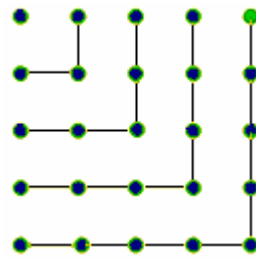


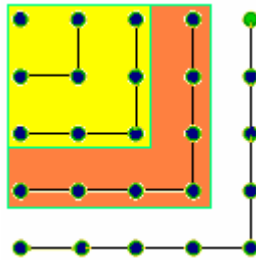
#### 4) Odd Squares

La figura qui a destra  
 illustra la bella formula  
 $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$   
 Ora tu utilizza la stessa figura  
 per dimostrare che  
 qualsiasi numero dispari  $2n - 1$   
 è sempre esprimibile come  
 differenza di due quadrati.



Seconda richiesta. Questa è più difficile, occorre fare uso della identità  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ :  
 trova una strategia per determinare tutti i possibili modi (ce ne sono ben 4)  
 in cui il numero 105 si può scrivere come differenza fra i quadrati di due interi positivi.

Ad esempio, il numero dei puntini sulla linea  
 evidenziata nella figura qui a destra (7 puntini)  
 può essere ottenuto come differenza fra  
 il numero dei puntini che stanno all'interno  
 del più grande e del più piccolo  
 fra i due quadrati che abbiamo ritagliato:  
 $7 = 4^2 - 3^2$ .



Notiamo che 3 e 4 sono i due interi che meglio approssimano,  
 rispettivamente per difetto e per eccesso, la metà di 7.

In generale, preso un numero dispari  $2n - 1$ , questo potrà sempre essere visto come la differenza fra i quadrati  
 di quei due interi che meglio approssimano, rispettivamente per difetto e per eccesso, la metà di  $2n - 1$ ,  
 ossia la frazione  $\frac{2n-1}{2} = \frac{2n}{2} - \frac{1}{2} = n - \frac{1}{2}$ . Tali due interi sono  $n - 1$  e  $n$ .

Avremo dunque  $2n - 1 = n^2 - (n - 1)^2$ , identità che abbiamo ricavato per via grafica  
 ma ora possiamo controllare anche algebricamente se conosciamo la formula per il "quadrato di un binomio".

E veniamo al **secondo quesito**.

Vogliamo trovare tutti i modi in cui 105 si può esprimere come differenza fra i quadrati di due interi positivi.  
 Uno di questi modi ci è suggerito dalla riflessione precedente!

Consideriamo i due interi che meglio approssimano, per difetto e per eccesso, la metà di 105 (che è poi 52,5):  
 essi sono 52 e 53 e avremo subito  $105 = 53^2 - 52^2$ .

Ma gli altri modi? Perché il testo del problema ci annuncia che di modi ne esistono ancora altri tre!

Dunque: se 105 è scritto come differenza di due quadrati, si avrà, per due opportuni numeri  $a, b$ , l'uguaglianza  
 $105 = a^2 - b^2$  che si può riscrivere come  $105 = (a + b)(a - b)$  dato che è  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ .

Ma allora gli interi  $a, b$  che stiamo cercando dovranno essere tali che  $a + b, a - b$ , moltiplicati, diano 105.

Ora, essendo  $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ , due interi il cui prodotto dà 105 possono essere solo:

105 e 1; 15 e 7; 21 e 5; 35 e 3.

$a, b$  dovranno perciò soddisfare le uguaglianze

$$\begin{cases} a + b = 105 \\ a - b = 1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} a + b = 15 \\ a - b = 7 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} a + b = 21 \\ a - b = 5 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} a + b = 35 \\ a - b = 3 \end{cases}$$

Anche se non hai mai avuto a che fare con i "sistemi di equazioni",  
 puoi a questo punto determinare i numeri  $a, b$  nei quattro casi.

Per trovare due numeri conoscendone la somma e la differenza si può, infatti, procedere in diversi modi  
 e uno di essi, ad esempio, è il seguente: prima sommare e poi sottrarre membro a membro le due uguaglianze.

Ad esempio, i numeri  $a, b$  tali che

$$\begin{cases} a + b = 105 \\ a - b = 1 \end{cases} \text{ si possono trovare addizionando } \begin{array}{l} a + b = 105 \\ a - b = 1 \\ \hline 2a = 106 \\ a = 53 \end{array} \text{ poi sottraendo } \begin{array}{l} a + b = 105 \\ a - b = 1 \\ \hline 2b = 104 \\ b = 52 \end{array}$$

e corrispondono alla coppia 52, 53 già a noi nota;

operando allo stesso modo sugli altri casi si trova  $a = 11, b = 4$ ;  $a = 13, b = 8$ ;  $a = 19, b = 16$ .

In definitiva, perciò, le 4 possibilità per esprimere il 105 come differenza dei quadrati di due interi positivi sono:

$$105 = 53^2 - 52^2 = 11^2 - 4^2 = 13^2 - 8^2 = 19^2 - 16^2.$$