2. DEFINIZIONE DI MONOMIO, GRADO DI UN MONOMIO

Si dice “monomio” un’espressione algebrica costituita da numeri e/o lettere moltiplicati fra loro.
Le lettere possono eventualmente essere elevate a potenza con esponente intero positivo.

Esempi di monomi sono:

$4a^2b \qquad -\frac{5}{6}ax^3y^5z \qquad t^4 \qquad -c^2x \qquad y \qquad -\frac{7}{5}$

(anche una singola lettera o un numero “puro” possono essere considerati come casi particolari di monomio)

In un monomio distinguiamo un **coefficiente** e una **parte letterale**.

monomio	*coefficiente*	*parte letterale*
$4a^2b$	4	a^2b
$-\frac{5}{6}ax^3y^5z$	$-\frac{5}{6}$	ax^3y^5z
t^4	$\boxed{+1}$. *Infatti* $t^4 = \underbrace{+1\cdot t^4}_{\text{qualsiasi numero, moltiplicato per +1, resta invariato}}$	t^4
$-c^2x$	$\boxed{-1}$. *Infatti* $\underbrace{-c^2x}_{\text{opposto del numero } c^2x} = \underbrace{-1\cdot c^2x}_{\text{moltiplicando un numero per }-1\text{ ne ottengo l'opposto}}$	c^2x
$-\frac{7}{5}$	$-\frac{7}{5}$	*non c'è*
$4\cdot a^2b\cdot 5bx$	20. *Infatti* $4\cdot a^2b\cdot 5bx = \underbrace{20a^2b^2x}_{\textbf{monomio scritto in "forma normale"}}$	a^2b^2x

In un monomio, l’esponente di una lettera si dice anche “grado” di quella lettera.
Quando si parla di “GRADO” DI UN MONOMIO, senza far riferimento a nessuna lettera in particolare,
si vuole intendere il “grado complessivo”,
definito come la **SOMMA DEI GRADI (= ESPONENTI) DELLE SINGOLE LETTERE**.

monomio	*grado*
$4a^2b$	$2+1=3$
$-\frac{5}{6}ax^3y^5z$	10
t^4	4
$-c^2x$	3
y	1
$-\frac{7}{5}$	$-\frac{7}{5}$, se pensato come un monomio, è di grado 0. Infatti è possibile scrivere, ad esempio, $-\frac{7}{5}=-\frac{7}{5}\cdot x^0$ (un numero elevato a 0 dà sempre come risultato 1, tranne il caso particolarissimo $0^0 =$ indeterminato)

3. OPERAZIONI CON MONOMI

❑ MOLTIPLICAZIONE

$$\boxed{\left(7a^4b^3\right)\cdot\left(2a^2bx\right)} \underset{dissociativa}{=} 7a^4b^3\cdot 2a^2bx \underset{commutativa}{=} 7\cdot 2\cdot a^4\cdot a^2\cdot b^3\cdot b\cdot x \underset{associativa}{=}$$

$$=(7\cdot 2)\cdot\left(a^4\cdot a^2\right)\cdot\left(b^3\cdot b\right)\cdot x \underset{additiva\ degli\ esponenti}{=} \boxed{14a^6b^4x}$$

Per moltiplicare fra loro due o più monomi basta **moltiplicare i coefficienti**,
e poi eseguire il prodotto delle parti letterali tenendo conto della **proprietà additiva degli esponenti**.

Altri esempi: $-4x^3y^2z\cdot\left(3x^2yw\right)=-12x^5y^3zw$ $\qquad -\frac{\cancel{21}^{\,3}}{\cancel{16}_{\,2}}ab\cdot\left(-\frac{\cancel{24}^{\,3}}{\cancel{35}_{\,5}}b\right)=+\frac{9}{10}ab^2$

❑ DIVISIONE

$$\boxed{\left(24a^5b^5c^5\right):\left(8a^3b^4c^5\right)}=\frac{24a^5b^5c^5}{8a^3b^4c^5}=\frac{24}{8}\cdot\frac{a^5}{a^3}\cdot\frac{b^5}{b^4}\cdot\frac{c^5}{c^5}=\boxed{3a^2b}$$

Per dividere due monomi basta **dividere i coefficienti**,
poi eseguire il quoziente delle parti letterali tenendo conto della **proprietà sottrattiva degli esponenti**.

Volendo, per svolgere una divisione fra due monomi
è anche possibile ricorrere agli esponenti negativi:

$$\boxed{\left(24a^5b^5c^5\right):\left(8a^3b^4c^5\right)}=24a^5b^5c^5\cdot\frac{1}{8a^3b^4c^5}=24a^5b^5c^5\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{b^4}\cdot\frac{1}{c^5}\boxed{=\,{}^{3}\cancel{24}a^5b^5c^5\cdot\frac{1}{\cancel{8}}\cdot a^{-3}b^{-4}c^{-5}=3a^2b}$$

Si tratta, quindi, **di trasformare la divisione in moltiplicazione, nel modo seguente:**
- **si moltiplica il coefficiente del primo monomio per il reciproco del coefficiente del secondo;**
- **si cambiano di segno gli esponenti delle lettere del secondo monomio.**

Ecco un altro esempio, svolto nei due possibili modi:

$$\left(\frac{1}{8}x^3y^6\right):\left(-\frac{5}{4}x^2y^2\right)=\begin{cases}\frac{1}{8}:\left(-\frac{5}{4}\right)x^{3-2}y^{6-2}=\frac{1}{{}_2\cancel{8}}\cdot\left(-\frac{\cancel{4}}{5}\right)xy^4=-\frac{1}{10}xy^4\\ \frac{1}{{}_2\cancel{8}}x^3y^6\cdot\left(-\frac{\cancel{4}}{5}x^{-2}y^{-2}\right)=-\frac{1}{10}xy^4\end{cases}$$

Ancora:

$$3ab^3c^3:\left(-2abc^5d^5\right)=3ab^3c^3\cdot\left(-\frac{1}{2}a^{-1}b^{-1}c^{-5}d^{-5}\right)=-\frac{3}{2}b^2c^{-2}d^{-5}\ \text{(NOTA)}$$

NOTA
Il risultato di quest'ultima espressioncina è dunque un prodotto di numeri e lettere, in cui qualche lettera è elevata a esponente negativo. Non si tratta perciò di un monomio "in senso stretto" (la definizione da noi posta all'inizio prevedeva che in un monomio le lettere potessero essere elevate soltanto ad esponente positivo); tuttavia, in questi casi si continua a usare ugualmente il termine "monomio".

♥ **DIVIDERE per una lettera elevata ad esponente equivale a MOLTIPLICARE per quella stessa lettera con ESPONENTE CAMBIATO DI SEGNO!**

$$\boxed{\begin{array}{l}:a^2\\ \cdot\frac{1}{a^2}\\ \cdot a^{-2}\end{array}}\qquad\boxed{\begin{array}{l}:a^{-3}\\ \cdot\frac{1}{a^{-3}}\\ \cdot\frac{1}{\frac{1}{a^3}}\\ \cdot a^3\end{array}}$$

Si può facilmente verificare che **tutte le operazioni che coinvolgono questi "MONOMI CON ESPONENTI ANCHE NEGATIVI" si effettuano esattamente come per i "*monomi in senso stretto*".**
Avvertiamo soltanto che, **in presenza di esponenti negativi, non viene utilizzato il concetto di "grado".**

E' pur vero che, di fronte a una divisione come $3ab^3c^3:\left(-2abc^5d^5\right)$,
nella quale l'osservazione degli esponenti in gioco ci indica subito che nel risultato uscirebbero esponenti negativi, **potremmo anche scegliere di trasformare in "frazione algebrica"** e scrivere:

$$3ab^3c^3:\left(-2abc^5d^5\right)=\frac{3\cancel{a}\cancel{b^3}^{\,2}\cancel{c^3}}{-2\cancel{a}\cancel{b}\cancel{c^5}^{\,2}d^5}=-\frac{3b^2}{2c^2d^5}\quad\text{che equivale appunto a}\quad -\frac{3}{2}b^2c^{-2}d^{-5}$$

❑ ELEVAMENTO A POTENZA

$$\boxed{\left(3x^3y^4z\right)^2} \underset{\text{"la potenza di un prodotto..."}}{=} 3^2\cdot\left(x^3\right)^2\cdot\left(y^4\right)^2\cdot z^2 \underset{\text{moltiplicativa degli esponenti}}{=} \boxed{9x^6y^8z^2}$$

Per elevare un monomio a potenza basta **elevare a potenza il coefficiente,**
poi elevare a potenza ogni singola lettera tenendo conto della **proprietà moltiplicativa degli esponenti**.

Questo procedimento contiene in sé anche l'applicazione della proprietà che afferma:
la potenza di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori.

Altro esempio: $\left(-\frac{2}{5}abc^4\right)^3=\left(-\frac{2}{5}\right)^3a^3b^3c^{12}=-\frac{8}{125}a^3b^3c^{12}$

❑ SOMMA ALGEBRICA

Innanzitutto si deve chiarire cosa si intende per "monomi simili".

Def.: **due o più monomi si dicono "simili" se hanno la stessa parte letterale**. Esempi, controesempi:

$3a^2b,\ \frac{1}{5}a^2b,\ -a^2b$ sono simili — $\frac{3}{4}x^3y^3,\ \frac{1}{2}x^3y^2$ NON sono simili

$4xy,\ 4xy$ sono simili (addirittura uguali) — $2abx,\ 2abxy$ NON sono simili

Regola: **la somma algebrica di due o più monomi simili è un monomio simile a quelli dati,
che ha come coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.**

Ad es., $2a+3a=5a$ (*2 volte un numero, più 3 volte LO STESSO numero, dà 5 volte quel numero*)

Nell'eseguire una somma algebrica fra monomi, è **CALDAMENTE RACCOMANDATO di**
♥ **SOTTOLINEARE in modo diverso le "famigliole" di termini simili**:

❑ $x^3+\underline{3x^2}+\underline{\underline{5x}}+\underline{12x^2}+\underline{x^2}\underline{\underline{-7x}}=x^3+16x^2-2x$

❑ $\underline{-\frac{1}{6}ab}+\underline{\frac{1}{10}ab}\underline{\underline{-ab^2}}+\underline{\underline{\frac{1}{7}ab^2}}+\underline{ab}+\underline{\frac{1}{15}ab}=$

$=\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+1+\frac{1}{15}\right)ab+\left(-1+\frac{1}{7}\right)ab^2=$

$=\frac{-5+3+30+2}{30}ab-\frac{6}{7}ab^2=\frac{30}{30}ab-\frac{6}{7}ab^2=ab-\frac{6}{7}ab^2$

*Osserviamo che i risultati
delle due espressioni qui a fianco
non sono più ulteriormente semplificabili:*
***la somma algebrica fra monomi NON simili
non conduce ad un unico monomio,
può solo essere lasciata indicata così com'è.***

♥ Questo è importante!
Un'espressioncina come $2a+3b$
NON può assolutamente essere portata
sotto una forma ancora più semplice.

APPROFONDIMENTO

La regola per la somma algebrica di due o più monomi simili,
che abbiamo giustificato elementarmente in un caso particolare a coefficienti interi ($2a+3a=5a$),
richiede precisamente, per una sua giustificazione più generale, di pensare a quel procedimento, che è
l'inverso dell'applicazione della propr. distributiva, ed è chiamato "**raccoglimento a fattor comune**".

- Ad esempio, possiamo scrivere $2a+3a=(2+3)\cdot a=5a$
  dove il passaggio $2a+3a=(2+3)\cdot a$ è, appunto, un "raccoglimento a fattor comune".
- Altro esempio: $-\frac{1}{2}xy+\frac{3}{4}xy-2xy=\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-2\right)xy=\frac{-2+3-8}{4}xy=-\frac{7}{4}xy$

♥ RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE

**Data una somma algebrica i cui termini siano dei prodotti,
se c'è un fattore che è comune a tutti questi prodotti, esso potrà essere "raccolto", ossia:
potrà essere scritto fuori da una parentesi, al cui interno si metterà quella somma algebrica
la quale, rimoltiplicata per il numero scritto fuori, permette di riottenere l'espressione iniziale.
La somma algebrica che finisce fra parentesi sarà, evidentemente, ricavabile da quella iniziale,
privando ciascun prodotto del fattore raccolto (= dividendo ciascun prodotto per il fattore raccolto).**

Esempi:

$5\cdot7+5\cdot8+5\cdot9=5\cdot(7+8+9)=5\cdot24=120$ — $ab+ac+ad=a(b+c+d)$

$93-75+36-21=3\cdot(31-25+12-7)=3\cdot11=33$ — $35x-14y=7(5x-2y)$

$2^{12}-3\cdot2^{10}=2^{10}\cdot\left(2^2-3\right)=2^{10}\cdot1=1024$ — $12x^3y^2z-18x^5y=6x^3y\left(2yz-3x^2\right)$