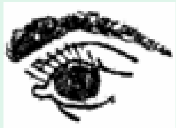
11. VARIE ...

IL GENIALE ALGORITMO (*) DI EUCLIDE PER IL CALCOLO DEL M.C.D.



Siano a, b i due interi di cui vogliamo determinare il Massimo Comun Divisore.
Calcoliamo il resto r della divisione intera $a:b$,
poi sostituiamo la coppia (a, b) con la coppia (b, r):
$a \leftarrow b, \; b \leftarrow r$ (cioè: b prende il posto di a, e a sua volta r prende il posto di b).
Si può dimostrare che il M.C.D. della "nuova" coppia coincide col M.C.D. della "vecchia".
Iteriamo (= ripetiamo) il procedimento per la nuova coppia; prima o poi, poiché operando in questo modo il "b", nella sua evoluzione, diventa sempre più piccolo, si arriverà ad avere $b = 0$.
Quando ciò accadrà, essendo M.C.D. $(a, 0) = a$, il valore che avrà a in quel momento sarà il M.C.D. cercato.

Esempio:

$a = 108, \; b = 84$
$108 : 84 = 1 \; col \; resto \; di \; 24 \to r = 24$
$a = \cancel{108}84, \; b = \cancel{84}24$
$84 : 24 = 3 \; col \; resto \; di \; 12 \to r = 12$
$a = \cancel{84}24, \; b = \cancel{24}12$
$24 : 12 = 2 \; con \; resto \; 0 \to r = 0$
$a = \cancel{24}12, \; b = \cancel{12}0$
$Essendo \; b = 0, \; il \; procedimento \; termina: \; M.C.D. = a = 12$

Schematicamente:

$a = 108,$	$b = 84$	$r = 24$
$a = 84,$	$b = 24$	$r = 12$
$a = 24,$	$b = 12$	$r = 0$
$a = 12,$	$\boxed{b = 0}$	$STOP$
		$\downarrow$
		M.C.D. $= 12$

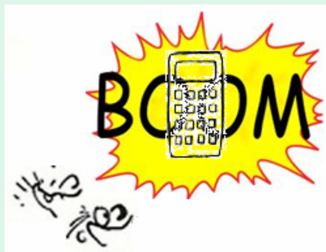
(*) Un "**algoritmo**" (ne riparleremo, in modo più approfondito, nel Volume 2), è una **sequenza di istruzioni, di "passi", il cui scopo è la risoluzione di un problema di carattere generale**.
Le istruzioni di un algoritmo devono essere
- in numero finito, e concretamente eseguibili in un tempo finito;
- prive di ambiguità sia riguardo al contenuto che all'ordine di esecuzione.

ESERCIZIO

1) Serviti dell'Algoritmo di Euclide per determinare i seguenti M.C.D.
Ricontrolla i risultati mediante scomposizione in fattori.
a) M.C.D.(80, 35) b) M.C.D.(60, 135) c) M.C.D.(160, 104) d) M.C.D.(54, 144) e) M.C.D.(719, 520)

LA DISTRIBUTIVA E IL RIPOSO DELLA MACCHINETTA

La proprietà distributiva è davvero utilissima per il *calcolo mentale*!
Supponi di dover svolgere la moltiplicazione $37 \cdot 102$.
Allora potrai costruire, nel tuo pensiero, la catena
$37 \cdot 102 = 37 \cdot (100 + 2) = 37 \cdot 100 + 37 \cdot 2 = 3700 + 74 = 3774$
dove, fra l'altro, l'operazione $37 \cdot 2$ potrà essere effettuata anch'essa, volendo, come $(35 + 2) \cdot 2 = 70 + 4 = 74$ oppure come $(30 + 7) \cdot 2 = 60 + 14 = 74$.



ESERCIZIO

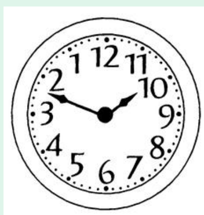
2) Prova a svolgere a mente, col metodo appena illustrato, i calcoli che seguono:
$43 \cdot 12 \; (12 = 10 + 2); \quad 41 \cdot 25 \; (41 = 40 + 1); \quad 82 \cdot 11; \quad 44 \cdot 22; \quad 103 \cdot 72; \quad 25 \cdot 33$

ESERCIZIO

3) A ben guardare, anche in una "normale" moltiplicazione fatta per iscritto col noto schema, la proprietà distributiva gioca un ruolo essenziale …
Immagina ad esempio di svolgere l'operazione $654 \cdot 321$ (vedi qui a fianco $\to$)
Ti sei mai chiesto a cosa si devono quei rientri verso sinistra
- del 1308 (un posto)
- e poi del 1962 (due posti)?

			6	5	4	×
			3	2	1	=
			6	5	4	
	1	3	0	8	–	
1	9	6	2	–	–	
2	0	9	9	3	4	

LA BIZZARRA "ARITMETICA DELL'OROLOGIO"



Sono trascorse 3 ore dalle 11; che ora segna l'orologio del campanile adesso?
Nell' "aritmetica dell'orologio" $11 \oplus 3 = 2$.
A partire dalle ore 0, passano 5 turni di 4 ore ciascuno. Che ora segnano le lancette?
Nell' "aritmetica dell'orologio" $5 \otimes 4 = 8$.

ESERCIZIO

4) Spiega in che senso nell' "aritmetica dell'orologio" NON vale la "legge di annullamento del prodotto".

FRAZIONI PROPRIE, IMPROPRIE, APPARENTI

Una frazione si dice

- "propria" se il suo numeratore è minore del denominatore, ossia se il suo valore è <1
- "impropria" se il suo numeratore è maggiore del denominatore, ossia se il suo valore è >1
- "apparente" se il suo numeratore è multiplo del denominatore (oppure è 0).
  Una frazione apparente equivale quindi a un numero intero.

NOTA

Va detto che, riguardo a queste semplici definizioni, non tutti i libri scolastici in realtà dicono proprio le stesse cose.
Ad esempio, qualcuno afferma che sia da considerare "impropria" anche una frazione col numeratore *uguale* al denominatore, quindi equivalente all'unità.
Per il nostro testo, e per altri, una frazione come (ad esempio) 14/7 è sia impropria che apparente, mentre c'è chi per frazione "impropria" intende "con numeratore maggiore *e non multiplo* del denominatore".
E una frazione con numeratore 0, quindi di valore uguale a 0, andrà considerata anch'essa "apparente"?
Mah … Noi abbiamo fatto questa scelta, tuttavia consultando vari testi il "mistero" rimane, in quanto si tende ad evitare di affrontare la questione.
D'altronde, abbiamo pure detto che per "multipli di 5" si devono intendere i numeri $5, 10, 15, 20$, ecc. mentre da qualche parte si legge che fra i multipli di un intero c'è sempre anche lo 0
(cosa che, a nostro parere, sembra del tutto bislacca, tant'è vero che, se la si accettasse, per coerenza si sarebbe costretti ad ammettere che il minimo comune multiplo fra due interi qualsiasi … è sempre 0!).
Ah, questi matematici …
… Si mettessero un po' d'accordo, eviterebbero qualche stress in più ai nostri poveri ragazzi!

ESERCIZI (*numero "assoluto" = numero "senza segno". Si contrappone a "relativo" = "con segno"*)

5) Per quali valori interi (assoluti) di x la frazione $\dfrac{3+x}{6}$ è a) propria? b) impropria? c) apparente?

6) Per quali valori interi (assoluti) di y la frazione $\dfrac{6}{3+y}$ è a) propria? b) impropria? c) apparente?

PAROLE, ESPRESSIONCINE, PARENTESI (FORSE)

ESERCIZI

7) Scrivi, inserendo correttamente le parentesi *soltanto se strettamente necessario*, le espressioni *aritmetiche* che corrispondono alle espressioni *verbali* seguenti:
   a) "Somma al numero 58 il prodotto fra 13 e 14"
   b) "Sottrai dal prodotto di 11 e 19, la somma fra 45 e 54"
   c) "Addiziona il prodotto fra 13 e 12 col quoziente fra 24 e 4"
   d) "Moltiplica 5 per la somma fra 7 e 9"
   e) "Moltiplica la somma dei due numeri 12 e 8, per la differenza degli stessi numeri"
   f) "Eleva al quadrato la somma dei quadrati dei numeri 2 e 3, e dividi il risultato per la somma fra 14 e 26"

RISPOSTE

3) Gli spostamenti verso sinistra della seconda riga di un posto, e della terza di due, sono semplicemente dovuti al fatto che

$$654\cdot321=654\cdot(300+20+1)=654\cdot300+654\cdot20+654\cdot1=$$
$$=(654\cdot3)\cdot\underbrace{100}_{*}+(654\cdot2)\cdot\underbrace{10}_{**}+654\cdot1$$

$*$ *moltiplicazione per* 100: *spostamento di due posti a sinistra, come se si aggiungessero due zeri alla fine*

$**$ *moltiplicazione per* 10: *spostamento di un posto a sinistra, come se si aggiungesse uno zero alla fine*

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 6 & 5 & 4 \; \times \\
 & & & 3 & 2 & 1 \; = \\
\hline
 & & & 6 & 5 & 4 \\
 & 1 & 3 & 0 & 8 & (0) \\
1 & 9 & 6 & 2 & (0) & (0) \\
\hline
2 & 0 & 9 & 9 & 3 & 4
\end{array}$$

4) La "legge di annullamento del prodotto", valida nella "normale" aritmetica, afferma che *se il risultato di una moltiplicazione è 0, allora necessariamente almeno uno dei fattori deve essere 0.* Invece *nell'aritmetica dell'orologio ciò non è vero* perché, ad esempio, è $3\otimes4=0$

5) a) 0, 1, 2 b) 4, 5, 6, 7 ecc. c) 3, 9, 15, 21 ecc. 6) a) 4, 5, 6, 7 ecc. b) 0, 1, 2 c) 0, 3

7) a) $58+13\cdot14$ b) $11\cdot19-(45+54)$ c) $13\cdot12+24:4$ d) $5\cdot(7+9)$ e) $(12+8)\cdot(12-8)$ f) $(2^2+3^2)^2:(14+26)$