7. OPERAZIONI E LORO PROPRIETA' (proprietà che sono valide per tutti i numeri reali!)

♥ PSST … MI RACCOMANDO … QUESTO PARAGRAFO E' DI IMPORTANZA **CAPITALE**!!!

❑ ADDIZIONE O SOMMA

$$\underbrace{8+5}_{\text{addendi}} = \underbrace{13}_{\text{somma}}$$

a) **Proprietà commutativa dell'addizione**:
in una somma, è possibile mutare a piacimento l'ordine degli addendi, e il risultato non cambierà.
$8+5=5+8 \qquad 5+4+3+2+10=10+2+4+5+3$

b) **Proprietà associativa dell'addizione**:
data una somma di più addendi, è possibile, tramite coppie di parentesi,
associare liberamente gli addendi a gruppi, perché così facendo il risultato non cambierà.
$11+25+4=11+(25+4)=11+29=40$

c) **Proprietà dissociativa dell'addizione**:
data una somma di più addendi, alcuni dei quali raggruppati fra parentesi,
si possono sciogliere le parentesi, e il risultato non cambierà.
$5+(4+3)+(2+10)=5+4+3+2+10=24$

❑ MOLTIPLICAZIONE O PRODOTTO

$$\underbrace{8\cdot 5}_{\text{fattori}} = \underbrace{40}_{\text{prodotto}}$$

d) **Proprietà commutativa della moltiplicazione**:
in un prodotto, è possibile mutare a piacimento l'ordine dei fattori, e il risultato non cambierà.
$8\cdot 5=5\cdot 8 \qquad 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 10=10\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 3$

e) **Proprietà associativa della moltiplicazione**:
dato un prodotto di più fattori, è possibile, tramite coppie di parentesi,
associare liberamente i fattori a gruppi, perché così facendo il risultato non cambierà.
$11\cdot 25\cdot 4=11\cdot(25\cdot 4)=11\cdot 100=1100$

f) **Proprietà dissociativa della moltiplicazione**:
dato un prodotto di più fattori, alcuni dei quali raggruppati fra parentesi,
si possono sciogliere liberamente le parentesi, e il risultato non cambierà.
$5\cdot(4\cdot 3)\cdot(2\cdot 10)=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 10=1200$

g) **Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma:**
quando si deve moltiplicare
una somma per un numero (*vedi esempio qui a fianco*),
è possibile, volendo, moltiplicare per quel numero
ogni singolo addendo della somma,
poi addizionare i prodotti parziali così ottenuti.

$(5+4+3)\cdot 2=5\cdot 2+4\cdot 2+3\cdot 2=10+8+6=24$

$10\cdot(15+11)=10\cdot 15+10\cdot 11=150+110=260$

$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+1\right)\cdot 24=\frac{1}{4}\cdot 24+\frac{1}{3}\cdot 24+1\cdot 24=6+8+24=38$

$a\cdot(b+c+d+e)=ab+ac+ad+ae$ (NOTA)

NOTA - A 2° membro abbiamo tralasciato il puntino di moltiplicazione; clicca sulla freccia ⇨ per sapere *quando* si suole sottintenderlo, e comunque basati sugli esempi riportati nel riquadro a destra. Anche nei casi in cui di solito il puntino viene omesso, è però lecito scriverlo ugualmente specie se si desidera *dare risalto* all'idea di moltiplicazione.

Se ho 2 astucci, in ciascuno dei quali ci sono 5 penne, 4 matite e 3 gomme, per contare il numero totale degli oggetti posso procedere in due modi:

a) contare gli oggetti di ciascun astuccio
$5+4+3=12$
poi moltiplicare per 2 il risultato
$\underbrace{(5+4+3)}_{12}\cdot 2$

b) contare prima tutte le penne $5\cdot 2=10$
poi tutte le matite $4\cdot 2=8$
poi tutte le gomme $3\cdot 2=6$
e infine sommare i numeri così ottenuti:
$\underbrace{5\cdot 2}_{10}+\underbrace{4\cdot 2}_{8}+\underbrace{3\cdot 2}_{6}$

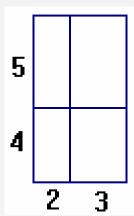
Puntino … sì o no ??? Esempi:
$7\cdot 8,\ 3a,\ a\cdot 3,\ xy,\ 5(x+2),\ (x+2)\cdot 5$

h) **Proprietà distributiva generalizzata:**
quando si deve moltiplicare
una somma per un'altra somma (*vedi esempio a fianco*),
è possibile, volendo, moltiplicare
ciascun addendo della prima somma
per ciascun addendo della seconda,
poi addizionare i prodotti parziali così ottenuti.

$(2+3)\cdot(4+5)=2\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 4+3\cdot 5=...=45$

$(a+b)\cdot(c+d+e)=ac+ad+ae+bc+bd+be$

Per calcolare l'area di questo rettangolo posso procedere in due modi:



a) calcolare subito l'area totale
$\underbrace{(2+3)}_{\textit{base}}\cdot\underbrace{(\ 4+5\ )}_{\textit{altezza}}$

b) oppure calcolare le quattro aree parziali e poi sommare:
$2\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 4+3\cdot 5$

❑ **SOTTRAZIONE** $\underset{\text{minuendo}}{\overset{\uparrow}{\mathbf{8}}} - \underset{\text{sottraendo}}{\overset{\uparrow}{\mathbf{5}}} = \underset{\text{differenza}}{\mathbf{3}}$

La sottrazione è definita come l'operazione inversa dell'addizione.
E' quell'operazione mediante la quale, dati due numeri,
se ne trova un terzo che addizionato al secondo dà come risultato il primo:

$$\mathbf{a - b = c \quad se \;\; c \;\; è\ tale\ che \;\; c + b = a}$$

La sottrazione NON gode

- né della proprietà commutativa $8-5 \neq 5-8$
- né della associativa/dissociativa $\underbrace{(10-7)-1}_{3-1=2} \neq \underbrace{10-(7-1)}_{10-6=4}$

Gode invece della seguente

i) **Proprietà invariantiva della sottrazione:**
in una sottrazione, è possibile, volendo, addizionare o sottrarre uno stesso numero ad entrambi i termini (minuendo e sottraendo), e il risultato non cambierà.

$$\underbrace{43-27}_{16} = \left\langle \begin{array}{l} (43+3)-(27+3) = 46-30 = 16 \\ (43-3)-(27-3) = 40-24 = 16 \end{array} \right.$$

❑ **DIVISIONE** $\underset{\text{dividendo}}{\overset{\uparrow}{\mathbf{24}}} : \underset{\text{divisore}}{\overset{\uparrow}{\mathbf{4}}} = \underset{\text{quoziente}}{\mathbf{6}}$

E' definita come l'operazione inversa della moltiplicazione.
Tramite la divisione, dati due numeri, se ne trova un terzo che moltiplicato per il secondo dà come risultato il primo:

$$\mathbf{a : b = c \quad se \;\; c \;\; è\ tale\ che \;\; c \cdot b = a}$$

La divisione NON gode

- né della proprietà commutativa $24:4 \neq 4:24$
- né della associativa/dissociativa $\underbrace{(48:8):2}_{6:2=3} \neq \underbrace{48:(8:2)}_{48:4=12}$

Gode invece delle seguenti

NOTA - Abbiamo visto che una divisione fra due interi e una frazione sostanzialmente si equivalgono.
Ciò in matematica porta a usare la linea di frazione per indicare divisione, anche con termini non interi.
La parola "frazione" è quindi usata a volte in senso "stretto" (=termini interi, paragrafo 5), a volte in senso"lato" (frazione=divisione, termini qualsiasi).

j) **Proprietà invariantiva della divisione (o delle frazioni in senso "lato", vedi NOTA qui sopra):**
in una divisione (o in una frazione), è possibile, volendo, moltiplicare o dividere per uno stesso numero (purché diverso da 0! La divisione per 0 è una operazione "non eseguibile", vedi pagina successiva) entrambi i termini (dividendo e divisore; numeratore e denominatore), e il risultato non cambierà.

$$\underbrace{30:6}_{5} = \left\langle \begin{array}{l} (30\cdot 2):(6\cdot 2) = 60:12 = 5 \\ (30:2):(6:2) = 15:3 = 5 \end{array} \right. \qquad 3{,}2:0{,}8 = (3{,}2\cdot 10):(0{,}8\cdot 10) = 32:8 = 4 \qquad \frac{21}{28} = \frac{\cancel{21}^{\,3}}{\cancel{28}_{\,4}} \left[\frac{21:7}{28:7}\right]$$

k) **Proprietà distributiva del quoziente rispetto alla somma:**
quando si deve dividere una somma per un numero,
è possibile, volendo, dividere per quel numero ciascun addendo della somma,
poi addizionare i quozienti parziali così ottenuti.

$$(15+21+36):3 = 15:3+21:3+36:3 = 5+7+12 = 24 \qquad \frac{40+12}{16} = \frac{40}{16}+\frac{12}{16}$$

$$(a+b):c = a:c+b:c \;\; \text{o anche} \;\; \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

OCCHIO!!! Invece $\mathbf{\dfrac{c}{a+b} \underset{\text{DA}}{\overset{\text{DIVERSO}}{\neq}} \dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}}$ **!!!!**

l) **"Per moltiplicare, o dividere, un prodotto per un numero …"**
… basta moltiplicare, o dividere, per quel numero, UNO SOLO A SCELTA fra i fattori del prodotto.
In particolare,
quando si deve dividere un prodotto per uno dei suoi fattori, basta sopprimere quel fattore.

$$(7\cdot 5\cdot 4)\cdot 2 = \left\langle \begin{array}{l} 14\cdot 5\cdot 4 \\ 7\cdot 10\cdot 4 \\ 7\cdot 5\cdot 8 \end{array} \right. \qquad (10\cdot 12):2 = \left\langle \begin{array}{l} 5\cdot 12 \\ 10\cdot 6 \end{array} \right. \qquad (7\cdot 5\cdot 3):5 = 7\cdot 1\cdot 3 = 7\cdot 3$$

❑ LA "DIVISIONE INTERA"

Così viene chiamata la divisione fra due interi, quando non si accetta un risultato frazionario, ma si vuole invece un "quoziente intero" e un resto (vedi pagina 114 per approfondimenti).

Se a, b sono due interi (con $b \neq 0$), e si intende che il simbolo "**:**" indichi DIVISIONE INTERA, allora

♥ $$\underbrace{\mathbf{a:b}}_{\substack{\textbf{divisione}\\ \textbf{intera}}} \mathbf{= c} \quad \text{quando è} \quad \mathbf{c \cdot b + r = a}, \ \ \textbf{con } \mathbf{r < b} \quad \mathbf{(a, b, c, r \ \ interi, \ \ b \neq 0)}$$

Notare l'**IMPORTANTISSIMA** condizione $\mathbf{r<b}$: **il resto dev'essere sempre minore del divisore**.
Ad esempio, è giusto scrivere che $23:5=4$ (col resto di 3) perché $4 \cdot 5+3=23$, ed è $3<5$.

❑ LA "LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO"

Prende il nome di "legge di annullamento del prodotto" la proposizione (= affermazione) seguente:

♥ **"Se almeno uno dei fattori di un prodotto è 0, allora il prodotto vale 0;
e viceversa, se un prodotto è uguale a 0, allora sarà uguale a 0 almeno uno dei fattori".**

❑ GLI "ELEMENTI NEUTRI" DELLA SOMMA E DEL PRODOTTO

Si dice che **lo zero (0) è "l'elemento neutro** (= ininfluente) **della somma"**
per indicare che, sommato a qualsiasi numero, lo lascia invariato: $\forall x, \ x+0=x$ ($\forall$ significa "per ogni").

Si dice che il numero **1 è "l'elemento neutro del prodotto"**
per indicare che, moltiplicato per qualsiasi numero, lo lascia invariato: $\forall x, \ x \cdot 1 = x$.

In relazione al prodotto, 0 si comporta invece da "elemento assorbente", perché $\forall x, \ x \cdot 0 = 0$.
Osserviamo a proposito che **l'operazione di addizione non possiede alcun "elemento assorbente"**.

❑ IL PROBLEMA DELLA DIVISIONE PER ZERO

La **divisione** (stiamo ora parlando della divisione "ordinaria", NON della "divisione intera") è definita come **l'operazione inversa della moltiplicazione**, ossia come l'operazione per cui, dati due numeri a, b, si trova quel terzo numero c il quale, se moltiplicato per b, restituisce come risultato a.

$$\mathbf{a:b=c} \quad \text{se c è quel numero tale che} \quad \mathbf{c \cdot b = a}$$

♥ Consideriamo ora, ad esempio, la divisione $1:0$.
Essa "ci chiede" di determinare un numero tale che, moltiplicato per 0, dia come risultato 1;
ma un numero siffatto NON ESISTE, in quanto ogni numero, quando viene moltiplicato per 0, dà sempre risultato 0 e quindi non potrà mai dare 1.
Perciò l'operazione $1:0$ è IMPOSSIBILE, ossia PRIVA DI RISULTATO.
E' ovvio che alla stessa conclusione saremmo giunti considerando le operazioni 5:0; 7:0; 4,21:0; …

♥ Se invece consideriamo l'operazione $0:0$, questa "ci chiede" di determinare un numero tale che, moltiplicato per 0, dia come risultato 0; ma QUALSIASI numero gode di questa proprietà!
Perciò l'operazione $0:0$ è INDETERMINATA, nel senso che non ha un risultato ben determinato, ma potrebbe avere **infiniti** risultati, perché qualunque numero potrebbe "pretendere" di esserne il risultato.

♥ Infine, 0:1=0 (operazione "normale"; esiste uno e un sol numero che moltiplicato per 1 dia 0, ed è lo 0)

RIASSUNTO

Indicato con a un qualsiasi numero non nullo,

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a:0=\frac{a}{0}= IMPOSSIBILE} \\ \mathbf{0:0=\frac{0}{0}= INDETERMINATA} \end{array}\right] \ \textbf{operazioni "non eseguibili", in inglese "ILLEGAL" (= illecite)}$$

$$\mathbf{0:a=\frac{0}{a}=0}$$

❑ 1/0 UGUALE "INFINITO" ???

Forse da qualche parte ti sarà capitato di leggere che $\frac{1}{0}=\infty$ (il simbolo ∞ sta per "infinito").

La scrittura $1/0=\infty$ *va correttamente interpretata.*
Essa compare nello studio dei "limiti" (a livello pre-universitario), e comunque, semplificando un poco, si può dire che è sostanzialmente un modo conciso per esprimere il concetto seguente:

Se prendiamo una frazione che abbia 1 a numeratore, e facciamo "tendere a zero il denominatore", ossia facciamo assumere al denominatore valori piccolissimi, vicinissimi a zero, allora il risultato assumerà valori grandissimi, "tendenti a infinito".

$$\frac{1}{0,1}=\frac{1}{\frac{1}{10}}=1 \cdot 10=10 \qquad \frac{1}{0,01}=100 \qquad \frac{1}{0,001}=1000 \qquad \frac{1}{0,000001}=1000000 \qquad \text{ecc. ecc.}$$