5. IL RECIPROCO (o “inverso”) DI UN NUMERO RELATIVO IL QUOZIENTE DI DUE NUMERI RELATIVI

Dato un numero relativo a, si dice "reciproco" di a quel numero relativo che moltiplicato per a dà come risultato +1.

Numero	Reciproco	
$-\frac{5}{2}$	$-\frac{2}{5}$	Infatti $-\frac{\cancel{2}}{\cancel{5}}\cdot\left(-\frac{\cancel{5}}{\cancel{2}}\right)=+1$
$+\frac{3}{7}$	$+\frac{7}{3}$	
$-\frac{1}{5}$	-5	
$+3$	$+\frac{1}{3}$	
$-0,75=-\frac{75}{100}=-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$	

Si capisce che, **dato un numero razionale relativo, per farne il reciproco basterà**

♪ **scrivere il numero dato sotto forma di frazione (se già non lo è),**

♫ **poi "capovolgere" questa frazione, mantenendo invariato il segno che la precede**.

❑ Esistono due numeri relativi che hanno la proprietà di coincidere col proprio reciproco. Quali sono? ⇨

❑ Se ti chiedono “qual è il reciproco del numero 0”, tu cosa rispondi? ⇨

♥ **Per effettuare una divisione fra due numeri relativi** (ossia, per trovarne il "quoziente") **basta moltiplicare il primo per il reciproco del secondo.**

Esempi: $+\frac{3}{5}:\left(-\frac{2}{7}\right)=+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{21}{10}$; $\qquad \frac{-3}{-\frac{1}{10}}=-3\cdot(-10)=+30$; $\qquad +\frac{1}{4}:3=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

La **giustificazione** di questa regola **ricalca la giustificazione data per la regola della sottrazione** (sottrarre significa addizionare algebricamente il numero opposto). Vediamo.

La divisione è definita come l'operazione inversa della moltiplicazione.
E’ l’operazione mediante la quale, dati due numeri, se ne trova un terzo che, moltiplicato per il secondo, dà come risultato il primo. Es.: $30:6=5$ perché $5\cdot 6=30$; $+\frac{3}{5}:\left(-\frac{2}{7}\right)=-\frac{21}{10}$ perché $-\frac{21}{10}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=+\frac{3}{5}$.

Insomma: $\mathbf{a:b=c}$ **quando** $\mathbf{c\cdot b=a}$.

Noi vogliamo dimostrare che il quoziente $\mathbf{a:b}$ è dato dal prodotto $\mathbf{a\cdot b'}$
(**essendo b' il reciproco di b**, ossia essendo $\mathbf{b'\cdot b=+1}$).

Dovremo far vedere che il prodotto $\mathbf{a\cdot b'}$, se viene moltiplicato per b, dà come risultato a.

Ma in effetti: $\mathbf{(a\cdot b')\cdot b=a\cdot(b'\cdot b)=a\cdot(+1)=a}$ **C.V.D. (Come Volevasi Dimostrare)**

E’ evidente che le stesse considerazioni danno la giustificazione generale della regola “divisione = moltiplicazione per il reciproco” anche nell’ambito dei numeri assoluti!

COME SI INDICA IL RECIPROCO DI UN NUMERO (RELATIVO O ANCHE ASSOLUTO)

Consideriamo il numero $-\frac{5}{6}$. Se faccio l'operazione $\frac{1}{-\frac{5}{6}}$, che risultato ottengo? Ottengo $\frac{1}{-\frac{5}{6}}=1\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)=-\frac{6}{5}$.

Ora, $-\frac{6}{5}$ è il reciproco di $-\frac{5}{6}$. Si capisce immediatamente che questa osservazione si può generalizzare: dato un numero relativo a, il risultato dell'operazione $1/a$ è il reciproco di a. D’altronde (scusa l’insistenza) per il fatto che la divisione è l’operazione inversa della moltiplicazione, la scrittura $1/a$, che equivale ad $1:a$, indica quel numero il quale moltiplicato per a dà 1; ma questo è proprio, per definizione, il reciproco di a.

♥ **Perciò, in matematica, se si deve indicare il RECIPROCO di un numero a, si utilizza il simbolo $\mathbf{\frac{1}{a}}$.**

6. POTENZE DI NUMERI RELATIVI

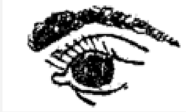
$\left(-\frac{2}{5}\right)^3=\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{8}{125}$ (*un n° dispari di fattori negativi!*)

$\left(-\frac{1}{3}\right)^4=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=+\frac{1}{81}$ (*un n° pari di fattori negativi!*)

$\left(+\frac{1}{2}\right)^4=\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)=+\frac{1}{16}$ (*fattori tutti positivi!*)

$(+7)^3=(+7)\cdot(+7)\cdot(+7)=+343$ (*fattori tutti positivi!*)

OCCHIO!



$(-3)^2=+9$ ma $-3^2=-9$
Infatti, *in quest'ultimo caso*,
l'esponente 2
si riferisce soltanto al 3,
mentre il segno –
è un "– di opposto"
che si applica *alla fine*.

Quando eleviamo a potenza un numero relativo,
l'essenziale è che teniamo presente il significato dell'elevamento a potenza, che è sempre quello usuale:
una potenza (con esponente >1) è un particolare prodotto, in cui i fattori sono tutti uguali;
precisamente, è il prodotto di tanti fattori uguali alla "base" quante sono le unità dell' "esponente".

♥ **Per quanto riguarda il segno del risultato, basterà** allora **utilizzare l'osservazione sul prodotto di più fattori fatta al precedente paragrafo 4): dunque**

- **una potenza CON BASE NEGATIVA avrà risultato**
  - **NEGATIVO SE L'ESPONENTE (che dà il numero dei fattori) E' DISPARI**
  - **POSITIVO SE L'ESPONENTE (che dà il numero dei fattori) E' PARI**
- **mentre una potenza CON BASE POSITIVA equivale a un prodotto di fattori tutti positivi e quindi AVRA' SEMPRE RISULTATO POSITIVO, indipendentemente dalla parità o disparità dell'esponente.**

Sono sempre valide, poi, anche quando la base è un numero relativo, le definizioni
$a^1=a$; $a^0=1$ ($a\neq 0$: l'operazione 0^0 si considera "indeterminata")

Sottolineiamo ancora, perché è un'osservazione banale ma davvero molto importante, che
♥ **qualsiasi numero non nullo (sia positivo che negativo),**
se viene elevato ad esponente PARI, dà sempre risultato POSITIVO.

A questo proposito, anticipiamo una riflessione che sarà in seguito molto utile.

- Il valore dell'espressione $a+1$ potrà essere positivo, negativo o nullo a seconda del valore di a: ad esempio, se $a=-7$ avremo $a+1=-7+1=-6$, mentre se $a=+2$ avremo $a+1=+2+1=+3$;
- invece **l'espressione a^2+1 assumerà sempre valore >0, per qualsiasi valore di a**: ad esempio, con $a=-7$ avremo $a^2+1=+49+1=+50$; con $a=+2$ avremo $a^2+1=+4+1=+5$; con $a=0$ avremo $a^2+1=0+1=+1$; ecc. ecc.

ESERCIZI

1) a) $(-3)^2=$ b) $(-3)^3=$ c) $(-3)^4=$ d) $(-3)^5=$ e) $(-3)^6=$ f) $-3^6=$ g) $(-3)^1=$ h) $(-3)^0=$

2) a) $(+10)^2=$ b) $(+10)^3=$ c) $(-10)^2=$ d) $(-10)^1=$ e) $(+10)^0=$ f) $-10^6=$ g) $(-10)^6=$

3) a) $\left(-\frac{4}{11}\right)^2=$ b) $\left(-\frac{5}{7}\right)^3=$ c) $\left(+\frac{1}{2}\right)^7=$ d) $(-1)^{114}=$ e) $\left(+\frac{1}{6}\right)^3=$ f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4=$ g) $\left(-\frac{2}{13}\right)^1=$

4) $(-2)^4+(+2)^4+(-2)^3+(+2)^3$ 5) $(-2)^3+(-3)^2+(-4)^1+(-5)^0$ 6) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3:\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{-3^2}{-2^3}$

7) $\frac{(-3)^2+1}{(-2)^2+1}$ 8) $\frac{-3^2+1}{-2^2+1}$ 9) $\frac{(-3)^3+1}{(-2)^3+1}$ 10) $\frac{-3^3+1}{-2^3+1}$ 11) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

12) $\left(-\frac{1}{3}\right)^5\left(-\frac{1}{3}\right)^4\cdot(-6)^9$ 13) $\left(-\frac{3}{4}\right)^7(-8)^7\left(-\frac{1}{6}\right)^7$ 14) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{10}:\left(-\frac{2}{3}\right)^9+\frac{5}{3}$ 15) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{10}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{10}-4^5$

RISULTATI 1) a) $+9$ b) -27 c) $+81$ d) -243 e) $+729$ f) -729 g) -3 h) $+1$ 2) a) $+100$ b) $+1000$ c) $+100$ d) -10 e) $+1$ f) -1000000 g) $+1000000$ 3) a) $+\frac{16}{121}$ b) $-\frac{125}{343}$ c) $+\frac{1}{128}$ d) $+1$ e) $+\frac{1}{216}$ f) $+\frac{81}{625}$ g) $-\frac{2}{13}$
4) 32 5) -2 6) 0 7) 2 8) $\frac{8}{3}$ 9) $\frac{26}{7}$ 10) $\frac{26}{7}$ 11) $\frac{7}{81}$ 12) $2^9=512$ 13) -1 14) 1 15) 0