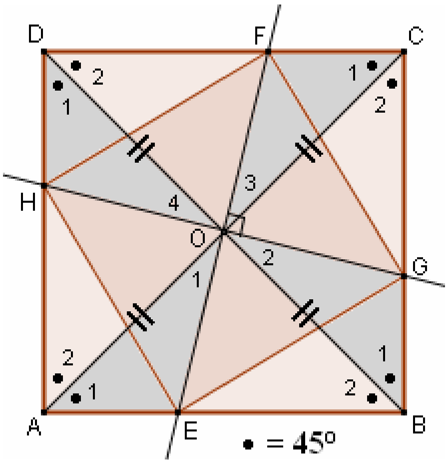
21) Per il punto di intersezione delle diagonali di un quadrato si traccino due rette perpendicolari fra loro. Dimostrare che i quattro punti in cui tali rette intersecano i lati del quadrato iniziale, sono vertici di un altro quadrato.



HP

ABCD quadrato

$EF \perp GH$

TH

EGFH quadrato

DIM.

Consideriamo il quadrato di partenza ABCD e le sue diagonali.
E' noto che in ogni quadrato le diagonali si tagliano scambievolmente per metà, sono uguali, sono perpendicolari, sono bisettrici degli angoli interni …
insomma, ricapitolando gli elementi fondamentali, è

$$A\widehat{O}B = B\widehat{O}C = C\widehat{O}D = D\widehat{O}A = 90°; \quad \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD};$$

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 45°.$$

Confrontiamo ora simultaneamente i 4 triangoli AEO, BGO, CFO, DHO. Essi hanno

$$\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}, \quad \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1 = 45°.$$

Dico inoltre che anche i 4 angoli $\widehat{O}_1, \widehat{O}_2, \widehat{O}_3, \widehat{O}_4$ sono tutti uguali fra loro.
Ora, è subito evidente che $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3$ e $\widehat{O}_2 = \widehat{O}_4$ (opposti al vertice);
non altrettanto ovvio è che sia pure $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ …
… ma ecco! Trovato! $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ perché complementari dello stesso angolo $E\widehat{O}B$!
Infatti $\widehat{O}_1 = A\widehat{O}B - E\widehat{O}B = 90° - E\widehat{O}B = E\widehat{O}G - E\widehat{O}B = \widehat{O}_2$.

Dunque, i quattro triangoli AEO, BGO, CFO, DHO sono uguali fra loro per il 2° Criterio.
Ne consegue $\overline{OE} = \overline{OG} = \overline{OF} = \overline{OH}$.

Consideriamo ora il quadrilatero della tesi, EGFH: cosa possiamo dirne a questo punto?
Abbiamo appena dedotto l'uguaglianza $\overline{OE} = \overline{OG} = \overline{OF} = \overline{OH}$
quindi le diagonali di EGFH sono uguali e si tagliano per metà: trattasi allora

- di un parallelogrammo (avendo le diagonali che si bisecano scambievolmente, è un || grammo)
- con le diagonali uguali (è un rettangolo, quindi)
- e per giunta, come da ipotesi, perpendicolari (rombo).

Sì, EGFH è proprio un quadrato!!! La tesi è dimostrata.