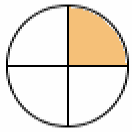
5. FRAZIONI

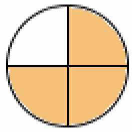
Per rappresentare quei casi, molto frequenti, in cui una data unità va suddivisa in più parti uguali, si utilizzano dei numeri di nuovo tipo: le frazioni.
Facciamo, senza pretese di completezza, alcune riflessioni su di esse.

Ad esempio, la frazione $\frac{1}{4}$ descrive la fetta di torta che abbiamo ombreggiato qui a destra:

$\mathbf{\frac{1}{4}}$ **esprime ciò che si ottiene suddividendo l'unità in 4 parti uguali, e prendendone una**.

$\frac{1}{4}$ 

Col simbolo $\frac{3}{4}$ indichiamo un nuovo numero, che descrive le situazioni in cui una unità è stata suddivisa in 4 parti uguali, e si sono poi prese 3 di queste parti uguali.

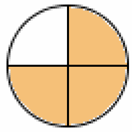
$\frac{3}{4}$ 

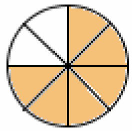
In generale, in una frazione $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ (per esigenze di spazio, scriveremo a volte $\mathbf{a}/\mathbf{b}$)

- il numero $\mathbf{b}$ è il "**denominatore**" e dice **in quante parti uguali l'unità è stata suddivisa**,
- il numero $\mathbf{a}$ è il "**numeratore**" e dice **quante di queste parti sono state prese**.

Data una frazione, se si moltiplicano per uno stesso intero sia il numeratore che il denominatore, si otterrà sempre una frazione uguale a quella di partenza (proprietà invariantiva).

Ad esempio, se prendo la frazione 3/4 e moltiplico per 2 sia "sopra" che "sotto", ottengo quella frazione, 6/8, che descrive il fatto di dividere l'unità in 8 parti (anziché 4), prendendo poi 6 di quelle parti (anziché 3); ogni parte è ora la metà rispetto alla suddivisione precedente, ma in compenso, di queste "mezze fette", ne prendo il doppio, quindi finisco per prendere la stessa porzione dell'unità che avevo preso prima.

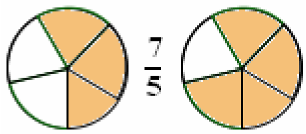
$\frac{3}{4}$ 

$\frac{6}{8}$ 

Ma allora, **procedendo a ritroso, se una frazione è tale che si possano dividere per uno stesso intero sia il numeratore che il denominatore, tale "semplificazione" si potrà effettuare, perché la frazione così ottenuta sarà uguale a quella da cui si era partiti.**

Ad esempio, $\frac{6}{8}=\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{8}_{4}}$, $\frac{20}{30}=\frac{\cancel{20}^{2}}{\cancel{30}_{3}}$

Ha senso anche considerare frazioni col numeratore più grande del denominatore: se compro una torta e ne lascio i 3/5 per la mamma, e mia sorella compra un'altra torta uguale alla mia lasciandone i 4/5 alla mamma, allora la mamma si troverà ad avere 7 fette, ciascuna uguale alla quinta parte di una torta, ossia: si troverà ad avere 7/5 di torta.


$\frac{7}{5}$

Un intero n equivale alla frazione $\mathbf{n/1}$. Divido l'unità in una sola parte (quindi la lascio inalterata); poi prendo n oggetti uguali a quello ottenuto. Ho preso così n unità! $\mathbf{n/1=n}$.

Quanto alla "**somma**" tra frazioni, essa dovrà, come coi numeri interi, avere il significato di "fare il totale".

Dunque, ad esempio, è ovvio che dovrà essere $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$

(divido l'unità in 7 parti uguali e ne prendo 2; poi divido un'altra unità in 7 parti uguali e ne prendo 4 – oppure, prendo altre 4 parti sempre dalla solita unità suddivisa in sette – ; in totale, le parti che ho preso, a quale porzione di unità corrisponderanno? Ovviamente, corrispondono a 6 "fette" ciascuna uguale alla settima parte dell'unità: $6/7$).

Quindi, **quando le due frazioni hanno lo stesso denominatore, per sommarle è sufficiente conservare lo stesso denominatore, e prendere come numeratore la somma dei numeratori.**

Se le frazioni da sommare *non* hanno lo stesso denominatore, c'è qualche difficoltà in più, facilmente superabile. Per meglio fissare le idee, ragioniamo su di un esempio.

Supponiamo di dover effettuare la somma $\frac{7}{4}+\frac{5}{6}$. Purtroppo le due frazioni non hanno lo stesso denominatore.

Se però riuscissimo a riscrivere ciascuna frazione, tramite la proprietà invariantiva, in modo da ottenere due nuove frazioni, rispettivamente equivalenti come valore alle due precedenti, ma aventi denominatori identici, allora potremmo effettuare la somma fra queste ultime, e sarebbe esattamente come sommare quelle di partenza.

Vogliamo, in definitiva, arrivare alla situazione $\frac{7}{4}+\frac{5}{6}=\frac{\dots}{\Delta}+\frac{\dots}{\Delta}$ dove “triangolino” dovrà essere un numero ricavato applicando a ciascuna frazione l’invariantiva, quindi moltiplicando il 4 per un certo intero, ma anche moltiplicando il 6 per un certo altro intero; perciò dovrà essere un multiplo comune del 4 e del 6.

Per comodità possiamo prendere $\Delta = 12 = \text{m.c.m.}(4,\ 6)$. E fare dunque così: $\frac{7}{4}+\frac{5}{6}=\frac{\dots}{12}+\frac{\dots}{12}$

Ora, quali due numeri dovremo mettere al posto dei puntini?

Ragioniamo. Se vogliamo trasformare la frazione $\frac{7}{4}$ in $\frac{\dots}{12}$,
utilizzando la proprietà invariantiva in modo che il valore della frazione non cambi,
dovremo sostituire ai puntini quel numero che è ottenibile a partire dal 7 moltiplicandolo
per lo stesso fattore che a partire dal 4 ci porta a ottenere il 12, ossia il 3
(osserviamo che 3 è il numero di volte in cui il 4 è contenuto nel 12, ossia è il risultato della divisione 12:4).

E allo stesso modo, se vogliamo trasformare la frazione $\frac{5}{6}$ in $\frac{\dots}{12}$,
al posto dei puntini dovremo metterci quel numero che è ottenibile a partire dal 5 moltiplicandolo
per lo stesso fattore che a partire dal 6 ci porta a ottenere il 12, ossia il 2
(osserviamo che 2 è il numero di volte in cui il 6 è contenuto nel 12, ossia è il risultato della divisione 12:6).
Ricapitoliamo. Al posto dei puntini ci devono andare, rispettivamente, i risultati di $(12:4)\cdot 7$ e di $(12:6)\cdot 5$

e si giunge alla situazione $\boxed{\frac{7}{4}+\frac{5}{6}} = \cancel{\frac{21}{12}+\frac{10}{12}} = \boxed{\dfrac{\overset{\overset{(12:4)\cdot 7}{\uparrow}}{21} + \overset{\overset{(12:6)\cdot 5}{\uparrow}}{10}}{12}} = \frac{31}{12}$

Il secondo passaggio è stato cancellato perché nella pratica può essere saltato per brevità: quindi in definitiva

per sommare due, o più, frazioni (o sottrarre due frazioni) si scrive una sola frazione, avente a denominatore il cosiddetto “minimo comun denominatore” (m. c. d.) ossia il m. c. m. dei denominatori iniziali e a numeratore la somma (la differenza) fra i numeri determinati “dividendo il denominatore comune per ogni denominatore, e moltiplicando il numero così ottenuto per «ciò che sta sopra»”

La **moltiplicazione di una frazione per un intero** avrà ancora il significato di “somma ripetuta”: $\frac{2}{3}\cdot 5=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$ $\left(\text{dunque è } \frac{2}{3}\cdot 5=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{1}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 1}\right)$

mentre per quanto riguarda la **moltiplicazione di una frazione per un’altra frazione**, osserviamo che ad es. $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}$

è come dire che prendo una porzione da $\frac{1}{4}$, la divido in 5 parti uguali (ottenendo $\frac{1}{20}$), poi ne prendo 3 (ecco $\frac{3}{20}$).

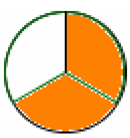
In generale, si vede che è “logico” fissare la **regola** $\boxed{\mathbf{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}}$.

La divisione fra due frazioni (in particolare: fra un intero e una frazione, o viceversa), **si effettua moltiplicando la 1ª frazione per “la 2ª capovolta”**: es. $\frac{2}{5}:\frac{6}{7}=\frac{\cancel{2}}{5}\cdot\frac{7}{\cancel{6}_3}=\frac{7}{15}$. In situazioni semplici come $\frac{1}{3}:2=\frac{1}{3}:\frac{2}{1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$,
il perché si capisce senza fatica: è ovvio che dividere per 2 una “fetta” da 1/3 significa ottenere una “fetta” da 1/6, dunque è corretto affermare che la divisione per $2 = 2/1$ equivalga alla moltiplicazione per 1/2.
Puoi ora cercare di riflettere per conto tuo sulle motivazioni della regola in altri casi meno elementari; vedi anche ⇨;
noi comunque ci ritorneremo sopra più avanti, quando parleremo di “**reciproco**” in un contesto di “numeri relativi”.

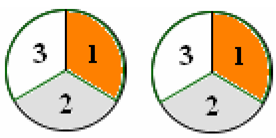
- **Un’ultima osservazione: una frazione $\mathbf{\frac{a}{b}}$ equivale sostanzialmente alla divisione $\mathbf{a:b}$.**

  Prendiamo infatti, ad esempio, la frazione $\frac{2}{3}$; essa equivale alla divisione $2:3$, perché

A) $\frac{2}{3}$ significa:
spezzo un’unità in 3 parti uguali,
poi prendo 2 di queste parti …



B) … ma la quantità così ottenuta è uguale a ciascuna di quelle
che si avrebbero “dividendo 2 unità in 3 parti” (2:3), ossia
prendendo 2 unità e ripartendo questo complesso in 3 parti uguali,
con la finalità di “ripartire equamente la coppia di torte fra 3 persone”.



oppure