

C) IL TEOREMA DEL RESTO E LA “REGOLA DI RUFFINI”

Supponiamo di avere una divisione fra due polinomi (aventi, è ovvio, la stessa variabile, diciamo x) nella quale il polinomio divisore sia un binomio della forma $(x - k)$, essendo k un numero fissato.

Per fare un esempio, nella divisione $(2x^3 - 5x^2 - x + 6) : (x - 4)$
il divisore è appunto della forma $(x - k)$; in questo caso, ovviamente, $k = 4$.

Se dunque si ha una divisione di questo tipo, allora ...

- I) ... si può determinare il resto della divisione anche senza effettuare la divisione stessa, mediante il

♥ TEOREMA DEL RESTO:

“Il resto della divisione $P(x) : (x - k)$ è uguale a $P(k)$, cioè al numero che si ottiene sostituendo il numero k al posto di x nel polinomio dividendo, e poi svolgendo i calcoli”

OSSERVAZIONE

Quando il **divisore** è un **binomio di 1° grado** come $(x - k)$, allora il **resto**, essendo di **grado inferiore rispetto al divisore**, è obbligato ad essere di **grado zero**, quindi a non contenere più la variabile, riducendosi ad una **costante numerica**.

Ad esempio, considerando la divisione $(2x^3 - 5x^2 - x + 6) : (x - 4)$
posso subito dire che il resto sarà $P(4) = 2 \cdot 4^3 - 5 \cdot 4^2 - 4 + 6 = 128 - 80 - 4 + 6 = 50$

- II) ... e in più la divisione si può eseguire, in alternativa al solito metodo di pag. 115 (il quale continua, volendo, a essere pienamente valido), tramite un algoritmo più veloce chiamato **REGOLA DI RUFFINI** e illustrato qui di seguito, sempre sull'esempio di prima:

$$(2x^3 - 5x^2 - x + 6) : (x - 4) \rightarrow \begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & -1 & 6 \\ & & 8 & 12 & 44 \\ \hline & 2 & 3 & 11 & 50 \end{array} \quad \text{DA CUI } Q(x) = 2x^2 + 3x + 11; \quad R = 50$$

Spieghiamo lo schema.

- Sulla prima riga in alto, si scrivono i coefficienti del polinomio dividendo;
- si traccia una linea verticale davanti al 1° coefficiente, ed un'altra davanti all'ultimo coefficiente;
- si traccia, sotto la riga dei coefficienti ma un poco distanziata, una linea orizzontale;
- nell'angolino a sinistra in alto, si scrive il “ k ” (che nel nostro esempio vale 4)

Così facendo si ottiene $\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & -1 & 6 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$... e a questo punto si incomincia a “lavorare”:

sulla riga più in basso, il calcolo fornirà i coefficienti del polinomio quoziente, seguiti (nell'angolo in basso a destra) dal resto della divisione.

Ma come avviene questo calcolo? Semplice:

- si “abbassa” il 1° coefficiente, che è 2
- si **moltiplica** $2 \cdot 4$ e si scrive il risultato, 8, sotto al 2° coeff.
- si **somma** algebricamente, in colonna: $-5 + 8 = 3$
- si **moltiplica** $3 \cdot 4$ e si scrive il risultato, 12, sotto al 3° coeff.
- si **somma** algebricamente, in colonna: $-1 + 12 = 11$
- si **moltiplica** $11 \cdot 4$ scrivendo il risultato, 44, sotto al 4° coeff.
- si **somma** algebricamente, in colonna: $6 + 44 = 50$

Così il procedimento è terminato. Ora:

- ♪ il polinomio quoziente ha grado inferiore di 1 unità rispetto al polinomio dividendo (basti pensare che se si svolgesse la divisione con il “vecchio” procedimento, il primo calcolo sarebbe $2x^3 : x = 2x^2$) quindi, essendo i suoi coefficienti 2 3 11, si avrà $Q(x) = 2x^2 + 3x + 11$
- ♪ il resto, come si diceva, compare nella parte bassa dell'angolino di destra ed è, come d'altronde si era già previsto tramite il Teorema del Resto, $R = 50$.

Controlla tu stesso che effettuando la divisione col “vecchio” algoritmo, si otterrebbero lo stesso quoziente e lo stesso resto.

$$\begin{array}{l} \text{e)} \\ \begin{array}{r|rrr|r} 4 & 2 & -5 & -1 & 6 \\ & & 8 & & \\ \hline & 2 & 3 & & \end{array} \\ \text{f)} \\ \begin{array}{r|rrr|r} 4 & 2 & -5 & -1 & 6 \\ & & 8 & & \\ \hline & 2 & 3 & & \end{array} \\ \text{g)} \\ \begin{array}{r|rrr|r} 4 & 2 & -5 & -1 & 6 \\ & & 8 & & \\ \hline & 2 & 3 & & \end{array} \\ \text{h)} \\ \begin{array}{r|rrr|r} 4 & 2 & -5 & -1 & 6 \\ & & 8 & 12 & \\ \hline & 2 & 3 & 11 & \end{array} \\ \text{i)} \\ \begin{array}{r|rrr|r} 4 & 2 & -5 & -1 & 6 \\ & & 8 & 12 & \\ \hline & 2 & 3 & 11 & \end{array} \\ \text{l)} \\ \begin{array}{r|rrr|r} 4 & 2 & -5 & -1 & 6 \\ & & 8 & 12 & 44 \\ \hline & 2 & 3 & 11 & 50 \end{array} \\ \text{m)} \\ \begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & -1 & 6 \\ & & 8 & 12 & 44 \\ \hline & 2 & 3 & 11 & 50 \end{array} \end{array}$$

- Vediamo ora quest'altro esempio, interessante sotto diversi aspetti.

$$(a^4 - 4a^2 - 3a - 7) : (a + 2)$$

C'è la lettera a al posto della lettera x , e fin qui niente di speciale;

inoltre, il polinomio dividendo è "incompleto", in quanto manca il termine di 3° grado; ... beh, non importa, faremo conto che il termine di 3° grado abbia coefficiente 0.

Ma soprattutto, si osserva che il divisore è della forma

lettera + un numero

anziché

lettera - un numero

e questa sì che è una novità di rilievo!

Dobbiamo domandarci:

sarà possibile anche in questo caso applicare il Teorema del Resto e la Regola di Ruffini?

La risposta è AFFERMATIVA, per il fatto che

♥ **il binomio $a + 2$ si può scrivere come $a - (-2)$ e quindi anche in questo caso si può ritenere di avere un binomio della forma (*variabile* - k); basta pensare che il valore di k sia, questa volta, -2 !!!**

$$a + 2 = a - (-2) = a - k \quad (\text{con } k = -2)$$

Dunque, procediamo.

Calcolo preliminare del resto col Teorema del Resto:

$$R = P(k) = P(-2) = (-2)^4 - 4(-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 7 = 16 - 16 + 6 - 7 = -1$$

Determinazione del quoziente tramite la Regola di Ruffini:

-2	1	0	-4	-3	-7	$Q(a) = a^3 - 2a^2 - 3;$	Ecco fatto!	
		-2	4	0	6			$R = -1$
	1	-2	0	-3	-1			

- Un ultimo esempio:

$$(x^3 - 1) : (x - 1)$$

$$R = P(1) = 1^3 - 1 = 0$$

1	0	0	-1
1		1	1
	1	1	0

$$Q(x) = x^2 + x + 1$$

$$R = 0$$

Quando si divide un polinomio per un altro polinomio e si vede che il resto della divisione è zero, si dice che il primo polinomio è "divisibile" per il secondo.

In matematica, l'aggettivo "divisibile" è sempre utilizzato col significato di "divisibile esattamente, cioè con resto 0".

Ma allora possiamo affermare che il Teorema del Resto ci fornisce, in un contesto di polinomi, un vero e proprio "CRITERIO DI DIVISIBILITÀ":

"un polinomio $P(x)$ è divisibile per un binomio della forma $(x - k)$ se e soltanto se $P(k) = 0$ "

E veniamo, per concludere "in bellezza", alla

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEL RESTO

Supponiamo di avere la divisione

$$P(x) : (x - k),$$

e indichiamo

- con $Q(x)$ il quoziente della divisione stessa,
- e con R il resto.

Allora varrà l'**identità** (NOTA)

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - k) + R$$

Se adesso noi in questa identità sostituiamo k al posto di x (= assegniamo a x il valore k) avremo

$$P(k) = Q(k) \cdot (k - k) + R = Q(k) \cdot 0 + R = 0 + R = R \quad \text{C.V.D.}$$

NOTA

Come sappiamo, per "identità" si intende un'uguaglianza letterale che è sempre vera, per qualsiasi valore "ammissibile" delle lettere in gioco. Ad esempio,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

è un'identità.

Generalmente il termine "identità" è contrapposto a "equazione".

Gli **ESERCIZI** sul Teorema del Resto e sulla Regola di Ruffini si trovano a **pagina 121**.