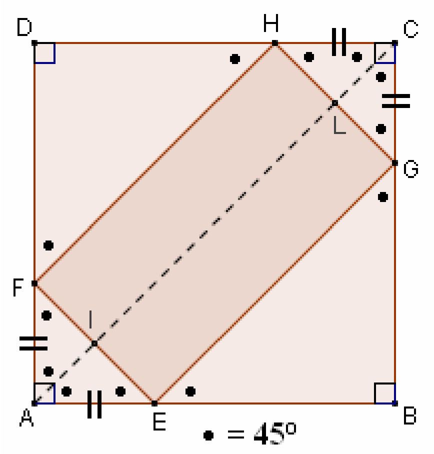
24) A partire dai due vertici opposti A, C di un quadrato ABCD si prendono, sui lati, quattro segmenti uguali fra loro $\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{CG}=\overline{CH}$. Dimostra che:
I) il quadrilatero di vertici E, G, H, F è un rettangolo
II) il perimetro di questo rettangolo rimarrebbe sempre costante, anche se variasse la lunghezza dei quattro segmenti uguali $\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{CG}=\overline{CH}$.



HP
ABCD quadrato, $\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{CG}=\overline{CH}$

TH
I) EGHF rettangolo
II) 2p(EGHF)=costante

DIMOSTRAZIONE

I) La prima parte è molto facile.
Nella figura si hanno dei triangoli rettangoli isosceli
$\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{CG}=\overline{CH}$ per ipotesi, $\overline{BE}=\overline{BG}=\overline{DF}=\overline{DH}$ perché differenze di segmenti uguali).
Ma in un triangolo rettangolo isoscele gli angoli acuti sono di 45° , quindi, ad esempio,
$F\hat{E}G=180°-45°-45°=90°$ e analogamente si dimostrano retti gli altri angoli di EGHF.

II) La seconda parte richiede di tracciare una diagonale del quadrato
(a proposito, è noto che in un quadrato le diagonali sono bisettrici degli angoli interni,
quindi ogni diagonale forma angoli di 45° con i lati del quadrato).
Si dimostrerà che il perimetro di EGHF è costante,
perché è uguale al doppio di questa diagonale, che è fissa!
Infatti
(tenendo conto dei triangoli isosceli AIE, AIF, CLG, CLH
e del fatto che gli angoli di vertici I ed L sono tutti retti perché $180°-45°-45°=90°$,
per cui i quadrilateri IEGL e IFHL sono due rettangoli),
si può scrivere la catena

$$2p(EGHF)=\overline{EG}+\overline{GH}+\overline{HF}+\overline{FE}=\overline{EG}+\overline{GL}+\overline{LH}+\overline{HF}+\overline{FI}+\overline{IE}=$$
$$=\overline{IL}+\overline{LC}+\overline{LC}+\overline{IL}+\overline{AI}+\overline{AI}=2(\overline{AI}+\overline{IL}+\overline{LC})=2\overline{AC}$$

Con ciò è dimostrata la tesi, perché si è provato che il perimetro di EGHF è uguale,
indipendentemente dalla lunghezza di $\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{CG}=\overline{CH}$,
al doppio di un segmento fisso, quindi ad una quantità costante.