B) PROPRIETA' DELLE POTENZE (♥ paragrafo **FONDAMENTALE!!!**)

1) $5^4 \cdot 5^3 = (5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5\cdot 5) \overset{\text{proprietà dissociativa}}{=} 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 5^7$ Quindi $\boxed{5^4 \cdot 5^3} = 5^7 = \boxed{5^{4+3}}$

Proprietà ADDITIVA DEGLI ESPONENTI $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

Il prodotto di due potenze aventi la stessa base è una potenza
che ha per base la stessa base, e per esponente la somma degli esponenti.

Dimostrazione (NOTA):

$$a^m \cdot a^n = (\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{m\ \text{fattori}})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{fattori}}) \overset{\text{dissociativa}}{=} \underbrace{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{m\ \text{fattori}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{fattori}}}_{m+n\ \text{fattori}} = a^{m+n}$$

La proprietà continua a valere anche con più di due fattori. Es. $7^5 \cdot 7^2 \cdot 7^3 = 7^{10}$

NOTA
La catena riportata all'inizio non è una vera "dimostrazione" perché si riferisce a un caso specifico: una "dimostrazione" deve invece avere carattere generale.

2) $7^6 : 7^2 = \dfrac{7^6}{7^2} = \dfrac{7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7}{7\cdot 7} \overset{\text{proprietà invariantiva}}{=} \dfrac{\cancel{7}\cdot\cancel{7}\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7}{\cancel{7}\cdot\cancel{7}} = 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7 = 7^4$ Quindi $\boxed{7^6 : 7^2} = 7^4 = \boxed{7^{6-2}}$

Proprietà SOTTRATTIVA DEGLI ESPONENTI $\boxed{a^m : a^n = a^{m-n}\ \text{opp.}\ \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ \ (m > n)}$

Il quoziente di due potenze aventi la stessa base è una potenza
che ha per base la stessa base, e per esponente la differenza degli esponenti.

Dimostrazione: $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}^{m\ \text{fattori}}}{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{fattori}}} \overset{\text{proprietà invariantiva}}{=} \dfrac{\overbrace{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\ldots\cdot\cancel{a}}^{\substack{n\ \text{fattori} \\ \text{se ne vanno...}}}\ \overbrace{\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{\substack{\text{sopravvivono} \\ m-n\ \text{fattori}}}}{\underbrace{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\ldots\cdot\cancel{a}}_{n\ \text{fattori}}} = a^{m-n}$

3) $\left(5^4\right)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 \overset{\text{additiva degli esponenti}}{=} 5^{4+4+4} = 5^{12}$

oppure:

$$\left(5^4\right)^3 = (5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)^3 = (5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5) \overset{\text{dissociativa}}{=} 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 5^{12}$$

Quindi: $\boxed{\left(5^4\right)^3} = 5^{12} = \boxed{5^{4\cdot 3}}$

Proprietà MOLTIPLICATIVA DEGLI ESPONENTI $\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{mn}}$

La potenza di una potenza è una potenza
che ha per base la stessa base, e per esponente il prodotto degli esponenti.

Dimostrazione 1

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\ldots\cdot a^m}_{n\ \text{fattori}} \overset{\text{additiva degli esponenti}}{=} a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n\ \text{addendi}}} = a^{m\cdot n}$$

La proprietà si può "iterare"
(=applicare ripetutamente).

Es. $\left[\left(5^2\right)^3\right]^2 = 5^{12}$

Dimostrazione 2

$$\left(a^m\right)^n = (\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{m\ \text{fattori}})^n =$$

$$= \underbrace{(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{m\ \text{fattori}})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{m\ \text{fattori}})\cdot\ldots\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{m\ \text{fattori}})}_{n\ \text{gruppi}} \overset{\text{diss.}}{=}$$

$$= \underbrace{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{m\ \text{fattori}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{m\ \text{fattori}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{m\ \text{fattori}}}_{n\ \text{gruppi di}\ m\ \text{fattori ciascuno} = m\cdot n\ \text{fattori}} = a^{m\cdot n}$$

4) $(7\cdot5)^3=(7\cdot5)\cdot(7\cdot5)\cdot(7\cdot5)\overset{\text{dissociativa}}{=}7\cdot5\cdot7\cdot5\cdot7\cdot5\overset{\text{commutativa}}{=}7\cdot7\cdot7\cdot5\cdot5\cdot5\overset{\text{associativa}}{=}(7\cdot7\cdot7)\cdot(5\cdot5\cdot5)=7^3\cdot5^3$

Quindi $\boxed{(7\cdot5)^3=7^3\cdot5^3}$

Proprietà relativa alla POTENZA DI UN PRODOTTO $\boxed{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^{\mathbf{n}}=\mathbf{a}^{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{b}^{\mathbf{n}}}$

La potenza di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori.

Dimostrazione:

$$(a\cdot b)^n=\underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)}_{n\ \text{fattori}\ (a\cdot b)}\overset{\text{dissociativa}}{=}\underbrace{a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot\ldots\cdot a\cdot b}_{n\ \text{fattori}\ a,\ n\ \text{fattori}\ b}=$$

$$\overset{\text{commutativa}}{=}\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{fattori}\ a}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ \text{fattori}\ b}\overset{\text{associativa}}{=}(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{fattori}\ a})\cdot(\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ \text{fattori}\ b})=a^n\cdot b^n$$

I fattori possono essere anche più di due. Es. $(3\cdot5\cdot7)^2=3^2\cdot5^2\cdot7^2$

5) $(7:5)^3=\left(\frac{7}{5}\right)^3=\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{5}=\frac{7\cdot7\cdot7}{5\cdot5\cdot5}=\frac{7^3}{5^3}=7^3:5^3$ Quindi: $\boxed{(7:5)^3=7^3:5^3}$

Proprietà relativa alla POTENZA DI UN QUOZIENTE $\boxed{(\mathbf{a}:\mathbf{b})^{\mathbf{n}}=\mathbf{a}^{\mathbf{n}}:\mathbf{b}^{\mathbf{n}}\ \text{opp.}\ \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}}=\frac{\mathbf{a}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{b}^{\mathbf{n}}}}$

La potenza di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze del dividendo e del divisore.

Dimostrazione: $$(a:b)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\ \text{fattori}\ a/b}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\ \text{fattori}\ a}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ \text{fattori}\ b}}=\frac{a^n}{b^n}=a^n:b^n$$

6) La proprietà 6) è l'inversa della 4): $\boxed{\mathbf{a}^{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{b}^{\mathbf{n}}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^{\mathbf{n}}}$

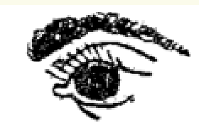
Non c'è quindi bisogno di dimostrazione, perché è già stata dimostrata la 4), che è poi la stessa uguaglianza, seppure scritta al rovescio

IL PRODOTTO DI DUE (o più) POTENZE CON LO STESSO ESPONENTE
è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente, e per base il prodotto delle basi.

7) La proprietà 7) è l'inversa della 5): $\boxed{\mathbf{a}^{\mathbf{n}}:\mathbf{b}^{\mathbf{n}}=(\mathbf{a}:\mathbf{b})^{\mathbf{n}},\quad\frac{\mathbf{a}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{b}^{\mathbf{n}}}=\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}}}$

IL QUOZIENTE DI DUE POTENZE CON LO STESSO ESPONENTE
è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente, e per base il quoziente delle basi.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE
Non c'è nessuna proprietà delle potenze
che si possa applicare
nel caso di una SOMMA
o di una DIFFERENZA
di potenze !!!



OCCHIO, quindi, a non applicare … proprietà inesistenti !!!

$2^3+2^4=8+16=24$

$2^3+10^3=8+1000=1008$

Sarebbe GRAVE ERRORE
svolgere il calcolo diversamente da così !

RISPOSTE AI QUESITI DI PAG. 15 Clicca sulla freccia per la **motivazione delle risposte** ⇨

a) $3^{13}=1594323$ se le partite sono 13, $3^{14}=4782969$ se le partite sono 14.

b) $2^8=256$ c) $21000000000000000000\ \text{km}=21\cdot10^{18}\ \text{km}=2{,}1\cdot10^{19}\ \text{km}$