3. MASSIMO COMUN DIVISORE (M.C.D.)

Il "massimo comun divisore" fra due (o più) interi, è il più grande fra i loro divisori comuni.

Es. Cerchiamo il massimo comun divisore fra 96 e 60.
Scriviamo i divisori di 96 e quelli di 60, evidenziando i divisori comuni:

Divisori di 96: $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ 8 $\boxed{12}$ 16 24 32 48 96

Divisori di 60: $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 5 $\boxed{6}$ 10 $\boxed{12}$ 15 20 30 60

I divisori comuni a 96 e 60 sono dunque: 1, 2, 3, 4, 6 e 12;
ma fra questi, il più grande è 12, quindi $\text{M.C.D.}(96, 60) = 12$

Nella pratica, per cercare il M.C.D. il metodo più svelto - nei casi semplici - è di elencare mentalmente, a ritroso, i divisori di uno dei numeri dati (conviene scegliere il più piccolo) per arrestarsi non appena si incontra un numero che sia divisore anche dell'altro (o degli altri).

Ad esempio:

- per determinare il M.C.D. fra 24 e 40, elenchiamo a ritroso i divisori di 24:
  $24,\ \underbrace{12}_{\text{la metà}},\ \underbrace{8}_{\text{la terza parte}}$ *STOP! 8 è anche divisore di 40; quindi* $\text{M.C.D.}(24, 40) = 8$
- per determinare il M.C.D. fra 12, 30 e 64, elenchiamo a ritroso i divisori di 12:
  12, 6, 4, 3, 2 *STOP! 2 è anche divisore di 30 e 64; quindi* $\text{M.C.D.}(12, 30, 64) = 2$

C'è anche una regola meccanica
per cercare il M.C.D.:
basta scomporre i numeri dati in fattori primi, poi prendere soltanto i fattori comuni, ciascuno una sola volta e con l'esponente più basso.
La regola è valida anche se i numeri sono più di due.
Esempi:

$\text{M.C.D.}(60, 96) = ?$

$60 = \boxed{2^2} \cdot \boxed{3} \cdot 5$

$96 = 3 \cdot 2^5$

$\text{M.C.D.}(60, 96) = \boxed{2^2 \cdot 3} = 12$

$\text{M.C.D.}(32, 36, 40) = ?$

$32 = 2^5$

$36 = \boxed{2^2} \cdot 3^2$

$40 = 5 \cdot 2^3$

$\text{M.C.D.}(32, 36, 40) = \boxed{2^2} = 4$

Illustriamo con un esempio
lo **schema per la scomposizione di un intero in fattori primi**

42900	2
21450	2
10725	3
3575	5
715	5
143	11
13	13
1	

$\mathbf{42900 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13}$

Il procedimento consiste nel domandarsi se il numero dato è divisibile per 2; in caso affermativo si scrive 2 sulla colonna di destra, mentre sulla colonna di sinistra si riporta il quoziente. Sul quoziente ottenuto si itera (= ripete) il procedimento. Se non c'è divisibilità per 2, si prova per 3, per 5, per 7, … Ci si arresta quando, a forza di divisioni successive, sulla colonna di sinistra si ottiene 1.

Poiché qualsiasi intero è divisibile per 1, fra i divisori comuni a due o più interi, 1 compare senz'altro; se poi 1 è l'*unico* divisore comune fra gli interi considerati, quindi è anche il loro M.C.D., si dirà che gli interi in questione sono "*primi fra loro*".

Definizione - ♥ **Due interi sono detti "primi fra loro" se non ammettono divisori comuni, a parte il divisore "banale" 1; in altre parole, se il loro M.C.D. è 1.** Ad esempio, 15 e 32 sono primi fra loro.
Osserva che due numeri "primi fra loro" non devono per forza essere "primi"! Non c'entra!

ESERCIZI Calcola, col metodo che ti sembra più opportuno, il M.C.D. delle seguenti famiglie di interi.

1) (12, 16) **2)** (75, 50)
3) (31, 62) **4)** (28, 45)
5) (96, 64) **6)** (216, 360)
7) (8, 10, 12, 15) **8)** (8, 16, 24, 32)
9) (75, 90) **10)** (18, 30, 54)
11) (144, 120) **12)** (6, 9, 12)
13) (225, 3750) **14)** (539, 308)
15) (1296, 1458) **16)** (572, 364)
17) (675, 8704) **18)** (961, 279)
19) (864, 1620, 2400) **20)** (247, 299, 437)

21) I due numeri 637 e 1573 sono primi fra loro?

22) Trova il più piccolo numero non primo, che sia primo con 6.

RISULTATI

1) 4	2) 25	3) 31	4) 1
5) 32	6) 72	7) 1	8) 8
9) 15	10) 6	11) 24	12) 3
13) 75	14) 77	15) 162	16) 52
17) 1	18) 31	19) 12	20) 1

21) No (sono entrambi divisibili per 13) 22) 25