2. MULTIPLI E DIVISORI; DIVISIBILITA'; NUMERI PRIMI

- **Cosa sono i "multipli" di un intero x? Sono i numeri: $x,\ 2x\ (=2\cdot x),\ 3x,\ 4x,\ ...$**
  Ad esempio, i multipli di 5 sono: 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...
- **Cosa sono i "divisori" di un intero x?**
  Sono quegli interi che sono contenuti un numero intero di volte in x;
  in altre parole, **sono quegli interi y per i quali la divisione $x:y$ ha resto 0** (NOTA)
  Ad esempio, i divisori di 12 sono: 1, 2, 3, 4, 6 e 12 .
- **Cosa significa affermare che un intero x è "divisibile" per un altro intero y?**
  Significa dire che la divisione $x:y$ (NOTA) **dà come resto 0**; insomma,
  che **y è contenuto un numero intero di volte in x, ossia** che **x è multiplo di y.**
- Sono quindi **del tutto EQUIVALENTI le espressioni verbali**:
  "x è divisibile per y" ; "y è divisore di x" ; "x è multiplo di y".
  "ESSERE MULTIPLO DI" o "ESSERE DIVISIBILE PER", è la stessa cosa!

NOTA
Questo discorso si riferisce, come è ovvio, alla "divisione intera" (pagg. 14 e 114), quella in cui dividendo e divisore sono interi, e si ottengono un quoziente intero e un resto, eventualmente nullo.

Valgono i seguenti **Criteri di Divisibilità**:

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 2
Un intero è divisibile per 2 se e solo se termina con cifra pari. I numeri pari sono 0, 2, 4, 6, eccetera (anche lo 0 è considerato pari: vedi la riflessione all'inizio della pag. seguente); i dispari sono 1, 3, 5, 7, ecc.

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 3
Un intero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre è divisibile per 3
Vedi gli esempi qui a destra.

$\boxed{520458}$
$5+2+0+4+5+8=\boxed{24}$
24 è divisibile per 3; quindi 520458 è divisibile per 3

$\boxed{1357}$
$1+3+5+7=\boxed{16}$
16 NON è divisibile per 3; quindi 1357 NON è divisibile per 3

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 4
Un intero è divisibile per 4 se e solo se il gruppo formato dalle ultime due cifre è 00, oppure è divisibile per 4

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 5
Un intero è divisibile per 5 se e solo se termina con 0 o con 5

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 6
Un intero è divisibile per 6 se e solo se è divisibile sia per 2 che per 3

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 9
Un intero è divisibile per 9 se e solo se la somma delle sue cifre è divisibile per 9

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 10
Un intero è divisibile per 10 se e solo se termina con 0

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 25
Un intero è divisibile per 25 se e solo se termina con: 00, 25, 50 o 75

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 11
Un intero è divisibile per 11 se e solo se, sommandone le cifre di posto dispari (la prima, la terza, …) poi sommandone le cifre di posto pari (la seconda, la quarta, …) e infine sottraendo i due numeri così ottenuti, si ottiene 0 o un multiplo di 11

Esempi:

$\boxed{48257}$
$4+2+7=13$
$8+5=13$
$13-13=\boxed{0}$
quindi 48257 è divisibile per 11

$\boxed{9091929}$
$9+9+9+9=36$
$0+1+2=3$
$36-3=\boxed{33}$
33 è multiplo di 11, quindi 9091929 è divisibile per 11

$\boxed{1234}$
$1+3=4$
$2+4=6$
$6-4=\boxed{2}$
2 NON è multiplo di 11, quindi 1234 NON è divisibile per 11

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 7
Per stabilire se un intero è divisibile per 7, se ne sopprime l'ultima cifra in coda, la si raddoppia e si sottrae il risultato dal numero privato della "coda". Il numero dato è divisibile per 7 se e solo se il numero ottenuto dal procedimento (che è eventualmente "iterabile", cioè ripetibile) è 0 o un multiplo di 7.

Esempi:

$\boxed{294}$
$$\begin{array}{rl} 29\cancel{4} & - \\ 8 & = \\ \hline \boxed{21} & \end{array}$$
che è multiplo di 7; quindi 294 è divisibile per 7

$\boxed{2598}$
$$\begin{array}{rl} 259\cancel{8} & - \\ 16 & = \\ \hline 24\cancel{3} & \\ 6 & \\ \hline \boxed{18} & \end{array}$$
No, 2598 NON è divisibile per 7

♥ **La comunità matematica è concorde nel considerare anche lo "zero" (0) come un numero PARI.**
Questa scelta è opportuna per tutta una serie di motivi.
Fra i tanti, ne citiamo qui uno solo, di carattere "pratico".
In certi giorni, in determinate città, per limitare l'inquinamento atmosferico viene consentito di circolare solo alle vetture con "targhe dispari", in altri solo alle vetture con "targhe pari".
La finalità è di far sì che in quei giorni venga utilizzata soltanto la metà (circa) dei veicoli abitualmente in uso.
E' chiaro che considerare lo 0 "pari" è pienamente conforme alla logica e all'obiettivo, in questo contesto.

♥ **Si dice "numero primo" un intero, maggiore di 1, divisibile solo per sé stesso e per l'unità.**

L'elenco dei numeri primi inizia con: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, ...

Osserviamo che **il 2 è l'unico numero primo pari**: gli altri numeri primi, dopo il 2, sono ovviamente tutti dispari (ogni numero pari è divisibile per 2, quindi, se non si tratta proprio del 2, non può essere primo).

- **Perché mai il numero 1 non viene fatto rientrare fra i numeri primi?**

  Non è conveniente accettare il numero 1 nell'insieme dei numeri primi, sebbene 1 sia un numero intero divisibile solo per sé stesso e per l'unità.

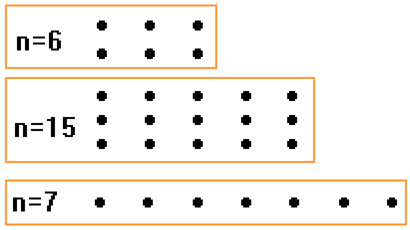
  Una delle ragioni è che se noi considerassimo 1 come un numero primo, allora la scomposizione in fattori primi di qualsiasi intero conterrebbe sempre il banale fattore 1 … che barba!

  Ma più che altro, si osserva che, escludendo 1 dall'insieme dei primi, **la scomposizione di un qualsiasi numero intero non nullo in fattori primi è sempre unica** (come si potrebbe dimostrare: **"Teorema Fondamentale dell'Aritmetica"**), mentre se anche 1 venisse considerato primo, tale unicità cadrebbe, in quanto, ad esempio, avremmo $50 = 2\cdot 5\cdot 5$, ma anche $50 = 1\cdot 2\cdot 5\cdot 5$, ma anche $50 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 5\cdot 5$, ecc. ecc.

- **Rappresentiamo un intero n con n puntini**:

  se n NON è primo (la negazione di "primo" è "**composto**"), il gruppo di puntini che rappresenta n può assumere una conformazione "**rettangolare**", con base e altezza contenenti più di un puntino;

  se n è primo, tale forma rettangolare non è realizzabile a meno di ridurre l'altezza, o la base, a un puntino solo.



- **Ma … la sequenza dei numeri primi va avanti all'infinito, oppure prima o poi si arresta?**

  Il grande Euclide di Alessandria, intorno all'anno 300 a.C., lasciò nel libro XI della sua famosissima opera, chiamata "Elementi", la prima dimostrazione scritta del fatto che **i numeri primi sono infiniti**.
  Ecco qui di seguito una rielaborazione - sostanzialmente fedele all'originale, ma rivista con mentalità e simbologia "moderne" - di questa dimostrazione.

  Se, ragionando per assurdo, si avesse soltanto un numero finito di numeri primi, cosa accadrebbe?
  Accadrebbe che ce ne sarebbe uno più grande di tutti gli altri.
  Indichiamo allora con P questo numero, l'ultimo numero primo della sequenza, il maggiore fra tutti.

  Consideriamo ora il numero (un numerone gigantesco, che chiameremo N) ottenibile moltiplicando fra loro tutti i numeri primi, dal più piccolo (il 2) fino al più grande (P):
  $N = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots\cdot P$.

  Osserviamo che questo numeraccio N sarà quindi divisibile sia per 2, che per 3, che per 5, … , che per P.

  Se aumentiamo N di una unità, otterremo il numero N+1, che ci riserverà però una grandissima sorpresa.
  Infatti N+1:

  - non può avere 2 come divisore perché è maggiore di 1 unità rispetto a N, che è divisibile per 2;
  - non può avere 3 come divisore perché è maggiore di 1 unità rispetto a N, che è divisibile per 3;
  - non può avere 5 come divisore perché è maggiore di 1 unità rispetto a N, che è divisibile per 5;
  - …
  - non può avere P come divisore perché è maggiore di 1 unità rispetto a N, che è divisibile per P.

  Quindi N+1 non è divisibile per nessuno dei numeri primi da 2 fino a P e pertanto due sono i casi:

  ♪ o N+1 è un numero primo … ma allora non era vero che P fosse il più grande fra i numeri primi;

  ♫ oppure N+1 non è primo, ma allora ammette come divisore qualche numero primo *maggiore* di P e, di nuovo, non era vero che P fosse il più grande fra i numeri primi.

  Dunque la supposizione che esista un numero primo maggiore di tutti gli altri … non sta in piedi, ci porta a una *contraddizione*.
  Non può pertanto esistere un numero primo che sia maggiore di tutti gli altri: la sequenza dei numeri primi non può avere termine, i numeri primi sono infiniti.