

PERCENTUALI

□ QUANT'È IL 15 PER CENTO (SI SCRIVE "15%") DI 40 EURO?

È $\frac{15}{100}$ di 40 euro,

vale a dire è ciò che si ottiene

- considerando i 40 euro,
- suddividendoli in 100 parti uguali (ciascuna parte sarà dunque di euro $40:100 = 0,4$)
- e poi prendendo 15 di queste parti uguali ($15 \cdot 0,4 = 6$ euro).

IL CALCOLO SI PUÒ SVOLGERE SEMPLICEMENTE

MOLTIPLICANDO PER LA FRAZIONE $\frac{15}{100}$:

$$15\% \text{ di } 40 \text{ euro} = \frac{15}{100} \cdot 40 = \frac{60}{10} = 6 \text{ euro}$$

- La produzione di rifiuti giornaliera a Napoli+hinterland nel maggio 2007 si aggirava intorno a 1400 tonnellate. Secondo la legge, almeno il 35% dei rifiuti prodotti avrebbe dovuto essere raccolto in modo differenziato, così da recuperare e riciclare per quanto possibile. Ma nello stesso periodo, in quella zona, solo il 10% dei rifiuti andava alla "differenziata". Quante tonnellate di rifiuti sfuggivano ogni giorno alla normativa?

Facile: $35\% - 10\% = 25\% \left(\frac{35}{100} - \frac{10}{100} = \frac{25}{100} \right)$

e il 25% di 1400 tonnellate è $\frac{25}{100} \cdot 1400 = \frac{1}{4} \cdot 1400 = 1400 : 4 = 350$ tonnellate.

- L'anno scorso i miei risparmi, 20000 euro, hanno avuto un incremento del 3%. A quanto ammontano ora?

$$3\% \text{ di } 20000 \text{ euro} = \frac{3}{100} \cdot 20000 = 600 \text{ euro}$$

e dunque i miei risparmi ammontano ora a $20000 + 600 = 20600$ euro.

Anche:

un aumento del 3%, ossia dei $\frac{3}{100}$, equivale ad avere i $\frac{103}{100}$, cioè il 103% ($100\% + 3\% = 103\%$).

Ma il 103% di 20000 euro è $\frac{103}{100} \cdot 20000 = 20600$ euro.

- Una "percentuale" di qualcosa è dunque una frazione, con denominatore 100, di quella cosa. Spesso è più comodo lavorare con le percentuali anziché con le normali frazioni, per due motivi.

♪ Un motivo è la semplicità del calcolo:
fare una percentuale del $p\%$ equivale a dividere per 100 e moltiplicare per p ;
ma dividere per 100 è semplicissimo, basta spostare la virgola a sinistra di 2 posti.

♪ L'altro motivo è che le frazioni con lo stesso denominatore possono essere confrontate fra loro più agevolmente.

Facciamo un esempio.

La frazione $\frac{3}{8}$ è leggermente superiore alla frazione $\frac{1}{3}$: facile stabilirlo, ma sarebbe ancora più facile se al posto delle due frazioni si avessero le percentuali equivalenti, perché

$$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0,375 = \frac{37,5}{100} = 37,5\% \quad \text{e} \quad \frac{1}{3} = 1 : 3 = 0,3333... = \frac{33,33...}{100} = 33,33...%$$

e avere il 37,5% di qualcosa anziché il 33,33...% di quella stessa cosa equivale dunque ad avere circa il 4% in più ($4\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$).

- Mi fanno lo sconto del 12% su di un bene che originariamente costava 250 euro. Quanto spendo?

$$12\% \text{ di } 250 \text{ euro} = \frac{12}{100} \cdot 250 = \frac{300}{10} = 30 \text{ euro} \quad \text{quindi} \quad \text{spesa} = 250 - 30 = 220 \text{ euro}.$$

Anche: uno sconto del 12%, ossia dei 12/100, equivale ad avere gli 88/100,

$$\text{cioè l' } 88\% (100\% - 12\% = 88\%). \text{ Ma l' } 88\% \text{ di } 250 \text{ euro è } \frac{88}{100} \cdot 250 = \frac{2200}{10} = 220 \text{ euro}.$$

- ♥ Osserviamo ora che se per esperimento provassimo ad *aumentare* questi 220 euro del 12%, NON ritorneremmo a 250 euro!

$$\text{Infatti il } 112\% \text{ di } 220 \text{ è } \frac{112}{100} \cdot 220 = \frac{2464}{10} = 246,4$$

Il motivo di questa differenza è che

- ♪ il PRIMO 12% (quello dello sconto) si riferisce a 250,
- ♪ mentre il SECONDO 12% (quello dell'“esperimento” di rincaro dopo lo sconto) **si riferisce ad una cifra diversa (220)**.

- Un tale investe in borsa una data somma di denaro.

Supponiamo che ad un periodo fortunato, in cui si ha un guadagno del 30%, faccia seguito un secondo periodo di magra, in cui rispetto al massimo del periodo precedente si perde il 30%.

Inizio periodo	Fine periodo
x	$\frac{130}{100}x$
$\frac{130}{100}x$	$\frac{70}{100} \cdot \frac{130}{100}x = \frac{91}{100}x$

... Il nostro risparmiatore, in totale, avrà perso il 9% della cifra inizialmente investita. Non bisogna cadere nella trappola “guadagno il 30%, poi perdo il 30%, quindi sono alla pari” perché IL PRIMO 30%, quello del guadagno, si riferisce a una data cifra (quella iniziale) mentre IL SECONDO 30%, quello della perdita, si riferisce a una cifra diversa (e maggiore) quindi è “normale” che la perdita superi il guadagno.

- 27 kg, che percentuale rappresentano rispetto a 40 kg?

Beh, dato che 27 rispetto a 40 è ovviamente $\frac{27}{40}$, basterà trasformare la frazione $\frac{27}{40}$ in una frazione equivalente con denominatore 100.

Si può procedere in diversi modi, anche con una proporzione ($27:40 = x:100$) ma, in generale, il modo più rapido e comodo di fare conti di questo genere è il seguente.

♪ Trovo il numero decimale corrispondente, effettuando la divisione ... $\frac{27}{40} = 27 : 40 = 0,675$

♪ ... poi trasformo il numero decimale in una frazione con denominatore 100;

basta vedere a quanti centesimi il numero decimale stesso corrisponde. $0,675 = \frac{67,5}{100} = 67,5\%$

- ♥ Se dopo un rincaro del 30% un prezzo diventa di 36 euro e 40 centesimi, qual era il prezzo originario?

Dunque: se c'è stato un rincaro del 30%, il nuovo prezzo, quello che sappiamo essere di 36,4 euro, è $\frac{130}{100}$ del prezzo iniziale. Abbiamo già affrontato, occupandoci di frazioni, problemi di questo tipo: se f , prezzo finale, è $\frac{130}{100}$ di i , prezzo di partenza, allora quest'ultimo si potrà ricostruire

♪ dividendo f per 130 (con ciò, si ottiene $\frac{1}{100}$ di i)

♪ poi moltiplicando ciò che si è ottenuto per 100.

$$f = \frac{130}{100}i \rightarrow i = \frac{f}{130} \cdot 100 \text{ o anche } i = f \cdot \frac{100}{130} \quad (\text{nel nostro caso, } i = 36,4 \cdot \frac{100}{130} = 28)$$

Si può giungere a questa conclusione anche con l'aiuto di una semplicissima “equazione” (uguaglianza contenente un numero “incognito” ossia sconosciuto e indicato ad esempio col simbolo x):

$$\frac{130}{100}x = 36,4 \quad \xrightarrow{(*)} \quad x = \frac{36,4}{1,3} \text{ o anche } x = \frac{36,4}{\frac{130}{100}} \text{ o anche } x = 36,4 \cdot \frac{100}{130}$$

$$1,3x = 36,4$$

(*) Se un prodotto dà come risultato 36,4 allora uno dei fattori sarà uguale a 36,4 diviso l'altro fattore

NOTA: puoi pensare di passare da $\frac{130}{100}x = 36,4$ a $x = 36,4 \cdot \frac{100}{130}$ anche prendendo l'uguaglianza iniziale

e: a) moltiplicando per 100 ambo i membri b) poi dividendo ambo i membri per 130

ESERCIZI di “riscaldamento”

- 1) Determina:
 a) il 70% di 80 kg b) il 20% di 4 euro e 60 centesimi c) il 12,5% di 6/5 di metro
 d) quanti diventano 40000 passeggeri dopo un aumento dei passeggeri del 20%
 e) il prezzo che, aumentato del 10%, diventa di 57 euro e 75 centesimi
 f) il prezzo che diventerebbe di 204 euro se venisse scontato del 15% g) il 30% del 40% di 1000 euro
- 2) Che percentuale rappresentano:
 a) 15 kg rispetto a 50 kg? b) 11 litri rispetto a 18,5 litri? c) 10000 spettatori rispetto a 7500 spettatori?

**Matematica
 e Problemi
 della Realtà**
PROBLEMI DELLA REALTA' CON PERCENTUALI

- 3) Dopo due sconti successivi del 10%, a quanto si porta un prezzo iniziale di 100 euro?
- 4) Di che percentuale occorre aumentare un dato prezzo, in modo che facendo poi il 20% di sconto si ritorni al prezzo iniziale?
- 5) Se un prezzo aumenta del 400%, vuol dire che quadruplica?
- 6) Se il numero di divorzi in Italia è passato da 27000 circa nel 1997 a 50000 circa nel 2006,
 • che percentuale in più si è avuta nel 2006 rispetto al 1997?
 • E che percentuale in meno si aveva nel 1997 rispetto al 2006?
- 7) Il valore delle azioni di una certa società il giorno 2 marzo è aumentato del 4% (*); il giorno 3 marzo è aumentato del 6% (*); il giorno 4 marzo è calato del 10% (*). Di che percentuale è variato il valore la sera del 4 marzo rispetto al mattino del 2? (*). *S'intende, confrontando il valore la sera con quello al mattino dello stesso giorno.*
- 8) Sul 30% di 20000 euro ho guadagnato il 3%, sul rimanente ho perso il 2,5%. Sono in guadagno o in perdita? E di che percentuale sull'investimento iniziale?
- 9) Se le due dimensioni di un orto rettangolare vengono una aumentata e l'altra diminuita del 10%, che variazione percentuale subisce l'area?
 a) Diminuisce di una percentuale fissa
 b) Aumenta di una percentuale fissa
 c) Resta invariata
 d) Dipende dalle misure delle dimensioni iniziali
- 10) Se le due dimensioni di un orto rettangolare vengono aumentate entrambe del 10%, di quanto aumenta in percentuale l'area?
- 11) Determina il valore finale di un prezzo di 80 euro, se il negoziante prima lo aumenta del 10% poi il mese successivo accorda a tutti i clienti uno sconto del 5%
- 12) Mi restano ancora 16 esercizi, ossia il 40% del compito per le vacanze. Quanti esercizi erano stati dati?
- 13) La prima rata mensile per acquistare un'automobile corrisponde al 2% del prezzo, e ammonta a 204 €. Quanto costa l'automobile?
- 14) Ho comprato alla fiera un mobiletto, ma a mia moglie proprio non è piaciuto: abbiamo finito per rivenderlo ai nostri noiosissimi vicini di casa, che invece, dopo averlo visto, se ne erano innamorati; e ci hanno dato ben 276 euro, il 15% in più del prezzo d'acquisto. Qual era quest'ultimo?
- 15) Riempi i puntini:
- | | | |
|-------------------------------|-----|------|
| Numero di taglie “S” vendute | ... | 10% |
| Numero di taglie “M” vendute | ... | 32% |
| Numero di taglie “L” vendute | 100 | ... |
| Numero di taglie “XL” vendute | 45 | ... |
| Totale | 250 | 100% |
- 16) Se una tassa passa dal 20% al 21%, come è accaduto in Italia per l'IVA nel Settembre 2011, non è giusto dire che, rispetto a quanto si pagava in precedenza, si deve ora pagare l'1% in più. Perché?
- 17) In un concorso, passa la prima selezione soltanto il 20% dei disegni presentati. Successivamente, ad una seconda selezione, solo l'8% dei disegni rimasti in gara viene premiato. E in totale i disegni premiati sono 4. Quanti lavori erano stati presentati alla gara?

- 18) Supponi che su di un investimento si continui a oltranza a:
guadagnare il 50% un giorno; poi perdere il 50% il giorno successivo;
poi guadagnare il 50% il giorno dopo; poi perdere il 50% il giorno dopo ancora; ecc. ecc.
Col passare del tempo, cosa succederà? Qual è l'affermazione vera fra quelle sottostanti?
- Il capitale resterà in media pressoché stabile
 - Il capitale diminuirà avvicinandosi alla metà di quello iniziale
 - Il capitale diminuirà, rimanendo però pur sempre al di sopra di una certa soglia
 - Il capitale diminuirà avvicinandosi a zero
- 19) In un paesino gli aventi diritto al voto per le elezioni comunali erano 1250, ma solo il 78,4% si è recato alle urne. Se il sindaco è stato eletto con 640 voti a favore, qual è la percentuale dei consensi
- rispetto al numero dei votanti?
 - rispetto al totale degli aventi diritto al voto?
- 20) Una signora che pesava 80 kg riesce, con una dieta ferrea, a perdere ben 10 chili;
poi però ritornando al normale regime alimentare riacquista tutto il peso che aveva perduto.
Di quanto è diminuito in percentuale il peso a seguito della dieta?
E di che percentuale è poi aumentato quando la dieta è stata abbandonata?
- 21) La classe Prima A, per via delle bocciature, è rimasta con soli 15 allievi, e di questi $\frac{1}{3}$ sono femmine.
La Prima B ha il 50% di femmine, e il 20% di studenti complessivamente in più rispetto alla Prima A.
Le due classette vengono fuse insieme per formare un'unica Seconda.
Qual è la percentuale delle femmine nella nuova classe?
- 22) In una cittadina l'80% degli abitanti è maggiorenne, quindi ha diritto al voto.
Nelle ultime elezioni comunali, soltanto il 70% degli aventi diritto al voto si è recato alle urne, ma il 5% di questi ha votato scheda bianca o nulla. Fra i voti espressi, 5 su 8 sono stati a favore del signor Lapo Mannaro, che è stato così eletto sindaco con 3990 preferenze. Quanti abitanti ha quella città?
- 23) Un commerciante di abiti disinvolto, nel periodo dei saldi, espone in vetrina un cartello con la scritta "Tutto scontato del 15%". Sennonché, egli aveva nel frattempo proceduto a cambiare completamente tutta la merce in vetrina, applicando al prezzo di vendita precedentemente previsto per i vari capi un ricarico del 15%. In definitiva, qual è la variazione percentuale reale dei prezzi a carico del cliente?

LO "SCORPORO DELL'IVA"

L'IVA (= Imposta sul Valore Aggiunto) è un tributo che lo Stato esige ogniqualvolta un bene o un servizio viene venduto. Al prezzo netto che il rivenditore intenderebbe ricavare viene applicato un rincaro, in percentuale, che va a carico del consumatore. Ad esempio, se un prodotto compare in vetrina al prezzo di 90 euro, bisogna pensare che di questi 90 euro solo una parte li tratterrà il negoziante, perché nei 90 euro finali è compresa anche l'IVA, che il negoziante stesso provvederà a versare allo Stato.

Se, poniamo, l'aliquota IVA è al 20% (queste aliquote possono essere differenti nei diversi paesi europei), per trovare il ricavo netto del rivenditore occorre risalire a quel prezzo x il quale, aumentato del 20%, produce un prezzo finale di 90 euro. Tale procedimento viene chiamato "lo scorporo dell'IVA".

Ma, in base a quello che abbiamo visto, tu dovresti saper bene come fare!

24) A tale scopo, basterà moltiplicare la cifra di 90 euro per la frazione ...

25) E più in generale, indicando con a l'aliquota (nell'esempio di prima, era $a = 20$), la frazione per cui va moltiplicato il prezzo finale, se si vuole risalire a quello che sarebbe stato il prezzo senza IVA, è ...

RISPOSTE

- 1a) 56 kg 1b) 92 centesimi 1c) 15 cm 1d) 48000 passeggeri 1e) 52 € e 50 centesimi 1f) 240 € 1g) 120 €
2a) Il 30% 2b) Poco meno del 59,46% 2c) Il 133,33... % 3) A 81 € (il 2° sconto è fatto su 90 €!) 4) Del 25%
5) No, che quintuplica 6) Circa l'85% in più; circa il 46% in meno 7) È diminuito dello 0,784%
8) Perdo 170 € cioè lo 0,85% 9) a) l'area diminuisce sempre dell'1%, indipendentemente dalle dimensioni
- 10) Del 21%: $\frac{110}{100}a \cdot \frac{110}{100}b = \frac{121}{100}ab$ 11) 83 euro e 60 centesimi 12) 40: $\frac{40}{100}n = 16 \rightarrow n = 16 \cdot \frac{100}{40} = 40$
- 13) 10200 euro 14) 240 euro: $115/100a = 276 \rightarrow a = 276 \cdot 100/115 = 240$ 15) 25; 80; 40%; 18%
- 16) La domanda vuole mettere in relazione ciò che si paga ora con ciò che si pagava prima: e se prima, su un importo di 100, si pagava 20, ora anziché 20 si paga 21 ossia $\frac{1}{20}$ in più: l'aumento della tassa è stato di $\frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$
- 17) 250: $\frac{8}{100} \cdot \frac{20}{100} = 1,6\%$; $\frac{1,6}{100}x = 4 \rightarrow x = 4 \cdot \frac{100}{1,6} = 250$
- 18) d 19) a) Circa il 65,3% b) Il 51,2% 20) Del 12,5%; del 14,3% circa 21) Circa il 42,4% 22) 12000
- 23) Il cliente ci guadagna, ma solo il 2,25% del prezzo ordinario della merce 24) $\frac{100}{120}$ 25) $\frac{100}{100+a}$