4. PRODOTTO DI NUMERI RELATIVI

Per il prodotto, è stata fissata la seguente **REGOLA DEI SEGNI**:

a) + **moltiplicato** + **dà** +
b) + **moltiplicato** – **dà** –
c) – **moltiplicato** + **dà** –
d) – **moltiplicato** – **dà** +
e) **inoltre, ogni numero relativo moltiplicato per 0 dà 0**

♥ OSSERVAZIONE
Noterai che questa regola del "**segno moltiplicato segno**" finisce per coincidere con la regola, già acquisita, del "**segno davanti a segno**".
E' importante però comprendere che **si tratta di DUE REGOLE BEN DISTINTE CHE SI ASSOMIGLIANO, NON di UNA REGOLA SOLA!**

La **e)** è motivata dall'ovvia esigenza di conservare, per il numero 0, il ruolo di "**elemento assorbente**" per la moltiplicazione, che gli competeva nell'ambito dei numeri assoluti.

Giustifichiamo ora le **a), b), c), d)**
(per motivi di semplicità, ragioneremo su esempi specifici).

Per quanto riguarda la possibilità di *sottintendere* (in certi casi) *il puntino di moltiplicazione*, puoi cliccare sulla freccia ⇨

a) $(+5)\cdot(+3)=?$

Dato che i numeri positivi equivalgono sostanzialmente ai numeri assoluti (=senza segno), coerentemente dovrà essere $(+5)\cdot(+3)=5\cdot 3=15=+15$.

La regola "**+ moltiplicato + dà +**" resta così giustificata.

c) $(-5)\cdot(+3)=?$

Sempre per il fatto che i numeri positivi equivalgono sostanzialmente ai numeri assoluti, è "logico" che la moltiplicazione per $+3$ abbia lo stesso significato della moltiplicazione per 3, la quale sta ad indicare una "somma ripetuta":

$$(-5)\cdot(+3)=(-5)\cdot 3=(-5)+(-5)+(-5)=-15$$

Abbiamo così giustificato anche la regola "**– moltiplicato + dà –**" .

b) $(+5)\cdot(-3)=?$

E' del tutto spontaneo e sensato porre le varie definizioni in modo che le proprietà delle operazioni, inerenti ai numeri assoluti, non perdano la loro validità.
Allora, se non vogliamo rinunciare alla "commutativa della moltiplicazione", dovrà essere

$$(+5)\cdot(-3)=(-3)\cdot(+5)\underset{\substack{\text{regola}\\ \text{giustificata}\\ \text{prima}}}{=}-15$$

e ciò giustifica la regola "**+ moltiplicato – dà –**"

d) $(-5)\cdot(-3)=?$

Consideriamo questa sequenza di operazioni:

$$(-5)\cdot(+3)=-15$$
$$(-5)\cdot(+2)=-10$$
$$(-5)\cdot(+1)=-5$$
$$(-5)\cdot\ 0\ =\ 0$$
$$\mathbf{(-5)\cdot(-1)=\ ?}$$
$$\mathbf{(-5)\cdot(-2)=\ ?}$$
$$\mathbf{(-5)\cdot(-3)=\ ?}$$

Nello svolgere le prime tre operazioni della sequenza, abbiamo applicato una regola già acquisita ("– moltiplicato + dà –").
La quarta operazione è stata eseguita con la già motivata regola **e)**.
Riflettiamo, ora: ogni volta che il secondo fattore in gioco è diminuito di un'unità, il risultato "ha fatto un saltino", sulla *number line*, di 5 unità verso DESTRA.
E' quindi del tutto "logico" che i "punti interrogativi" vengano sciolti continuando a saltare verso DESTRA di 5 unità, e ottenendo perciò, rispettivamente, +5, +10 e +15.

Ecco così giustificata anche la regola
"**– moltiplicato – dà +**"

D'altronde,

la REGOLA DEI SEGNI sopra fissata è l'unica che consenta al prodotto fra numeri relativi, di godere di due fondamentali proprietà che già caratterizzavano il prodotto fra numeri assoluti: mi riferisco alla proprietà distributiva rispetto alla somma (che andrà qui pensata come somma algebrica), e alla proprietà commutativa.

Infatti:

$\boxed{a)\ +\ \textit{moltiplicato}\ +\ \textit{dà}\ +}$	$(+4)\cdot(+6)=?$ Poiché **i numeri positivi devono potersi sostanzialmente identificare coi numeri assoluti** $(+4=4,\ +6=6)$, il risultato dev'essere per forza $+24=24$
$\boxed{b)\ +\ \textit{moltiplicato}\ -\ \textit{dà}\ -}$	$(+4)\cdot(-6)=?$ Consideriamo l'espressioncina $(+4)\cdot(+6-6)$. ❑ Si ha $(+4)\cdot(+6-6)=+4\cdot 0=0$. ❑ Applicando sulla stessa espressione la distributiva, si avrebbe: $(+4)\cdot(+6-6)=+4\cdot(+6)+(+4)\cdot(-6)=\underbrace{+24}_{\text{come già stabilito prima}}+(+4)\cdot(-6)$ Il risultato dovrà essere ancora 0, altrimenti saremmo costretti a dire che la distributiva non vale più; dunque, $+24+(+4)\cdot(-6)=0$ E quest'ultima uguaglianza è corretta solo se si accetta il risultato $(+4)\cdot(-6)=-24$. Quindi la regola b) è l'unica compatibile con la conservazione della **distributiva**.
$\boxed{c)\ -\ \textit{moltiplicato}\ +\ \textit{dà}\ -}$	$(-4)\cdot(+6)=?$ Se si vuole che la moltiplicazione continui a godere della proprietà **commutativa**, si dovrà accettare che sia $(-4)\cdot(+6)=(+6)\cdot(-4)=\underbrace{-24}_{\text{regola già motivata prima}}$
$\boxed{d)\ -\ \textit{moltiplicato}\ -\ \textit{dà}\ +}$	$(-4)\cdot(+6-6)=\begin{cases}(-4)\cdot 0=0\\ (-4)\cdot(+6)+(-4)\cdot(-6)=\overbrace{-24}^{\text{vedi sopra}}+(-4)\cdot(-6)\end{cases}$ per cui l'unica definizione compatibile con la **distributiva** è $(-4)\cdot(-6)=+24$

Si può dimostrare che il prodotto fra numeri relativi, definito dalla regola dei segni di cui sopra, gode di TUTTE le proprietà che valgono per il prodotto fra numeri assoluti: commutativa, associativa-dissociativa, distributiva.

❑ PRODOTTO DI PIU' FATTORI

La seguente osservazione ci sarà molto utile quando, fra breve, parleremo di potenze di numeri relativi.

Per un prodotto di più fattori, il segno del risultato dipende dal numero di fattori negativi in gioco:

- ♥ **se il numero di fattori negativi è pari, il risultato sarà positivo, perché i segni "$-$" si compensano a coppie;**
- ♥ **se invece il numero di fattori negativi è dispari, il risultato sarà negativo, perché i segni "$-$" si compensano ancora a coppie, ma questa volta ne rimane uno "scompagnato".**

$$-\frac{3}{4}\cdot(-8)\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(+\frac{7}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\underset{\substack{\text{numero}\\\text{pari}\\\text{di fattori}\\\text{negativi}}}{=}+\frac{21}{100};\qquad -\frac{1}{7}\cdot(+2)\cdot(-35)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot(-18)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\underset{\substack{\text{numero}\\\text{dispari}\\\text{di fattori}\\\text{negativi}}}{=}-3$$