

ESERCIZI (risposte a pag. 103)

- 1) Indicando l'età di Mario con e , scrivi le espressioni letterali corrispondenti alle età:
 a) di sua moglie, che ha 2 anni più di lui
 b) dei suoi figli, che Mario ha avuto rispettivamente alle età di 31 e 34 anni
 c) di sua suocera, sapendo che quando partorì la figlia, che ora è moglie di Mario, aveva 29 anni
- 2) Se Aldo possiede p euro meno di Bruno, e Bruno a sua volta possiede q euro più di Carlo, allora, detta c la cifra, in euro, posseduta da Carlo, quanti euro posseggono i tre in totale?
- 3) In un parco ci sono b biciclette e t tricicli. Scrivi l'espressione che corrisponde al numero totale di ruote.
- 4) Se in un salvadanaio ci sono a monete da 1 euro, b monete da 50 centesimi, e c monete da 20 centesimi, scrivi l'espressione letterale che indica il valore contenuto nel salvadanaio, espresso in euro
- 5) Sia n un numero intero. Scrivi l'espressione letterale che indica
 a) il numero successivo b) il numero precedente c) l'opposto di n
 d) il triplo di n e) il successivo del triplo di n f) il triplo del successivo di n
 g) il cubo del quadruplo di n h) il quadruplo del cubo di n
 i) il numero che supera di 2 unità il doppio di n
 l) il doppio del numero che supera n di 2 unità
- 6) Sia n un numero intero diverso da 0. Scrivi l'espressione letterale che indica
 a) il reciproco di n b) il quadrato del reciproco di n c) il reciproco del quadrato di n
 d) l'*antireciproco* (= opposto del reciproco) di n e) il quadrato della somma fra n e il suo reciproco
- 7) Siano x, y due numeri. Scrivi l'espressione letterale che indica:
 a) il reciproco della loro somma b) la somma dei loro reciproci c) la differenza dei loro quadrati (sottinteso: prendendo i numeri nell'ordine dato, ossia prima x poi y)
 d) il quadrato della loro differenza
 e) il loro prodotto, diminuito di una unità f) il numero che supera di 4 il reciproco del loro prodotto
 g) il loro rapporto (prendendoli nell'ordine dato) h) il prodotto della loro somma per la loro differenza
 i) il valore assoluto della loro differenza l) la differenza fra i loro valori assoluti
 m) la somma fra il triplo del 1° e il doppio del 2° n) il triplo della somma del 1° col doppio del 2°
- 8) Inversamente rispetto ai tre esercizi precedenti, descrivi a parole le espressioni algebriche che seguono:
 a) $x \cdot \frac{1}{x}$ b) $(x+y)^2$ c) $\frac{1}{x^2+y^2}$ d) $|-x|$ e) $x^3 + \left(\frac{1}{2}x\right)^3$ f) $x^2 + (-x)^2$ g) $-\frac{x-y}{x+y}$ h) $(3x+4y)^2$
- 9) Se la somma di due numeri è s e uno di questi numeri è x , quanto vale l'altro numero?
 Se la differenza di due numeri è d e uno di questi numeri è x , quanto vale l'altro numero?
 [Rispondi sotto l'ipotesi che x sia a) il minore fra i due b) il maggiore fra i due]
- 10) Se il prodotto fra due numeri non nulli è p e uno di questi numeri è x , quanto vale l'altro numero?
 Se il rapporto fra due numeri non nulli è r e uno di questi numeri è x , quanto vale l'altro numero?
 [Rispondi sotto l'ipotesi che x sia a) il divisore nel rapporto b) il dividendo nel rapporto]
- 11) Considera le seguenti sequenze di uguaglianze e:
 I) scrivi l'uguaglianza che ti sembra debba venire dopo;
 II) controlla, svolgendo i calcoli, se è corretta;
 III) scrivi un'uguaglianza letterale che esprima la relazione in forma astratta (puoi usare ad esempio n come lettera, ma qualunque scelta per la lettera andrebbe bene)
 IV) verifica se la formula trovata va bene anche per altri valori assegnati alla lettera

Per indicare gli *interi* si preferisce di norma impiegare lettere centrali dell'alfabeto, come $n, m, i, k \dots$

| | | | | |
|--|---|--|---------------------------------|-------------------------------------|
| a) | b) | c) | d) | e) |
| $2 - \frac{1}{2} = \frac{(2+1)(2-1)}{2}$ | $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{9-4}{6}$ | $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ | $1^2 + 2^2 = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1$ |
| $3 - \frac{1}{3} = \frac{(3+1)(3-1)}{3}$ | $\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} = \frac{2}{3^2}$ | $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{16-9}{12}$ | $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ | $2^2 + 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 1$ |
| $4 - \frac{1}{4} = \frac{(4+1)(4-1)}{4}$ | $\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} = \frac{3}{4^2}$ | $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{25-16}{20}$ | $3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ | $3^2 + 4^2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| f) | g) | h) | i) | l) |
| $1 + 1^2 = 1 \cdot 2$ | $1 - 1 \cdot 0 = 1$ | $1 + 1 + 2 = 4$ | $1 + 1 + 4 + 3 = 9$ | $0 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 1$ |
| $2 + 2^2 = 2 \cdot 3$ | $4 - 2 \cdot 1 = 2$ | $1 + 4 + 4 = 9$ | $1 + 2 + 9 + 4 = 16$ | $1 \cdot 2 \cdot 3 = 8 - 2$ |
| $3 + 3^2 = 3 \cdot 4$ | $9 - 3 \cdot 2 = 3$ | $1 + 9 + 6 = 16$ | $1 + 3 + 16 + 5 = 25$ | $2 \cdot 3 \cdot 4 = 27 - 3$ |
| $4 + 4^2 = 4 \cdot 5$ | $16 - 4 \cdot 3 = 4$ | $1 + 16 + 8 = 25$ | $1 + 4 + 25 + 6 = 36$ | $3 \cdot 4 \cdot 5 = 64 - 4$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |

$$12) 1^2 + 2^2 + 3^2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot (6+1)}{6}; \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \frac{4 \cdot 5 \cdot (8+1)}{6}; \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{5 \cdot 6 \cdot (10+1)}{6}$$

Dopo aver controllato che queste uguaglianze sono corrette, scrivi quella che a tuo parere viene dopo. Scrivi anche il secondo membro di quella che potrebbe essere la formula generale $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dots$ e verifica se “funziona”, assegnando a n qualche valore maggiore di 6.

13) Scrivi le uguaglianze letterali che esprimono le affermazioni seguenti.

Poiché si tratta di affermazioni vere qualunque siano i numeri coinvolti (eccettuato, tutt'al più, qualche valore “eccezionale”: ad esempio, un denominatore non può mai essere uguale a zero), otterrai delle “identità” (= uguaglianze letterali, vere per tutti i valori “ammissibili” delle lettere).

- Sottraendo dalla somma di due numeri la loro differenza, si ottiene il doppio del secondo numero
- Sommando il precedente e il successivo di un intero si ottiene il doppio dell'intero stesso
- Moltiplicando la somma di due numeri per la loro differenza, si ottiene la differenza fra il quadrato del primo e il quadrato del secondo
- Dato un intero, se dal quadrato del successivo si sottrae il quadrato del precedente si ottiene il quadruplo del numero di partenza
- La somma di quattro interi consecutivi supera di 6 unità il quadruplo del più piccolo di essi
- La somma di un numero col suo reciproco è uguale al rapporto fra il quadrato, aumentato di 1, di quel numero, e il numero stesso.

14) Scrivi le uguaglianze letterali che esprimono le affermazioni seguenti.

Quelle che otterrai saranno delle “equazioni”.

Una “equazione” è una “uguaglianza letterale problematica”, di fronte alla quale ci si domanda: “Quali saranno (se esistono) i valori della lettera, o delle lettere, per cui l'uguaglianza è vera?”

- La somma di un numero col suo doppio è uguale a 21
- Un numero supera di 4 unità i suoi $\frac{2}{3}$
- Un numero è inferiore di 12 unità al suo quadrato
- Il quadrato di un numero supera di 48 unità il doppio del numero stesso
- Un numero è uguale alla quarta parte del suo reciproco
- I quadrati di due numeri differiscono di 9 unità
- Moltiplicando un numero per 3, aumenta di 8 unità.

15) Calcola il valore delle espressioni letterali che seguono, per i valori delle lettere specificati a fianco:

- $(4-x)^2 + x$ per $x=4$; $x=5$; $x=-4$
- $\frac{h-1}{h^2-2h-1}$ per $h=1$; $h=-1$; $h=0$; $h=\frac{1}{4}$; $h=-\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{x} - \frac{x}{x-1}$ per $x=2$; $x=-3$; $x=\frac{1}{2}$
- $\frac{y}{y+\frac{1}{y}}$ per $y=1$; $y=\frac{2}{3}$; $y=-\frac{1}{2}$
- $\frac{a^2+a^3}{1-a+a^2}$ per $a=1$; $a=-1$; $a=-10$

Ciò che segue è tratto dal sito
www.themathpage.com
 del professor Lawrence Spector
 (New York),
 una ricca e ben curata raccolta
 di lezioni ed esercitazioni interattive.



Let the value of the variable (leggi: *variabol*) y depend on the value of the variable x as follows: $y = 2x + 4$. Calculate the value of y that corresponds to each value of x :

When $x=0$, $y=...$ When $x=1$, $y=...$ When $x=2$, $y=...$ When $x=3$, $y=...$

Write an algebraic expression that will symbolize each of the following.

- Six times a certain number
- Six more than a certain number
- Six less than a certain number
- A certain number less than 6
- A number repeated as a factor three times
- A number repeated as a term three times
- The sum of three consecutive whole numbers
- Eight less than twice a certain number
- One more than three times a certain number

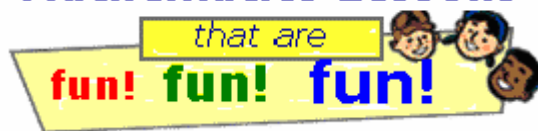
NOTA

La parola “*times*” è di uso frequente in lingua Inglese per indicare *moltiplicazione*. Ad esempio, $5 \cdot 8$ si legge:

“five *times* eight”, $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ si legge: “one half *times* three fourths” (anche: one half “*multiplied by* three fourths”)

Il sito <http://math.rice.edu/~lanius/>
della professoressa Cynthia Lanus
di Houston, Texas,
è stato selezionato fra i migliori contributi su Internet
in materia di didattica della matematica.

Mathematics Lessons



Fra le sue tantissime proposte, ecco un facile gioco che può essere analizzato col calcolo letterale.

Prendi un calendario qualsiasi (purché abbia una settimana su ogni riga).

Dà a un tuo amico di scegliere 4 giorni che formano un quadrato, come i quattro qui a destra. **18 19**

Il tuo amico dovrà dirti solo la somma dei quattro giorni, e tu gli saprai dire quali sono i giorni. **25 26**

Come funziona il giochino? ... Supponiamo, per fissare le idee, che i quattro numeri scelti dalla persona siano quelli raffigurati. La somma sarà allora $18 + 19 + 25 + 26 = 88$.

Indichiamo il primo numero con un simbolo, ad esempio n .

Allora gli altri numeri in gioco saranno $n+1$, $n+7$, $n+8$.

L'amico in questo caso ti rivelerebbe che $n + n + 1 + n + 7 + n + 8 = 88$. Quindi tu a questo punto potresti ...

Prova a continuare il ragionamento per conto tuo, poi clicca sulla freccia \rightarrow

per andare a vedere cosa dice la professoressa Lanus (like terms = termini "simili").

RISPOSTE

1) a) $e + 2$ b) $e - 31$, $e - 34$ c) $e + 2 + 29 = e + 31$ 2) $c + c + q + c + q - p = 3c + 2q - p$ 3) $2b + 3t$

4) $a + 0,50b + 0,20c$ oppure $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{5} = a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{5}c$ oppure $\frac{100a + 50b + 20c}{100}$

5) a) $n + 1$ b) $n - 1$ c) $-n$ d) $3n$ e) $3n + 1$ f) $3(n + 1)$ g) $(4n)^3$ h) $4n^3$ i) $2n + 2$ l) $2(n + 2)$

6) a) $\frac{1}{n}$ o anche n^{-1} b) $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ o $(n^{-1})^2$ c) $\frac{1}{n^2}$ d) $-\frac{1}{n}$ e) $\left(n + \frac{1}{n}\right)^2$

7) a) $\frac{1}{x+y}$ b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ c) $x^2 - y^2$ d) $(x - y)^2$ e) $xy - 1$ f) $\frac{1}{xy} + 4$ g) $\frac{x}{y}$ h) $(x + y)(x - y)$

i) $|x - y|$ l) $|x| - |y|$ m) $3x + 2y$ n) $3(x + 2y)$

8) a) il prodotto di un numero per il suo reciproco b) il quadrato della somma di due numeri

c) il reciproco della somma dei quadrati di due numeri d) il valore assoluto dell'opposto di un numero

e) la somma del cubo di un numero col cubo della sua metà

f) la somma del quadrato di un numero col quadrato del suo opposto

g) l'opposto del rapporto fra la differenza di due numeri e la loro somma

h) il quadrato della somma del triplo di un numero col quadruplo di un altro numero

9) $s - x$; a) $x + d$ b) $x - d$ 10) $\frac{p}{x}$; a) rx b) $\frac{x}{r}$

11) a) I) $5 - \frac{1}{5} = \frac{(5+1)(5-1)}{5}$ III) $n - \frac{1}{n} = \frac{(n+1)(n-1)}{n}$ b) I) $\frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} = \frac{4}{5^2}$ III) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2}$

c) I) $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{36-25}{30}$ III) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n(n+1)}$ d) I) $4 - \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$ III) $n - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2}{n+1}$

e) I) $5^2 + 6^2 = 2 \cdot 5 \cdot 6 + 1$ III) $n^2 + (n+1)^2 = 2 \cdot n \cdot (n+1) + 1$ f) I) $5 + 5^2 = 5 \cdot 6$ III) $n + n^2 = n \cdot (n+1)$

g) I) $25 - 5 \cdot 4 = 5$ III) $n^2 - n \cdot (n-1) = n$ h) I) $1 + 25 + 10 = 36$ III) $1 + n^2 + 2n = (n+1)^2$

i) I) $1 + 5 + 36 + 7 = 49$ III) $1 + (n-1) + n^2 + (n+1) = (n+1)^2$ oppure $1 + n + (n+1)^2 + (n+2) = (n+2)^2$

l) $4 \cdot 5 \cdot 6 = 125 - 5$ III) $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = (n+1)^3 - (n+1)$ oppure $(n-1) \cdot n \cdot (n+1) = n^3 - n$

12) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = \frac{6 \cdot 7 \cdot (12+1)}{6}$; $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

13) a) $(x + y) - (x - y) = 2y$ b) $(x - 1) + (x + 1) = 2x$ c) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

d) $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 4x$ e) $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 4x + 6$ f) $x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$

14) a) $x + 2x = 21$ b) $x = \frac{2}{3}x + 4$ c) $x = x^2 - 12$ d) $x^2 = 2x + 48$ e) $x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x}$ f) $x^2 - y^2 = 9$ g) $3x = x + 8$

15) a) 4; 6; 60 b) 0, -1; 1; $\frac{12}{23}$; -6 c) $-\frac{3}{2}$; $-\frac{13}{12}$; 3 d) $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{13}$; $\frac{1}{5}$ e) 2; 0; $-\frac{300}{37}$