande perché vale 10 e non più 4: bene, vuol dire che questa retta presenta una salita più ripida della precedente.

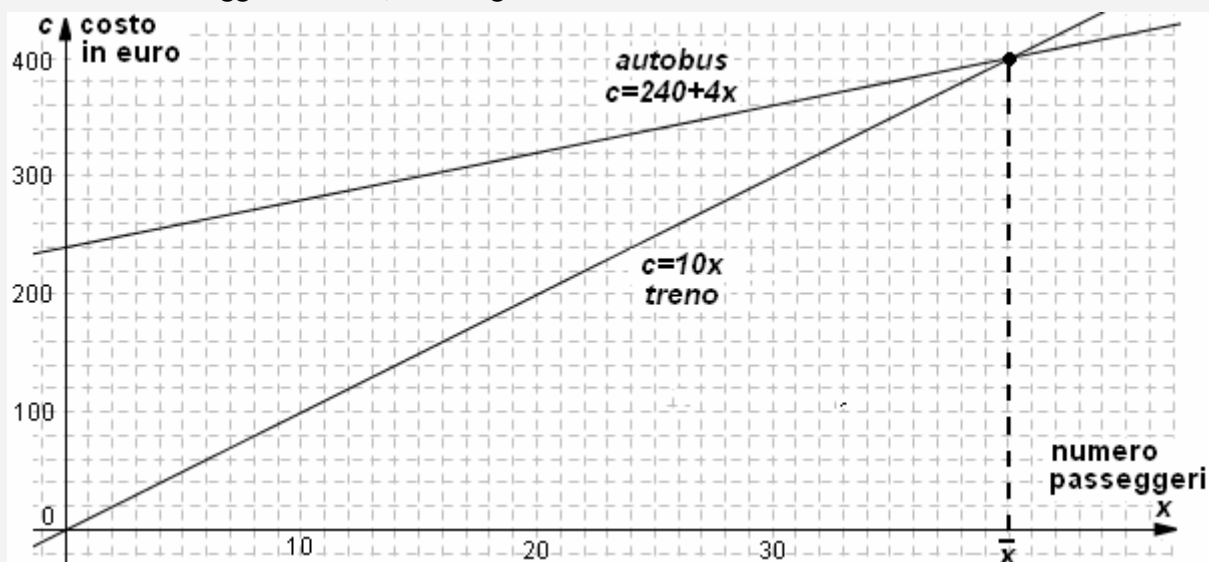
In compenso questa retta "si trova inizialmente più in basso",

perché l'ordinata all'origine è 0 da cui il passaggio per $(0, 0)$ ossia per l'origine.

Ultima osservazione, prima di tracciare il grafico:

ci aspettiamo ordinate molto alte per cui non è per niente logico utilizzare un sistema di riferimento cartesiano "monometrico", cioè con una stessa unità di misura tanto in orizzontale che in verticale.

1 quadretto per indicare 20 € in verticale (e 1 quadretto per indicare 1 passeggero in orizzontale) sembra una scelta saggia. E allora, via col grafico!



Dall'osservazione del grafico emerge ciò che d'altronde si poteva già intuire ...

La scelta del treno è economicamente conveniente se le persone sono poche; oltre un certo numero $\bar{x}$ (leggi: "x segnato") di persone, la retta $c = 240 + 4x$ passa al di sotto della retta $c = 10x$, quindi oltre un certo numero di persone il costo totale, dato dal valore di c che corrisponde al numero x di persone considerato, sarà più basso, sarà minore, per il viaggio in autobus.

Quanto vale $\bar{x}$? Potremmo metterci a contare il numero di quadretti che separano, in orizzontale, l'origine dal punto in cui le due rette si tagliano ... e d'altra parte ...

♥ ... il punto di intersezione delle due rette ha un'ascissa che si può determinare domandandosi per quale valore di x l'ordinata y su entrambe le rette è la medesima, cioè impostando l'equazione $240 + 4x = 10x$; $-6x = -240$; $x = 40$

Il problema è risolto: per 40 partecipanti, si spende la stessa cifra sia viaggiando in autobus che in treno, per meno di 40 conviene il treno, per più di 40 l'autobus.

ESERCIZI (risposte a pag. 466)

- 1) L'idraulico Giuseppe Tubi, per le riparazioni, si fa pagare 20 euro per la chiamata, più 30 euro per ogni ora di lavoro. Il suo concorrente Luigi Valvola, invece, richiede 30 euro per la chiamata, ma 26 euro all'ora soltanto per il lavoro.

Attraverso un grafico che porti in ascissa le ore di lavoro, e in ordinata la spesa, confronta le due tariffazioni e stabilisci

- quali sono le equazioni delle due rette presenti nel grafico
- per quante ore si spende la medesima cifra sia con Tubi che con Valvola
- quant'è la spesa in questo caso
- per quante ore di intervento si risparmia chiamando Valvola.



- 2) I tassisti di uno scalo aeroportuale hanno cambiato regolamento. Se prima una corsa aveva un costo fisso di 5 euro, più 80 centesimi al kilometro, ora il costo fisso è stato ridotto a 3 €, ma in compenso ogni km percorso costa 20 centesimi più di prima. Fino a quanti km la nuova tariffazione è più conveniente? Traccia un grafico comparativo, che porti in ascissa i km di una corsa e in ordinata il rispettivo costo "prima" e "dopo" la modifica regolamentare.
- 3) Un'azienda necessita di un prestito (per 1 anno) e deve valutare le seguenti due proposte.
- ❑ Banca A: costi assicurativi 1200 euro; interessi da pagare, il 4,5% sulla somma prestata
 - ❑ Banca B: 800 euro di costi assicurativi, interesse del 5% sulla somma prestata.
- Ora, se sia più conveniente il piano A o il piano B, dipende dalla quantità di denaro richiesta ... Sapresti fare un'analisi comparativa con l'aiuto di un grafico?

COSTRUIRE E INVERTIRE FORMULE

- B) Per misurare le **temperature**, in alternativa alla scala **Celsius**, è tuttora utilizzata (specie negli USA) un'altra scala detta **Fahrenheit**. La tabella qui a fianco illustra la connessione fra le due scale. →

Si domanda: qual è la **FORMULA** che fa passare da C a F?

Si può cercare di determinarla con metodi vari, fra i quali il seguente. Se noi immaginiamo di rappresentare la relazione fra il valore in gradi Celsius e quello in gradi Fahrenheit di una stessa temperatura, potremmo disporre in ascissa i valori C e in ordinata quelli di F (figura).

Ora, il grafico che otterremmo sarebbe senz'altro rettilineo, perché a incrementi uguali della temperatura misurata nella scala C devono evidentemente corrispondere incrementi uguali del valore in gradi F, e questo è compatibile soltanto con una forma rettilinea del grafico.

Insomma, la relazione fra C e F dev'essere "lineare", ossia del tipo

$$F = mC + q.$$

Ma quanto valgono m e q ?

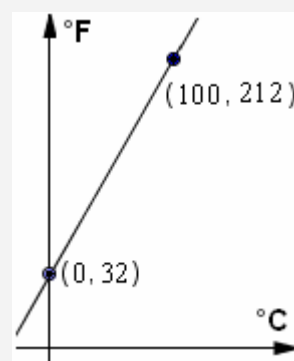
Ponendo le condizioni di appartenenza dei punti (0, 32) e (100, 212)

otteniamo $\begin{cases} 32 = m \cdot 0 + q \\ 212 = m \cdot 100 + q \end{cases}$ da cui $m = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}$, $q = 32$. La formula cercata è dunque $F = \frac{9}{5}C + 32$.

... E se volessimo passare invece da F a C?

Basterà invertire la formula, ad esempio procedendo così: $F = \frac{9}{5}C + 32 \rightarrow \frac{9}{5}C = F - 32 \rightarrow C = \frac{5}{9}(F - 32)$

	°C	°F
Congelamento dell'acqua	0	32
Ebollizione dell'acqua	100	212



ESERCIZI (risposte a pag. 466)

- 4) Affittare un'auto per 1 giorno ha un costo dato da un importo fisso + una cifra per ogni km percorso. Se lunedì ho pagato 39 euro facendo 36 km e martedì 41,5 euro per 46 km, quant'è la tariffa fissa? E qual è la legge lineare che lega i km fatti al costo del noleggio?

- 5) Calogero, emigrato in un paese del Nord Europa, si è abituato a viaggiare preferibilmente in treno, data anche la puntualità e la pulizia dei trasporti ferroviari locali, nonché l'educazione degli utenti, cortesi e non chiososi. In quanto alle tariffe, il nostro connazionale osserva che, a quanto pare, dovrebbero essere determinate partendo da una quota fissa a cui viene addizionata una parte proporzionale al numero di km del tragitto. La tabella a fianco mostra qualche esempio di tariffazione. In effetti, la congettura di Calogero è corretta.

km	costo in euro
35	5,8
50	7
90	10,2
115	12,2
402	35,16

Quanto vale la tariffa fissa? Qual è la formula che dà il costo c del biglietto a partire dal numero n di km?

Da "Algebra and Trigonometry", di Keedy-Bittinger-Smith-Orfan:

- 6) The cost of a taxi ride for 2 miles in Eastridge is \$ 1.75.

For 3 miles the cost is \$ 2.00.

- Fit a linear function to the data points
- Use the function to find the cost of a 7-mile ride.

- 7) The value of a copying machine is \$ 5200 when it is purchased.

After 2 years its value is \$ 4225.

Find its value after 8 years (assuming a linear function fits the situation).

- 8) Si può formulare, a partire dalla lunghezza di un osso, una stima precisa dell'altezza di un individuo. Ad es. si osserva che, per un maschio europeo, vale con ottima approssimazione la relazione *lineare*:

Lunghezza L in cm della tibia	36	37	38	39	40	41	42
Altezza H in cm dell'individuo	169,05	171,47	173,89	176,31	178,73	181,15	183,57

- Si chiede di determinare la formula $H = f(L)$.
- Sapendo che per una *femmina africana* la relazione è $H = 2,45 \cdot L + 72,56$ stabilire qual è la lunghezza della tibia di una donna africana alta 170 cm.

- 9) Una vasca contiene 1000 litri d'acqua. Ma viene praticato in essa un foro dal quale fuoriescono 0,4 litri ogni secondo. Scrivi la formula che esprime il numero di litri presenti nella vasca dopo t secondi dall'apertura del foro. Inverti la formula, risolvendola rispetto a t . Quanti litri conterrà la vasca dopo un quarto d'ora? Quanti secondi devono passare affinché il contenuto della vasca dimezzi?

- 10) A quanti gradi Fahrenheit corrispondono 30 gradi Celsius? A quanti gradi C corrispondono 30 gradi F? Qual è quella temperatura che è espressa dallo stesso numero, sia che la si misuri in gradi Celsius che in gradi Fahrenheit?

- 11) In gergo bancario, si chiama "montante" la somma del capitale iniziale più l'interesse fino a quel momento maturato. Se indichiamo con:

M il montante, C il capitale iniziale, i la percentuale di interesse, t il tempo in frazioni di anno, la formula che lega queste quantità è

$$M = C(1 + i \cdot t)$$

Ad esempio, un capitale di 20000 euro ($C = 20000$), all'interesse del 5% ($i = 0,05$), depositato per 45 giorni ($t = 45/365$), produce un montante di euro 20123,29 ($M = 20123,29$).

- Risolvi la formula $M = C(1 + i \cdot t)$ rispetto a: C ; t .
- Se il montante è di euro 11827,5 dopo 9 mesi di investimento e l'interesse è del 5%, qual era il capitale iniziale? (Supponiamo qui 1 mese = $1/12$ di anno)
- Se in 3 mesi un capitale di 15000 € frutta un interesse di 67,5 euro, quant'è il tasso di interesse?

Da www.analyzemath.com:

- 12) The cost of producing x tools by a company is given by $C(x) = 1200x + 5500$ (in \$)

- What is the cost of 100 tools?
- What is the cost of 101 tools?
- Find the difference between the cost of 101 and 100 tools.
- Find the slope of the graph of C (*slope* = *pendenza*, *coefficiente angolare*)
- Interpret the slope.



RICONOSCERE SE UN FENOMENO E' LINEARE

C) (spunto preso da “Algebra and Trigonometry”, di Keedy-Bittinger-Smith-Orfan)

Si sa che i **grilli** friniscono più rapidamente quando la **temperatura** è più alta (“Crickets are known to chirp faster when the temperature is higher”).

Ecco alcuni conteggi effettuati a temperature differenti:

Temperatura in °C	6	8	10	15	20
N° di “chirps” al minuto	11	29	47	75	107



Si domanda:

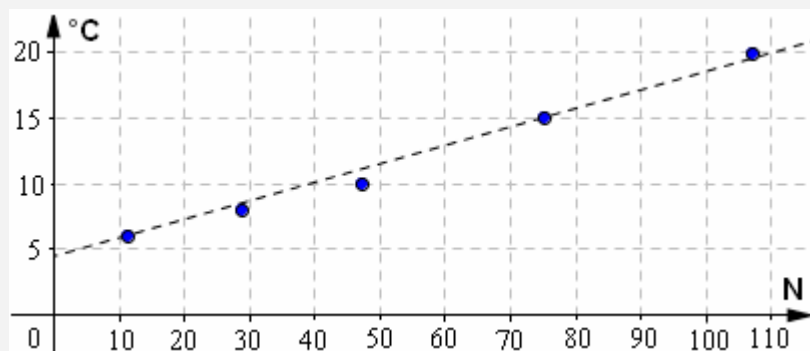
- La relazione temperatura-numero di “**chirp**” al minuto è “lineare”?
- In quanti °C possiamo stimare la temperatura se osserviamo che i grilli friniscono 120 volte al minuto?

Se facciamo un grafico, vediamo che in effetti i punti sono, pressappoco, allineati. La retta che passa per il 1° e il 4° dei 5 punti sembra approssimare abbastanza bene la relazione di N con °C.

Tale retta, che passa per (11, 6) e (75, 15), ha equazione (verificalo!)

$$y = \frac{9}{64}x + \frac{285}{64} \quad \left(^\circ\text{C} = \frac{9}{64}N + \frac{285}{64} \right)$$

che per N=120 ci dà circa 21,3 °C.



NOTA. - E' chiaro che la parte b) ha un senso perché il valore N = 120 è vicino a quegli altri; una richiesta simile per N = 300, ad esempio, avrebbe avuto ben poco significato, coi dati a disposizione.

ESERCIZI (risposte a pag. 466)

[Per tracciare i grafici, potrebbe essere comodo servirsi di un foglio elettronico ...]

- 13) Una barra di ferro che a 20 °C misurava metri 1,5 si è allungata, col riscaldamento, come illustrato dalla tabella seguente.

Temperatura T in °C	20	21	22	23	24	25
Lunghezza L della barra in m	1,5	1,500018	1,500036	1,500054	1,500072	1,500090

- La dipendenza della lunghezza dalla temperatura è lineare? Evidentemente, non è indispensabile fare un grafico, per rispondere ... Cosa basta calcolare?
- Trova la lunghezza che la barra avrebbe a 28 °C e a 18 °C (supposto che la legge che lega T a L non muti).

- 14) Record mondiali di salto in alto dal 1960 al 1993.

Domanda: la relazione anno-record può considerarsi lineare?

1960	1963	1970	1976	1980	1985	1989	1993
222 cm	228	229	232	236	241	244	245

- 15) La velocità del suono nell'aria dipende dalla temperatura di questa.

La seguente tabella riassume i risultati di alcune misurazioni:

Temperatura T in °C	-10	-5	0	+5	+10	+15	+20	+25	+30
Velocità V del suono in m/s	325,4	328,5	331,5	334,5	337,5	340,5	343,4	346,3	349,2

Domanda:

in base a questi dati, la dipendenza della velocità dalla temperatura si può considerare lineare?

- 16) Misurando lunghezza e larghezza alcune di foglie staccate da una medesima pianta, si sono raccolti i dati seguenti:

Lunghezza (cm)	0,9	1,2	1,6	2,1	2,5	2,9	3,6
Larghezza (cm)	0,2	0,4	0,7	1,1	1,5	2,1	3,2

La relazione fra lunghezza e larghezza è lineare?

MOTI UNIFORMI

D) Un **ascensore** è in fase di **discesa**, a **velocità costante**, in un alto grattacielo.

Se all'istante 0 si trova all'altezza di 75 m dal piano terra e all'istante 8 secondi all'altezza 63 m, determina la legge del moto ossia la formula che mette in relazione l'altezza h col tempo t .

Allora ... quando la velocità è costante, in tempi uguali vengono percorsi spazi uguali ...
e se raddoppia il tempo di percorrenza, raddoppia anche lo spazio percorso ...

Insomma, la differenza dei tempi segnati dal cronometro

è proporzionale alla differenza degli spazi percorsi in questi tempi: $s_2 - s_1 = k(t_2 - t_1)$.

La costante di proporzionalità k fra tempi e spazi è dunque tale che $k = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

e non è altro che la velocità v del moto (spazio percorso/tempo impiegato a percorrerlo).

Indichiamo con s_0 la posizione iniziale, quella che si ha all'istante t_0 in cui pensiamo di far scattare il cronometro, e con s la posizione al generico istante t :

allora la relazione $s_2 - s_1 = v(t_2 - t_1)$ diventa $s - s_0 = v(t - t_0)$ quindi $s = s_0 + v(t - t_0)$.

Perciò un moto uniforme (= a velocità costante) è sempre esprimibile tramite una legge della forma $s = s_0 + v(t - t_0)$, con s_0 posizione all'istante iniziale t_0 , s la posizione al generico istante t .

Si tratta di una relazione lineare (= di 1° grado), il cui grafico in un sistema di riferimento (t, s) è una retta.

Se poi supponiamo $t_0 = 0$ (= facciamo scattare il cronometro all'istante in cui il movimento ha inizio, o almeno ha inizio la sua osservazione), la relazione diventa $s = s_0 + vt$, che è poi la forma più utilizzata.

Osserviamo che nella retta $s = s_0 + vt$, la velocità v fa da coefficiente angolare.

Un moto uniforme (= a velocità costante) ha equazione della forma $s = s_0 + vt$ dove v (coefficiente angolare) è la velocità costante, s_0 è la posizione all'istante $t = 0$.

I moti a velocità costante hanno quindi un'equazione "lineare" $y = ax + b$, il cui grafico è una retta che ha come coefficiente angolare la velocità del moto.

E ritorniamo ora al nostro bravo ascensore.

La legge del moto richiesta sarà della forma $s = s_0 + vt$, dove restano da determinare i valori di v e di s_0 .
 s_0 è subito determinato perché sappiamo che è la posizione dell'oggetto che si muove, all'istante $t = 0$,
e nel nostro caso il testo del problema ci dice che è $s_0 = 75$.

v può essere determinata facendo il calcolo $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{63 - 75}{8 - 0} = \frac{-12}{8} = -1,5$ da cui: $s = 75 - 1,5t$

Anche: $s = s_0 + vt$ con $s_0 = 75$, quindi $s = 75 + vt$; ma con $t = 8$ è $s = 63$, quindi $63 = 75 + 8v \rightarrow v = -1,5$

ESERCIZI (risposte a pag. 466-467)

17) Si va al mare con tutta la famiglia, a velocità costante, senza soste.

Dopo 45' siamo al km 75 della lunga strada statale, dopo 80' siamo al km 124.

E all'inizio del viaggio, in quale posizione ci trovavamo sulla statale?

18) Una formica si muove lungo una *number line* a velocità costante.

Se dopo 7 secondi si trova in corrispondenza del punto di ascissa 0,6 e dopo 11 sec. sull'ascissa 7,8 determina la legge del moto (= la relazione che lega l'ascissa x al tempo t), e la velocità dello stesso.

Dove si trovava la formichina all'istante 0? A che istante avviene l'attraversamento dell'origine?

19) Un podista si allena lungo una strada rettilinea; dopo 3' dalla partenza ha percorso 780 m.

La tabella ne mostra la distanza, dal punto di partenza, al variare del tempo.

a) Il moto può considerarsi uniforme?

b) Se ti domando a che distanza si presume si possa trovare l'atleta, dal punto di partenza, quando il cronometro segnerà 18 minuti, sapresti indicare due modi diversi per trovare la risposta corretta?

c) A quale quantità corrisponde il coeff. angolare della retta che, approssimativamente, costituisce il diagramma tempo - spazio in un riferimento cartesiano?



min	metri
3	780
4	1050
5	1300
6	1560
7	1820
8	2080
9	2350
10	2610

20) Aldo e Bruno giocano alle Olimpiadi, e la prossima gara sarà sui 100 metri piani.

Ora Aldo, essendo velocissimo, nella sfida con Bruno gli concede un doppio vantaggio:

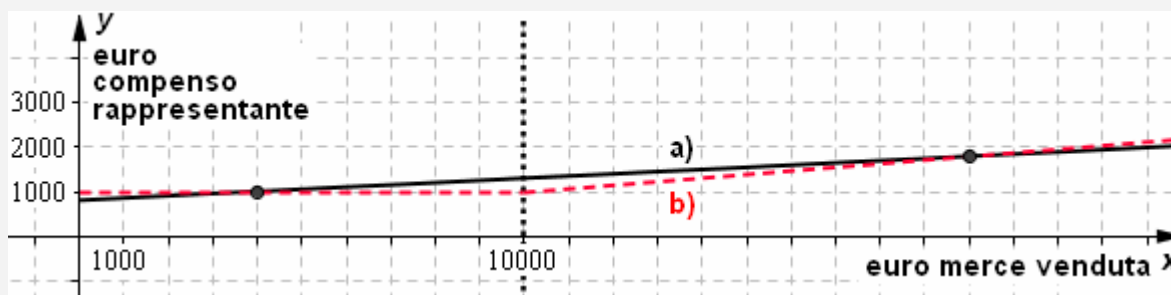
Bruno partirà 5 metri avanti, e 1 secondo prima.

Sapendo che Aldo è in grado di sviluppare una velocità media di 8 metri al secondo, e Bruno di 7 m/s, traccia un diagramma che dia le posizioni dei due istante per istante, scrivi le equazioni tempo-spazio dei due moti, e stabilisci chi, in base ai dati forniti, dovrebbe vincere la gara.

FUNZIONI LINEARI DEFINITE “A TRATTI” O “PER INTERVALLI”

- E) Una ditta offre a un **rappresentante** di commercio **due possibilità di remunerazione mensile**:
- a) un fisso di 800 euro, più il 5% sui ricavi delle vendite;
 - b) un fisso di 1000 euro, più l'8% sulle sole vendite a partire da 10000 euro in su.

Traccia un **diagramma** a partire dal quale egli possa scegliere **quale proposta gli conviene di più**, in base all'ammontare delle vendite che egli ipotizza di poter mediamente realizzare.



Sia in ascissa che in ordinata, 1 quadretto rappresenta 1000 euro.

In ascissa, si tratta di “euro x di merce venduta”, in ordinata, di “euro y guadagnati dal rappresentante”.

La linea continua rappresenta la proposta a): $y = 800 + \frac{5}{100}x$;

la tratteggiata rappresenta la b): $y = 1000$ per $0 \leq x \leq 10000$, $y = 1000 + \frac{8}{100}(x - 10000)$ per $x \geq 10000$

Si può osservare che la proposta a) è economicamente più vantaggiosa, per il rappresentante, se egli ritiene di poter “piazzare” di norma, ogni mese, da 4000 a 20000 euro di merce.

Se invece il nostro rappresentante pensa di essere in grado, quasi sempre, di vendere in un mese più di 20000 € di merce, diventa per lui più conveniente la proposta b).

ESERCIZI (risposte a pag. 467)

- 21) (di “riscaldamento”)

Traccia il grafico della funzione”: $y = f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 3 & \text{se } 2 < x \leq 4 \\ x-1 & \text{se } 4 \leq x < 5 \\ 24-4x & \text{se } 5 \leq x \leq 6 \end{cases}$ e risolvi l'equazione $f(x) = 2$

- 22) Una stamperia realizza dei biglietti da visita su cartoncino, ad un prezzo che dipende dal numero x di biglietti che si desiderano richiedere, secondo la formula seguente, dove p è espresso in euro:

$$p = \begin{cases} 10 + 0,05x & \text{con } x \leq 200 \\ 20 + 0,04(x - 200) & \text{con } 200 < x < 500 \\ 32 + 0,03(x - 500) & \text{con } x \geq 500 \end{cases}$$

- a) Traccia il grafico di questa funzione
- b) Determina quanti biglietti si possono stampare spendendo 50 euro

- 23) Una casa per le vacanze può essere affittata a 40 euro al giorno, oppure, in alternativa, a 50 euro per ciascuno dei primi 10 giorni e 35 euro per ciascuno dei giorni successivi al decimo.

Le espressioni algebriche delle due offerte sono: (1) $p = 40x$; (2) $p = \begin{cases} 50x & \text{con } x \leq 10 \\ \dots + 35 \cdot (\dots) & \text{con } x > 10 \end{cases}$

- a) Riempi i puntini
- b) rappresenta graficamente le due offerte
- c) stabilisci oltre quanti giorni conviene optare per la seconda.

- 24) In una nazione, la tassa sugli impianti balneari nelle spiagge ha subito una modifica.

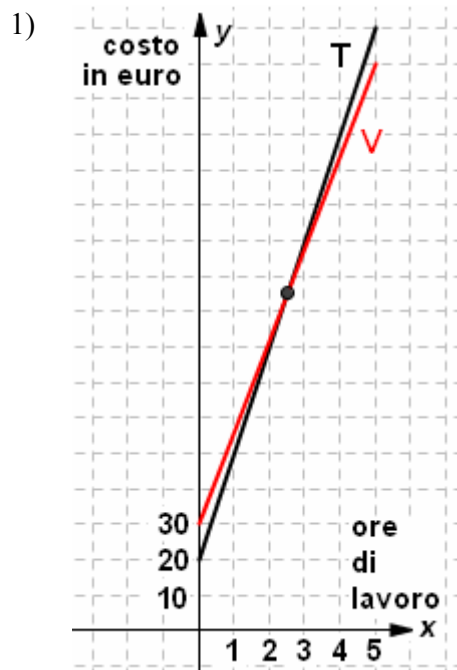
Fino all'anno scorso, la legge prevedeva che si pagasse

il 30% su guadagni fino a 15000 euro, e il 40% sulla parte di guadagno eccedente; la nuova normativa stabilisce invece di pagare il 35% indipendentemente dal guadagno. Come al solito, queste riforme favoriscono sempre i gestori più fortunati!!! Perché?

Rappresenta graficamente e confronta analiticamente il vecchio regime ed il nuovo; scrivi anche l'espressione algebrica della tassa y in funzione del guadagno x , col vecchio regolamento e con l'attuale.



RISPOSTE



In orizzontale: 1 quadretto = 1 ora

In verticale: 1 quadretto = 10 euro

a) Le equazioni delle due rette sono:

$$T \quad y = 20 + 30x$$

$$V \quad y = 30 + 26x$$

(x numero delle ore dell'intervento, y costo in euro)

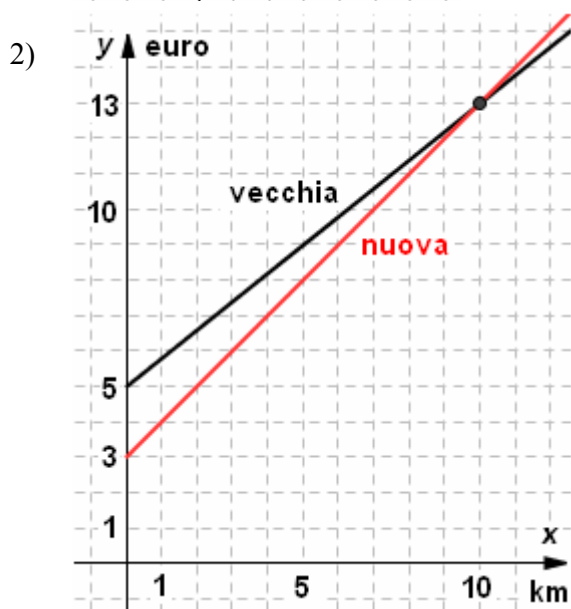
b) L'equazione $20 + 30x = 30 + 26x$ ha come soluzione $x = 2,5$.

Quindi si spende la stessa cifra se la riparazione richiede 2 ore e $\frac{1}{2}$.

c) In questo caso, la spesa è di

$$[20 + 30x]_{x=2,5} = [30 + 26x]_{x=2,5} = 95 \text{ euro}$$

d) Con Valvola si risparmia se la durata dell'intervento è superiore alle 2 h e $\frac{1}{2}$; in questo caso, infatti, la retta che rappresenta il costo dell'intervento di Valvola passa al di sotto dell'altra, quella che descrive il costo relativo a Tubi, quindi l'ordinata y (cifra da pagare) diventa minore per Valvola rispetto a Tubi.



Le due rette hanno equazioni:

$$y = 5 + 0,80x, \quad y = 3 + x$$

L'equazione $5 + 0,80x = 3 + x$ ha per soluzione $x = 10$.

La nuova tariffazione è più conveniente al di sotto dei 10 km.

3) Le equazioni delle due rette sono

$$y = 1200 + \frac{4,5}{100}x \quad \text{e} \quad y = 800 + \frac{5}{100}x.$$

Il piano A è più conveniente se la somma finanziata è superiore a 80000 euro.

4) Legge "lineare" vuol dire legge della forma

$$y = mx + q \quad \text{o} \quad y = ax + b$$

dove in questo caso i coefficienti (supponiamo di indicarli con a, b) sono da determinare.

Sappiamo che con $x = 36$ (36 km) si ha $y = 39$ (39 €) e con $x = 46$ si ha $y = 41,5$ e perciò varranno

$$\text{simultaneamente le due uguaglianze} \quad \begin{cases} a \cdot 36 + b = 39 \\ a \cdot 46 + b = 41,5 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova $a = 0,25$ e $b = 30$.

La tariffa fissa è perciò di 30 euro.

La legge lineare è $y = 0,25x + 30$ ossia
costo noleggio = 30 euro + 0,25 euro $\cdot$ n° km

5) Tariffa fissa = 3 euro. Formula: $c = 0,08n + 3$

6) a) $c = 0,25m + 1,25$ b) \$ 3.00 7) \$ 1300

8) a) $H = 2,42 \cdot L + 81,93$ b) circa 39,8 cm

9) $n = 1000 - 0,4t$. $t = (1000 - n)/0,4$. 640. 1250.

10) 86 °F. -1,111... °C. $-40^\circ\text{C} \leftrightarrow -40^\circ\text{F}$

11) $C = M/(1+it)$. $t = (M - C)/(Ci)$. 11400 €. L'1,8%.

12) a) 125500 \$ b) 126700 \$ c) 1200 \$ d) 1200 e) Il coeff. angolare, o "pendenza", o "slope", è uguale a $\Delta y / \Delta x$ ed equivale anche all'incremento della y che si ha quando la x aumenta di 1 unità

13a) Sì, per lo meno nell'ambito dei valori di temperatura considerati. Essendo gli incrementi di T tutti uguali, basterà controllare che siano uguali anche tutti gli incrementi di L . E in effetti, è sempre $\Delta L = 0,000018$.

13b) $L = 1,500144$; $L = 1,499964$

14) No

15) Sì, si può considerare con buona approssimazione lineare, almeno nel campo dei valori di T considerati.

16) Non si direbbe lineare. Sembra piuttosto che, crescendo, la foglia tenda ad essere meno "slanciata".

17) Al km 12 18) $x = 1,8t - 12$. $v = 1,8$. Con $t = 0$ è $x = -12$. Si ha $x = 0$ per $t = 6 + 2/3$.

19a) Se andiamo a tracciare, a matita o con un foglio elettronico, il diagramma tempo-spazio corrispondente, vediamo che i punti si trovano pressappoco sulla stessa retta (pressappoco, perché c'è qualche irregolarità). Il moto si può considerare approssimativamente uniforme (cioè, a velocità costante), perché in tempi uguali gli spazi percorsi sono approssimativamente uguali.

19b) A questa domanda si può rispondere perlomeno in due modi.

La tabella sottostante mostra i metri percorsi dal minuto 3 al minuto 4, dal 4 al 5, ecc.

dal 3 al 4	dal 4 al 5	dal 5 al 6	dal 6 al 7	dal 7 all'8	dall'8 al 9	dal 9 al 10
270	250	260	260	260	270	260

Vediamo che ogni minuto vengono percorsi circa 260 metri,

quindi ci possiamo aspettare che dal minuto 10 al minuto 18 vengano percorsi $\approx 260 \cdot 8 = 2080$ m.

Allo scoccare del minuto 18 sul cronometro, la distanza totale percorsa dovrebbe aggirarsi intorno a metri $2610 + 2080 = 4690$.

Per rispondere potremmo anche tracciare il diagramma del moto,

ad es. con un foglio elettronico, poi immaginare di prolungare la nostra "pseudo-retta" fino all'ascissa 18.

In questo modo avremmo una valutazione approssimativa dell'ordinata corrispondente.

Oppure ... potremmo fare di meglio.

La nostra "quasi-retta" passa per l'origine, quindi ha equazione della orma $y = mx$.

Una buona valutazione della sua inclinazione m si avrà facendo il rapporto fra l'ordinata

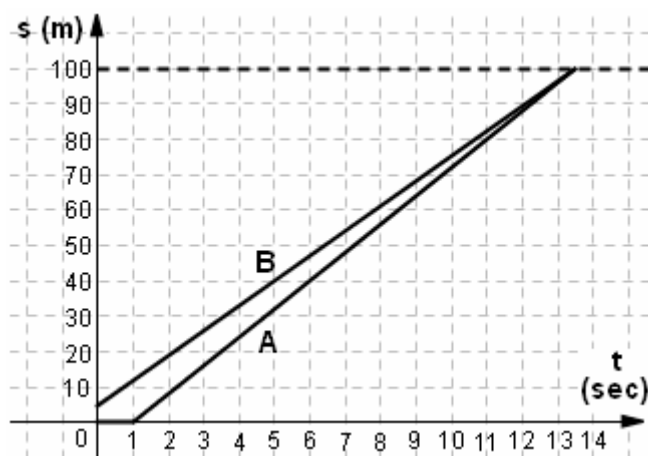
e l'ascissa del punto noto più lontano dall'origine, ossia quello di coordinate (10, 2610).

E' perciò $m = 2610/10 = 261$, e se dobbiamo scegliere un'equazione per la nostra "quasi-retta",

è logico che tale scelta cada sull'equazione $s = 261t$. E con $t = 18$ si ottiene $s = 261 \cdot 18 = 4698$

19c) Ricordando anche la nota relazione $m = \Delta y / \Delta x = \Delta s / \Delta t$, possiamo dire che il coefficiente angolare in questione rappresenta la velocità, approssimativamente costante, del moto.

20)



Il tempo, in orizzontale, parte dall'istante $t = 0$ in cui scatta Bruno; Aldo comincerà la sua corsa all'istante $t = 1$.

Da grafico non si capisce bene chi, coi dati del problema, è destinato a vincere: dobbiamo ricorrere al calcolo.

Moto di Aldo: $s = 8(t - 1)$, a partire dall'istante 1.

Moto di Bruno: $s = 7t + 5$

Poniamo $s = 100$ e avremo:

per Aldo, $t = 108/8 = 13,5$;

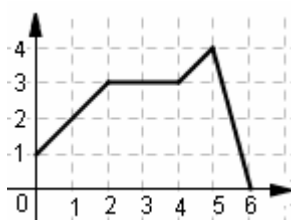
per Bruno, $t = 95/7 = 13,57...$

Coi dati forniti dal problema, vince Aldo.

E' chiaro che il problemino è "addomesticato":

sembra quasi che i due possano portarsi alla velocità massima *istantaneamente* ... ☺

21)



$$f(x) = 2$$

Si vede dal grafico

che l'ordinata 2

viene assunta

nel 1° intervallo e nel 4°

$$x + 1 = 2 \rightarrow x = 1$$

$$24 - 4x = 2 \rightarrow x = 11/2$$

22)

I tre segmentini "si tengono per mano":

il 2° estremo del 1° è il 1° estremo del 2°,

e il 2° estremo del 2° è il 1° estremo del 3°.

Si capisce che occorre far riferimento

all'espressione valida per $x \geq 500$: quindi

$$50 = 32 + 0,03(x - 500) \text{ da cui } x = 1100.$$

23) Prima offerta:

$$p = 40x$$

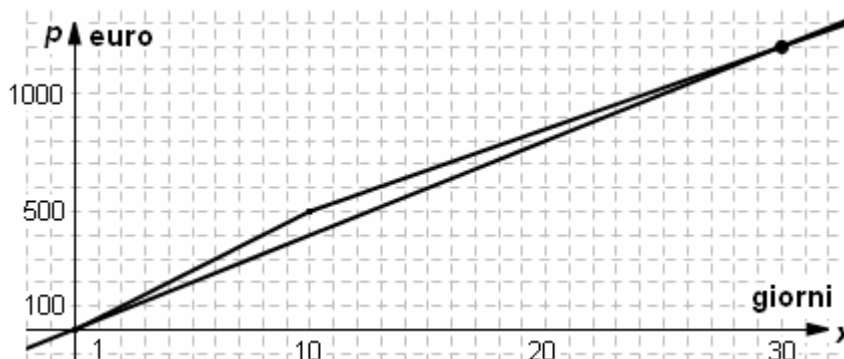
Seconda offerta:

$$p = \begin{cases} 50x & \text{con } x \leq 10 \\ 50 \cdot 10 + 35 \cdot (x - 10) & \text{con } x > 10 \end{cases}$$

La seconda offerta

è conveniente

oltre i 30 giorni di affitto.



24) Vecchia normativa: $y = \begin{cases} 0,30x & \text{con } x \leq 15000 \\ 0,30 \cdot 15000 + 0,40(x - 15000) & \text{con } x > 15000 \end{cases}$

Nuova normativa: $y = 0,35x$.

Oltre i 30000 euro, è favorevole la nuova normativa, che quindi fa risparmiare chi guadagna di più, come è "classico" in questo mondo dove i privilegiati, nel distribuire ingiustizia, la spacciano per "legalità".