

19) Sia $ABCD$ un rettangolo; si traccino le sue diagonali \overline{AC} e \overline{BD} ,
 e sia O il punto in cui queste si tagliano. Preso poi su AB un punto P , si traccino da P :
 la \parallel a \overline{BD} , fino ad incontrare \overline{AC} in Q , e la \parallel ad \overline{AC} , fino ad incontrare \overline{BD} in R .
 Dimostra che il perimetro di $PQOR$ è uguale ad una diagonale del rettangolo.

IPOTESI: $ABCD$ rettangolo; $PQ \parallel BD$, $PR \parallel AC$

TESI: $\overline{PQ} + \overline{QO} + \overline{OR} + \overline{RP} = \overline{AC}$

DIMOSTRAZIONE

Innanzitutto, in un rettangolo le diagonali sono uguali:

$$\overline{AC} = \overline{BD}$$

e si tagliano fra loro in metà, quindi

$$\overline{AO} = \overline{OC} = \overline{BO} = \overline{OD}.$$

In particolare è

$$\overline{AO} = \overline{BO}:$$

$\triangle AOB$ è isoscele, quindi

$$\widehat{A_1} = \widehat{B_4}.$$

Ora, essendo $PR \parallel AC$, sarà $\widehat{P_3} = \widehat{A_1}$ (corrispondenti)

ed essendo $PQ \parallel BD$, sarà $\widehat{P_2} = \widehat{B_4}$ (corrispondenti)

per cui si avrà

$$\widehat{P_2} = \widehat{B_4} = \widehat{A_1} = \widehat{P_3}.$$

Di conseguenza i due triangoli $\triangle APQ$, $\triangle PBR$ sono isosceli ($\overline{PQ} = \overline{AQ}$, $\overline{RP} = \overline{RB}$).

Perciò

$$\overline{PQ} + \overline{QO} + \overline{OR} + \overline{RP} = \overline{AQ} + \overline{QO} + \overline{OR} + \overline{RB} = (\overline{AQ} + \overline{QO}) + (\overline{OR} + \overline{RB}) = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{AO} + \overline{OC} = \overline{AC}, \text{ c.v.d.}$$

