

3. SOMMA, DIFFERENZA, QUESTIONI VARIE RIGUARDANTI I SEGNI

□ SOMMA

♥ La **somma di due numeri relativi** è quell'operazione che si esegue interpretando i **numeri positivi** come **soldi guadagnati**, i **numeri negativi** come **soldi persi**, e pensando a un **totale**.

1° numero <i>a</i>	2° numero <i>b</i>	somma <i>a + b</i>
-7	-5	-12
+4	+11	+15
-20	+6	-14
-8,1	+10,3	+2,2

Con linguaggio più propriamente matematico, possiamo dire che

- quando i due numeri sono **CONCORDI** (cioè, hanno lo stesso segno), la loro somma è quel numero che ha

♪ come segno lo **STESSO SEGNO** degli addendi,
 ♪ e come valore assoluto la **SOMMA** dei loro valori assoluti

es. $-15 + (-6) = -21$ $+10 + (+9) = +19$ $-3,6 + (-2,31) = -5,91$

- quando i due numeri sono **DISCORDI** (ossia, hanno segni opposti), la loro somma è quel numero che ha

♪ come segno il **SEGNO DELL'ADDENDO "PREVALENTE"** (= con val. ass. maggiore)
 ♪ e come valore assoluto la **DIFFERENZA** fra i valori assoluti degli addendi

es. $-30 + (+12) = -18$ $-9 + (+25) = +16$ $+3,2 + (-10,3) = -7,1$

- la **somma di due numeri opposti** (come $+5$ e -5) è zero.

Clicca sulla freccia



per una
descrizione
della regola
in Inglese

Si può dimostrare che l'operazione così definita gode delle proprietà commutativa, associativa e dissociativa

Abbiamo dunque visto che per sommare due numeri relativi, non sempre bisogna effettuare una somma nel senso usuale della parola, perché se i due numeri sono discordi in realtà bisogna effettuare (fra i loro moduli) una *sottrazione*.

♥ Per questo motivo, quando si parla di somma di due o più numeri relativi, anziché usare semplicemente la parola "somma"

si preferisce usare la locuzione "**SOMMA ALGEBRICA**": proprio per indicare che non sempre si tratta di una "somma" nel senso in cui la parola "somma" è intesa comunemente.

♥ Ricordiamo, infine, che un modo di eseguire mentalmente la **somma algebrica** è il seguente:

→ un addendo **POSITIVO** mi dice di "contare in **AVANTI**",
ossia di "**PROCEDERE IN VERSO POSITIVO SULL'ASSE DELLE ASCISSE**";

← un addendo **NEGATIVO** mi dice di "contare all'**INDIETRO**", di "scalare delle unità",
cioè di "**PROCEDERE IN VERSO NEGATIVO SULL'ASSE DELLE ASCISSE**".

Ad esempio, eseguire la somma algebrica $-5 + (-7)$ vuol dire partire dal primo addendo (-5), che si immagina rappresentato sull'asse delle ascisse, e poi spostarsi a *sinistra* (dato che in questo caso il secondo addendo è *negativo*) di 7 unità. Si giunge così al numero -12 .

Per **indicare la somma algebrica di due o più numeri relativi**, in teoria dovrei fare così:

se ad es. devo indicare la somma algebrica dei numeri $-4, -7, +20, -2$ dovrei scrivere

$$-4 + (-7) + (+20) + (-2),$$

cioè dovrei racchiudere ciascun numero relativo (ad eccezione, volendo, del primo) entro parentesi:
e questo perché **in Matematica si considera scorretto scrivere due segni uno di seguito all'altro**.

In pratica, però,

♥ quando si vuole **INDICARE LA SOMMA ALGEBRICA** di due o più numeri relativi, si usa scrivere questi numeri relativi uno di seguito all'altro coi rispettivi segni, senza parentesi:

$$-4 + (-7) + (+20) + (-2) = -4 - 7 + 20 - 2; \quad -23 + (+5) = -23 + 5; \quad 12 + (-68) = 12 - 68$$

In virtù di questa **convenzione**, di questo accordo fra i matematici, motivato da esigenze di brevità, resta allora fissata la seguente **REGOLA**:

♥

+	davanti a	+	dà	+
+	davanti a	-	dà	-

In breve: un segno + davanti a un altro segno lascia invariato quest'ultimo.

□ DIFFERENZA

*Sottrarre una perdita
è come aggiungere un guadagno,
e sottrarre un guadagno
è come aggiungere una perdita* ⇨

♥ **SOTTRARRE un numero relativo
equivale ad ADDIZIONARE
ALGEBRICAMENTE L'OPPOSTO
di quel numero** ⇨

1° numero a	2° numero b	differenza $a - b$
+8	-10	$+8 - (-10) = +8 + 10 = +18$
-6	-2	$-6 - (-2) = -6 + 2 = -4$
-4	+3	$-4 - (+3) = -4 - 3 = -7$
+11	+20	$+11 - (+20) = +11 - 20 = -9$

Resta dunque stabilita la **REGOLA**:

♥
- davanti a + dà -
- davanti a - dà +

**In breve: un segno - davanti a un altro segno
muta quest'ultimo nel segno opposto.**

A Dal punto di vista matematico, è più corretto presentare l'operazione di sottrazione
P fra numeri relativi **in modo astratto**, senza parlare di debiti e crediti. Vediamo come.

P
R Innanzitutto, occorre ricordare che in Matematica
O la "sottrazione" è definita come l'operazione inversa dell'addizione.

F La sottrazione è dunque l'operazione mediante la quale, dati due numeri,
O se ne trova un terzo che addizionato al secondo dà come risultato il primo.

N Insomma: $a - b = c$ se c è tale che $c + b = a$.

D Vogliamo dimostrare che la differenza $a - b$ è data dalla somma algebrica $a + b'$
I (essendo b' l'opposto di b , ossia essendo $b' + b = 0$).

E Dovremo far vedere che prendendo il numero $a + b'$,
N e addizionandogli algebricamente b ,
T si ottiene come risultato a .

O In effetti: $(a + b') + b = a + (b' + b) = a + 0 = a$, come volevasi dimostrare.

□ OSSERVAZIONI SU:

- L'OPPOSTO DI UN NUMERO RELATIVO;
- LA REGOLA PER LO SCIoglimento DELLE PARENTESI
PRECEDUTE DA UN SEGNO + O DA UN SEGNO -

Nell'ambito di una sottrazione fra numeri relativi, il segno "-" di sottrazione
provoca dunque l'effetto di cambiare il segno del numero che lo segue.

♥ Si è affermata allora, fra i matematici, l'abitudine di usare **IL SEGNO "-" davanti a un numero
ANCHE AL DI FUORI DELL'OPERAZIONE DI SOTTRAZIONE**,
e precisamente **QUANDO SI VUOLE INDICARE L'OPPOSTO** del numero in questione.

Quindi avremo, per esempio, $-(-9) = +9$; $-(+1/4) = -1/4$ e così via.

In generale,

per indicare l'opposto di un numero indicato con la lettera a , si userà il simbolo $-a$.



ATTENZIONE!

♥ Quando, in un'espressione letterale, si incontra il simbolo $-a$,
non si deve pensare, vedendo il -, che tale simbolo rappresenti per forza un numero negativo:

$-a$ rappresenta l'opposto di a , per cui

- se a è positivo, $-a$ è negativo,
- ma se a è negativo, $-a$ è positivo.

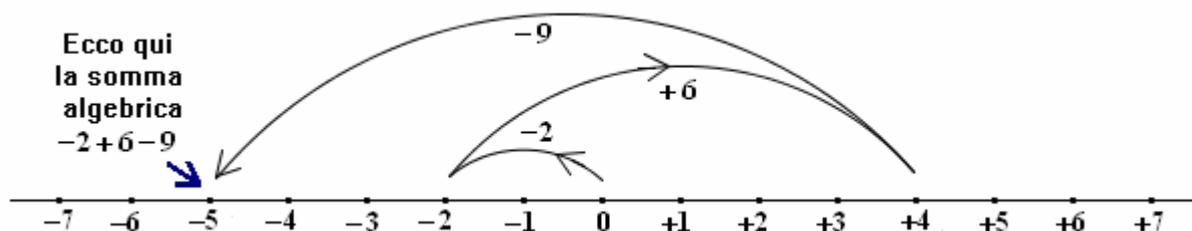
Ad esempio, per $a = -5$, avremo $-a = -(-5) = +5$

La scrittura $-(-2+6-9)$ indica
l'opposto del numero, che è il risultato della somma algebrica $-2+6-9$.
Ora, è facile convincersi che $-(-2+6-9) = +2-6+9$, ossia:

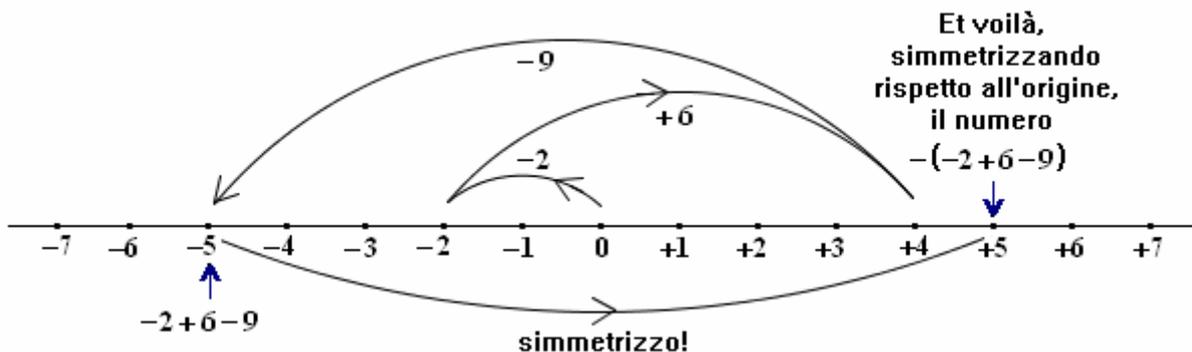
**"L'OPPOSTO DI UNA SOMMA ALGEBRICA
è uguale alla SOMMA ALGEBRICA DEGLI OPPOSTI".**

Un modo suggestivo per giustificare la verità di questa affermazione è il seguente
(ci riferiremo per meglio fissare le idee all'esempio fatto,
ma ne verrà fuori un ragionamento di carattere generale).

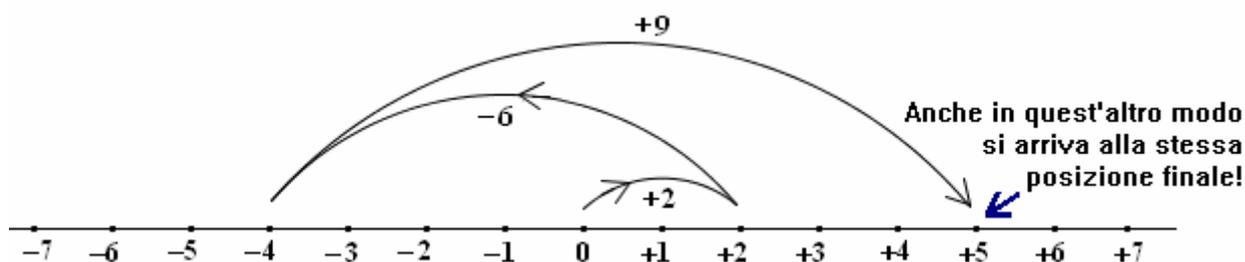
- ♪ Abbiamo visto che una somma algebrica si può pensare come effettuabile tramite successivi spostamenti sull'asse delle ascisse (verso destra, quando l'addendo è positivo, verso sinistra quando è negativo); quindi possiamo pensare di effettuare il calcolo $-2+6-9$ tramite tre saltelli successivi: **sinistra 2 poi destra 6 poi sinistra 9** (s'intende: a partire dall'origine)



- ♪ Ora, a partire da $-2+6-9$, dobbiamo **passare all'opposto** $-(-2+6-9)$; e fare l'opposto di un numero relativo significa, geometricamente, prendere tale numero e passare al suo **"simmetrico rispetto all'origine"**



- ♪ Però è evidente che **si arriverebbe alla stessa posizione finale** (nel nostro esempio, +5) anche ricominciando da capo e prendendo i medesimi addendi, ma ciascuno col segno opposto, cosicché ogni singolo movimento venga effettuato nel verso opposto: a partire dall'origine, **destra 2 poi sinistra 6 poi destra 9**



Resta così acquisita la regola che dice:

♥ SE UN SEGNO -, USATO PER INDICARE "L'OPPOSTO DI",
SI TROVA DAVANTI AD UNA PARENTESI CONTENENTE UNA SOMMA ALGEBRICA,
ALLORA E' LECITO SCIOGLIERE LA PARENTESI, CAMBIANDO TUTTI I SEGNI.

□ LA REGOLA PER LO SCIOGLIMENTO DI UNA PARENTESI, CONTENENTE UN NUMERO RELATIVO OPPURE UNA SOMMA ALGEBRICA, PRECEDUTA DA UN SEGNO + O DA UN SEGNO - ; UNA GIUSTIFICAZIONE ESAURIENTE E COMPLETA

SE HO UN SEGNO - DAVANTI A UNA PARENTESI CHE CONTIENE UN NUMERO RELATIVO, OPPURE UNA SOMMA ALGEBRICA, POSSO SCIOGLIERE LA PARENTESI CAMBIANDO PERO' DI SEGNO TUTTI I NUMERI ENTRO PARENTESI.

SE HO UN SEGNO + DAVANTI A UNA PARENTESI CHE CONTIENE UN NUMERO RELATIVO, OPPURE UNA SOMMA ALGEBRICA, POSSO SCIOGLIERE LA PARENTESI SENZA CAMBIARE NESSUN SEGNO.

La giustificazione della regola è piuttosto elaborata, e, contrariamente a quanto si sarebbe tentati di pensare, NON è già stata data, perché bisogna considerare **tutte** le diverse situazioni che si possono presentare; ora, nelle pagine precedenti, abbiamo già preso in esame qualcuno dei casi, ma non la totalità! Coraggio, dunque:

A	$-5 + (-7) = -5 - 7$	In questo caso, il + centrale indica somma algebrica e, come abbiamo già detto, la comunità dei matematici ha stabilito una convenzione secondo la quale, quando si vuole indicare la somma algebrica di due o più numeri relativi, si potranno scrivere questi numeri relativi uno di seguito all'altro coi rispettivi segni, senza introdurre parentesi.
B	$-5 - (-7) = -5 + 7$	In questo caso, il - centrale indica sottrazione e, come abbiamo già visto, sottrarre un numero relativo equivale ad aggiungere algebricamente l'opposto. Quindi $-5 - (-7) = -5 + (+7)$ ma anziché $-5 + (+7)$ è possibile, per brevità, scrivere semplicemente $-5 + 7$ in virtù della convenzione appena ricordata al precedente punto A).
C	$-(-7) = +7$	In questo caso, il - davanti al (-7) non è un - di sottrazione, ma indica invece che "si vuole considerare l'opposto del numero (-7)"; e l'opposto di un numero relativo è il numero che si ottiene cambiando il segno e lasciando invariato il valore assoluto.
D	$+(-7) = -7$	In questo caso, il + davanti al (-7) non indica niente di particolare; ribadisce soltanto che si vuole considerare proprio il numero (-7), senza passare all'opposto. Quindi, quando troviamo scritto $+(-7)$, potremo senza indugio scrivere semplicemente -7 .
E	$+(-9+14-11) = -9+14-11$	Vedi il precedente caso D): è la stessa cosa.
F	$-(-9+14-11) = +9-14+11$	Il - davanti alla parentesi indica qui "passaggio all'opposto"; e, come è stato ben spiegato nella pagina precedente, l'opposto di una somma algebrica è uguale alla somma algebrica degli opposti.
G	$-4 + (-9 + 14 - 11) = -4 - 9 + 14 - 11$	Il + davanti alla parentesi indica, in questo caso, somma algebrica; e abbiamo già puntualizzato che la somma algebrica gode delle proprietà associative e dissociative. La proprietà dissociativa è proprio quella che qui giustifica la possibilità di eliminare la parentesi, lasciando invariati i segni.
H	$-4 - (-9 + 14 - 11) = -4 + 9 - 14 + 11$	Il - davanti alla parentesi indica, in questo caso, sottrazione; è noto che sottrarre un numero relativo equivale ad aggiungere algebricamente l'opposto; e l'opposto di una somma algebrica (vedi pagina precedente) è uguale alla somma algebrica degli opposti. Quindi $-4 - (-9 + 14 - 11) = -4 + (+9 - 14 + 11)$; infine, $-4 + (+9 - 14 + 11) = -4 + 9 - 14 + 11$, come già visto (caso G)

Occhio al caso in cui la parentesi è elevata ad esponente, e preceduta dal segno -; qui è indispensabile tenere presente che l'elevamento a potenza ha la priorità.

Esempio: $-(-5)^2 = -(+25) = -25$