7. POTENZE AD ESPONENTE NEGATIVO

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$

$5^2 = 5 \cdot 5$

$5^1 = 5$ "*un numero elevato a* 1 *è uguale a sé stesso*"

$5^0 = 1$ "*un numero non nullo, elevato a* 0, *dà* 1"

$\mathbf{5^{-1} = ?}$

$\mathbf{5^{-2} = ?}$

$\mathbf{5^{-3} = ?}$

Ogni volta che l'esponente diminuisce di un'unità, il risultato viene diviso per 5 !
E' quindi "logico" che i "punti interrogativi" vengano sciolti continuando a dividere per 5 il risultato precedente.
Si ottiene così

$$\mathbf{5^{-1}} = 5^0 : 5 = 1 : 5 = \mathbf{\frac{1}{5}}$$

$$\mathbf{5^{-2}} = 5^{-1} : 5 = \frac{1}{5} : 5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{1}{5^2}} = \mathbf{\frac{1}{25}}$$

$$\mathbf{5^{-3}} = 5^{-2} : 5 = \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{1}{5^3}} = \mathbf{\frac{1}{125}}$$

Ascolta anche quest'altra considerazione.
Appare desiderabile che le potenze ad esponente negativo vengano introdotte in modo tale che si conservi, se possibile, la validità delle "vecchie" proprietà che sussistevano per gli esponenti positivi.
Alla luce di questo, dovrebbe essere, ad esempio,

$$5^{-3} \cdot 5^3 = 5^{-3+3} = 5^0 = 1.$$

Ma ciò si avrà solo se avremo posto la definizione $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

Perveniamo allora "spontaneamente" alla seguente definizione:

$$\boxed{\mathbf{a^{-n} \overset{def.}{=} \frac{1}{a^n} \overset{NOTA}{=} \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)}_{\text{reci–proco di a}}^{n}}}$$

(a *numero assoluto o relativo non nullo,*
n *intero positivo*)

NOTA
Infatti si può scrivere, ad esempio,

$$\frac{1}{5^3} = \frac{1^3}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

♥ **Una POTENZA AD ESPONENTE NEGATIVO si esegue facendo**

- **il reciproco della potenza avente la stessa base, ma esponente opposto**

oppure, equivalentemente, facendo

- **il RECIPROCO DELLA BASE e l'OPPOSTO DELL'ESPONENTE**

Esempi: $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} =$

$$\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{16}} = 1 \cdot \frac{16}{9} = \frac{16}{9}$$

oppure

$$\underbrace{\left(\frac{4}{3}\right)}_{\text{reci-proco di 3/4}}^2 = \frac{16}{9}$$

$$\left(+\frac{7}{2}\right)^{-3} = \left(+\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{8}{343} \qquad \left(-\frac{3}{5}\right)^{-4} = \left(-\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^5 = -32 \qquad (+2)^{-10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$$

$$(-7{,}3)^{-2} = \left(-\frac{1}{7{,}3}\right)^2 = \frac{1}{53{,}29} = 0{,}0187...$$

$$10^{-6} = \left(\frac{1}{10}\right)^6 = \frac{1}{1.000.000} = 0{,}000001$$

Il numero 0 non può essere elevato ad esponente negativo:
ciò infatti implicherebbe di far comparire 0 a denominatore (*illegal* operation).

Osserviamo che $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$;
quindi il reciproco di un numero a
si può indicare sia con $\frac{1}{a}$ che con a^{-1}.

Numero	Reciproco	Opposto
a	$\mathbf{\frac{1}{a}}$ **oppure** $\mathbf{a^{-1}}$	**−a**

Si può dimostrare che le potenze ad esponente intero negativo così introdotte godono anch'esse di TUTTE QUANTE le proprietà che abbiamo già visto valere per gli esponenti maggiori o uguali a 0.

Qualche esempio

additiva degli esponenti: $a^{-3}\cdot a^{-5}=\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{a^5}=\frac{1}{a^8}=a^{-8}$ $\underbrace{-3-5}_{\text{somma algebrica}}=-8$

additiva degli esponenti: $a^{-3}\cdot a^{7}=\frac{1}{a^3}\cdot a^7=\frac{a^7}{a^3}=a^{4}$ $\underbrace{-3+7}_{\text{somma algebrica}}=+4$

moltiplicativa degli esponenti: $\left(a^{-2}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3}=\left(a^2\right)^3=a^6$ $(-2)\cdot(-3)=+6$

sottrattiva degli esponenti: $a^{-3}:a^{-5}=\frac{1}{a^3}:\frac{1}{a^5}=\frac{1}{a^3}\cdot a^5=\frac{a^5}{a^3}=a^2$ $-3-(-5)=+2$

potenza di un prodotto: $(ab)^{-4}=\frac{1}{(ab)^4}=\frac{1}{a^4b^4}=\frac{1}{a^4}\cdot\frac{1}{b^4}=a^{-4}\cdot b^{-4}$

ESERCIZI

1) Esegui le seguenti **potenze a esponente negativo**.

a) $\left(-\frac{5}{11}\right)^{-2}=\dots$ b) $\left(-\frac{3}{10}\right)^{-5}=\dots$ c) $\left(+\frac{1}{2}\right)^{-4}=\dots$ d) $\left(+\frac{3}{4}\right)^{-3}=\dots$ e) $\left(-\frac{1}{10}\right)^{-5}=\dots$ f) $(-14)^{-2}=\dots$

g) $\left(+\frac{3}{7}\right)^{-3}=\dots$ h) $\left(+\frac{1}{2}\right)^{-6}=\dots$ i) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-4}=\dots$ l) $(-5)^{-5}=\dots$ m) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\dots$

2) Esegui le operazioni a) … f) **applicando le proprietà delle potenze**. Qualche esempio dello stesso tipo:

$\left(-\frac{3}{7}\right)^{-10}:\left(-\frac{3}{7}\right)^{-12}=\left(-\frac{3}{7}\right)^{-10-(-12)}=\left(-\frac{3}{7}\right)^{2}=\frac{9}{49}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5}:\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^{-8+5-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4}=\frac{81}{16}$

$\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right]^2=\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}\right]^2=\left(\frac{3}{4}\right)^{-6}=\left(\frac{4}{3}\right)^{6}=\frac{4096}{729}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}\cdot 4^{-5}=\left[\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot\cancel{4}^{2}\right]^{-5}=(-2)^{-5}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{5}=-\frac{1}{32}$

a) $\left(-\frac{10}{3}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)^{-3}=\dots$ b) $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^{2}\right]^{-5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{6}:\left(-\frac{3}{5}\right)^{-3}=\dots$ c) $\left(-\frac{26}{33}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{22}{13}\right)^{-2}=\dots$

d) $(+0,4)^{-5}\cdot(+0,4)^{5}:(+0,4)^{-1}=\dots$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-20}:\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{7}=\dots$ f) $\frac{(0{,}12)^{-5}\cdot(0{,}12)^{-5}}{\left[(0{,}12)^{-3}\right]^3}\cdot(0{,}12)^3=\dots$

g) La seguente espressione equivale a una potenza di 10: quale? $(+0,05)^{-4}\cdot(-0,2)^{-4}:(-0,01)^{4}$

3) Completa la tabella sottostante:

a	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	−1	−1	−1
b	−3	−2	−1	0	1	2	3	−2	−1	0	1	2	99	104	−1
a^b															

RISULTATI

1) a) $\left(-\frac{5}{11}\right)^{-2}=\left(-\frac{11}{5}\right)^{2}=+\frac{121}{25}$ b) $\left(-\frac{3}{10}\right)^{-5}=\left(-\frac{10}{3}\right)^{5}=-\frac{100000}{243}$ c) $\left(+\frac{1}{2}\right)^{-4}=(+2)^4=+16$

d) $\left(+\frac{3}{4}\right)^{-3}=\left(+\frac{4}{3}\right)^{3}=+\frac{64}{27}$ e) -100000 f) $\frac{1}{196}$ g) $\frac{343}{27}$ h) 64 i) $\frac{625}{81}$ l) $-\frac{1}{3125}$ m) $\frac{8}{27}$

2) a) $\left(-\frac{10}{3}\right)^{-5}=-\frac{243}{100000}$ b) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-1}=-\frac{5}{3}$ c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}=\frac{9}{16}$ d) $(+0,4)^1=0,4$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$

f) $(0{,}12)^2=0{,}0144$ g) $(-0,01)^{-8}=\left(-\frac{1}{100}\right)^{-8}=(-100)^8=100^8=(10^2)^8=10^{16}$

3) -8 $+4$ -2 1 $-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{8}$ imp. imp. indet. 0 0 -1 $+1$ -1