PRODOTTI NOTEVOLI

12. QUADRATO DI UN BINOMIO

$\boxed{(a+b)^2} = (a+b)(a+b) = a^2 \underline{+ab} \underline{+ab} + b^2 = \boxed{a^2 + 2ab + b^2}$

Abbiamo così ricavato la formula

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

che si può esprimere a parole nel modo seguente.

Il **quadrato di un binomio** si esegue facendo
- il **quadrato del primo** termine;
- 2 volte il primo termine $\times$ il secondo termine (= il **doppio prodotto del primo per il secondo**)
- il **quadrato del secondo** termine

Esempi di applicazione della formula:

a) $(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$

b) $\underbrace{(a-6x)^2}_{(a+(-6x))^2} = a^2 + 2\cdot a\cdot(-6x) + (-6x)^2 = a^2 - 12ax + 36x^2$

♥ Ricordare che la formula va applicata mettendo (ovviamente)
al posto di "*a*" il primo termine del binomio dato, e al posto di "*b*" il secondo termine, e
tenendo soprattutto presente che **ciascun termine deve comprendere anche il segno che lo precede!**

♫ **I passaggi intermedi si possono fare a mente;** un **buon consiglio** è tuttavia quello di **indicare il doppio prodotto, prima di svolgerlo, nei casi in cui questo non è semplicissimo**.

c) $\left(-\frac{1}{4}x + 3y\right)^2 = \left(\underbrace{\boxed{-\frac{1}{4}x}}_{1°\ termine}\ \underbrace{\boxed{+3y}}_{2°\ termine}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}x\right)^2 + \cancel{2}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{4}_2}x\right)\cdot 3y + (3y)^2 = \frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{2}xy + 9y^2$

d) $\left(\boxed{-t}\boxed{-3}\right)^2 = (-t)^2 + 2\cdot(-t)\cdot(-3) + (-3)^2 = t^2 + 6t + 9$

e) $(3x^2+7x)^2 = 9x^4 + 42x^3 + 49x^2$

f) $(2a-b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$
- **Verifica** per $a=5,\ b=3$

  $1^\circ\ membro = (2a-b)^2 = (2\cdot 5-3)^2 = (10-3)^2 = 7^2 = \boxed{49}$

  $2^\circ\ membro = 4a^2 - 4ab + b^2 = 4\cdot 5^2 - 4\cdot 5\cdot 3 + 3^2 = 4\cdot 25 - 60 + 9 = 100 - 60 + 9 = \boxed{49}$
- **Verifica** svolgendo il calcolo letterale in un altro modo:

  $(2a-b)^2 = (2a-b)(2a-b) = 4a^2 - 2ab - 2ab + b^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$

g) $\left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{5}{6}x^2y\right)^2 = \frac{9}{16}x^6 + \cancel{2}\cdot\left(-\frac{\cancel{3}}{4}x^3\right)\cdot\frac{5}{\cancel{6}_{\cancel{2}}}x^2y + \frac{25}{36}x^4y^2 = \frac{9}{16}x^6 - \frac{5}{4}x^5y + \frac{25}{36}x^4y^2$

h) $(-5-x^2)^2 = 25 + 10x^2 + x^4$

i) Un esempio di **espressione**:

$(x-1)(x-6) + 3(x-1)^2 - (2x-3)^2 = x^2 \underline{-6x}\ \underline{-x} + 6 + 3(x^2 - 2x + 1) - (4x^2 - 12x + 9) =$

$= \cancel{x^2}\ \underline{-7x}\ \cancel{+6}\ \cancel{+3x^2}\ \underline{-6x}\ \cancel{+3}\ \cancel{-4x^2}\ \underline{+12x}\ \cancel{-9} = -x$

- Lo **schema qui a fianco** rappresenta le varie **combinazioni di segno nel binomio di partenza e nel risultato**

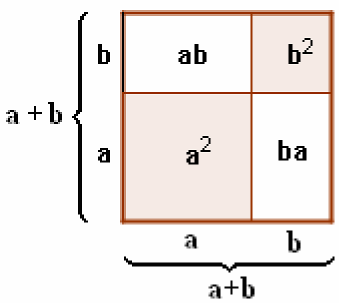
$$\begin{array}{lcccc} (+\ \ +)^2 & = & + & + & + \\ (+\ \ -)^2 & = & + & - & + \\ (-\ \ +)^2 & = & + & - & + \\ (-\ \ -)^2 & = & + & + & + \end{array}$$

- **I seguenti due esempi sono puramente numerici (= senza lettere)**, e mostrano come il quadrato di un binomio possa, in taluni casi, costituire una tecnica efficace di **calcolo mentale**. Tutti i passaggi intermedi, infatti, possono essere svolti a mente, senza scrivere nulla!

  l) $53^2 = (50+3)^2 = 50^2 + 2\cdot 50\cdot 3 + 3^2 = 2500 + 300 + 9 = 2809$

  m) $29^2 = (30-1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841$

- La **figura qui a destra** costituisce una **visualizzazione-giustificazione geometrica della formula per il quadrato di un binomio.**
  Essa mostra un **quadrato il cui lato misura $a+b$**.
  L'area di questo **quadrato** può essere calcolata in **2 modi diversi**.
  I) Pensando direttamente all'area totale si ottiene $S = (a+b)^2$
  II) … e sommando invece le 4 aree parziali si ha $S = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Il limite di questa giustificazione sta nel fatto che si riferisce solo ai casi in cui a, b assumano valori non negativi.

Poiché però *i due calcoli devono portare al medesimo risultato*, ecco che salta fuori la nostra formula.

- Gli **esempi che seguono** presentano **esponenti letterali:**

  n) $\left(3a^k-2\right)^2 = \left(3a^k\right)^2 + 2\cdot 3a^k\cdot(-2) + (-2)^2 = 9a^{2k} - 12a^k + 4$

  o) $\left(a^x+a^y\right)^2 = \left(a^x\right)^2 + 2\cdot a^x\cdot a^y + \left(a^y\right)^2 = a^{2x} + 2a^{x+y} + a^{2y}$

  p) $\left(x^{a+b}+x^{a-b}\right)^2 = \left(x^{a+b}\right)^2 + 2\cdot x^{a+b}\cdot x^{a-b} + \left(x^{a-b}\right)^2 = x^{2a+2b} + 2x^{2a} + x^{2a-2b}$

ESERCIZI

1) $(x+1)^2$ 2) $(x+2)^2$ 3) $(x+3)^2$ *con verifica per* $x=1$

4) $(x-4)^2$ 5) $(x-5)^2$ 6) $(x-6)^2$ *con verifica per* $x=8$

7) $(4w-7)^2$ 8) $(3x-2y)^2$ 9) $(-t+8)^2$ *con due verifiche: per* $t=3$ *e per* $t=-2$

10) $\left(\frac{11}{12}x^2+\frac{5}{2}x\right)^2$ 11) $\left(-\frac{1}{5}e^5+\frac{1}{3}e^3\right)^2$ 12) $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$ *con verifica per* $a=1/2$

13) $(2k-9)^2$ 14) $\left(1-x^2\right)^2$ 15) $(-abc-1)^2$

16) *Calcolo mentale:* $61^2 = (60+1)^2 = \ldots$ 17) *Calcolo mentale:* $59^2 = (60-1)^2 = \ldots$ 18) *Calcolo mentale:* $999^2 = (1000-1)^2 = \ldots$

19) *Ricordando che* $24^2 = 576$, *calcola a mente* $2^{20} = \left(2^{10}\right)^2 = 1024^2$ (*il "Mega"* ⇨ *dell'Informatica*)

20) $\left(4s^n+3s\right)^2$ 21) $\left(a^{m+1}+a^{m+2}\right)^2$ 22) $\left(5x^n-4x^p\right)^2$

RISULTATI

1) x^2+2x+1 2) x^2+4x+4 3) x^2+6x+9

4) $x^2-8x+16$ 5) $x^2-10x+25$ 6) $x^2-12x+36$

7) $16w^2-56w+49$ 8) $9x^2-12xy+4y^2$ 9) $t^2-16t+64$

10) $\frac{121}{144}x^4+\frac{55}{12}x^3+\frac{25}{4}x^2$ 11) $\frac{1}{25}e^{10}-\frac{2}{15}e^8+\frac{1}{9}e^6$ 12) $a^2+a+\frac{1}{4}$

13) $4k^2-36k+81$ 14) $1-2x^2+x^4$ 15) $a^2b^2c^2+2abc+1$

16) 3721 17) 3481 18) 998001 19) 1.048.576

20) $16s^{2n}+24s^{n+1}+9s^2$ 21) $a^{2m+2}+2a^{2m+3}+a^{2m+4}$ 22) $25x^{2n}-40x^{n+p}+16x^{2p}$