POLINOMI

6. DEFINIZIONE DI POLINOMIO, GRADO DI UN POLINOMIO

Si dice "polinomio" la somma indicata di due o più monomi.

Esempi di polinomi sono:

$$5a+4b \qquad \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{6}x-1$$

I monomi che compongono un polinomio vengono chiamati i "termini" del polinomio stesso.

2 termini	binomio
3 termini	trinomio
4 termini	quadrinomio
5 termini	polinomio di 5 termini
…	…

Si dice "GRADO" DI UN POLINOMIO, IL MASSIMO FRA I GRADI DEI SUOI MONOMI
(ricorda che il *grado di un monomio* è la *somma dei gradi*, ossia degli esponenti, *delle sue lettere*).
Se tutti i termini di un polinomio hanno lo stesso grado, il polinomio si dice "omogeneo".

$\underbrace{-\frac{1}{5}a^3b^2c}_{3+2+1=6°\ grado} \quad \underbrace{+\frac{4}{7}ab^3c^3}_{1+3+3=7°\ grado} \quad \underbrace{-\frac{2}{3}b^4}_{4°\ grado}$	trinomio di 7° grado
x^2-5x+4	trinomio di 2° grado
$7a-2$	binomio di 1° grado (= lineare)
$a^5+2a^4b+3a^3b^2-a^2b^3-ab^4-b^5$	polinomio omogeneo di 6 termini, di 5° grado

7. OPERAZIONI CON POLINOMI

- **SOMMA E DIFFERENZA (SOMMA ALGEBRICA)**

$$(8x+2y-1)-(3x-y+7)+(-5x+3)=8x+2y-1\underbrace{-3x+y-7}_{\substack{\text{"−" davanti}\\ \text{a somma}\\ \text{algebrica}\\ \text{cambia}\\ \text{tutti i segni}}}\underbrace{-5x+3}_{\substack{\text{"+" davanti}\\ \text{a somma}\\ \text{algebrica}\\ \text{conferma}\\ \text{tutti i segni}}}=3y-5$$

- **PRODOTTO DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO E VICEVERSA**

Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma:

quando si deve moltiplicare una somma per un numero, è possibile, volendo, moltiplicare per quel numero ciascun addendo della somma, poi addizionare i prodotti parziali così ottenuti.

$$(9+4+7)\cdot 5=9\cdot 5+4\cdot 5+7\cdot 5=45+20+35=100$$
$$3\cdot(1+3+5+7)=3\cdot 1+3\cdot 3+3\cdot 5+3\cdot 7=3+9+15+21=48$$
$$\left(\frac{12}{5}+\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{10}{3}=\frac{12}{5}\cdot\frac{10}{3}+\frac{5}{2}\cdot\frac{10}{3}=8+\frac{25}{3}=\frac{49}{3}$$
$$3\cdot(-2+7-1)=3\cdot(-2)+3\cdot(+7)+3\cdot(-1)=-6+21-3=12$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\left(-3-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot(-3)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{10}-\frac{1}{4}=\frac{30+2-5}{20}=\frac{27}{20}$$
$$a\cdot(b+c+d+e)=ab+ac+ad+ae$$

$$\left(x^2+3x-5\right)\cdot x^3=x^5+3x^4-5x^3$$
$$2ab\left(a+b\right)=2a^2b+2ab^2$$
$$\left(4a^2x-\frac{1}{3}ax^2+\frac{15}{2}\right)\cdot\left(-\frac{12}{5}ax^2\right)=-\frac{48}{5}a^3x^3+\frac{4}{5}a^2x^4-18ax^2$$

PRODOTTO DI DUE POLINOMI

Proprietà distributiva generalizzata:

quando si deve moltiplicare una somma per un'altra somma, è possibile, volendo, moltiplicare ciascun addendo della prima somma per ciascun addendo della seconda, poi addizionare i prodotti parziali così ottenuti.

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}+3\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot 3=$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{3}{2}+\frac{4}{15}+1=\frac{12+45+8+30}{30}=\frac{95}{30}=\frac{19}{6}$$

$$(-2-3+4)\cdot(-5+3)=$$
$$=(-2)(-5)+(-2)(+3)+(-3)(-5)+(-3)(+3)+(+4)(-5)+(+4)(+3)=$$
$$=+10-6+15-9-20+12=+2$$

$$(a+b)\cdot(c+d+e)=ac+ad+ae+bc+bd+be$$

$$(x+y)(x-y+1)=x^2\cancel{-xy}+x\cancel{+xy}-y^2+y=$$
$$=x^2-y^2+x+y$$

$$\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}b^2\right)\cdot(2ab+1)=a^3b+\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}ab^3+\frac{1}{3}b^2$$

Il procedimento, chiamato in Inglese **FOIL** (vedi finestrella qui a fianco), è ben descritto, ad esempio, in QUESTO ⇨ sito.

In Inglese l'applicazione della "distributiva generalizzata" viene di norma denominata con la sigla **FOIL** (si pronuncia come si scrive).
FOIL = First, Outside, Inside, Last.

First: multiply the first term in each set of parenthesis
Outside: multiply the two terms on the outside
Inside: multiply both of the inside terms
Last: multiply the last term in each set of parenthesis
(da www.freemathhelp.com)

PRODOTTO DI UN MONOMIO PER DUE POLINOMI

$$\boxed{5a^2(2a+b)(3a-b)}=\begin{cases}(10a^3+5a^2b)(3a-b)=30a^4-10a^3b+15a^3b-5a^2b^2=30a^4+5a^3b-5a^2b^2\\ (15a^3-5a^2b)(2a+b)=30a^4+15a^3b-10a^3b-5a^2b^2=30a^4+5a^3b-5a^2b^2\\ \boxed{5a^2\left(6a^2-2ab+3ab-b^2\right)=5a^2\left(6a^2+ab-b^2\right)=30a^4+5a^3b-5a^2b^2}\end{cases}$$

♥ Delle tre possibili modalità, è **DECISAMENTE PREFERIBILE L'ULTIMA (moltiplicare innanzitutto i due polinomi, lasciando il monomio indicato)** perché conduce a situazioni di calcolo più comode

PRODOTTO DI TRE POLINOMI

$$\boxed{(2a-1)(3a-1)(a+1)}=\begin{cases}(2a-1)\left(3a^2+3a-a-1\right)=(2a-1)\left(3a^2+2a-1\right)=6a^3+4a^2-2a-3a^2-2a+1=\\ \qquad=6a^3+a^2-4a+1\\ (3a-1)\left(2a^2+2a-a-1\right)=(3a-1)\left(2a^2+a-1\right)=ecc.\\ (a+1)\left(6a^2-2a-3a+1\right)=(a+1)\left(6a^2-5a+1\right)=ecc.\end{cases}$$

PRODOTTO DI DUE POLINOMI, PRECEDUTO DAL SEGNO $-$

Osserviamo **innanzitutto che un segno "$-$" davanti ad un prodotto equivale ad un fattore -1,** perché

- "$-$" davanti ad un prodotto indicherebbe di eseguire il prodotto e poi cambiare di segno il risultato
- ma allora, evidentemente, sostituendo un fattore -1 al posto del "$-$" l'effetto sarà il medesimo

$$\boxed{-(a+2)(a-b-1)}=\begin{cases}\boxed{-\left(a^2-ab-a+2a-2b-2\right)}=-\left(a^2-ab+a-2b-2\right)=-a^2+ab-a+2b+2\\ (-a-2)(a-b-1)=-a^2+ab+a-2a+2b+2=-a^2+ab-a+2b+2\\ (a+2)(-a+b+1)=-a^2+ab+a-2a+2b+2=-a^2+ab-a+2b+2\end{cases}$$

♥ Delle tre possibili modalità, **è DECISAMENTE PREFERIBILE LA PRIMA (moltiplicare innanzitutto i due polinomi, lasciando il segno "$-$" indicato)** perché conduce a situazioni di calcolo più comode.

POTENZA DI UN POLINOMIO

- $\boxed{(a+b)^2} = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 \underline{+ab}\ \underline{+ab} + b^2 = \boxed{a^2+2ab+b^2}$

  da cui, per esempio:
  $$(5x^3+3x)^2 = (5x^3)^2 + 2\cdot 5x^3\cdot 3x + (3x)^2 = 25x^6+30x^4+9x^2$$
  $$(x-3)^2 = (x+(-3))^2 = x^2+2\cdot x\cdot(-3)+(-3)^2 = x^2-6x+9$$

- $\boxed{(a+b)^3} = (a+b)^2\cdot(a+b) = (a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b) =$
  $= a^3 \underline{+2a^2b}\ \underline{\underline{+ab^2}}\ \underline{+a^2b}\ \underline{\underline{+2ab^2}} + b^3 = \boxed{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

- $\boxed{(a+b)^4} = (a+b)^3\cdot(a+b) = \ldots = \boxed{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}$

- ...

- $\boxed{(a+b+c)^2} = (a+b+c)\cdot(a+b+c) = a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2 =$
  $= \boxed{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$

- ...

Gli esempi fatti mostrano che

per ELEVARE A POTENZA UN POLINOMIO
si deve ricorrere ad un PRODOTTO RIPETUTO,
oppure applicare FORMULE PARTICOLARI.

Di queste formule ci occuperemo in una sezione successiva
("**PRODOTTI NOTEVOLI**", ossia "prodotti degni di nota, rilevanti", a partire da pagina 122).

QUOZIENTE DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO

Proprietà distributiva del quoziente rispetto alla somma:
quando si deve dividere
una somma per un numero,
è possibile, volendo,
dividere per quel numero
ciascun addendo della somma,
poi addizionare
i quozienti parziali così ottenuti.

$$(15+10+35):5 = 15:5+10:5+35:5 = 3+2+7 = 12$$
$$\frac{15+10+35}{5} = \frac{15}{5}+\frac{10}{5}+\frac{35}{5} = 3+2+7 = 12$$
$$\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+2\right):(-2) = -\frac{3}{4}:(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right):(-2)+2:(-2) =$$
$$= \frac{3}{8}+\frac{1}{4}-1 = -\frac{3}{8}$$

Esempi:
$$(-6x^3+x^2y):x^2 = -6x^3:x^2+x^2y:x^2 = -6x+y$$
$$\left(\frac{1}{2}a^2+5ab-3b^2\right):(-3) = -\frac{1}{6}a^2-\frac{5}{3}ab+b^2$$

Potrà essere comodo in taluni casi trasformare in moltiplicazione, come nell'esempio che segue:
$$\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^2+x\right):\left(-\frac{4}{9}x\right) \overset{\text{NOTA}}{=} \left(\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^2+x\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}x^{-1}\right) =$$
$$= -\frac{3}{2}x^2+\frac{15}{8}x-\frac{9}{4}$$

NOTA
DIVIDERE per una lettera elevata ad esponente equivale a MOLTIPLICARE per quella stessa lettera con ESPONENTE CAMBIATO DI SEGNO!

Gli **ESERCIZI SULLE ESPRESSIONI CON POLINOMI** si trovano alle **pagine 118 e 119**